



Mémoire de fin d'étude

Pour l'obtention du diplôme d'Ingénieur

Filière : Automatique
Spécialité : Automatique

Présenté par : BENSEGHIR Soheyb Bilal
SAIM Yacer

Thème

***Synthèse des commandes à convergence en
temps fini pour le contrôle en temps réel d'un
système sous-actionné : application au
pendule inversé rotatif***

Soutenu publiquement, le 23/06/2026, devant le jury composé de :

Mme OUHOUD Amina	Maître de conférences classe A	ESSA. Tlemcen	Président
M ARICHI Fayssal	Maître de conférences classe A	ESSA. Tlemcen	Directeur de mémoire
M MOKHTARI Mohamed Rida	Maître de conférences classe A	ESSA. Tlemcen	Co-Directeur de mémoire
Mme GHOUALI Amel	Maître de conférences classe A	ESSA. Tlemcen	Examineur 1
M MESSIRDI Mohammed	Maître-assistant classe A	Univ. Mascara	Examineur 2

Année universitaire : 2025 /2026

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

Remerciements

Nous remercions Allah de nous avoir donné la patience et le courage pour accomplir ce travail.

Nous exprimons également notre profonde gratitude à notre encadrant, Monsieur **Fayssal ARICHI**, ainsi qu'à notre co-encadrant, Monsieur **Mohammed Rida MOKHTARI**. Leur soutien constant, leur patience, leur disponibilité et leurs conseils éclairés ont nourri notre réflexion tout au long de cette année académique et nous ont permis d'apporter des améliorations substantielles à ce mémoire.

Notre reconnaissance s'adresse également aux membres du jury, à savoir Madame **OUHOUD Amina**, Madame **GHOUALI Amel** et Monsieur **MESSIRDI Mohammed**, pour l'attention soutenue qu'ils ont portée à ce travail.

Nous témoignons aussi toute notre gratitude envers tout le personnel de l'**École Supérieure en Sciences Appliquées de Tlemcen** qui veille à assurer une formation de qualité aux étudiants.

Pour terminer, nous tenons à remercier toute personne ayant contribué de près ou de loin à la réalisation de ce travail.

Dédicace

Je dédie humblement ce travail à mes très chers parents, qui ont pleinement partagé les défis de ce parcours et dont le soutien moral inestimable ainsi que les encouragements constants m'ont été d'une aide précieuse tout au long de cette aventure.

Je dédie également ce travail à mon cher frère Mohammed, qui a toujours été présent à mes côtés. Ton soutien indéfectible et ton affection sincère m'ont donné la force de persévérer jusqu'au bout.

Je dédie humblement ce travail à mes très chers parents, qui ont pleinement partagé les défis de ce parcours et dont le soutien moral inestimable ainsi que les encouragements constants m'ont été d'une aide précieuse tout au long de cette aventure.

Je dédie également ce travail à mon cher frère Alaa et à ma chère grand-mère ainsi qu'à mes trois chères sœurs qui ont toujours été présents à mes côtés. Leur soutien indéfectible et leur affection sincère m'ont donné la force de persévérer jusqu'au bout.

Enfin, je dédie ce travail à mes chers amis, les *Lwaghech*, pour tous les moments partagés, leur bonne humeur communicative et leur soutien tout au long de ce parcours. indéfectible et votre affection sincère m'ont donné la force de persévérer jusqu'au bout.

الملخص

تهدف هذه الدراسة إلى تصميم استراتيجيات تحكم لا خطية قوية لنظام البندول المقلوب الدوراني هذه الدراسة إلى تصميم استراتيجيات تحكم لا خطية قوية لنظام البندول المقلوب الدوراني، باستخدام النموذج التجريبي كوانسر كيوب سيرفو ٢، المتوفر في المدرسة العليا في العلوم التطبيقية بتلمسان. يتم تطبيق ثلاثة مناهج للتحكم اللاخطي بالاعتماد على النموذج الرياضي اللاخطي للنظام: التحكم بالوضع الانزلاقي (توا)، وخوارزمية السوبر تويستينغ (ست)، والنسخة المعدلة الأولى من خوارزمية السوبر تويستينغ ذات التقارب في زمن منتهٍ (ستم.١). يتم عرض النتائج التجريبية ومقارنتها من حيث زمن الاستقرار، والمتانة في مواجهة الاضطرابات الخارجية، ومستوى ظاهرة الاهتزاز العالي التردد، وذلك لإبراز مزايا كل منهج في التحكم بنظام البندول المقلوب الدوراني.

الكلمات المفتاحية ~ : نظام لاخطي، بندول مقلوب دوراني، نموذج رياضي، تحكم بالوضع الانزلاقي (توا)، خوارزمية السوبر تويستينغ (ست)، تقارب في زمن منتهٍ، نقطة توازن غير مستقرة.

Abstract

The objective of this study is to design robust nonlinear control strategies for the rotary inverted pendulum system, using the QUANSER QUBE-Servo 2 experimental platform. Three nonlinear control approaches are applied by exploiting the nonlinear mathematical model of the system : the sliding mode control (SMC), the super-twisting algorithm (STA), and the first modified version of the finite-time convergence super-twisting algorithm (MSTA₁). The experimental results obtained are presented and compared in terms of stabilization time, robustness against external disturbances, and chattering level, in order to highlight the advantages of each approach for the control of the rotary inverted pendulum.

Keywords : Nonlinear system, Rotary inverted pendulum, Mathematical modeling, Sliding mode control, Super-twisting algorithm, Finite-time convergence, Unstable equilibrium point.

Résumé

L'objectif de cette étude est de concevoir des stratégies de commande non linéaires robustes pour le système de pendule inversé rotatif, en utilisant la maquette du QUANSER QUBE-Servo 2. Trois approches de commande non linéaires sont appliquées en exploitant le modèle mathématique non linéaire du système : la commande par mode glissant (SMC), l'algorithme super-twisting (AST) et la première version modifiée de l'algorithme super-twisting à convergence en temps fini (ASTM₁). Les résultats expérimentaux obtenus sont présentés et comparés en termes de temps de stabilisation, de robustesse face aux perturbations externes et de niveau de *chattering*, afin de mettre en évidence les avantages de chaque approche pour le contrôle du pendule inversé rotatif.

Mots clés : Système non linéaire, Pendule inversé rotatif, Modélisation mathématique, Commande par mode glissant, Algorithme super-twisting, Convergence en temps fini, Point d'équilibre instable.

Table des matières

Résumé	iv
List of Figures	xi
List of Tables	xiii
Abbreviations	xiv
Introduction	1
I PRÉSENTATION GÉNÉRALE DES SYSTÈMES PENDULAIRES	3
I.1 Introduction	3
I.2 Types de pendules	3
I.2.1 Pendule simple	3
I.2.2 Pendule cycloïdal	4
I.2.3 Pendule à torsion	4
I.2.4 Pendule inversé	5
I.3 Applications concrètes du pendule inversé	8
I.4 Conclusion	10
II Modélisation du pendule inversé rotatif	11

II.1	Introduction	11
II.2	Présentation du système	11
II.2.1	Pendule inversé rotatif	11
II.2.2	Plateforme expérimentale Quanser QUBE-Servo 2	12
II.3	Modélisation par le formalisme de Lagrange	13
II.3.1	Définition des coordonnées généralisées	13
II.3.2	Position du centre de masse du pendule	13
II.3.3	Énergies cinétique et potentielle	14
II.3.4	Lagrangien et équations d'Euler-Lagrange	15
II.4	Équations du mouvement non linéaires	15
II.4.1	Développement des équations	15
II.4.2	Résolution par la règle de Cramer	16
II.5	Représentation d'état non linéaire	17
II.5.1	Choix du vecteur d'état	17
II.5.2	Équations d'état	17
II.6	Conclusion	19
III	THÉORIES DES COMMANDES NON LINÉAIRES	20
	Introduction	20
III.1	Généralités sur les commandes non linéaires	20
III.1.1	Fonction de Lyapunov	21
III.2	Commande par mode glissant	21
III.2.1	Historique	21
III.2.2	Conception de la commande	22
III.2.3	Phénomène de Chattering	23
III.3	Commande Super-Twisting	23

III.3.1	Structure de la commande	24
III.3.2	Commande Super-Twisting Modifiée	24
III.4	Commande en temps fini	24
III.4.1	Définitions et lemmes	25
III.4.1.1	Définition	25
III.4.1.2	Lemmes	25
III.4.2	Première version modifiée de l'algorithme de Super-Twisting($ASTM_1$) .	26
III.4.2.1	Position du problème	26
III.4.2.2	Synthèse de la loi de commande	26
III.4.3	Deuxième version modifiée de l'algorithme de Super-Twisting ($ASTM_2$)	27
III.5	Conclusion	28
IV	Application des commandes non linéaires sur le pendule inversé rotatif	29
IV.1	Introduction	29
IV.2	Application de la commande par mode glissant (SMC) sur le PIR	29
IV.2.1	Paramètres de SMC	30
IV.2.2	Résultats expérimentaux	30
IV.3	Application de la commande super-twisting (AST) sur le PIR	33
IV.3.1	Paramètres de AST	33
IV.3.2	Résultats expérimentaux	33
IV.4	Application de la commande ASTM en temps fini sur le PIR	35
IV.4.1	Paramètres de ASTM en temps fini	36
IV.4.2	Résultats expérimentaux	36
IV.5	Test de robustesse sur les trois commandes	38
IV.6	Conclusion	39

Table des figures

I.1	Pendule simple.	4
I.2	Représentation d'un pendule cycloïdal [1].	4
I.3	Pendule à torsion [12].	5
I.4	Pendule inversé classique.	6
I.5	Double pendule inversé en cascade.	6
I.6	Double pendule inversé monté en parallèle [3].	7
I.7	Pendule sur deux roues [23]	7
I.8	Pendule inversé rotatif [22]	8
I.9	Honda Riding Assist, modèle 2019 [11].	8
I.10	IBOT en configuration deux roues [4].	9
I.11	Segway [23]	9
I.12	Hoverboard [13]	9
II.1	Plateforme expérimentale Quanser QUBE-Servo 2 avec module pendule rotatif	12
II.2	Schéma cinématique du système bras-pendule [6]	14
III.1	Principe du mode de glissement [2].	23
IV.1	L'évolution de l'angle du pendule du PIR – commande SMC	31

IV.2 L'évolution de l'angle du bras du PIR – commande SMC	31
IV.3 L'évolution de la commande par mode glissant	32
IV.4 L'évolution de l'angle du pendule du PIR – commande AST	33
IV.5 L'évolution de l'angle du bras du PIR – commande AST	34
IV.6 L'évolution de la commande super-twisting	34
IV.7 L'évolution de l'angle du pendule du PIR – commande ASTM en temps fini . .	36
IV.8 L'évolution de l'angle du bras du PIR – commande ASTM en temps fini	36
IV.9 L'évolution de la commande ASTM en temps fini	37
IV.10 Évolution de l'angle du pendule en présence de perturbations externes	38

Liste des tableaux

II.1 Paramètres physiques du QUBE-Servo 2 avec pendule rotatif	13
IV.1 Paramètres de la commande SMC	30
IV.2 Paramètres de la commande STW	33
IV.3 Paramètres de la commande ASTM en temps fini	36

Abbreviations

Acronyme	Signification
ESSAT	École Supérieure en Sciences Appliquées de Tlemcen
PIR	Pendule Inversé Rotatif
SMC	Sliding Mode Control (Commande par Mode Glissant)
AST	Algorithme Super-Twisting
ASTM	Algorithme Super-Twisting Modifié
ASTM ₁	Première version modifiée de l'algorithme Super-Twisting
ASTM ₂	Deuxième version modifiée de l'algorithme Super-Twisting
PWM	Pulse Width Modulation (Modulation de Largeur d'Impulsion)
CC	Courant Continu
CCW	Counter-Clockwise (Sens Anti-Horaire)

Introduction

Les systèmes à deux roues auto-équilibrés, tels que les Segways, les robots de livraison autonomes ou encore diverses plateformes mobiles, sont devenus omniprésents dans notre environnement quotidien. Leur fonctionnement repose sur un principe mécanique fondamental : celui du pendule inversé. Ce modèle constitue en effet le socle théorique sur lequel s'appuie la conception de nombreux systèmes robotiques complexes nécessitant un équilibre dynamique permanent.

Dans ce contexte, le présent travail s'intéresse à une variante particulière de ce système, à savoir le pendule inversé rotatif (PIR), mis en œuvre sur la maquette expérimentale *QUANSER QUBE-Servo 2* disponible au sein de notre établissement ESSAT. L'objectif poursuivi est de concevoir et d'évaluer des stratégies de commande non linéaires adaptées à la stabilisation et au contrôle de ce système.

Le premier chapitre s'attache à présenter une vue d'ensemble des pendules, en décrivant leurs types et en se focalisant sur le pendule inversé en particulier. Nous aborderons les différentes variantes de pendule inversé et mettrons en évidence leurs domaines d'application spécifiques.

Le deuxième chapitre sera consacré à la modélisation mathématique du pendule inversé rotatif. Nous débuterons par une description physique ainsi que les paramètres physiques qui le caractérisent. Par la suite, nous établirons les équations du mouvement du système en appliquant le formalisme de Lagrange, qui permet de déduire de manière rigoureuse la dynamique couplée du bras rotatif et du pendule.

Le troisième chapitre sera dédié à la théorie des commandes non linéaires robustes appliquées au pendule inversé rotatif. Nous présenterons tout d'abord la commande par mode glissant (SMC), reconnue pour sa robustesse mais souffrant du phénomène de *chattering*. Nous introduirons ensuite l'algorithme super-twisting (AST) et sa version modifiée (ASTM), qui re-

médient à cet inconvénient en générant une loi de commande continue. Enfin, nous aborderons la notion de convergence en temps fini à travers deux versions modifiées de l'algorithme super-twisting, $ASTM_1$ et $ASTM_2$, garantissant une stabilisation en un temps fini strictement borné, indépendamment des conditions initiales.

Dans le quatrième chapitre, nous procéderons à l'application expérimentale des trois commandes mentionnées précédemment sur le pendule inversé rotatif QUANSER QUBE-Servo 2. Nous tiendrons compte du modèle mathématique réel non linéaire du système afin d'effectuer ces applications. Les résultats expérimentaux obtenus seront présentés et comparés, mettant en évidence les performances, le temps de stabilisation, la robustesse face aux perturbations externes et le niveau de *chattering* de chacune des trois approches.

L'ensemble de cette étude vise à approfondir notre compréhension des principes de commande des pendules inversés rotatifs et à développer des stratégies de contrôle non linéaires efficaces pour ce type de système. Par cette exploration, nous espérons contribuer à l'avancement des connaissances dans le domaine de l'automatique et à l'amélioration des performances des pendules inversés rotatifs dans des applications pratiques telles que les robots mobiles et les systèmes d'équilibrage autonomes.

PRÉSENTATION GÉNÉRALE DES SYSTÈMES PENDULAIRES

I.1 Introduction

Ce chapitre propose un tour d'horizon des différentes catégories de pendules, en mettant l'accent sur les versions inversées. Nous examinerons ensuite plusieurs dispositifs réels dont le fonctionnement s'inspire du principe du pendule inversé.

I.2 Types de pendules

I.2.1 Pendule simple

Une masse ponctuelle fixée à l'extrémité d'un fil ou d'une tige légère et inextensible constitue ce système. Lorsqu'on l'écarte de sa position de repos avant de le libérer, il se met à osciller sous l'effet de la gravité. Si la masse suspendue n'est plus négligeable ou si la tige possède une masse non nulle, il devient nécessaire de prendre en compte le moment d'inertie global de l'ensemble. On parle alors de pendule pesant ou pendule composé.

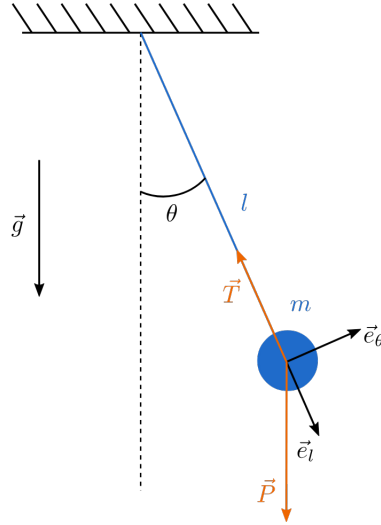


FIGURE I.1 – Pendule simple.

I.2.2 Pendule cycloïdal

Ce type de pendule présente la particularité d’être rigoureusement isochrone. Une masse suspendue à un fil est contrainte de se déplacer le long d’une courbe cycloïdale. Pour ce faire, le fil est guidé à son point d’attache par deux portions de cycloïde, exploitant une propriété mathématique remarquable : cette courbe est sa propre développée.

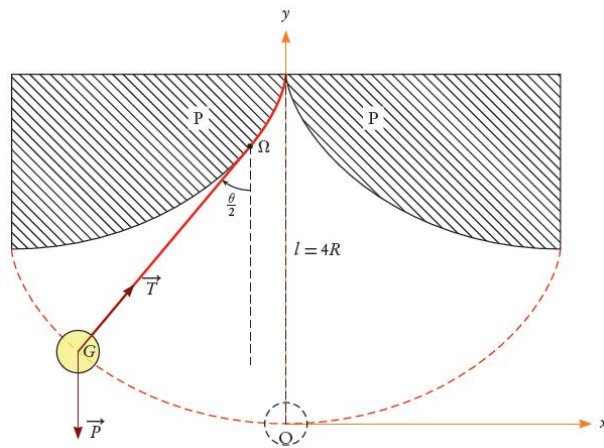


FIGURE I.2 – Représentation d’un pendule cycloïdal [1].

I.2.3 Pendule à torsion

Une barre horizontale suspendue à un fil métallique vertical constitue ce dispositif. Les oscillations s’effectuent dans le plan horizontal sous l’effet du couple de rappel généré par la

torsion du fil, qui tend à ramener l'ensemble vers sa position d'équilibre. Ce système se comporte comme un oscillateur harmonique.

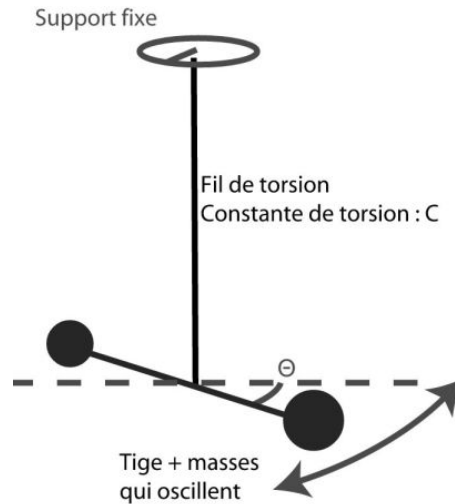


FIGURE I.3 – Pendule à torsion [12].

I.2.4 Pendule inversé

Avant d'approfondir l'étude des pendules inversés, il convient de définir précisément cette famille de systèmes. Il s'agit d'une tige placée dans une position d'équilibre instable, c'est-à-dire verticale à 180 degrés, sur une base pouvant être fixe ou mobile. La dynamique fortement non linéaire et instable de ce dispositif en a fait un cas d'étude privilégié au sein de la communauté des automaticiens. Cette popularité explique la diversité des configurations et des formes de pendules inversés que l'on rencontre.

Parmi les déclinaisons existantes, on peut citer :

- a- Pendule inversé classique :** Ce système mécanique associe un chariot de masse M se déplaçant horizontalement sur un rail, supportant une tige de masse m pouvant pivoter librement autour d'une articulation comme présenter dans la Fig. la Fig. I.4. L'application d'une force $f(t)$ entraîne le mouvement du chariot et l'inclinaison $\theta(t)$ du pendule par rapport à la verticale. Il s'agit d'un système sous-actionné possédant deux degrés de liberté mais un seul actionneur. L'objectif du contrôle consiste à ramener le pendule depuis une position initiale quelconque vers sa position d'équilibre instable (haute), puis à l'y maintenir.

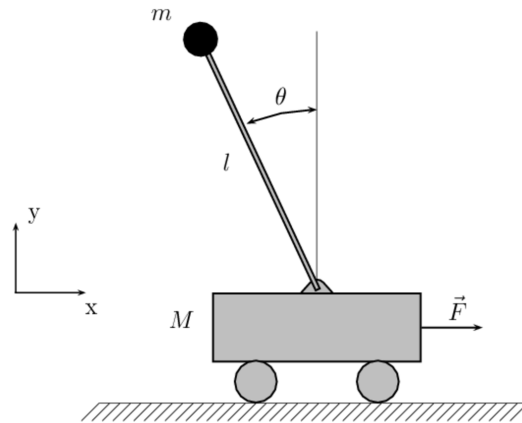


FIGURE I.4 – Pendule inversé classique.

b- Double pendule inversé : Ce type se décline selon deux architectures distinctes :

- *Configuration en cascade* : Le pendule inversé double repose sur le même principe que le pendule simple. La principale différence réside dans le fait qu’il est constitué de deux tiges articulées en rotation libre. La première tige pivote autour de l’articulation située à la base avec un angle $\theta_1(t)$, tandis que la seconde pivote autour de l’articulation reliant les deux tiges avec un angle $\theta_2(t)$, comme illustré à la Fig. I.5. L’objectif de la commande est de stabiliser simultanément les deux tiges en position verticale et de les maintenir autour de ce point d’équilibre instable.

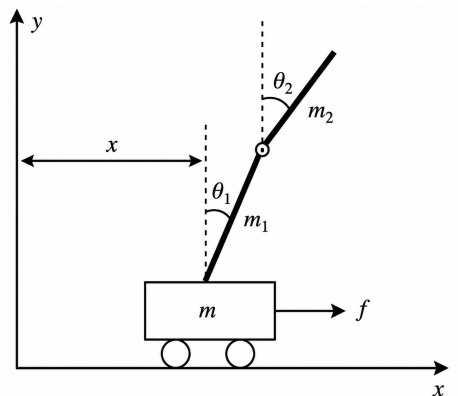


FIGURE I.5 – Double pendule inversé en cascade.

- *Configuration en parallèle* : Le chariot porte ici deux tiges indépendantes : une tige L de longueur l_L et une tige B de longueur l_B , toutes deux libres en rotation. Le déplacement $x(t)$ du chariot produit une inclinaison θ_L pour la première tige et θ_B pour la seconde. Le régulateur doit maintenir ces deux tiges autour de la verticale malgré l’éventuelle présence de perturbations extérieures.

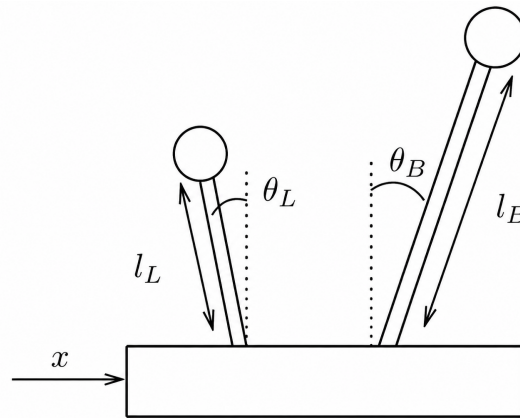


FIGURE I.6 – Double pendule inversé monté en parallèle [3].

c- Pendule inversé sur deux roues : Ce pendule constitue un prototype académique largement exploité en automatique. Comme son nom l'indique, il comprend une base mobile (essieu et deux roues) surmontée d'un pendule inversé libre en rotation autour d'un pivot situé entre l'essieu et la tige. L'angle d'inclinaison par rapport à la verticale est noté ψ . Le principe de fonctionnement se résume simplement : lorsque le pendule s'incline vers l'avant, la base mobile doit se déplacer vers l'avant pour le rattraper, et inversement lorsqu'il penche vers l'arrière. La difficulté réside dans le réglage précis de l'intensité du mouvement des roues, qui doit être adaptée à l'angle mesuré.



FIGURE I.7 – Pendule sur deux roues [23]

d- Pendule inversé rotatif (pendule de Furuta) : Un bras animé d'un mouvement de rotation dans le plan horizontal constitue la base de ce système. À son extrémité se trouve un pendule inversé monté en équilibre instable. La rotation continue du bras permet de stabiliser et de maintenir le pendule autour de la position verticale correspondant à son point d'équilibre instable.



FIGURE I.8 – Pendule inversé rotatif [22]

I.3 Applications concrètes du pendule inversé

Dans le secteur des transports exploitant le principe du pendule inversé, le « Honda Riding Assist » constitue une réalisation marquante. Il s'agit d'une motocyclette d'apparence classique capable de s'auto-équilibrer dans les phases critiques que sont l'arrêt et la circulation à faible vitesse. Conçue pour rester verticale sans recourir à une béquille, elle assiste le conducteur dans les virages grâce aux mouvements de sa fourche.



FIGURE I.9 – Honda Riding Assist, modèle 2019 [11].

Dans le domaine médical, le fauteuil roulant électrique automatisé IBOT constitue une autre

application. Cet appareil équipé de quatre roues motrices utilise le principe du pendule inversé pour aider les personnes à mobilité réduite. Il permet d'évoluer sur divers types de terrains : trottoirs, escaliers, gravillons, etc., avec une grande facilité de déplacement.



FIGURE I.10 – IBOT en configuration deux roues [4].

Parmi les applications commerciales réussies, on peut citer le Segway et l'Hoverboard. Ces deux engins représentent des moyens de transport électriques individuels largement répandus.



FIGURE I.11 – Segway [23]



FIGURE I.12 – Hoverboard [13]

I.4 Conclusion

Ce chapitre a permis de présenter un aperçu des différentes familles de pendules, en mettant en évidence leurs caractéristiques principales ainsi que la diversité de leurs domaines d'application. Cette analyse a également souligné l'intérêt particulier des systèmes pendulaires dans plusieurs contextes scientifiques et technologiques, notamment en automatique et en robotique.

Dans la suite de ce travail, l'attention sera portée sur le pendule inversé rotatif, qui constitue un cas d'étude particulièrement pertinent. Ce système mécanique se distingue par son caractère sous-actionné, la complexité de sa dynamique fortement non linéaire ainsi que son instabilité intrinsèque. Ces propriétés en font un excellent banc d'essai pour l'analyse et la conception de stratégies de commande avancées.

MODÉLISATION DU PENDULE INVERSÉ ROTATIF

II.1 Introduction

La conception d'une loi de commande performante nécessite, en premier lieu, l'établissement d'un modèle mathématique fiable du système à contrôler. Dans ce chapitre, nous développons le modèle dynamique complet du pendule inversé rotatif monté sur la plateforme *Quanser QUBE-Servo 2*. La démarche adoptée repose sur le formalisme d'Euler-Lagrange, qui offre un cadre systématique et élégant pour la modélisation des systèmes mécaniques à partir des bilans énergétiques.

Nous commençons par décrire la géométrie du système et définir les coordonnées généralisées. Les expressions des énergies cinétique et potentielle sont ensuite établies pour construire le Lagrangien du système. Les équations du mouvement non linéaires sont obtenues par application des équations d'Euler-Lagrange. Enfin, le modèle est mis sous forme d'état, d'abord dans sa version non linéaire, puis linéarisé autour du point d'équilibre instable, en vue de la synthèse de la loi de commande par modes glissants développée au chapitre suivant.

II.2 Présentation du système

II.2.1 Pendule inversé rotatif

Le PIR, connu également sous le nom de *pendule de Furuta*, est un système mécanique sous-actionné constitué de deux corps rigides articulés : un bras motorisé animé d'une rotation dans le plan horizontal, et une tige pendulaire libre de pivoter dans le plan vertical à l'extrémité de ce bras. Les deux plans de rotation sont perpendiculaires, ce qui confère au système une dynamique tridimensionnelle fortement couplée. Bien que sa structure soit simple, le compor-

tement intrinsèquement non linéaire et instable du pendule en fait un sujet d'étude privilégié en théorie de la commande, et un banc d'essai de référence pour l'évaluation des stratégies de contrôle avancées [10].

II.2.2 Plateforme expérimentale Quanser QUBE-Servo 2

Le système expérimental utilisé dans ce travail est le *Quanser QUBE-Servo 2*, illustré à la figure II.1. Il s'agit d'un dispositif compact et entièrement intégré, conçu pour l'enseignement et la recherche en automatique. La plateforme est équipée d'un moteur à courant continu brossé à entraînement direct de 18V, de deux codeurs optiques incrémentaux (512 lignes/tour, soit 2048 points/tour en mode quadrature), d'un amplificateur PWM intégré avec détection de courant, et d'un système embarqué d'acquisition de données. Le module de pendule rotatif (ROTPEN) se fixe magnétiquement sur le connecteur du moteur [22].



FIGURE II.1 – Plateforme expérimentale Quanser QUBE-Servo 2 avec module pendule rotatif

Les paramètres physiques et électriques du système, relevés dans la documentation constructeur [22], sont récapitulés dans le tableau II.1.

TABLE II.1 – Paramètres physiques du QUBE-Servo 2 avec pendule rotatif

Symbole	Description	Valeur	Unité
m_p	Masse du pendule	0,024	kg
L_r	Longueur du bras rotatif	0,085	m
L_p	Longueur totale du pendule	0,129	m
J_r	Moment d'inertie du bras (axe moteur)	$5,72 \times 10^{-5}$	kg m ²
J_p	Moment d'inertie du pendule (centre de masse)	$3,33 \times 10^{-5}$	kg m ²
D_r	Coefficient d'amortissement visqueux du bras	$1,5 \times 10^{-3}$	N m s/rad
D_p	Coefficient d'amortissement visqueux du pendule	$5,0 \times 10^{-4}$	N m s/rad
k_t	Constante de couple du moteur	0,042	N m/A
k_m	Constante contre-électromotrice	0,042	V s/rad
R_m	Résistance d'armature du moteur	8,4	Ω
g	Accélération de la pesanteur	9,81	m/s ²

II.3 Modélisation par le formalisme de Lagrange

II.3.1 Définition des coordonnées généralisées

Le système est entièrement décrit par deux coordonnées généralisées :

- θ : angle de rotation du bras autour de l'axe vertical du moteur, positif dans le sens anti-horaire (CCW) ;
- α : angle d'inclinaison du pendule par rapport à la verticale, nul en position basse, positif dans le sens anti-horaire (CCW).

La convention de signe est celle du QUBE-Servo 2 : la tension de commande positive $V_m > 0$ entraîne la rotation du bras dans le sens CCW.

II.3.2 Position du centre de masse du pendule

Le centre de masse du pendule se situe à mi-longueur, soit à $L_p/2$ de l'articulation. Ses coordonnées cartésiennes dans le repère fixe attaché à la base du moteur s'écrivent :

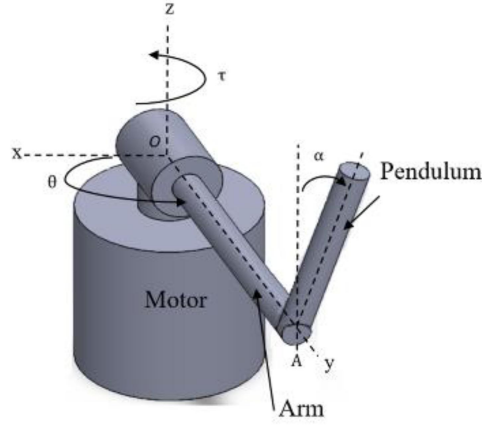


FIGURE II.2 – Schéma cinématique du système bras-pendule [6]

$$P_x = L_r \cos \theta + \frac{1}{2} L_p \sin \alpha \sin \theta \quad (\text{II.1})$$

$$P_y = L_r \sin \theta - \frac{1}{2} L_p \sin \alpha \cos \theta \quad (\text{II.2})$$

$$P_z = \frac{1}{2} L_p \cos \alpha \quad (\text{II.3})$$

En dérivant par rapport au temps :

$$\dot{P}_x = -L_r \dot{\theta} \sin \theta + \frac{1}{2} L_p (\dot{\alpha} \cos \alpha \sin \theta + \dot{\theta} \cos \theta \sin \alpha) \quad (\text{II.4})$$

$$\dot{P}_y = L_r \dot{\theta} \cos \theta - \frac{1}{2} L_p (\dot{\alpha} \cos \alpha \cos \theta + \dot{\theta} \sin \theta \sin \alpha) \quad (\text{II.5})$$

$$\dot{P}_z = -\frac{1}{2} L_p \dot{\alpha} \sin \alpha \quad (\text{II.6})$$

II.3.3 Énergies cinétique et potentielle

Énergie cinétique totale. Elle se décompose en trois contributions : translation du centre de masse du pendule, rotation propre du pendule autour de son centre de masse, et rotation du bras :

$$E_c = \frac{1}{2} m_p \dot{P}^2 + \frac{1}{2} J_p \dot{\alpha}^2 + \frac{1}{2} J_r \dot{\theta}^2 \quad (\text{II.7})$$

En substituant $\dot{P}^2 = \dot{P}_x^2 + \dot{P}_y^2 + \dot{P}_z^2$ dans (II.7) et en développant, on obtient :

$$E_c = \frac{1}{2} \left(J_r + m_p L_r^2 + \frac{1}{4} m_p L_p^2 \sin^2 \alpha \right) \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} \left(J_p + \frac{1}{4} m_p L_p^2 \right) \dot{\alpha}^2 - \frac{1}{2} m_p L_r L_p \cos \alpha \dot{\theta} \dot{\alpha} \quad (\text{II.8})$$

Énergie potentielle. En prenant la position basse du pendule comme référence (énergie nulle pour le bras dont le centre de masse reste dans le plan horizontal) :

$$E_p = \frac{1}{2} m_p g L_p \cos \alpha \quad (\text{II.9})$$

II.3.4 Lagrangien et équations d'Euler-Lagrange

Le lagrangien du système est :

$$\mathcal{L} = E_c - E_p \quad (\text{II.10})$$

Les deux équations d'Euler-Lagrange pour les coordonnées généralisées θ et α s'écrivent :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = Q_1 \quad (\text{II.11})$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\alpha}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \alpha} = Q_2 \quad (\text{II.12})$$

où Q_1 et Q_2 sont les forces généralisées non conservatives associées à θ et α respectivement :

$$Q_1 = \tau - D_r \dot{\theta} \quad (\text{II.13})$$

$$Q_2 = -D_p \dot{\alpha} \quad (\text{II.14})$$

Le couple moteur τ appliqué au bras est généré par le moteur CC du QUBE-Servo 2 :

$$\tau = \frac{k_t (V_m - k_m \dot{\theta})}{R_m} \quad (\text{II.15})$$

II.4 Équations du mouvement non linéaires

II.4.1 Développement des équations

En appliquant (II.11) et (II.12) au lagrangien (II.10) et en faisant intervenir les forces généralisées (II.13)–(II.14), on aboutit au système de deux équations différentielles couplées :

$$\begin{aligned} & \left(J_r + m_p L_r^2 + \frac{1}{4} m_p L_p^2 \sin^2 \alpha \right) \ddot{\theta} - \frac{1}{2} m_p L_p L_r \cos \alpha \ddot{\alpha} \\ & + \frac{1}{2} m_p L_p^2 \sin \alpha \cos \alpha \dot{\theta} \dot{\alpha} - \frac{1}{2} m_p L_r L_p \sin \alpha \dot{\alpha}^2 = \tau - D_r \dot{\theta} \end{aligned} \quad (\text{II.16})$$

$$\begin{aligned} & - \frac{1}{2} m_p L_p L_r \cos \alpha \ddot{\theta} + \left(J_p + \frac{1}{4} m_p L_p^2 \right) \ddot{\alpha} \\ & - \frac{1}{4} m_p L_p^2 \sin \alpha \cos \alpha \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m_p g L_p \sin \alpha = -D_p \dot{\alpha} \end{aligned} \quad (\text{II.17})$$

II.4.2 Résolution par la règle de Cramer

Le système (II.16)–(II.17) est de la forme :

$$\begin{cases} a \ddot{\theta} + b \ddot{\alpha} = c \\ a_1 \ddot{\theta} + b_1 \ddot{\alpha} = c_1 \end{cases} \quad (\text{II.18})$$

avec les coefficients :

$$\begin{aligned} a &= J_r + m_p L_r^2 + \frac{1}{4} m_p L_p^2 \sin^2 \alpha \\ b &= -\frac{1}{2} m_p L_r L_p \cos \alpha \\ a_1 &= -\frac{1}{2} m_p L_r L_p \cos \alpha \\ b_1 &= J_p + \frac{1}{4} m_p L_p^2 \\ c &= \tau - D_r \dot{\theta} - \frac{1}{2} m_p L_p^2 \sin \alpha \cos \alpha \dot{\alpha} \dot{\theta} + \frac{1}{2} m_p L_r L_p \sin \alpha \dot{\alpha}^2 \\ c_1 &= -D_p \dot{\alpha} + \frac{1}{4} m_p L_p^2 \sin \alpha \cos \alpha \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m_p g L_p \sin \alpha \end{aligned}$$

Le déterminant principal du système vaut :

$$\Delta = ab_1 - a_1 b = \left(J_r + m_p L_r^2 \right) \left(J_p + \frac{1}{4} m_p L_p^2 \right) + \frac{1}{4} m_p L_p^2 \sin^2 \alpha \left(J_p + \frac{1}{4} m_p L_p^2 \right) - \frac{1}{4} (m_p L_p L_r \cos \alpha)^2 \quad (\text{II.19})$$

Les accélérations généralisées s'obtiennent alors :

$$\ddot{\theta} = \frac{c b_1 - c_1 b}{\Delta} \quad (\text{II.20})$$

$$\ddot{\alpha} = \frac{a c_1 - a_1 c}{\Delta} \quad (\text{II.21})$$

II.5 Représentation d'état non linéaire

II.5.1 Choix du vecteur d'état

Pour mettre en œuvre une commande en retour d'état, on représente la dynamique du PIR sous la forme d'un système du premier ordre en choisissant comme vecteur d'état les quatre variables physiques mesurables par les encodeurs du QUBE-Servo 2 :

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \theta \\ \alpha \\ \dot{\theta} \\ \dot{\alpha} \end{pmatrix} \quad (\text{II.22})$$

L'entrée de commande est la tension délivrée au moteur : $u = V_m$.

II.5.2 Équations d'état

La représentation d'état non linéaire du PIR s'écrit :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_3 \\ \dot{x}_2 = x_4 \\ \dot{x}_3 = f_1(\mathbf{x}) + g_1(\mathbf{x}) u \\ \dot{x}_4 = f_2(\mathbf{x}) + g_2(\mathbf{x}) u \end{cases} \quad (\text{II.23})$$

où, en posant $z = k_t / R_m$ (gain moteur équivalent) et en utilisant le déterminant Δ défini en (II.19) :

$$\begin{aligned}
f_1(\mathbf{x}) = \frac{1}{\Delta} & \left[-\left(\frac{k_m k_t}{R_m} + D_r\right) x_3 \left(J_p + \frac{1}{4}m_p L_p^2\right) \right. \\
& - \frac{1}{2}m_p L_p^2 \sin x_2 \cos x_2 x_4 x_3 \left(J_p + \frac{1}{4}m_p L_p^2\right) \\
& + \frac{1}{2}m_p L_r L_p \sin x_2 x_4^2 \left(J_p + \frac{1}{4}m_p L_p^2\right) \\
& \left. + \left(-B_p x_4 + \frac{1}{4}m_p L_p^2 \sin x_2 \cos x_2 x_3^2 + \frac{1}{2}m_p g L_p \sin x_2\right) \frac{1}{2}m_p L_r L_p \cos x_2 \right] \quad (\text{II.24})
\end{aligned}$$

$$g_1(\mathbf{x}) = \frac{J_p + \frac{1}{4}m_p L_p^2}{\Delta} \cdot z \quad (\text{II.25})$$

$$\begin{aligned}
f_2(\mathbf{x}) = \frac{1}{\Delta} & \left[\left(-D_p x_4 + \frac{1}{4}m_p L_p^2 \sin x_2 \cos x_2 x_3^2 + \frac{1}{2}m_p g L_p \sin x_2\right) \left(J_r + m_p L_r^2 + \frac{1}{4}m_p L_p^2 \sin^2 x_2\right) \right. \\
& + \left(\frac{k_m k_t}{R_m} + D_r\right) x_3 \cdot \frac{1}{2}m_p L_r L_p \cos x_2 \\
& \left. + \frac{1}{2}m_p L_p^2 \sin x_2 \cos x_2 x_4 x_3 \cdot \frac{1}{2}m_p L_r L_p \cos x_2 - \frac{1}{2}m_p L_r L_p \sin x_2 x_4^2 \cdot \frac{1}{2}m_p L_r L_p \cos x_2 \right] \quad (\text{II.26})
\end{aligned}$$

$$g_2(\mathbf{x}) = \frac{-\frac{1}{2}m_p L_r L_p \cos x_2}{\Delta} \cdot z \quad (\text{II.27})$$

Les sorties mesurées correspondent aux angles fournis par les encodeurs :

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} \theta \\ \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad (\text{II.28})$$

II.6 Conclusion

Ce chapitre a été consacré à la modélisation mathématique du pendule inversé rotatif QUAN-SER QUBE-Servo 2. Nous avons établi les équations du mouvement du système par le formalisme de Lagrange, puis procédé à leur linéarisation autour du point d'équilibre instable afin d'obtenir la représentation d'état du système. Cette modélisation constitue le socle indispensable à la synthèse des lois de commande qui seront développées dans les chapitres suivants. Dans le chapitre suivant, nous nous intéresserons aux commandes non linéaires robustes, mieux adaptées à la nature intrinsèquement non linéaire du PIR.

THÉORIES DES COMMANDES NON LINÉAIRES

Introduction

Ce chapitre présente les stratégies de commande non linéaire robuste appliquées au pendule inversé rotatif (PIR). Face aux limitations des approches linéaires classiques, trois techniques sont étudiées : la commande par mode glissant (SMC), l'algorithme super-twisting (AST) et sa version modifiée (ASTM), ainsi que deux versions modifiées à convergence en temps fini, $ASTM_1$ et $ASTM_2$. L'objectif est de garantir la stabilisation du PIR autour de son équilibre instable en présence de perturbations et d'incertitudes.

III.1 Généralités sur les commandes non linéaires

Les commandes non linéaires constituent un domaine fondamental de l'automatique. Elles exploitent des fonctions non linéaires pour piloter des processus dynamiques. Contrairement aux commandes linéaires, leur synthèse est souvent plus complexe, mais elles offrent une meilleure précision et une plus grande stabilité dans certaines conditions. Ces techniques sont largement répandues en robotique, en automatisation industrielle, pour la commande de moteurs ainsi que dans les domaines aéronautique et spatial [14].

Parmi ces méthodes, la commande par retour d'état non linéaire est fréquemment employée. Elle s'appuie sur une fonction de Lyapunov pour garantir la stabilité du système en boucle fermée. La loi de commande est alors conçue de manière à faire décroître cette fonction le long des trajectoires du système, assurant ainsi la convergence vers un état d'équilibre stable.

III.1.1 Fonction de Lyapunov

La fonction de Lyapunov est un outil mathématique permettant d'analyser la stabilité des systèmes dynamiques. Introduite par le mathématicien russe Aleksandr Lyapunov en 1892, cette fonction scalaire définie positive, notée $V(x)$, dépend de l'état x du système et doit être continue et différentiable [16].

Pour démontrer la stabilité, on choisit une fonction candidate vérifiant :

- $V(x) > 0$ pour tout $x \neq 0$ et $V(0) = 0$ (définie positive).
- L'analyse de sa dérivée temporelle $\dot{V}(x)$ le long des trajectoires détermine le type de stabilité :
 - Si $\dot{V}(x) < 0$ pour tout $x \neq 0$, le système est **asymptotiquement stable** : l'erreur tend vers zéro quand $t \rightarrow \infty$.
 - Si $\dot{V}(x) \leq 0$ pour tout $x \neq 0$, la stabilité est **marginale** : l'erreur peut converger ou osciller sans diverger.
 - Si $\dot{V}(x) > 0$ pour certains $x \neq 0$, le système est **instable** : l'erreur diverge.

III.2 Commande par mode glissant

La commande par mode glissant (SMC) est une stratégie de commande non linéaire robuste. Elle repose sur la définition d'une **surface de glissement** dans l'espace d'état du système, vers laquelle la trajectoire du système est contrainte de converger, puis de rester confinée, indépendamment des perturbations externes et des incertitudes de modélisation [27, 7, 25].

Le principe fondamental de la SMC consiste en deux phases distinctes :

- **Phase d'atteinte** (*reaching phase*) : la loi de commande ramène la trajectoire du système depuis un état initial quelconque vers la surface de glissement en temps fini.
- **Phase de glissement** (*sliding phase*) : une fois sur la surface, la dynamique du système est gouvernée par une dynamique réduite d'ordre inférieur, assurant la convergence asymptotique vers l'état d'équilibre désiré.

III.2.1 Historique

La commande par mode glissant a vu le jour dans les années 1950 grâce aux travaux de chercheurs soviétiques, notamment Emelyanov et Utkin [8]. Au cours des décennies suivantes, les

progrès de la théorie des systèmes à structure variable ont permis d'approfondir ses applications. Les années 1980 ont été marquées par une analyse rigoureuse de la stabilité via la fonction de Lyapunov [26].

À partir des années 1990, la SMC s'est imposée comme méthode robuste dans de nombreux domaines : robotique, commande de moteurs électriques, systèmes aéronautiques [28, 24]. Les développements récents incluent les modes glissants d'ordre supérieur et l'implantation temps réel sur systèmes embarqués [18, 9].

III.2.2 Conception de la commande

La synthèse comporte trois étapes [27, 25] :

1. **Définition de la surface de glissement** : la surface S est choisie de sorte que le système suive une trajectoire prédéterminée. Une forme générale est :

$$S = \left(\lambda + \frac{d}{dt} \right)^{r-1} e \quad (\text{III.1})$$

où e désigne l'erreur de suivi et r le degré relatif du système.

2. **Conditions d'existence et de convergence** :

— **Fonction de commutation** (Emelyanov et Utkin) : dynamique convergente vers zéro :

$$S(x) \dot{S}(x) < 0 \quad (\text{III.2})$$

— **Fonction de Lyapunov** [16] : convergence vers la surface désirée :

$$V = \frac{1}{2} S^2 \quad (\text{III.3})$$

3. **Détermination de la loi de commande** : pour un système non linéaire $\dot{x} = F(x, t) + G(x, t) u$, la commande s'écrit [14] :

$$u = G(x, t)^{-1} \left[-F(x, t) + u_d \right] \quad (\text{III.4})$$

avec la commande de commutation [27] :

$$u_d = -k \operatorname{sign}(S), \quad k > 0 \quad (\text{III.5})$$

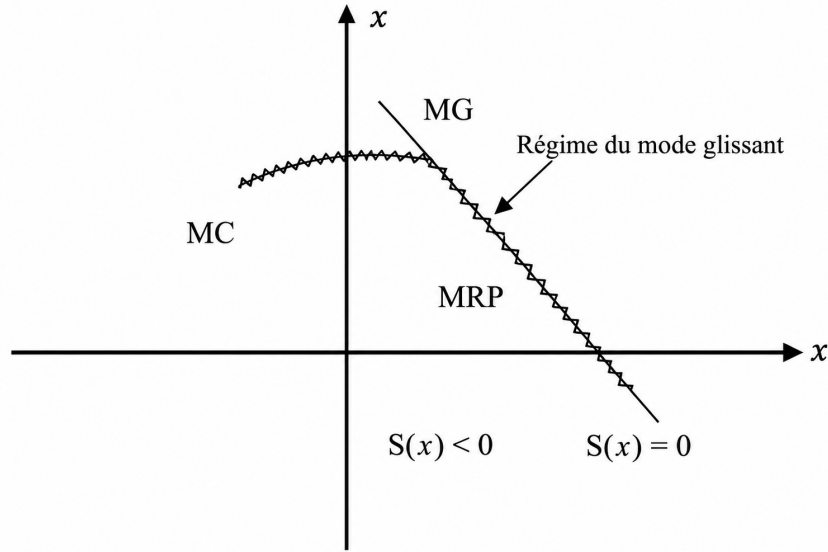


FIGURE III.1 – Principe du mode de glissement [2].

III.2.3 Phénomène de Chattering

Le **chattering** est un phénomène indésirable inhérent à la commande par mode glissant, se manifestant sous la forme d'oscillations à haute fréquence et de faible amplitude autour de la surface de glissement. Il résulte de la nature discontinue de la loi de commande, qui impose des commutations infiniment rapides entre deux structures de commande distinctes [27, 7].

Afin d'atténuer ce phénomène, la fonction de commutation discontinue $\text{sign}(S)$ peut être remplacée par une fonction arctangente continue [25] :

$$u_d = -k \cdot \frac{2}{\pi} \arctan\left(\frac{S}{\phi}\right) \quad (\text{III.6})$$

où $\phi > 0$ est un paramètre de lissage.

III.3 Commande Super-Twisting

L'algorithme **super-twisting** (AST) est une technique de commande non linéaire appartenant à la famille des modes glissants d'ordre supérieur. Il a été introduit par Levant en 1993 [17] afin de remédier aux limitations de la SMC classique, notamment le chattering, tout en préservant ses propriétés de robustesse.

La contribution majeure de cet algorithme réside dans sa capacité à générer une loi de commande **continue**, en agissant sur la dérivée de la commande plutôt que sur la commande

elle-même, assurant une convergence en temps fini sans commutations discontinues [18].

III.3.1 Structure de la commande

La commande de commutation u_d se décompose en deux termes :

$$u_1(t) = -k_1 |S|^{1/2} \text{sign}(S) \quad (\text{III.7})$$

$$\dot{u}_2(t) = -k_2 \text{sign}(S) \quad (\text{III.8})$$

$$u_d = u_1(t) + u_2(t) \quad (\text{III.9})$$

où $k_1, k_2 > 0$ sont choisis pour compenser les perturbations bornées [17, 20].

III.3.2 Commande Super-Twisting Modifiée

La commande super-twisting modifiée (ASTM) est une évolution de la AST classique, visant à améliorer les performances et la robustesse du système, tout en réduisant davantage le chattering [20]. Elle introduit des termes de correction linéaires supplémentaires dans la loi de commande :

$$u_d = -k_1 |S|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(S) - k_2 S + Z \quad (\text{III.10})$$

$$\dot{Z} = -k_3 \text{sign}(S) - k_4 S + d(x, t) \quad (\text{III.11})$$

où $k_1, k_2, k_3, k_4 > 0$ sont les gains de conception, Z est une variable d'état auxiliaire et $d(x, t)$ est la perturbation externe à compenser par un choix approprié de k_3 et k_4 [20, 24].

III.4 Commande en temps fini

La notion de **convergence en temps fini** constitue une propriété fondamentale des algorithmes de modes glissants d'ordre supérieur. Contrairement à la stabilité asymptotique clas-

sique, la stabilité en temps fini garantit que les trajectoires atteignent l'origine en un **temps fini** $t_F < +\infty$, indépendamment des conditions initiales [5, 29].

III.4.1 Définitions et lemmes

III.4.1.1 Définition

(Bhat et Bernstein [5]) Considérons le système non linéaire autonome :

$$\dot{x} = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n \quad (\text{III.12})$$

avec $f(0) = 0$. L'origine est un **équilibre stable en temps fini** s'il existe une fonction $T : \mathcal{V} \setminus \{0\} \rightarrow [0, +\infty)$ telle que :

- **Stabilité au sens de Lyapunov** : pour tout voisinage ouvert $\mathcal{O} \subseteq \mathbb{R}^n$ de l'origine, il existe $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ tel que $\varphi(t, x_0) \in \mathcal{O}$ pour tout $t \in [0, T(x_0))$.
- **Convergence en temps fini** : $\lim_{t \rightarrow T(x_0)} \varphi(t, x_0) = 0$.

III.4.1.2 Lemmes

Concernant la condition de stabilité en temps fini :

(Bhat et Bernstein [5]) Soit le système (III.12). S'il existe $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ définie positive et continue, $g > 0$ et $\alpha \in (0, 1)$ tels que :

$$\dot{V}(x) + g V^\alpha(x) \leq 0, \quad \forall x \in \mathcal{V} \setminus \{0\} \quad (\text{III.13})$$

alors l'origine est globalement stable en temps fini, borné par :

$$t_F \leq \frac{V(x_0)^{1-\alpha}}{g(1-\alpha)} \quad (\text{III.14})$$

(Yu et al. [29]) Pour $g > 0$, $g_1 > 0$ et $\alpha \in (0, 1)$, si :

$$\dot{V}(x) + g V^\alpha(x) + g_1 V(x) \leq 0 \quad (\text{III.15})$$

alors le temps d'établissement est borné par :

$$t_r \leq \frac{1}{g(1-\alpha)} \ln \left(\frac{g V(x_0)^{1-\alpha} + g_1}{g_1} \right) \quad (\text{III.16})$$

III.4.2 Première version modifiée de l'algorithme de Super-Twisting(ASTM₁)

III.4.2.1 Position du problème

Soit le système non linéaire incertain :

$$\dot{x} = f(x, t) + g(x, t) u \quad (\text{III.17})$$

où $x \in \mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}$, et f, g sont des champs de vecteurs différentiables. La variable de glissement $s = s(x, t)$ vérifie :

$$\dot{s} = y(x, t) + \varphi(x, t) u \quad (\text{III.18})$$

avec $y(x, t) = y_{\text{nom}}(x, t) + \Delta y(x, t)$ et :

$$|\dot{\Delta y}(x, t)| \leq h_{\max}, \quad h_{\max} > 0 \quad (\text{III.19})$$

III.4.2.2 Synthèse de la loi de commande

$$u = \varphi(x, t)^{-1} \left[-y_{\text{nom}}(x, t) + \omega \right] \quad (\text{III.20})$$

où ω est le terme ASTM₁ :

$$\omega = -k_1 |s|^{\sigma_1} \text{sign}(s) + \dot{\mu}, \quad \dot{\mu} = -k_2 |s|^{\sigma_2} \text{sign}(s) \quad (\text{III.21})$$

avec $\frac{1}{2} < \sigma_1 < 1$ et $\sigma_2 = 2\sigma_1 - 1$.

[19] Soit le système (III.17) sous la loi (III.20)–(III.21). Si $k_1, k_2 > 0$ vérifient :

$$\lambda_{\min}(Q) > h_{\max} \|\kappa\|, \quad k_2 > \frac{h_{\max}^2 \|\kappa\|^2}{\sigma_1 k_1^2} \quad (\text{III.22})$$

où

$$Q = k_1 \begin{pmatrix} k_2 + \sigma_1 k_1^2 & -\sigma_1 k_1 \\ -\sigma_1 k_1 & \sigma_1 \end{pmatrix}, \quad \kappa = \begin{pmatrix} -k_1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad (\text{III.23})$$

alors s et $\bar{\mu}$ convergent vers :

$$\|\varsigma\| \leq \Delta_1 = \left(\frac{h_{\max} \|\kappa\|}{\lambda_{\min}(Q)} \right)^{\frac{\sigma_1}{\sigma_2}} \quad (\text{III.24})$$

en temps fini $t_F \leq \frac{V(z(0))^{1-\alpha}}{g_1(1-\alpha)}$.

III.4.3 Deuxième version modifiée de l'algorithme de Super-Twisting (ASTM₂)

L'ASTM₂ combine les termes linéaires et non linéaires pour améliorer la robustesse et la rapidité de convergence [20, 19] :

$$\omega = -k_1 |s|^{\sigma_1} \text{sign}(s) - k_3 s + \mu \quad (\text{III.25})$$

$$\dot{\mu} = -k_2 |s|^{\sigma_2} \text{sign}(s) - k_4 s \quad (\text{III.26})$$

Le système en boucle fermée s'écrit :

$$\dot{s} = -k_1 |s|^{\sigma_1} \text{sign}(s) - k_3 s + \bar{\mu} \quad (\text{III.27})$$

$$\dot{\bar{\mu}} = -k_2 |s|^{\sigma_2} \text{sign}(s) - k_4 s + d(x, t) \quad (\text{III.28})$$

[19] Soit le système (III.17) sous la loi (III.25)–(III.26). Si $k_j > 0, j \in \{1, 2, 3, 4\}$, satisfont :

$$\lambda_{\min}(Q_1) > h_{\max} \|\kappa_1\|, \quad \sigma_1 k_2 k_4 > (k_2 + \sigma_1 k_1^2) (\sigma_1 + 1)^2 k_3^2 \quad (\text{III.29})$$

alors les trajectoires convergent vers :

$$\|\zeta_1\| \leq \Delta_2 = \min \left\{ \left(\frac{h_{\max} \|\kappa_1\|}{\lambda_{\min}(Q_1)} \right)^{\frac{\sigma_1}{\sigma_2}}, \frac{h_{\max} \|\kappa_1\|}{\lambda_{\min}(Q_2)} \right\} \quad (\text{III.30})$$

en temps fini $T_F \leq \max\{T_{r_1}, T_{r_2}\}$ où :

$$T_{r_1} = \frac{1}{g_3(1-\alpha)} \ln \left(\frac{g_3 V(z(0))^{1-\alpha} + g_2}{g_2} \right), \quad T_{r_2} = \frac{1}{g_5(1-\alpha)} \ln \left(\frac{g_5 V(z(0))^{1-\alpha} + g_4}{g_4} \right) \quad (\text{III.31})$$

III.5 Conclusion

Ce chapitre a été consacré à l'exposé des fondements théoriques des lois de commande non linéaires envisagées pour la stabilisation du pendule inversé rotatif (PIR). La synthèse a débuté par la commande par mode glissant, avant d'aborder l'algorithme super-twisting dans ses formulations standard et modifiée, puis de traiter la commande hybride. La maîtrise de ces différents concepts constitue un préalable indispensable à leur mise en œuvre et à leur évaluation sur le système PIR, objet du chapitre suivant.

CHAPITRE IV

APPLICATION DES COMMANDES NON LINÉAIRES SUR LE PENDULE INVERSÉ ROTATIF

IV.1 Introduction

Le chapitre précédent a été consacré à l'étude théorique des différentes lois de commande non linéaires envisagées pour le PIR. Le présent chapitre en constitue le prolongement naturel, en abordant leur mise en œuvre effective sur le système et en évaluant leurs performances respectives à travers une analyse comparative des résultats de simulation.

IV.2 Application de la commande par mode glissant (SMC) sur le PIR

Le PIR est représenté sous la forme du modèle d'état suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_3 \\ \dot{x}_2 = x_4 \\ \dot{x}_3 = f_1(x) + g_1(x) u \\ \dot{x}_4 = f_2(x) + g_2(x) u \end{cases} \quad (\text{IV.1})$$

Afin de prendre en compte la dynamique à la fois du bras rotatif et du pendule, nous optons pour une surface de glissement qui incorpore ces deux éléments dans une seule équation, formulée de la manière suivante :

$$S = k_\theta \dot{\theta} + k_\alpha \dot{\alpha} + \lambda_\theta \theta + \lambda_\alpha \alpha \quad (\text{IV.2})$$

où k_θ , k_α , λ_θ et λ_α sont des gains de surface glissante.

Pour la démonstration de stabilité et le calcul de la loi de commande, nous utilisons la fonction de Lyapunov définie par :

$$V = \frac{1}{2}S^2 \quad (\text{IV.3})$$

dont la dérivée est $\dot{V} = S\dot{S}$. Le système est stable si et seulement si $\dot{V} < 0 \iff S\dot{S} < 0$. En développant $S\dot{S}$:

$$S\dot{S} = S(k_\theta\ddot{\theta} + k_\alpha\ddot{\alpha} + \lambda_\theta\dot{\theta} + \lambda_\alpha\dot{\alpha}) \quad (\text{IV.4})$$

$$= S[k_\theta(f_1(x) + g_1(x)u) + k_\alpha(f_2(x) + g_2(x)u) + \lambda_\theta x_3 + \lambda_\alpha x_4] \quad (\text{IV.5})$$

$$= S[u(k_\theta g_1(x) + k_\alpha g_2(x)) + (k_\theta f_1(x) + k_\alpha f_2(x) + \lambda_\theta x_3 + \lambda_\alpha x_4)] \quad (\text{IV.6})$$

Pour que $\dot{V}$ soit négative, la loi de commande finale retenue est :

$$u = (k_\theta g_1(x) + k_\alpha g_2(x))^{-1}[-(k_\theta f_1(x) + k_\alpha f_2(x) + \lambda_\theta x_3 + \lambda_\alpha x_4) - k \text{sign}(S)] \quad (\text{IV.7})$$

IV.2.1 Paramètres de SMC

Il convient de préciser que les paramètres des trois commandes ont été déterminés de manière empirique, par une procédure d'ajustement itératif, afin d'identifier les valeurs optimales garantissant la stabilisation du système au voisinage de son point d'équilibre instable.

TABLE IV.1 – Paramètres de la commande SMC

Paramètres	Valeur
k_θ	−0,1
k_α	0,2
λ_θ	−0,1
λ_α	3,1
k	1200

IV.2.2 Résultats expérimentaux

Afin de procéder à une évaluation expérimentale des performances de différentes stratégies de commande, incluant la commande par mode glissant ainsi que d'autres approches, nous avons utilisé le pendule inversé rotatif Quanser QUBE-Servo 2. Cette plate-forme a été sélectionnée pour sa capacité à fournir un environnement de test adéquat. Nous avons pu ainsi mettre en

œuvre le contrôleur conçu en utilisant le logiciel de contrôle en temps réel QUARC. Cette configuration expérimentale nous a permis d'observer le comportement du système dans des conditions réelles, sans aucune intervention manuelle.

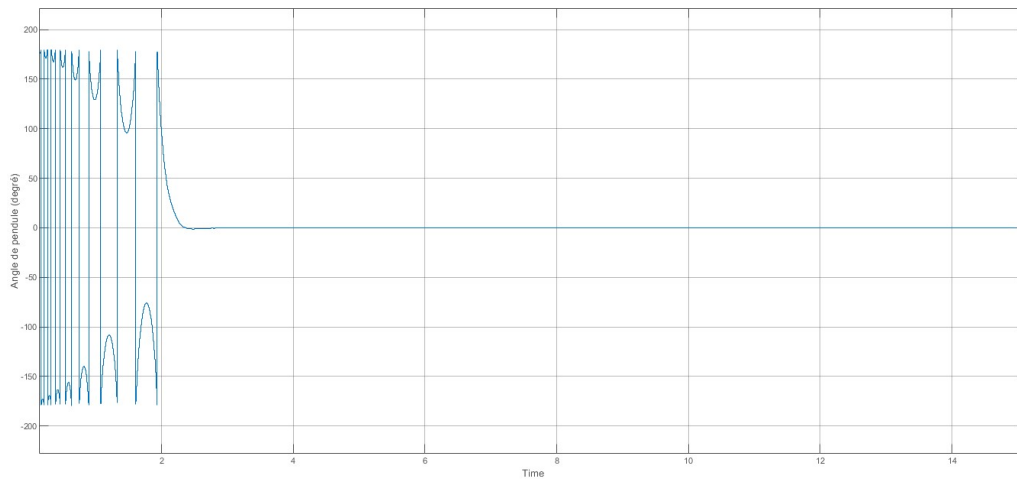


FIGURE IV.1 – L'évolution de l'angle du pendule du PIR – commande SMC

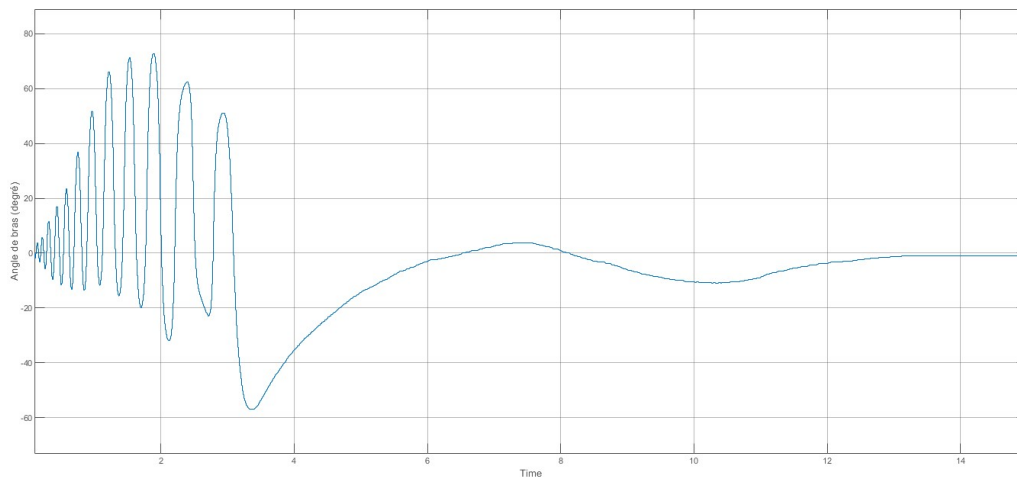


FIGURE IV.2 – L'évolution de l'angle du bras du PIR – commande SMC

Les figures IV.1 et IV.2 présentent respectivement l'évolution de l'angle du pendule α et du bras θ sous l'application de la commande par mode glissant. On constate que la commande parvient à maintenir la position verticale du pendule de manière stable et autonome, sans aucune intervention manuelle, ce qui atteste de l'efficacité de la commande SMC dans la régulation précise de la position du pendule autour de son point d'équilibre instable.

L'angle initial du pendule est de 180, tandis que la position souhaitée est 0, correspondant au point d'équilibre instable. Durant la phase transitoire, le pendule effectue plusieurs rotations complètes avec des oscillations d'amplitude atteignant ± 180 , puis converge rapidement vers la consigne pour se stabiliser à 0 en un temps de 2,46 s.

En ce qui concerne le bras rotatif, il débute à 0 puis entre immédiatement en oscillation rapide, avec une amplitude maximale d'environ ± 70 durant la phase de montée du pendule. Une fois le pendule capturé à son point d'équilibre, le bras effectue un dépassement négatif aux alentours de $t \approx 3,5$ s, avant de converger progressivement vers sa position d'équilibre à 0, atteinte aux alentours de 13 s. Cette trajectoire illustre le rôle indispensable du bras dans la dynamique de stabilisation du PIR, en générant les efforts mécaniques nécessaires pour accompagner la montée du pendule et maintenir l'équilibre du système.

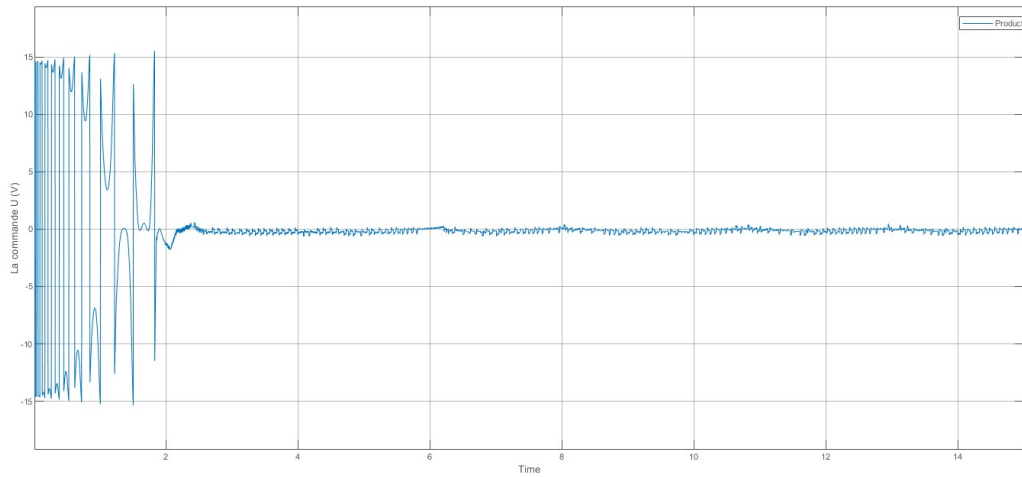


FIGURE IV.3 – L'évolution de la commande par mode glissant

La figure IV.3 représente l'évolution du signal de commande u appliqué au PIR par la commande SMC. Durant la phase transitoire, correspondant à la montée du pendule vers sa position d'équilibre, la commande présente des commutations rapides et de grande amplitude, atteignant une tension maximale de ± 15 V. Ce niveau élevé reflète l'effort important fourni par le contrôleur pour contraindre la trajectoire du système vers la surface de glissement.

Une fois le pendule stabilisé aux alentours de $t \approx 2,46$ s, la commande converge vers une valeur quasi nulle. Cependant, on observe la persistance d'oscillations à haute fréquence et de faible amplitude, d'environ ± 1 V, caractéristiques du phénomène de *chattering* inhérent à la commande par mode glissant. Ce phénomène, bien que limité en amplitude, peut solliciter les actionneurs et réduire leur durée de vie. C'est précisément pour atténuer cet inconvénient que la commande super-twisting sera mise en œuvre dans la section suivante.

IV.3 Application de la commande super-twisting (AST) sur le PIR

En adoptant une démarche analogue à celle suivie pour la synthèse de la commande par mode glissant, une modification est apportée au terme de régulation, aboutissant à la loi de commande suivante :

$$u = (k_{\theta}g_1(x) + k_{\alpha}g_2(x))^{-1} \left[-(k_{\theta}f_1(x) + k_{\alpha}f_2(x) + \lambda_{\theta}x_3 + \lambda_{\alpha}x_4) - \underbrace{k_1|S|^{\frac{1}{2}}\text{sign}(S) - k_2\text{sign}(S)}_{\text{terme super-twisting simple (IV.8)}} \right]$$

IV.3.1 Paramètres de AST

TABLE IV.2 – Paramètres de la commande STW

Paramètres	Valeur
k_{θ}	-0,1
k_{α}	0,2
λ_{θ}	-0,1
λ_{α}	5,1
k_1	370
k_2	-2,5

IV.3.2 Résultats expérimentaux

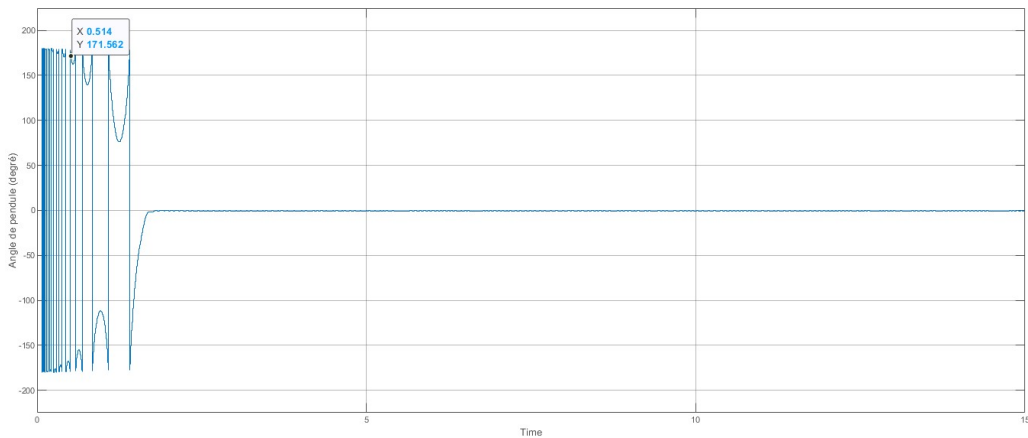


FIGURE IV.4 – L'évolution de l'angle du pendule du PIR – commande AST

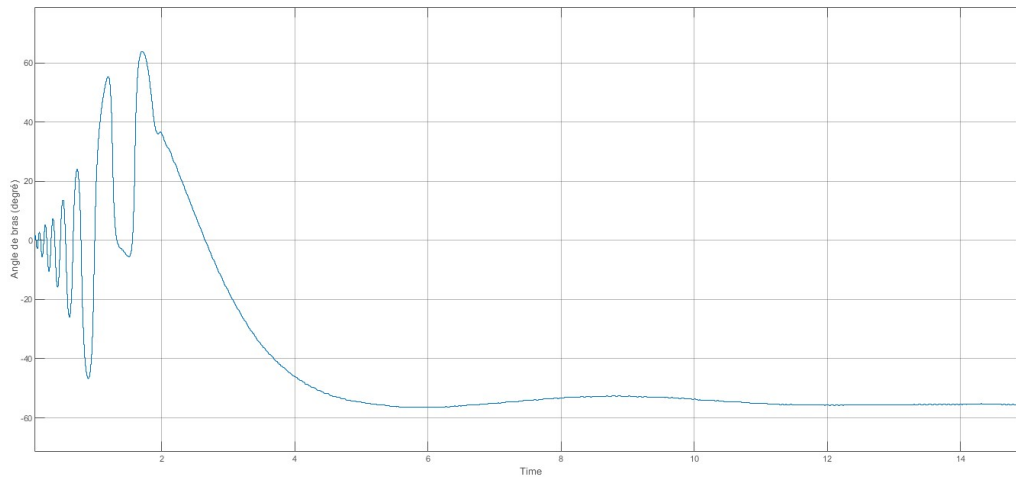


FIGURE IV.5 – L'évolution de l'angle du bras du PIR – commande AST

Les figures IV.4 et IV.5 illustrent respectivement la dynamique angulaire du pendule et du bras du PIR en réponse à la loi de commande AST. On relève notamment un temps de convergence particulièrement court pour le pendule, de l'ordre de 2 s, accompagné d'un nombre limité d'oscillations transitoires avant l'atteinte de la consigne.

Quant au bras rotatif, son comportement se caractérise par des mouvements oscillatoires rapides en phase transitoire, dont le rôle est de favoriser la stabilisation du pendule autour de son point d'équilibre instable. Cette action corrective contribue efficacement à accélérer la convergence de l'ensemble du système. Ainsi, sous l'effet de la commande AST, le bras atteint sa position d'équilibre en 5 secondes.

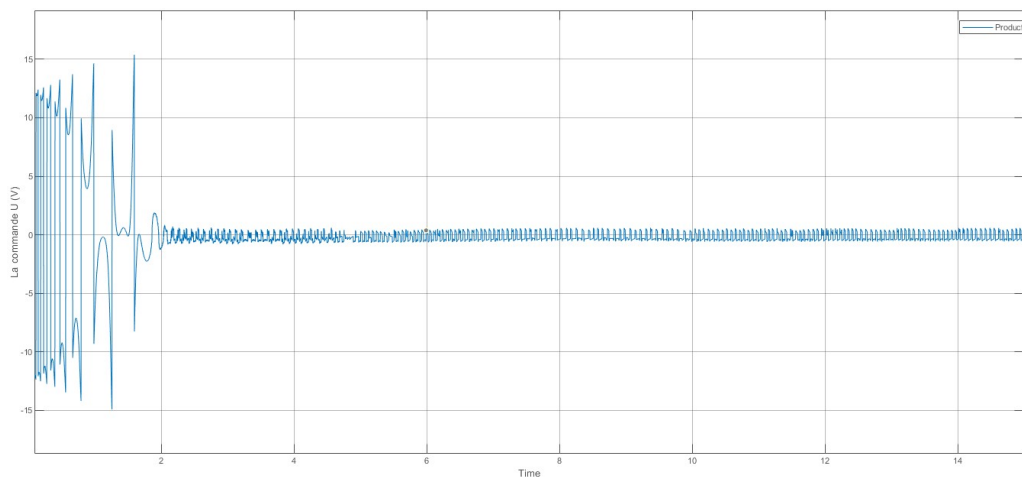


FIGURE IV.6 – L'évolution de la commande super-twisting

La figure IV.6 La figure (4.6) illustre le signal de commande généré par l'algorithme super-twisting. L'un des atouts majeurs de cette approche réside dans l'atténuation notable du phénomène de *chattering*, dont l'amplitude est ramenée à environ 1,3 V, ce qui représente une

amélioration sensible par rapport à la commande par mode glissant classique.

Du point de vue énergétique, l'algorithme super-twisting se révèle plus économe que son homologue par mode glissant. En effet, la stabilisation du pendule est assurée avec une tension d'alimentation ne dépassant pas 15 V, ce qui contribue à limiter la dissipation d'énergie et à préserver l'intégrité des actionneurs sur le long terme.

Dans l'optique d'améliorer davantage les performances énergétiques de la loi de commande, une version modifiée de l'algorithme super-twisting est introduite dans ce qui suit.

IV.4 Application de la commande ASTM en temps fini sur le PIR

En appliquant les mêmes étapes que pour les commandes précédentes, et en substituant le terme de régulation par l'algorithme de super-twisting première version modifiée à convergence en temps fini, on obtient la loi de commande suivante :

$$u = (k_\theta g_1(x) + k_\alpha g_2(x))^{-1} \left[-(k_\theta f_1(x) + k_\alpha f_2(x) + \lambda_\theta x_3 + \lambda_\alpha x_4) - \underbrace{k_1 |S|^{\sigma_1} \text{sign}(S) + \mu}_{\text{terme ASTM}_1} \right] \quad (\text{IV.9})$$

où la dynamique de la variable auxiliaire μ est régie par :

$$\dot{\mu} = -k_2 |S|^{\sigma_2} \text{sign}(S) \quad (\text{IV.10})$$

avec les exposants vérifiant $\frac{1}{2} < \sigma_1 < 1$ et $\sigma_2 = 2\sigma_1 - 1$, ce qui garantit la convergence en temps fini.

IV.4.1 Paramètres de ASTM en temps fini

TABLE IV.3 – Paramètres de la commande ASTM en temps fini

Paramètres	Valeur
k_θ	-0,1
k_α	0,2
λ_θ	-0,1
λ_α	3,1
k_1	370
k_2	2,7
σ_1	0,67

IV.4.2 Résultats expérimentaux

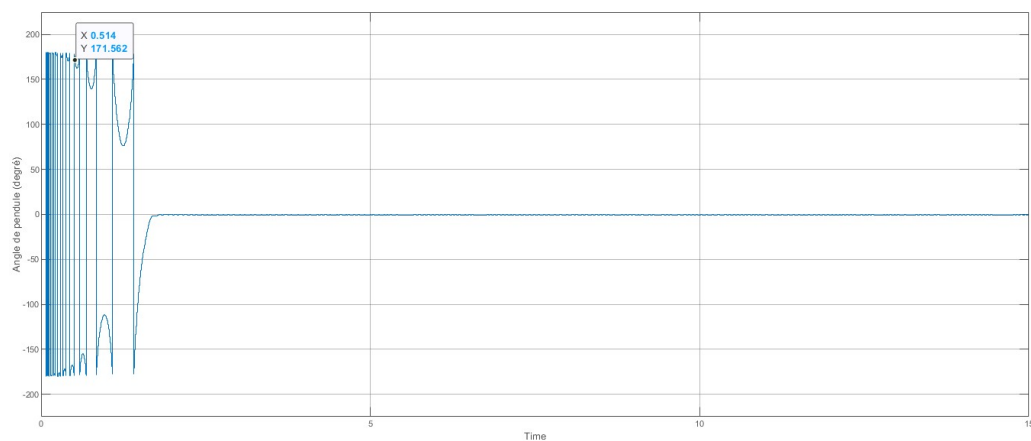


FIGURE IV.7 – L'évolution de l'angle du pendule du PIR – commande ASTM en temps fini

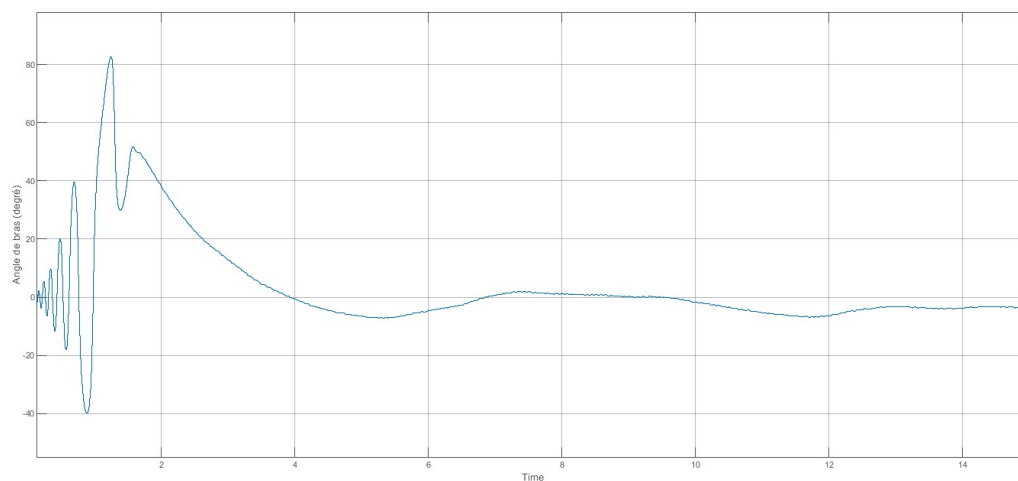


FIGURE IV.8 – L'évolution de l'angle du bras du PIR – commande ASTM en temps fini

Les figures IV.7 et IV.8 présentent respectivement l'évolution de l'angle du pendule α et du bras θ sous l'application de la commande $ASTM_1$. L'introduction de l'exposant fractionnaire $\sigma_1 \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ dans le terme de commutation $k_1|S|^{\sigma_1}\text{sign}(S)$ joue un rôle déterminant dans l'accélération de la convergence : lorsque la variable de glissement S est grande, ce terme produit un effort de commande plus important que dans le cas classique où $\sigma_1 = \sigma_2 = \frac{1}{2}$, forçant ainsi la trajectoire du système à atteindre la surface de glissement en un temps fini strictement borné.

Durant la phase transitoire, le pendule effectue plusieurs rotations avec des oscillations d'amplitude atteignant ± 180 , avant de converger vers la consigne 0 en un temps d'environ 1,67 s, sans aucune oscillation résiduelle. Ce résultat constitue une amélioration notable par rapport aux commandes SMC et STW, dont les temps de stabilisation étaient respectivement de 2,46 s et 2 s.

Quant au bras rotatif, il converge vers sa position d'équilibre à 0 aux alentours de $t \approx 4$ s, avec des oscillations résiduelles inférieures à ± 5 . Contrairement à la commande AST, la commande $ASTM_1$ assure un retour complet à 0, témoignant de la supériorité de cet algorithme en termes de précision et de convergence en temps fini.

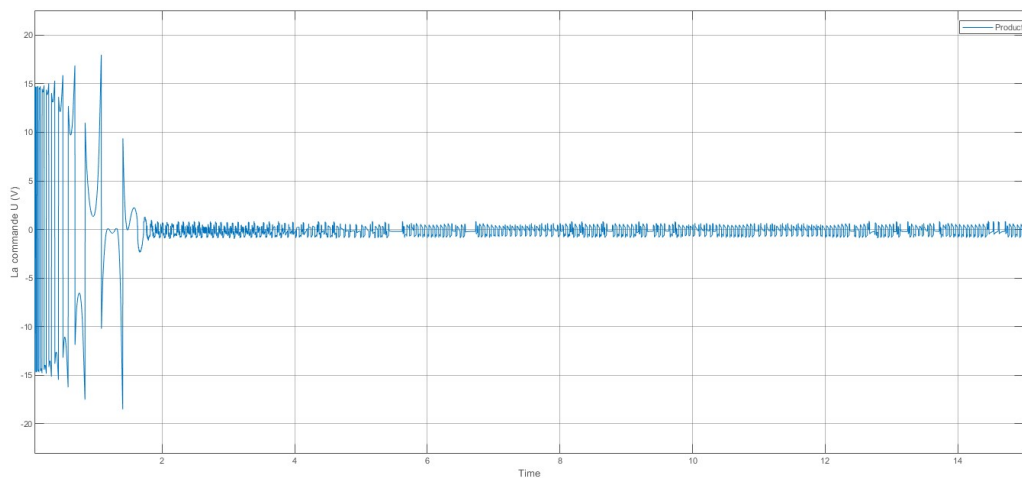


FIGURE IV.9 – L'évolution de la commande ASTM en temps fini

La figure IV.9 représente l'évolution du signal de commande u appliqué au PIR par la commande $ASTM_1$. Durant la phase transitoire, la commande présente des commutations rapides atteignant une tension maximale de ± 18 V, reflétant l'effort fourni par le contrôleur pour contraindre la trajectoire vers la surface de glissement en temps fini. Une fois le pendule stabilisé aux alentours de $t \approx 1,67$ s, la commande converge vers une valeur quasi nulle avec un *chattering* résiduel d'amplitude d'environ $\pm 1,5$ V. Bien que ce niveau de *chattering* soit légèrement supérieur à celui observé avec la commande AST classique, la commande ASTM en temps fini compense cet inconvénient par une convergence en temps fini nettement plus rapide et une meilleure précision de stabilisation du pendule.

IV.5 Test de robustesse sur les trois commandes

Afin d'évaluer la robustesse des commandes présentées précédemment, des perturbations externes ont été introduites manuellement dans le système du PIR. L'objectif était d'observer la réaction et le comportement du pendule face à des influences extérieures. Les résultats expérimentaux sont représentés dans les figures IV.10a à IV.10c.

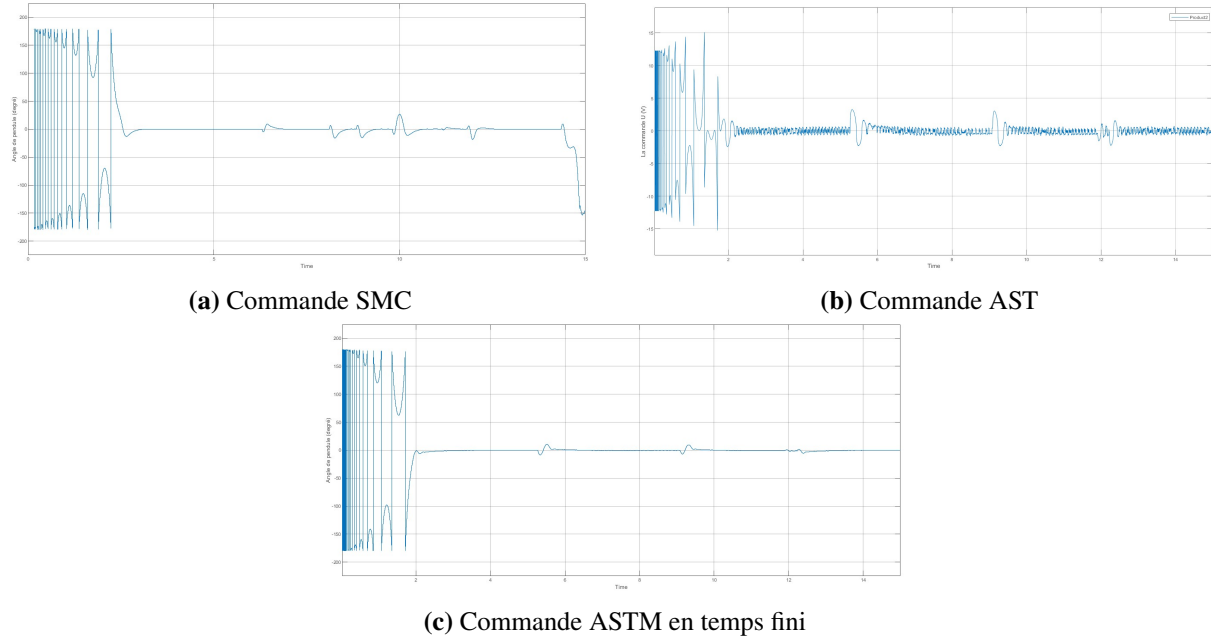


FIGURE IV.10 – Évolution de l'angle du pendule en présence de perturbations externes

. La commande SMC (figure a) parvient à rejeter plusieurs perturbations successives avec des oscillations transitoires ne dépassant pas $\pm 25^\circ$. Cependant, face à une perturbation de grande amplitude aux alentours de $t \approx 14$ s, le pendule chute brutalement à -150° sans pouvoir se rétablir, révélant une limite de robustesse de cette commande face aux perturbations importantes. De plus, le phénomène de *chattering* reste présent tout au long de l'expérience.

La commande AST (figure b) présente une robustesse comparable à celle de la SMC pour les perturbations de faible amplitude. Néanmoins, le bras rotatif présente de grandes excursions angulaires atteignant $\pm 80^\circ$ en réponse aux perturbations, sans jamais retrouver sa position d'équilibre à 0° , ce qui constitue une limitation significative de cette approche en termes de robustesse globale du système.

La commande ASTM1 (figure c) démontre la meilleure robustesse parmi les trois approches. Le pendule ne s'écarte que de $\pm 10^\circ$ autour de 0° lors de chaque perturbation et récupère systématiquement sa position d'équilibre jusqu'à la fin de l'expérience, sans aucune chute. Cette supériorité s'explique par l'exposant fractionnaire σ_1 qui génère un effort de commande proportionnellement plus élevé dès que la variable de glissement s'éloigne de zéro, assurant

ainsi un rejet rapide et efficace des perturbations externes.

IV.6 Conclusion

Ce chapitre a exploré l'application des commandes non linéaires sur le pendule inversé rotatif et mis en lumière les performances des diverses approches de commande. Il est manifeste que la robustesse de ces commandes se révèle pleinement lorsqu'elles sont appliquées à des systèmes complexes tels que les robots. Les résultats obtenus valident l'efficacité des stratégies proposées, tout en soulignant les compromis inhérents à chaque approche.

CONCLUSION GÉNÉRALE

Dans le cadre de cette étude, nous avons examiné en détail le contrôle du pendule inversé rotatif en utilisant des commandes non linéaires robustes, mieux adaptées à la nature intrinsèquement non linéaire du système. Les expériences menées ont confirmé l'importance de considérer la non-linéarité du PIR lors de la conception des stratégies de commande.

Trois approches ont été étudiées et validées expérimentalement sur la maquette QUANSER QUBE-Servo 2 : la commande par mode glissant (SMC), l'algorithme super-twisting (STW) et la version modifiée à convergence en temps fini ($ASTM_1$). Les résultats obtenus ont démontré que ces commandes non linéaires permettent une meilleure régulation du système, en minimisant les erreurs et les écarts par rapport à la consigne, tout en assurant une robustesse satisfaisante face aux perturbations externes.

Cette étude a profondément enrichi notre compréhension des principes de commande appliqués aux pendules inversés rotatifs. Elle a souligné l'importance de développer des stratégies spécifiquement adaptées à la nature non linéaire de ce système dynamique, les commandes non linéaires s'étant révélées nettement plus performantes pour obtenir une stabilisation précise et robuste autour du point d'équilibre instable.

Les connaissances acquises au cours de cette recherche ne se limitent pas uniquement au pendule inversé rotatif, mais peuvent être étendues à d'autres systèmes non linéaires similaires, tels que les drones et les robots bipèdes. Cette étude ouvre ainsi de nouvelles perspectives dans le domaine du contrôle des systèmes dynamiques, offrant des opportunités de recherche supplémentaires pour explorer la deuxième version modifiée $ASTM_2$ et améliorer davantage les performances de stabilisation en temps fini du PIR.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] 3piecesuits. Cycloid pendulum diagram, 2011.
- [2] M. Aous and F. Tayebi. Contrôle par mode glissant : Observation et estimation d’une machine à induction avec défaut. Mémoire de master, Université Ibn Khaldoun de Tiaret, 2017.
- [3] Nour El Houda Asnour and Hamza Hadj Henni. Commande robuste d’un système non linéaire : Application au pendule inversé rotatif. Mémoires d’Ingénieur, ESSAT, 2023.
- [4] Autonomia. ibot pmd - dispositif de mobilité personnel. Disponible sur : <https://www.autonomia.org/produit/ibot-pmd>, 2025.
- [5] Sanjay P. Bhat and Dennis S. Bernstein. Finite-time stability of continuous autonomous systems. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 38(3) :751–766, 2000.
- [6] M. Dehak and S. Kahouadji. Modélisation et stabilisation d’un pendule inversé rotatif. *Automatique et Informatique Industrielle*, 44(1) :233–241, 2016.
- [7] Christopher Edwards and Sarah K. Spurgeon. *Sliding Mode Control : Theory and Applications*. Taylor & Francis, London, 1998.
- [8] Sergey V. Emelyanov. *Variable Structure Control Systems*. Nauka, Moscow, 1967.
- [9] Leonid Fridman and Arie Levant. Higher order sliding modes. In Wilfrid Perruquetti and Jean-Pierre Barbot, editors, *Sliding Mode Control in Engineering*, pages 53–101. Marcel Dekker, New York, 2002.
- [10] Katsuhisa Furuta, Masaki Yamakita, and Seiichi Kobayashi. Swing-up control of inverted pendulum using pseudo-state feedback. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part I : Journal of Systems and Control Engineering*, 206(4) :263–269, 1992.
- [11] GQ Magazine. La moto honda qui ne tombe jamais sera électrique. Disponible sur : <https://www.gqmagazine.fr/lifestyle/news/articles/la-moto-honda-qui-ne-tombe-jamais-sera-electrique/56637>, 2017.

-
- [12] Olivier Granier. Rappels de cours de mécanique du solide : pendules simples et de torsion, 2026.
- [13] Hover-1. Hover-1 Drive hoverboard. Disponible sur : <https://www.hover-1.com/products/hover-1-drive-hoverboard>.
- [14] Alberto Isidori. *Nonlinear Control Systems*. Springer-Verlag, Berlin, 3 edition, 1995.
- [15] Abhishek Kathpal and Ashish Singla. Simmechanics™ based modeling, simulation and real-time control of rotary inverted pendulum. In *2017 11th International Conference on Intelligent Systems and Control (ISCO)*, pages 166–172. IEEE, 2017.
- [16] Hassan K. Khalil. *Nonlinear Systems*. Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, 3 edition, 2002.
- [17] Arie Levant. Sliding order and sliding accuracy in sliding mode control. *International Journal of Control*, 58(6) :1247–1263, 1993.
- [18] Arie Levant. Higher-order sliding modes, differentiation and output-feedback control. *International Journal of Control*, 76(9–10) :924–941, 2003.
- [19] Mohammed Redouane Mokhtari. *Observation et Commande de Drones Miniatures à Voilures Tournantes*. Thèse de doctorat, Université de Reims Champagne-Ardenne, 2015.
- [20] Jaime A. Moreno and Marisol Osorio. Strict lyapunov functions for the super-twisting algorithm. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 57(4) :1035–1040, 2012.
- [21] Katsuhiko Ogata. *Modern Control Engineering*. Prentice Hall, 5 edition, 2009.
- [22] Quanser Inc. *QUBE-Servo 2 User Manual*. Quanser Inc., Markham, Ontario, Canada, 2013.
- [23] Segway-Ninebot. Segway PT – personal transporter. Disponible sur : <https://www.segway.com>.
- [24] Yuri Shtessel, Christopher Edwards, Leonid Fridman, and Arie Levant. *Sliding Mode Control and Observation*. Birkhäuser, New York, 2014.
- [25] Jean-Jacques E. Slotine and Weiping Li. *Applied Nonlinear Control*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1991.
- [26] Jean-Jacques E. Slotine and Shankar S. Sastry. Tracking control of non-linear systems using sliding surfaces. *International Journal of Control*, 38(2) :465–492, 1983.
- [27] Vadim I. Utkin. *Sliding Modes in Control and Optimization*. Springer-Verlag, Berlin, 1992.

-
- [28] Vadim I. Utkin. Sliding mode control design principles and applications to electric drives. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 40(1) :23–36, 1993.
- [29] Shuanghe Yu, Xinghuo Yu, Bijan Shirinzadeh, and Zhihong Man. Continuous finite-time control for robotic manipulators with terminal sliding mode. *Automatica*, 41(11) :1957–1964, 2005.