REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

ECOLE SUPERIEURE EN SCIENCES APPLIQUEES
--T L E M C E N--

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

المدرسة العليا في العلوم التطبيقية -تلمسان-

المدرسة العليا في العلوم التطبيقية
École Supérieure en Sciences Appliquées

Mémoire de fin d'étude

Pour l'obtention du diplôme de Master

Filière : Automatique
Spécialité : Automatique

Présenté par : BENSEGHIR Soheyb Bilal
SAIM Yacer

Thème

Stabilisation d'un pendule inversé rotatif à base d'observateurs

Soutenu publiquement, le 23/06/2026, devant le jury composé de :

Mme OUHOUD Amina	Maître de conférences classe A	ESSA. Tlemcen	Président
M ARICHI Fayssal	Maître de conférences classe A	ESSA. Tlemcen	Directeur de mémoire
M MOKHTARI Mohamed Rida	Maître de conférences classe A	ESSA. Tlemcen	Co-Directeur de mémoire
Mme GHOUALI Amel	Maître de conférences classe A	ESSA. Tlemcen	Examinateur 1
M MESSIRDI Mohammed	Maître-assistant classe A	Univ. Mascara	Examinateur 2

Année universitaire : 2025 /2026


بسم الله الرحمن الرحيم

Remerciements

Nous remercions Allah de nous avoir donné la patience et le courage pour accomplir ce travail.

Nous exprimons également notre profonde gratitude à notre encadrant, Monsieur **Fayssal ARICHI**, ainsi qu'à notre co-encadrant, Monsieur **Mohammed Rida MOKHTARI**. Leur soutien constant, leur patience, leur disponibilité et leurs conseils éclairés ont nourri notre réflexion tout au long de cette année académique et nous ont permis d'apporter des améliorations substantielles à ce mémoire.

Notre reconnaissance s'adresse également aux membres du jury, à savoir Madame **OUHOUD Amina**, Madame **GHOUALI Amel** et Monsieur **MESSIRDI Mohammed**, pour l'attention soutenue qu'ils ont portée à ce travail.

Nous témoignons aussi toute notre gratitude envers tout le personnel de l'**École Supérieure en Sciences Appliquées de Tlemcen** qui veille à assurer une formation de qualité aux étudiants.

Pour terminer, nous tenons à remercier toute personne ayant contribué de près ou de loin à la réalisation de ce travail.

Dédicace

Je dédie humblement ce travail à mes très chers parents, dont j'ai eu l'immense honneur de suivre ce parcours extraordinaire, dont vous avez pleinement connu les défis. Je vous remercie sincèrement pour votre soutien moral inestimable et les innombrables encouragements dont vous m'avez constamment gratifié.

Également, je dédie ce travail à mon cher frère Amine ainsi qu'à , qui ont toujours été présents à mes côtés. Votre soutien et votre affection m'ont donné la force de persévérer.

الملخص

يهدف هذا البحث إلى تطوير استراتيجيات مراقبة لنظام البندول العكسي الدوراني غير الخطي. نظرًا لأن نظامنا يمتلك أربعة متغيرات حالة، يصعب الحصول على تقدير كامل لجميع هذه المتغيرات انطلاقًا من القياسات المتاحة وحدها. لهذا السبب، نلجأ إلى استخدام مراقبات الحالة.

في النهج الأول، نستخدم مراقب لوينبرغر على النموذج الخطي للنظام، ثم نحلل الأداء بالاعتماد على محاكاة ثلاثية الأبعاد.

في النهج الثاني، نعتمد على مراقب الحالة الموسعة الخطي (بيصو)، الذي يوسّع متجه الحالة لتقدير متغيرات الحالة والاضطرابات معًا، مع الحفاظ على إطار تركيب خطي. نطبق هذا المراقب على نموذج البندول العكسي الدوراني ونحلل النتائج المتحصل عليها بالمحاكاة.

الكلمات المفتاحية: نظام غير خطي، بندول عكسي دوراني، نمذجة رياضية، مراقب لوينبرغر، مراقب الحالة الموسعة الخطي (بيصو)، نقطة التوازن، تقدير الحالة، الاضطرابات.

Abstract

The objective of this study is to develop state observation strategies for the nonlinear rotary inverted pendulum system. Since our system has four state variables, obtaining a complete estimation of all states from the available measurements alone is challenging. For this reason, state observers are employed.

Two observation approaches are investigated in this study. In the first approach, a Luenberger observer is designed based on the linearized model of the system, and its performance is subsequently analyzed.

In the second approach, a method based on the Linear Extended State Observer (LESO) is explored. This approach augments the system state vector in order to jointly estimate the state variables and the disturbances acting on the system, while maintaining a linear synthesis framework. This observer is applied to the rotary inverted pendulum model and the simulation results are analyzed.

Keywords : Linear system, Rotary inverted pendulum, Mathematical modeling, Luenberger observer, Linear Extended State Observer (LESO), Equilibrium point, State estimation, Disturbances.

Résumé

L'objectif de cette étude est de développer des stratégies d'observation pour le système non linéaire du pendule inversé rotatif. Étant donné que notre système possède quatre états, il est difficile d'obtenir une estimation complète de tous les états à partir des seules mesures disponibles. C'est pourquoi nous avons recours à des observateurs d'état.

Deux approches d'observation sont appliquées dans cette étude. Dans la première approche, nous utilisons l'observateur de Luenberger sur le modèle linéarisé du système, puis nous analysons les performances .

Dans la seconde approche, nous explorons une méthode basée sur l'observateur à état étendu linéaire (LESO). Cette approche augmente le vecteur d'état du système afin d'estimer conjointement les variables d'état et les perturbations agissant sur le système, tout en conservant un cadre de synthèse linéaire. Nous appliquons cet observateur au modèle du pendule inversé rotatif et analysons les résultats obtenus par simulation.

Mots clés : Système linéaire,Système non linéaire, Pendule inversé rotatif, Modélisation mathématique, Observateur de Luenberger, Observateur à état étendu linéaire (LESO), Point d'équilibre, Estimation d'état, Perturbations.

Table des matières

Résumé iv

List of Figures x

List of Tables xii

Abbreviations xiii

Introduction Générale 1

I Principes d'observation et synthèse d'observateurs 3

I.1 Introduction . . . 3

I.2 Définition d'un observateur . . . 3

I.3 Utilité des observateurs . . . 5

I.4 Types d'observateurs . . . 5

I.4.1 Observateur de Luenberger . . . 5

I.4.2 Observateur à entrée inconnue . . . 6

I.4.3 Observateur à modes glissants . . . 7

I.4.4 Observateur à état étendu (ESO) . . . 8

I.4.5 Observateur de Thau . . . 8

I.5 Présentation du PIR . . . 8

I.5.1 Coordonnées généralisées 9
I.5.2 Lagrangien du système 11
I.5.3 Position et vitesse du centre de masse 11
I.5.4 Équations différentielles du mouvement 11
I.5.5 Résolution par la règle de Cramer 12
I.5.6 Représentation d'état du PIR 13
I.6 Conclusion 14

II Synthèse d'un observateur de Luenberger pour le PIR **15**

II.1 Introduction 15
II.2 Systèmes linéaires 15
II.3 Linéarisation du système 16
II.3.1 Points d'équilibre 17
II.3.2 Matrices du modèle linéarisé 17
II.4 Observabilité 17
II.5 Synthèse de l'observateur de Luenberger 18
II.6 Commande LQR 19
II.7 Résultats de simulation 19
II.7.1 Reconstruction des états 20
II.7.2 Reconstruction de la commande LQR 21
II.7.3 Erreurs d'estimation 24
II.8 Conclusion 26

III Observateur à État Étendu Linéaire (LESO) pour le PIR **27**

III.1 Introduction 27
III.2 Principe du LESO 27
III.3 Synthèse du LESO pour le PIR 29

III.3.1 Modèle augmenté (bras + pendule) 29
III.3.2 Calcul des gains ($\beta_1 \dots \beta_6$) 30
III.3.3 Choix de la largeur de bande ω_0 31
III.4 Couplage LESO + LQR 31
III.4.1 Architecture de commande 31
III.4.2 Substitution des vitesses estimées ($\hat{x}_3$, $\hat{x}_4$) 32
III.5 Résultats de simulation 32
III.5.1 Reconstruction des états 33
III.5.2 Reconstruction de la commande LQR 35
III.5.3 Erreurs d'estimation 37
III.6 Test de robustesse 39
III.7 Conclusion 40

Conclusion Générale **41**

Bibliographie **43**

Table des figures

I.1 Schéma bloc général d'un observateur d'état (20) 4

I.2 Schéma bloc de l'observateur de Luenberger (20) 6

I.3 Schéma bloc d'un observateur à entrée inconnue (5) 7

I.4 Schéma bloc d'un observateur à modes glissants (20) 7

I.5 Vue d'ensemble du QUBE-Servo 2 (19) 9

I.6 Schéma cinématique du système bras-pendule (16) 10

II.1 Schéma fonctionnel de la représentation d'état (10) 16

II.2 Structure de l'observateur de Luenberger couplé à la commande LQR (11) . . . 18

II.3 Évolution de l'angle réel et estimé du bras θ. 20

II.4 Évolution de l'angle réel et estimé du pendule α. 20

II.5 Évolution de la vitesse angulaire réelle et estimée du bras $\dot{\theta}$. 21

II.6 Évolution de la vitesse angulaire réelle et estimée du pendule $\dot{\alpha}$. 21

II.7 Angle du bras réel et estimé avec commande LQR basée sur l'observateur. . . . 22

II.8 Angle du pendule réel et estimé avec commande LQR basée sur l'observateur. . 22

II.9 Vitesse angulaire du bras réelle et estimée avec commande LQR. 23

II.10 Vitesse angulaire du pendule réelle et estimée avec commande LQR. 23

II.11 Erreur d'estimation de l'angle du pendule α. 24

II.12 Erreur d'estimation de l'angle du bras θ. 24

II.13 Erreur d'estimation de la vitesse angulaire du pendule $\dot{\alpha}$. 25

II.14 Erreur d'estimation de la vitesse angulaire du bras $\dot{\theta}$. 25

III.1 Évolution de l'angle réel et estimé du bras θ 33

III.2 Évolution de l'angle réel et estimé du pendule α 33

III.3 Évolution de la vitesse angulaire réelle et estimée du bras $\dot{\theta}$ 34

III.4 Évolution de la vitesse angulaire réelle et estimée du pendule $\dot{\alpha}$ 34

III.5 Angle du bras réel et estimé avec commande LQR basée sur l'observateur . . . 35

III.6 Angle du pendule réel et estimé avec commande LQR basée sur l'observateur . 35

III.8 Vitesse angulaire du pendule réelle et estimée avec commande LQR 36

III.7 Vitesse angulaire du bras réelle et estimée avec commande LQR 36

III.9 Erreur d'estimation de l'angle du pendule θ 37

III.10 Erreur d'estimation de l'angle du pendule α 37

III.11 Erreur d'estimation Vitesse angulaire du pendule $\dot{\alpha}$ 38

III.12 Erreur d'estimation Vitesse angulaire du Bras $\dot{\theta}$ 38

III.13 Angle du pendule α sans états estimés (LQR seul) 39

III.14 Angle du pendule α avec états estimés (LQR + LESO) 40

Liste des tableaux

I.1 Composants du QUBE-Servo 2 (19) 9

I.2 Paramètres physiques du QUBE-Servo 2 avec pendule rotatif 10

III.1 Gains du LESO pour le PIR (QUBE-Servo 2) 30

Abbreviations

Acronyme	Signification
ESSAT	École Supérieure en Sciences Appliquées de Tlemcen
PIR	Pendule Inversé Rotatif
LESO	Observateur à État Étendu Linéaire
ESO	Observateur à État Étendu
LQR	Régulateur Linéaire Quadratique
LTI	Système Linéaire Invariant dans le Temps
ADRC	Commande par Rejet Actif des Perturbations
DAQ	Acquisition de Données
DC	Courant Continu
USB	Bus Série Universel

Introduction Générale

Dans le domaine de l'automatique, l'interaction entre la théorie et l'application pratique est plus forte que jamais. Un des éléments clés de cette symbiose est l'observateur, qui est devenu une composante essentielle des systèmes de commande modernes, en particulier dans l'industrie. Le rôle de l'observateur est de fournir une estimation précise de l'état interne d'un système dynamique basée sur les entrées et les sorties mesurées. En fait, en raison de la complexité et de l'imprévisibilité des systèmes industriels, il est souvent impossible ou impraticable de mesurer directement toutes les variables d'état. Dans ce contexte, l'observateur se pose comme une solution permettant une surveillance efficace du système.

Dans ce mémoire, nous nous concentrerons sur les observateurs pour le pendule inversé rotatif, un système non linéaire largement utilisé pour illustrer des concepts clés en automatique. Ce système pose un défi en raison de sa non-linéarité et de sa nature instable. Notre travail est divisé en trois chapitres.

Le premier chapitre de cette étude a pour objectif d'introduire la notion des observateurs. Nous aborderons leur définition, leur utilité, ainsi que les différents types d'observateurs que l'on peut rencontrer. Ensuite, nous présenterons notre système, le pendule inversé rotatif sur la maquette du QUANSER QUBE Servo 2 disponible à notre établissement ESSAT. Nous procéderons ensuite à une modélisation mathématique du système.

Le deuxième chapitre sera consacré à l'application d'un observateur linéaire sur le système du pendule inversé rotatif (PIR), plus précisément l'observateur de Luenberger. Dans un premier temps, nous effectuerons la linéarisation du système autour du point d'équilibre instable afin d'obtenir un modèle linéaire. Cette étape est essentielle, car l'observateur linéaire est spécifiquement conçu pour fonctionner de manière optimale dans la plage de linéarité du système. Ensuite, nous présenterons les résultats des simulations 3D basées sur ce modèle et nous les interpréterons en détail pour évaluer les performances de l'observateur linéaire appliqué au PIR.

Le troisième chapitre est consacré à l'application conjointe de l'observateur à état étendu linéaire (LESO) et de la commande linéaire quadratique (LQR) sur le pendule inversé rotatif. Le LESO est synthétisé à partir du modèle linéarisé du système et permet d'estimer simultanément les variables d'état et les perturbations agissant sur le système, en les traitant comme un état étendu supplémentaire. Les états estimés par le LESO sont ensuite exploités par le régulateur LQR afin de stabiliser le pendule autour de sa position d'équilibre instable. Les résultats obtenus par simulation sont présentés et analysés afin d'évaluer les performances de cette approche basée sur l'estimation d'état.

L'objectif de cette étude est d'évaluer l'efficacité de ces deux approches (l'observateur de Luenberger et l'observateur à état étendu linéaire (LESO)) de comprendre leurs avantages et leurs limites, et de formuler des recommandations quant au choix de l'approche la mieux adaptée aux spécificités du système à commander. Cette étude vise non seulement à consolider la compréhension théorique des observateurs d'état, mais également à fournir des orientations pratiques pour leur mise en œuvre dans un contexte applicatif.

Chapitre I

Principes d'observation et synthèse d'observateurs

I.1 Introduction

La grande majorité des systèmes rencontrés en ingénierie présentent un comportement intrinsèquement non linéaire. Par ailleurs, la mesure directe de l'ensemble des variables d'état est souvent inenvisageable, en raison du coût prohibitif de l'instrumentation ou de l'inaccessibilité physique de certaines grandeurs. C'est dans ce contexte que la théorie des observateurs a été développée comme alternative à la mesure directe (1).

La notion d'observabilité d'un système dynamique désigne la possibilité de reconstruire l'état $x(t)$ à partir de la seule connaissance de la sortie mesurée $y(t)$, de l'entrée $u(t)$, et éventuellement d'un nombre fini de leurs dérivées temporelles (2).

L'objectif de ce chapitre est de présenter les notions fondamentales relatives aux observateurs d'état, en décrivant leurs différentes catégories, leurs principes de fonctionnement et leurs domaines d'application. La modélisation du pendule inversé rotatif (PIR) est ensuite développée afin de servir de support à la mise en œuvre de ces estimateurs.

I.2 Définition d'un observateur

En automatique, la commande par retour d'état suppose la connaissance complète du vecteur d'état $x(t)$ à chaque instant. Or, certaines variables d'état sont physiquement inaccessibles à la mesure, en raison de l'absence de capteurs appropriés ou de contraintes économiques. Pour pallier cette limitation, on fait appel à un *observateur d'état* (3).

Un **observateur d'état** est un système dynamique auxiliaire, piloté par les entrées $u(t)$ et les sorties mesurées $y(t)$ du système réel, qui génère une estimation $\hat{x}(t)$ de l'état $x(t)$, de sorte que l'erreur d'estimation

$$e(t) = x(t) - \hat{x}(t) \tag{I.1}$$

converge vers zéro, asymptotiquement ou en temps fini, indépendamment des conditions initiales (5).

Pour un système dynamique de la forme

$$\Sigma : \begin{cases} \dot{x}(t) = f\big(x(t), u(t)\big) \\ y(t) = h\big(x(t)\big) \end{cases} \tag{I.2}$$

un observateur prend la forme générale suivante (1) :

$$\hat{\Sigma} : \begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = F\big(\hat{x}(t), u(t), y(t)\big) \\ \hat{y}(t) = h\big(\hat{x}(t)\big) \end{cases} \tag{I.3}$$

où $F(\cdot)$ est conçue de manière à assurer la convergence de $\hat{x}(t)$ vers $x(t)$. Deux modalités de convergence sont distinguées (8) :

— **Convergence asymptotique :** $\lim_{t \to +\infty} \big\| e(t) \big\| = 0$, caractéristique de l'observateur de Luenberger classique.

— **Convergence en temps fini :** $\exists\, T^* < +\infty$ tel que $\big\| e(t) \big\| = 0$ pour tout $t \geq T^*$, propriété des observateurs à modes glissants d'ordre supérieur.

La figure I.1 illustre le schéma bloc général d'un observateur d'état.

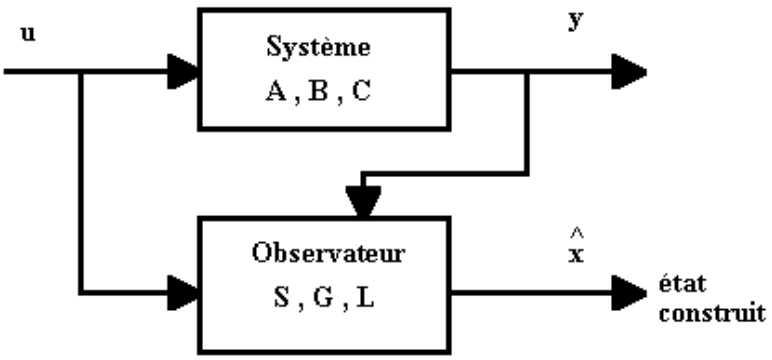


Figure I.1 – Schéma bloc général d'un observateur d'état (20)

I.3 Utilité des observateurs

Le recours aux observateurs est motivé par plusieurs considérations pratiques :

Reconstruction d'états inaccessibles. Certaines variables d'état ne peuvent être mesurées directement pour des raisons technologiques ou économiques.

Amélioration des performances de commande. L'observateur substitue l'état estimé $\hat{x}$ à l'état réel x dans la loi de commande par retour d'état.

Robustesse vis-à-vis du bruit de mesure. Un observateur correctement dimensionné filtre le bruit et fournit une estimation lissée des variables d'état.

Détection et isolation de défauts. Le résidu d'observation, écart entre sortie mesurée et sortie estimée, peut être exploité à des fins de diagnostic.

Estimation paramétrique. Dans certaines architectures adaptatives, l'observateur est étendu pour estimer simultanément les paramètres inconnus du modèle.

I.4 Types d'observateurs

On distingue classiquement plusieurs catégories d'observateurs (5) :

1. **Observateurs déterministes** : conçus pour des systèmes exempts de bruit. L'observateur de Luenberger en est le représentant le plus répandu pour les systèmes linéaires.
2. **Observateurs stochastiques** : fournissent une estimation optimale au sens de la variance minimale en présence de bruits gaussiens. Le filtre de Kalman (12) en constitue l'exemple canonique.
3. **Observateurs non linéaires** : conçus spécifiquement pour les systèmes non linéaires, soit par linéarisation autour d'un point d'équilibre, soit par prise en compte explicite des non-linéarités dans la construction du gain d'observation.

I.4.1 Observateur de Luenberger

L'observateur de Luenberger est un estimateur d'état linéaire applicable aux systèmes LTI. Sa structure comprend une copie du modèle dynamique du système, corrigée par un terme proportionnel à l'écart entre la sortie réelle et la sortie estimée. Son principal atout réside dans sa simplicité de mise en œuvre (4).

Pour un système linéaire

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \tag{I.4}$$

l'observateur de Luenberger s'écrit :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + Bu(t) + L\big(y(t) - C\hat{x}(t)\big) \\ \hat{y}(t) = C\hat{x}(t) \end{cases} \tag{I.5}$$

La convergence est assurée si $(A - LC)$ est Hurwitz, c'est-à-dire si toutes ses valeurs propres ont une partie réelle strictement négative (4).

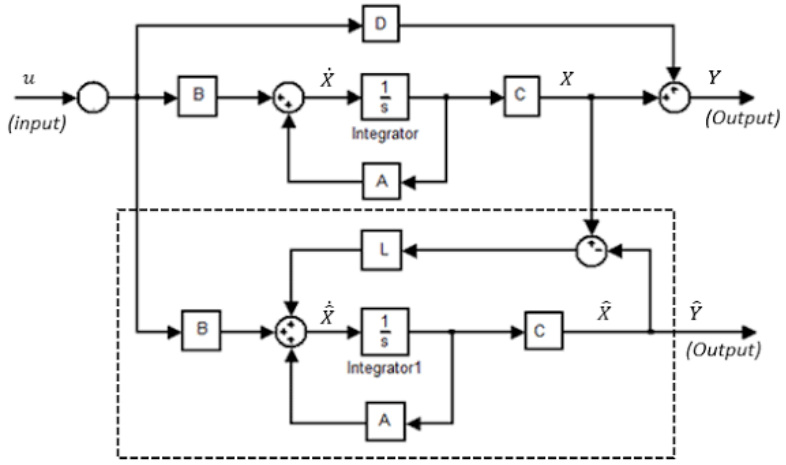


FIGURE I.2 – Schéma bloc de l'observateur de Luenberger (20)

I.4.2 Observateur à entrée inconnue

Un observateur à entrée inconnue est spécialement conçu pour estimer l'état d'un système dont certaines entrées sont inaccessibles ou totalement inconnues. Pour un système linéaire soumis à une perturbation $d(t)$:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + Fd(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \tag{I.6}$$

la structure de l'observateur est :

$$\begin{cases} \dot{\xi}(t) = N\xi(t) + Hu(t) + Jy(t) \\ \hat{x}(t) = \xi(t) - Ey(t) \end{cases} \tag{I.7}$$

où les matrices N, H, J et E sont déterminées de façon à annuler l'effet de la perturbation inconnue sur l'erreur d'estimation.

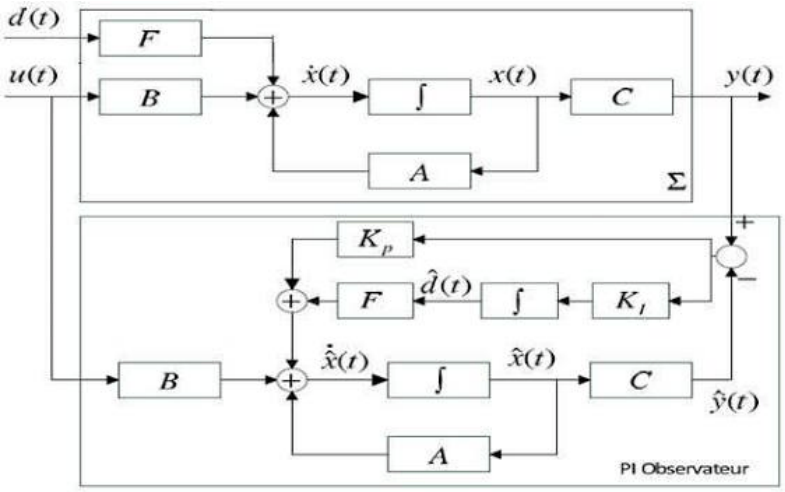


FIGURE I.3 – Schéma bloc d'un observateur à entrée inconnue (5)

I.4.3 Observateur à modes glissants

Les observateurs à modes glissants sont fondés sur la théorie des systèmes à structure variable. Leur principe consiste à contraindre l'erreur d'estimation à converger vers une surface de glissement d'ordre $(n-p)$, garantissant attractivité et invariance (21). Pour un système non linéaire observable, l'observateur à modes glissants d'ordre 1 s'écrit (7) :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = f(\hat{x}, u) + \lambda \operatorname{sgn}(y - \hat{y}) \\ \hat{y} = h(\hat{x}) \end{cases} \tag{I.8}$$

où $\lambda \in \mathbb{R}^{n \times p}$ est la matrice de gain correctif. L'inconvénient majeur est le phénomène de *chattering* lié à la discontinuité de la loi de commutation.

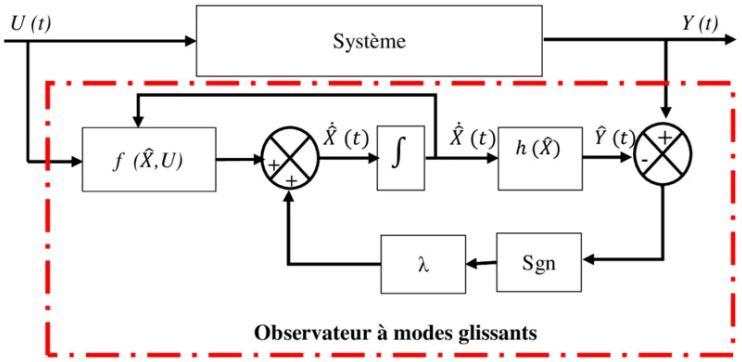


FIGURE I.4 – Schéma bloc d'un observateur à modes glissants (20)

I.4.4 Observateur à état étendu (ESO)

L'observateur à état étendu (ESO), proposé par Han dans le cadre de l'ADRC, augmente le vecteur d'état en incluant les perturbations inconnues comme variable supplémentaire à estimer (17). Pour un système du second ordre :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = f(x_1, x_2, t) + b\,u(t) \\ y = x_1 \end{cases} \tag{I.9}$$

on introduit $x_3 = f(\cdot)$, et la version linéaire de l'ESO (LESO, proposée par Gao (18)) s'écrit :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}_1 = \hat{x}_2 + \beta_1(y - \hat{x}_1) \\ \dot{\hat{x}}_2 = \hat{x}_3 + \beta_2(y - \hat{x}_1) + b\,u \\ \dot{\hat{x}}_3 = \beta_3(y - \hat{x}_1) \end{cases} \tag{I.10}$$

Les gains sont paramétrés par la largeur de bande ω_o : $\beta_1 = 3\omega_o$, $\beta_2 = 3\omega_o^2$, $\beta_3 = \omega_o^3$.

I.4.5 Observateur de Thau

L'observateur de Thau, ou observateur de Lipschitz, fournit une condition suffisante de stabilité exponentielle pour les systèmes non linéaires vérifiant une condition de Lipschitz (23). Pour un système transformé sous la forme :

$$\begin{cases} \dot{z} = Az + Bu + p(x) \\ y = Cz \end{cases} \tag{I.11}$$

l'observateur est :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + p(\hat{x}) + L(y - C\hat{x}) \\ \hat{y} = C\hat{x} \end{cases} \tag{I.12}$$

La stabilité est garantie si $p(x)$ vérifie : $\|p(x_1) - p(x_2)\| \leq k\,\|x_1 - x_2\|$ pour une constante $k > 0$, et si le gain L est choisi de façon à compenser cet effet non linéaire.

I.5 Présentation du PIR

Le PIR est un dispositif de référence pour l'apprentissage de la modélisation et de la commande. Il se compose d'un bras rotatif entraîné par un servomoteur, dont la position angulaire

est notée θ, et d'un pendule articulé à l'extrémité du bras, dont l'inclinaison est notée α.

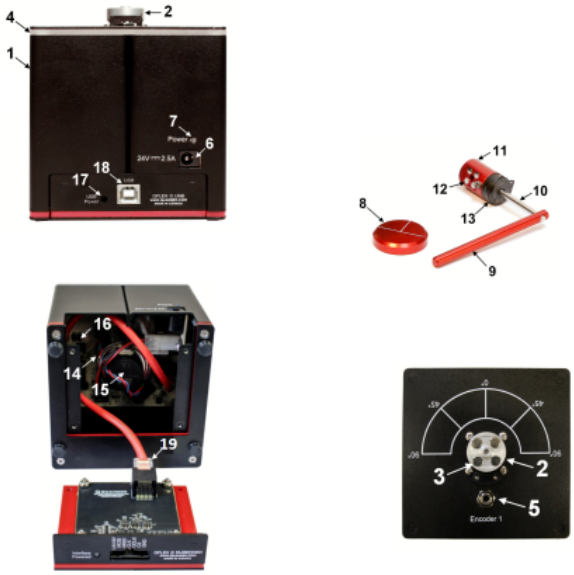


Figure I.5 – Vue d'ensemble du QUBE-Servo 2 (19)

N°	Composants	N°	Composants
1	Chassis	11	Rotary arm hub
2	Module connector	12	Rotary pendulum magnets
3	Module connector magnets	13	Pendulum encoder
4	Status LED strip	14	DC motor
5	Module encoder connector	15	Motor encoder
6	Power connector	16	QUBE-SERVO 2 DAQ/amplifier board
7	System power LED	17	Interface power LED
8	Inertia disc	18	USB connector
9	Pendulum link	19	Internal Data bus
10	Rotary arm rod		

Table I.1 – Composants du QUBE-Servo 2 (19)

I.5.1 Coordonnées généralisées

Le PIR possède deux degrés de liberté : l'angle θ décrivant la rotation du bras dans le plan horizontal, et l'angle α mesurant l'inclinaison du pendule par rapport à la verticale. La figure **??** illustre la géométrie du système.

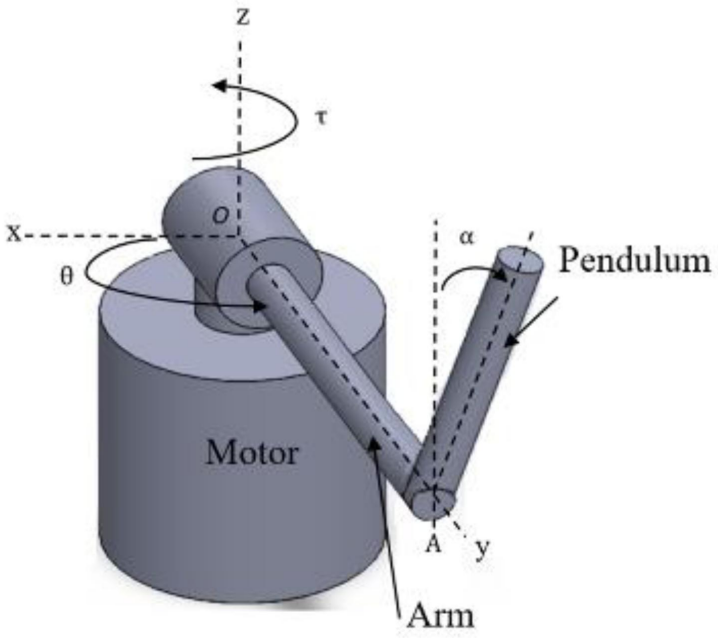


Figure I.6 – Schéma cinématique du système bras-pendule (16)

La figure I.6 présente le schéma du pendule inversé rotatif (PIR). Le bras est entraîné par le moteur, ce qui provoque sa rotation et, par conséquent, celle du pendule. Dans toute la modélisation, l'origine sera prise à la position haute du pendule (position d'équilibre instable).Les paramètres et leurs valeurs sont r esumes dans le tableau suivant :

Table I.2 – Paramètres physiques du QUBE-Servo 2 avec pendule rotatif

Symbole	**Description**	**Valeur**	**Unité**
m_p	Masse du pendule	0,024	kg
L_r	Longueur du bras rotatif	0,085	m
L_p	Longueur totale du pendule	0,129	m
J_r	Moment d'inertie du bras (axe moteur)	$5{,}72 \times 10^{-5}$	kg m^2
J_p	Moment d'inertie du pendule (centre de masse)	$3{,}33 \times 10^{-5}$	kg m^2
D_r	Coefficient d'amortissement visqueux du bras	$1{,}5 \times 10^{-3}$	N m s/rad
D_p	Coefficient d'amortissement visqueux du pendule	$5{,}0 \times 10^{-4}$	N m s/rad
k_t	Constante de couple du moteur	0,042	N m/A
k_m	Constante contre-électromotrice	0,042	V s/rad
R_m	Résistance d'armature du moteur	8,4	Ω
g	Accélération de la pesanteur	9,81	m/s^2

I.5.2 Lagrangien du système

L'approche lagrangienne repose sur la définition $\mathcal{L} = E_c - E_p$. Les énergies cinétiques du bras et du pendule sont respectivement :

$$E_{c,\text{bras}} = \frac{1}{2} J_r \dot{\theta}^2, \qquad E_{c,\text{pendule}} = \frac{1}{2} m_p \dot{P}^2 + \frac{1}{2} J_p \dot{\alpha}^2$$

L'énergie potentielle, nulle pour le bras (plan horizontal), se réduit à :

$$E_p = \frac{1}{2} m_p g L_p \cos\alpha \tag{I.13}$$

I.5.3 Position et vitesse du centre de masse

La position du centre de masse du pendule est :

$$\begin{cases} P_x = L_r \cos\theta + \frac{1}{2} L_p \sin\alpha \sin\theta \\ P_y = L_r \sin\theta - \frac{1}{2} L_p \sin\alpha \cos\theta \\ P_z = \frac{1}{2} L_p \cos\alpha \end{cases} \tag{I.14}$$

Après calcul de $\dot{P}^2$, l'énergie cinétique totale devient :

$$E_c = \frac{1}{2}\left(J_r + m_p L_r^2 + \tfrac{1}{4} m_p L_p^2 \sin^2\alpha\right)\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}\left(J_p + \tfrac{1}{4} m_p L_p^2\right)\dot{\alpha}^2 - \frac{1}{2} m_p L_r L_p \cos\alpha\, \dot{\theta}\dot{\alpha} \tag{I.15}$$

I.5.4 Équations différentielles du mouvement

L'application des équations d'Euler-Lagrange conduit aux deux équations différentielles décrivant la dynamique du PIR :

$$\begin{aligned} &\ddot{\theta}\left(J_r + m_p L_r^2 + \frac{1}{4} m_p L_p^2 \sin^2\alpha\right) + \ddot{\alpha}\left(-\frac{1}{2} m_p L_p L_r \cos\alpha\right) \\ &\quad + \dot{\alpha}\dot{\theta}\left(\frac{1}{2} m_p L_p^2 \sin\alpha\cos\alpha\right) + \dot{\alpha}^2\left(\frac{1}{2} m_p L_r L_p \sin\alpha\right) = Q_1 \end{aligned} \tag{I.16}$$

$$\ddot{\theta}\left(-\frac{1}{2}m_pL_rL_p\cos\alpha\right)+\ddot{\alpha}\left(J_p+\frac{1}{4}m_pL_p^2\right)$$
$$+\dot{\theta}^2\left(-\frac{1}{4}m_pL_p^2\sin\alpha\cos\alpha\right)-\frac{1}{2}m_pgL_p\sin\alpha=Q_2 \tag{I.17}$$

Ces équations se mettent sous la forme d'un système 2×2 en les inconnues $\ddot{\theta}$ et $\ddot{\alpha}$:

$$\begin{cases} a\,\ddot{\theta}+b\,\ddot{\alpha}=c \\ a_1\ddot{\theta}+b_1\ddot{\alpha}=c_1 \end{cases} \tag{I.18}$$

avec :

$$a=J_r+m_pL_r^2+\frac{1}{4}m_pL_p^2\sin^2\alpha, \tag{I.19}$$
$$b=-\frac{1}{2}m_pL_rL_p\cos\alpha, \tag{I.20}$$
$$c=\tau-B_r\dot{\theta}-\left[\dot{\alpha}\dot{\theta}\left(\frac{1}{2}m_pL_p^2\sin\alpha\cos\alpha\right)+\dot{\alpha}^2\left(\frac{1}{2}m_pL_rL_p\sin\alpha\right)\right], \tag{I.21}$$
$$a_1=-\frac{1}{2}m_pL_rL_p\cos\alpha, \tag{I.22}$$
$$b_1=J_p+\frac{1}{4}m_pL_p^2, \tag{I.23}$$
$$c_1=-B_p\dot{\alpha}-\left[\dot{\theta}^2\left(-\frac{1}{4}m_pL_p^2\sin\alpha\cos\alpha\right)-\frac{1}{2}m_pgL_p\sin\alpha\right]. \tag{I.24}$$

I.5.5 Résolution par la règle de Cramer

Le système (I.18) est résolu par la règle de Cramer :

$$\ddot{\theta}=\frac{\det_1}{\det},\qquad \ddot{\alpha}=\frac{\det_2}{\det} \tag{I.25}$$

Le déterminant principal est :

$$\det=(J_r+m_pL_r^2)\left(J_p+\frac{1}{4}m_pL_p^2\right)+\frac{1}{4}m_pL_p^2\sin^2\alpha\left(J_p+\frac{1}{4}m_pL_p^2\right)+\frac{1}{4}\left(m_pL_pL_r\cos\alpha\right)^2 \tag{I.26}$$

Les déterminants au numérateur sont donnés par :

$$\det_1=\left[\tau-B_r\dot{\theta}-\left(\frac{1}{2}m_pL_p^2\sin\alpha\cos\alpha\right)\dot{\alpha}\dot{\theta}-\left(\frac{1}{2}m_pL_r\sin\alpha\right)\dot{\alpha}^2\right]\left(J_p+\frac{1}{4}m_pL_p^2\right)$$
$$-\left[-B_p\dot{\alpha}+\left(\frac{1}{4}m_pL_p^2\sin\alpha\cos\alpha\right)\dot{\theta}^2+\frac{1}{2}m_pgL_p\sin\alpha\right]\left(-\frac{1}{2}m_pL_rL_p\cos\alpha\right) \tag{I.27}$$

$$\det_2 = \left[-B_p\dot{\alpha} + \left(\frac{1}{4}m_pL_p^2\sin\alpha\cos\alpha\right)\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m_pgL_p\sin\alpha\right]\left(J_r + m_pL_p^2 + \frac{1}{4}m_pL_p^2\sin^2\alpha\right) - \left[\tau - B_r\dot{\theta} - \left(\frac{1}{2}m_pL_p^2\sin\alpha\cos\alpha\right)\dot{\alpha}\dot{\theta} - \left(\frac{1}{2}m_pL_r\sin\alpha\right)\dot{\alpha}^2\right]\left(-\frac{1}{2}m_pL_rL_p\cos\alpha\right) \tag{I.28}$$

En développant l'expression du couple moteur , on obtient :

$$\tau = \frac{\eta_s\eta_mK_sK_t}{R_m}V_m - \frac{\eta_s\eta_mK_mK_tK_s^2}{R_m}\dot{\theta} \tag{I.29}$$

I.5.6 Représentation d'état du PIR

La représentation d'état en contrôle automatique renvoie à la manière dont on décrit le comportement d'un système via une description formelle de ses divers états. Cela permet d'acquérir une vision intégrale de la dynamique du système, y compris sa variation temporelle. Il s'agit d'un outil fondamental pour la modélisation, l'analyse, la conception et l'implémentation de systèmes. Cela peut contribuer à l'amélioration de la stabilité, des performances et de la fiabilité des systèmes.

Dans notre cas, le PIR est un système non linéaire ; sa représentation d'état s'écrit comme suit :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_3 \\ \dot{x}_2 = x_4 \\ \dot{x}_3 = f_1(x) + g_1(x)\,u \\ \dot{x}_4 = f_2(x) + g_2(x)\,u \end{cases} \tag{I.30}$$

avec le vecteur d'état donné comme suit :

$$x = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix}^\top = \begin{pmatrix} \theta & \alpha & \dot{\theta} & \dot{\alpha} \end{pmatrix}^\top \tag{I.31}$$

où $u = V_m$ est la tension de commande et les fonctions non linéaires sont :

$$f_1(x) = \frac{\left[-\frac{\eta_s\eta_mK_mK_tK_s^2}{R_m}x_3 - B_rx_3 - \left(\frac{1}{2}m_pL_p^2\sin x_2\cos x_2\right)x_4x_3 - \left(\frac{1}{2}m_pL_r\sin x_2\right)x_4^2\right]\left(J_p + \frac{1}{4}m_pL_p^2\right)}{\det} - \frac{\left[-B_px_4 + \left(\frac{1}{4}m_pL_p^2\sin x_2\cos x_2\right)x_3^2 + \frac{1}{2}m_pgL_p\sin x_2\right]\left(-\frac{1}{2}m_pL_rL_p\cos x_2\right)}{\det} \tag{I.32}$$

$$g_1(x) = \frac{J_p + \frac{1}{4} m_p L_p^2}{\det} \cdot \frac{\eta_s \eta_m K_s K_t}{R_m} \tag{I.33}$$

$$f_2(x) = \frac{\left[-B_p x_4 + \left(\frac{1}{4} m_p L_p^2 \sin x_2 \cos x_2 \right) x_3^2 + \frac{1}{2} m_p g L_p \sin x_2 \right] \left(J_r + m_p L_p^2 + \frac{1}{4} m_p L_p^2 \sin^2 x_2 \right)}{\det} - \frac{\left[-\frac{\eta_s \eta_m K_m K_t K_s^2}{R_m} x_3 - B_r x_3 - \left(\frac{1}{2} m_p L_p^2 \sin x_2 \cos x_2 \right) x_4 x_3 - \left(\frac{1}{2} m_p L_r \sin x_2 \right) x_4^2 \right] \left(-\frac{1}{2} m_p L_r L_p \cos \right.}{\det} \tag{I.34}$$

$$g_2(x) = \frac{-\frac{1}{2} m_p L_r L_p \cos x_2}{\det} \cdot \frac{\eta_s \eta_m K_s K_t}{R_m} \tag{I.35}$$

avec :

$$\det = \left(J_r + m_p L_p^2 \right) \left(J_p + \frac{1}{4} m_p L_p^2 \right) + \frac{1}{4} m_p L_p^2 \sin^2 x_2 \left(J_p + \frac{1}{4} m_p L_p^2 \right) + \frac{1}{4} \left(m_p L_p L_r \cos x_2 \right)^2 \tag{I.36}$$

I.6 Conclusion

Ce chapitre a posé les bases théoriques nécessaires à la mise en œuvre des observateurs d'état : définition, propriétés de convergence, principales familles d'estimateurs, et modélisation du PIR. La disponibilité de ce modèle d'état constitue le point de départ indispensable pour la synthèse des observateurs développée dans les chapitres suivants.

Chapitre II

Synthèse d'un observateur de Luenberger pour le PIR

II.1 Introduction

Fort des bases théoriques établies au chapitre précédent et disposant du modèle mathématique complet du PIR, ce chapitre est consacré à la synthèse et à la validation de l'observateur de Luenberger. La démarche adoptée s'articule en trois étapes successives : la linéarisation du modèle non linéaire au voisinage du point d'équilibre instable, la conception de l'observateur par placement de pôles, et enfin l'analyse des résultats de simulation obtenus en couplant cet observateur à une commande LQR.

II.2 Systèmes linéaires

Un système linéaire est un système physique ou mathématique dont le comportement est régi par des équations différentielles linéaires et qui satisfait le principe de superposition. Ce principe se décline en deux propriétés (10) : l'**additivité**, selon laquelle la réponse à une somme de signaux est égale à la somme des réponses individuelles, et l'**homogénéité**, selon laquelle la multiplication de l'entrée par un scalaire α produit la multiplication de la sortie par ce même scalaire.

Lorsqu'un système est intrinsèquement non linéaire, il peut néanmoins être approximé localement par un modèle linéaire au voisinage d'un point de fonctionnement donné. Cette approximation, fondée sur le développement de Taylor au premier ordre, est valide dans un voisinage restreint du point considéré et permet d'exploiter l'arsenal des méthodes linéaires pour l'analyse

et la synthèse de commande (1; 9).

II.3 Linéarisation du système

Le PIR est un système sous-actionné à une seule entrée u, gouvernant simultanément les deux degrés de liberté θ et α. La linéarisation autour du point d'équilibre instable est conduite par développement jacobien (1) :

$$A = \left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_{x=\tilde{x}}, \qquad B = \left.\frac{\partial G}{\partial u}\right|_{x=\tilde{x},\, u=0} \tag{II.1}$$

La représentation d'état d'un système linéaire invariant dans le temps s'écrit :

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases} \tag{II.2}$$

où les grandeurs sont définies comme suit : $x \in \mathbb{R}^n$ le vecteur d'état, $u \in \mathbb{R}^m$ l'entrée de commande, $y \in \mathbb{R}^p$ la sortie, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ la matrice de dynamique, $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$ la matrice d'entrée, $C \in \mathbb{R}^{p\times n}$ la matrice de sortie, et $D \in \mathbb{R}^{p\times m}$ la matrice de transmission directe, généralement nulle en pratique.

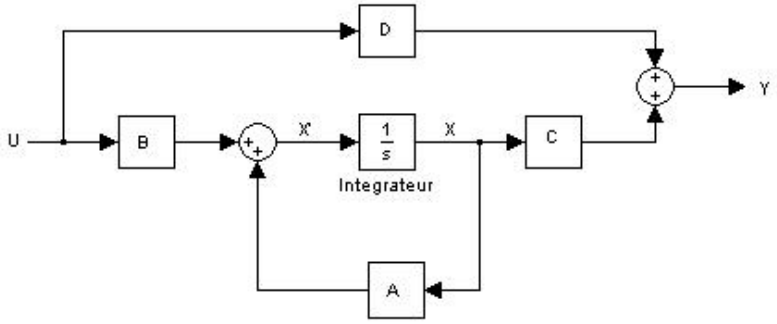


Figure II.1 – Schéma fonctionnel de la représentation d'état (10)

La linéarisation repose sur le développement de Taylor au premier ordre, c'est-à-dire sur le calcul de la matrice jacobienne du champ de vecteurs (9). Sa validité reste confinée au voisinage restreint du point d'équilibre considéré.

II.3.1 Points d'équilibre

Un point d'équilibre $\tilde{x}$ est un état pour lequel la dérivée temporelle du vecteur d'état s'annule identiquement en l'absence de sollicitation extérieure. Pour le PIR, la condition $\dot{x}_i = 0$ conduit à $\sin\alpha = 0$, soit $\alpha = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

II.3.2 Matrices du modèle linéarisé

Après substitution des paramètres numériques du QUBE-Servo 2 (19), les matrices du modèle linéarisé autour de $\tilde{x}_1$ sont :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 149.2751 & -0.0104 & 0 \\ 0 & 261.6091 & -0.0103 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 49.7275 \\ 49.1493 \end{pmatrix} \tag{II.3}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = 0 \tag{II.4}$$

II.4 Observabilité

L'observabilité est une propriété structurelle traduisant la possibilité de reconstruire de manière unique le vecteur d'état à partir des seules mesures d'entrée et de sortie sur un intervalle de temps fini (12). Le système est observable si et seulement si la matrice d'observabilité :

$$\mathcal{O} = \begin{pmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ CA^3 \end{pmatrix} \tag{II.5}$$

est de rang plein, c'est-à-dire $\text{rang}(\mathcal{O}) = n$. Pour le PIR, le calcul numérique donne $\text{rang}(\mathcal{O}) = 4 = n$, confirmant que l'état complet peut être reconstruit à partir des seules mesures de θ et α.

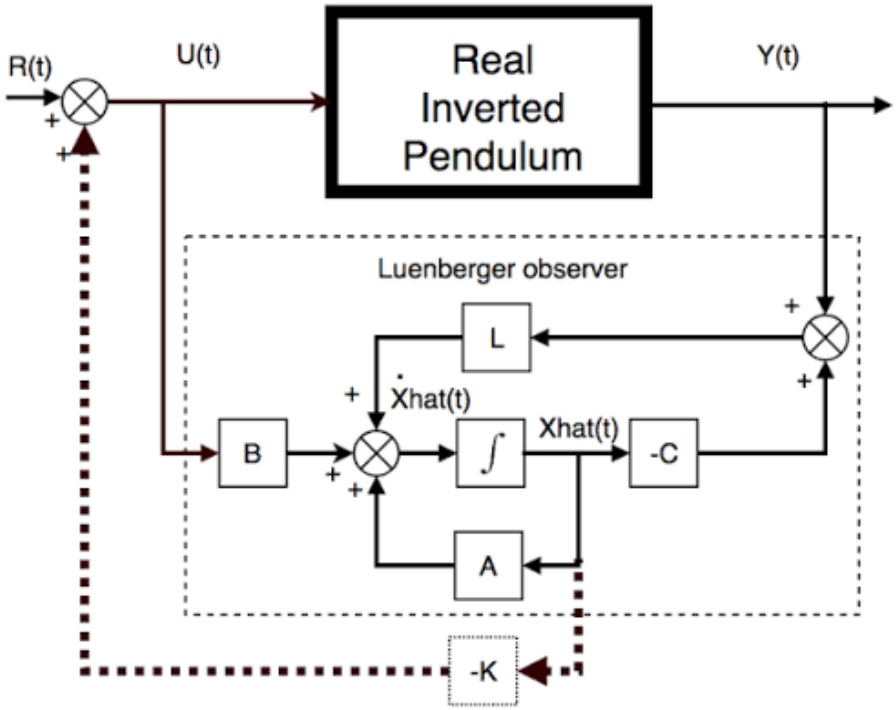


FIGURE II.2 – Structure de l'observateur de Luenberger couplé à la commande LQR (11)

II.5 Synthèse de l'observateur de Luenberger

L'observateur de Luenberger corrige en boucle fermée l'estimation en pondérant l'écart entre sortie mesurée et sortie estimée par le gain L (4) :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + Bu(t) + L\big(y(t) - C\hat{x}(t)\big) \\ \hat{y}(t) = C\hat{x}(t) \end{cases} \tag{II.6}$$

L'erreur d'estimation $e = x - \hat{x}$ obéit à la dynamique :

$$\dot{e}(t) = (A - LC)\, e(t) \tag{II.7}$$

La convergence asymptotique est garantie si et seulement si $(A - LC)$ est Hurwitz, c'est-à-dire si toutes ses valeurs propres ont une partie réelle strictement négative.

Calcul du gain L. Le gain est déterminé par placement de pôles via la commande MATLAB `place(A', C', P)`, pour les pôles désirés $P = \{-150,\ -160,\ -170,\ -180\}$:

$$L = 10^4 \begin{pmatrix} 0.0329 & -0.0007 \\ -0.0012 & 0.0331 \\ 2.6944 & -0.1066 \\ -0.1920 & 2.7601 \end{pmatrix} \tag{II.8}$$

II.6 Commande LQR

Afin de valider le comportement de l'observateur, une commande linéaire quadratique (LQR) est synthétisée préalablement (14). Le régulateur minimise le critère quadratique :

$$J = \int_0^\infty \left(x^\top Q\, x + u^\top R\, u \right) \mathrm{d}t \tag{II.9}$$

Le gain optimal $K = R^{-1} B^\top P$ est obtenu en résolvant l'équation algébrique de Riccati :

$$A^\top P + PA - PBR^{-1}B^\top P + Q = 0 \tag{II.10}$$

Les matrices de pondération retenues sont :

$$Q = \mathrm{diag}(1,\ 1,\ 1,\ 20), \qquad R = 1 \tag{II.11}$$

La commande `lqr` de MATLAB fournit le gain optimal :

$$K = \begin{pmatrix} -1 & 47{,}7475 & -1{,}3175 & 6{,}1208 \end{pmatrix} \tag{II.12}$$

avec les pôles en boucle fermée :

$$P_{\mathrm{BF}} = \{-226{,}49;\ -3{,}92 \pm 3{,}11j;\ -1{,}00\} \tag{II.13}$$

II.7 Résultats de simulation

Les expériences ont été réalisées sur le système réel **QUBE-Servo 2**, interfacé avec l'environnement Simulink de MATLAB. Le système comporte quatre variables d'état : l'angle du bras θ et l'angle du pendule α, mesurés directement par les encodeurs, ainsi que les vitesses an-

gulaires $\dot{\theta}$ et $\dot{\alpha}$, reconstruites par filtres passe-haut. L'évaluation se déroule en deux phases : une comparaison des états estimés aux états réels mesurés, suivie de la substitution de ces estimations dans la loi de commande LQR afin de valider la stabilisation du pendule en position inverse. Afin d'amener le pendule dans la zone de linéarité, une stratégie de **swing-up** est utilisée : elle consiste à imprimer au bras des oscillations successives permettant d'accumuler de l'énergie jusqu'à ce que le pendule atteigne le voisinage du point d'équilibre instable $\tilde{x}_1$, où la commande LQR prend alors le relais pour assurer la stabilisation.

II.7.1 Reconstruction des états

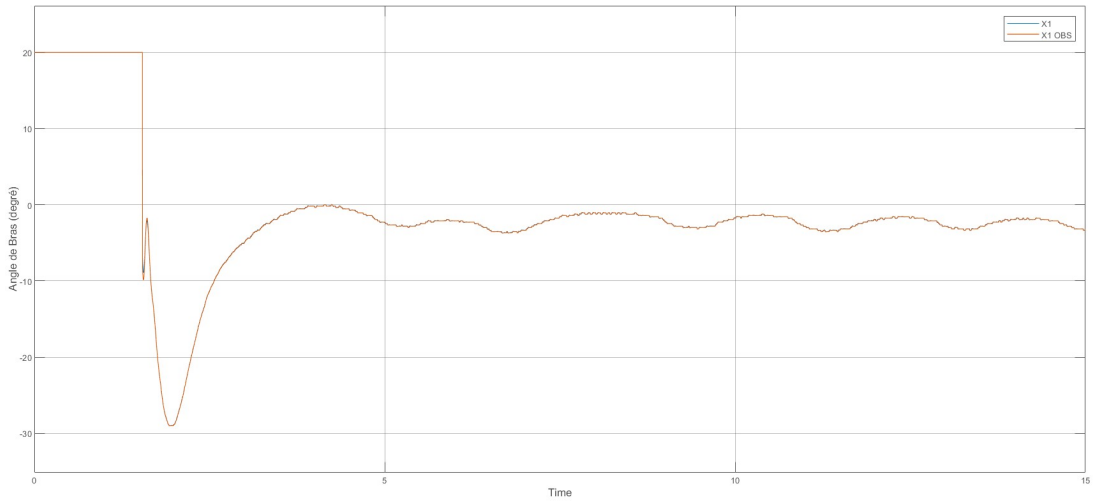


Figure II.3 – Évolution de l'angle réel et estimé du bras θ.

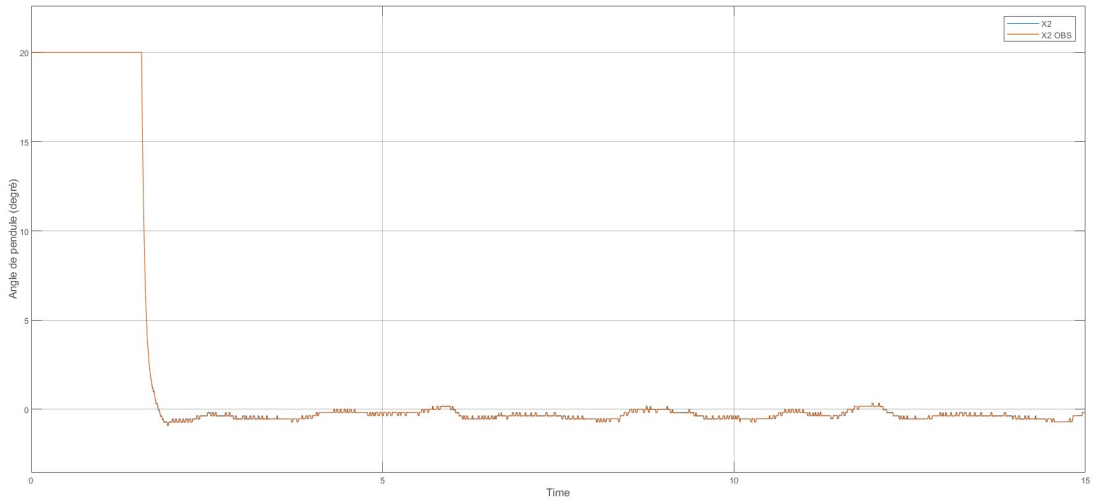


Figure II.4 – Évolution de l'angle réel et estimé du pendule α.

Les figures II.3 et II.4 comparent les trajectoires réelles et estimées des angles du bras et du pendule. Pour θ, l'état réel x_1 reste proche de 0° tandis que $x_{1,\text{obs}}$ diverge initialement en raison de conditions initiales défavorables, avant de converger progressivement à partir de $t = 7$ s. Pour

α, l'état réel x_2 part de $-180°$ et rejoint $0°$; l'estimation $x_{2,\text{obs}}$, partie de $-20°$, atteint $-100°$ puis converge après 6,5 s, confirmant la robustesse de l'observateur face aux écarts initiaux.

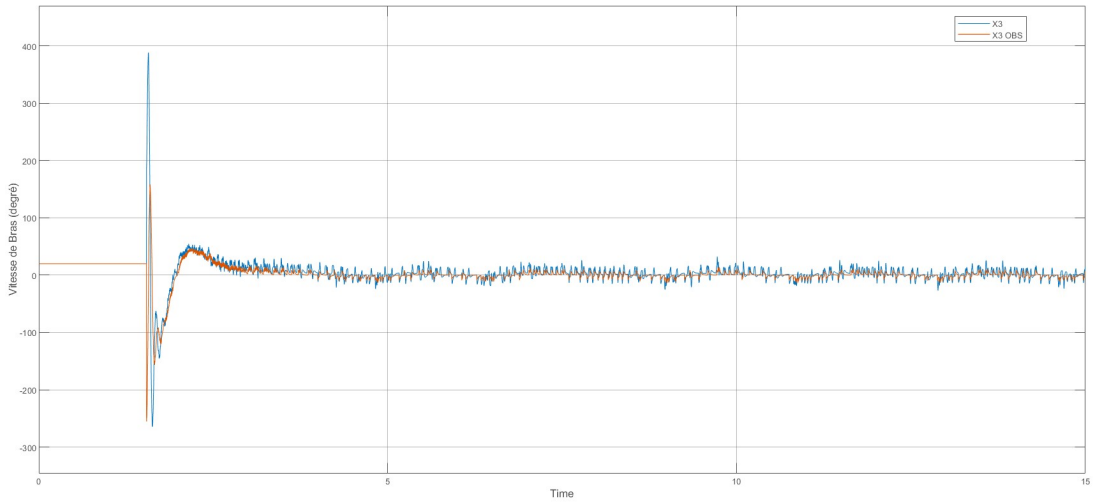


FIGURE II.5 – Évolution de la vitesse angulaire réelle et estimée du bras $\dot{\theta}$.

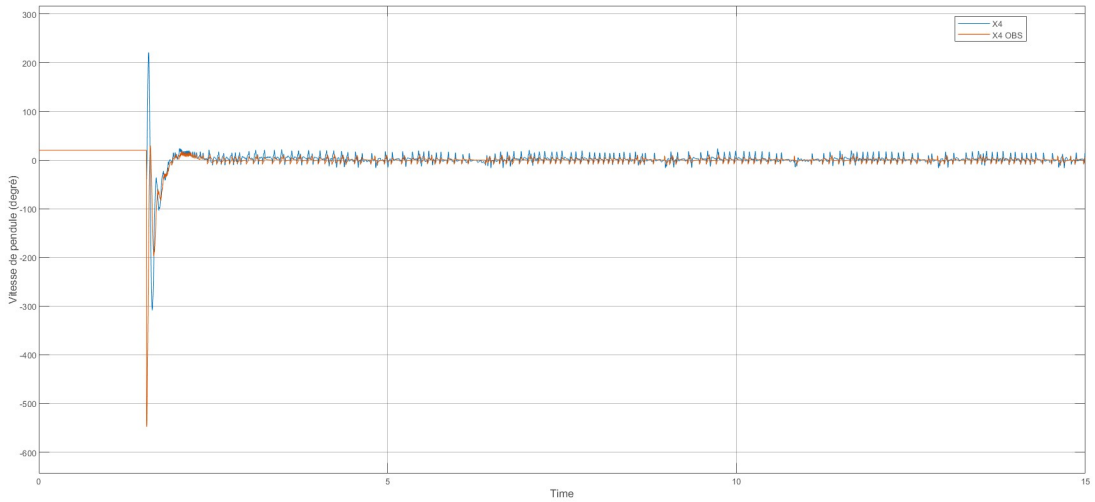


FIGURE II.6 – Évolution de la vitesse angulaire réelle et estimée du pendule $\dot{\alpha}$.

Les figures II.5 et II.6 illustrent respectivement l'évolution de $\dot{\theta}$ et $\dot{\alpha}$, réelles et estimées, sous commande LQR. Les estimations $x_{3,\text{obs}}$ et $x_{4,\text{obs}}$ suivent fidèlement les valeurs réelles x_3 et x_4, avec une convergence rapide vers 0 deg/s : $\dot{\theta}$ se stabilise en environ 3,5 s et $\dot{\alpha}$ en 3 s, tandis que l'erreur résiduelle s'annule complètement après 7 s.

II.7.2 Reconstruction de la commande LQR

Les états estimés présentant une forte concordance avec les états réels, la commande LQR est reconstruite uniquement à partir des estimations de l'observateur, afin d'évaluer la stabilisation du PIR en boucle fermée.

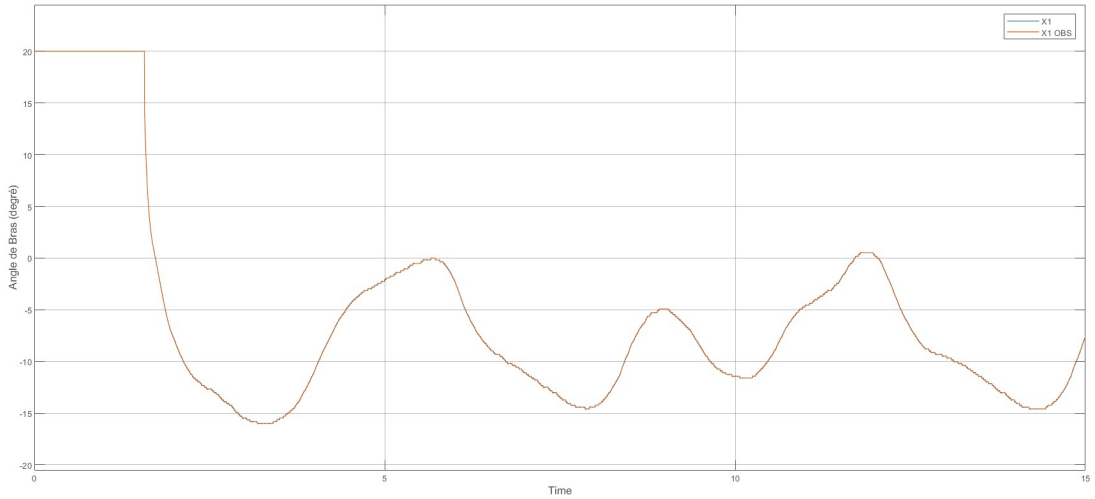


FIGURE II.7 – Angle du bras réel et estimé avec commande LQR basée sur l'observateur.

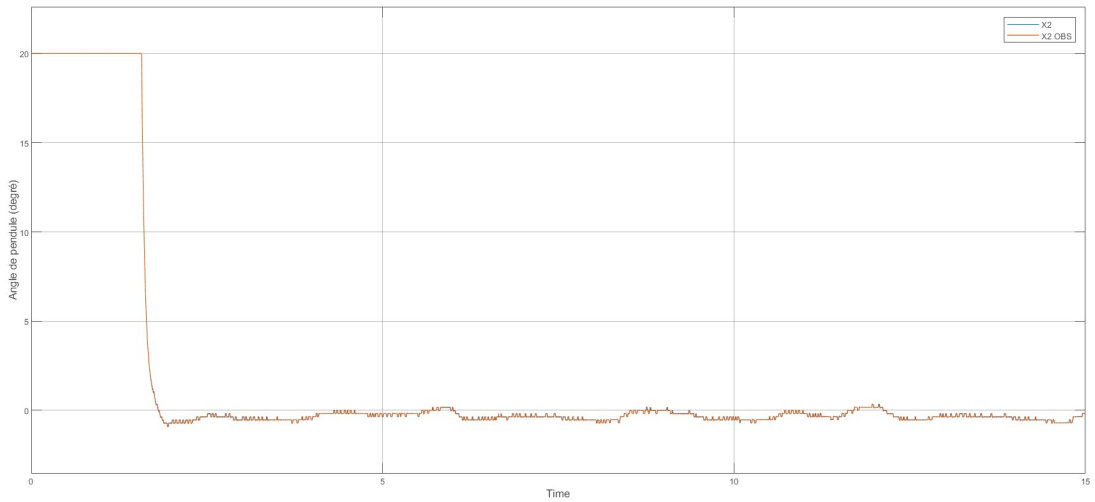


FIGURE II.8 – Angle du pendule réel et estimé avec commande LQR basée sur l'observateur.

Les figures II.7 et II.8 présentent respectivement l'évolution de θ et α, réels et estimés, lors de l'application de la commande LQR basée uniquement sur les états estimés par l'observateur de Luenberger. Pour θ, x_1 et $x_{1,\text{obs}}$ partent de 20° et présentent des oscillations amorties avec un pic négatif d'environ $-15°$ à $t \approx 3$ s, puis une amplitude décroissante ; les deux courbes se superposent parfaitement, confirmant le maintien contrôlé du bras autour de $\theta = 0°$. Pour α, x_2 et $x_{2,\text{obs}}$ partent de 30° et convergent vers $\alpha = 0°$ en 3 s, avec des oscillations résiduelles inférieures à 1°, témoignant de la stabilisation efficace du pendule autour de son point d'équilibre instable.

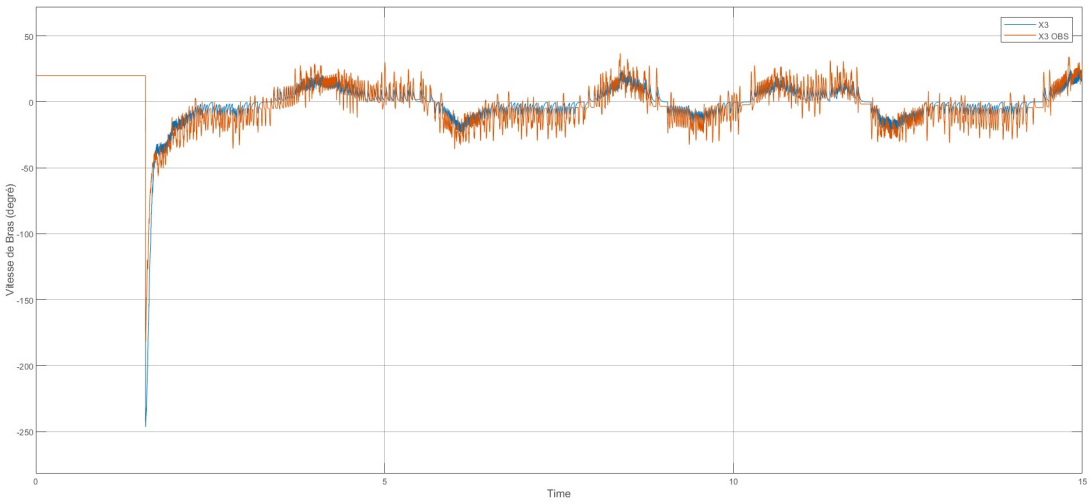


FIGURE II.9 – Vitesse angulaire du bras réelle et estimée avec commande LQR.

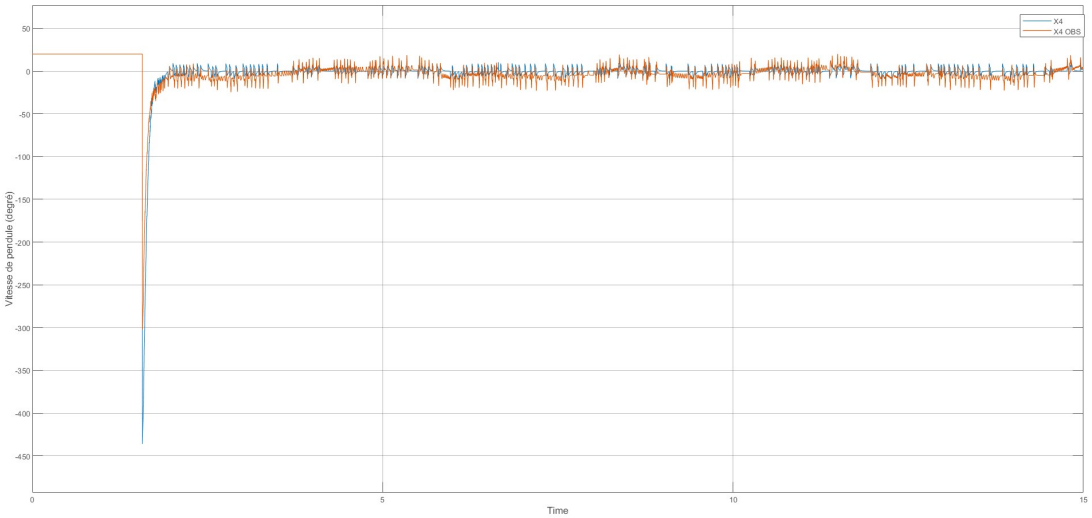


FIGURE II.10 – Vitesse angulaire du pendule réelle et estimée avec commande LQR.

Les figures II.9 et II.10 illustrent les vitesses angulaires $\dot{\theta}$ et $\dot{\alpha}$ réelles et estimées sous commande LQR. $\dot{\theta}$ atteint le régime permanent en 3,5 s avec un léger dépassement, tandis que $\dot{\alpha}$ s'amortit en 3 s pour se stabiliser à 0 deg/s. Les estimations $x_{3,\text{obs}}$ et $x_{4,\text{obs}}$ suivent fidèlement les valeurs réelles, attestant la bonne précision de l'observateur pour les variables non mesurées

directement. La convergence complète est obtenue après 7 s ; en dehors de la zone de linéarité, les résultats ne sont pas pris en compte, car le modèle linéarisé n'y est plus valide.

II.7.3 Erreurs d'estimation

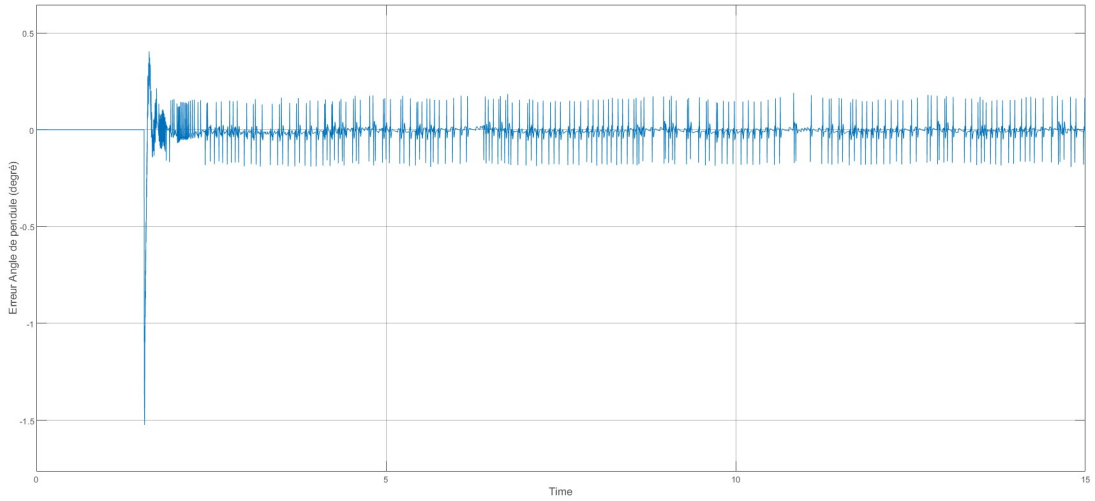


Figure II.11 – Erreur d'estimation de l'angle du pendule α.

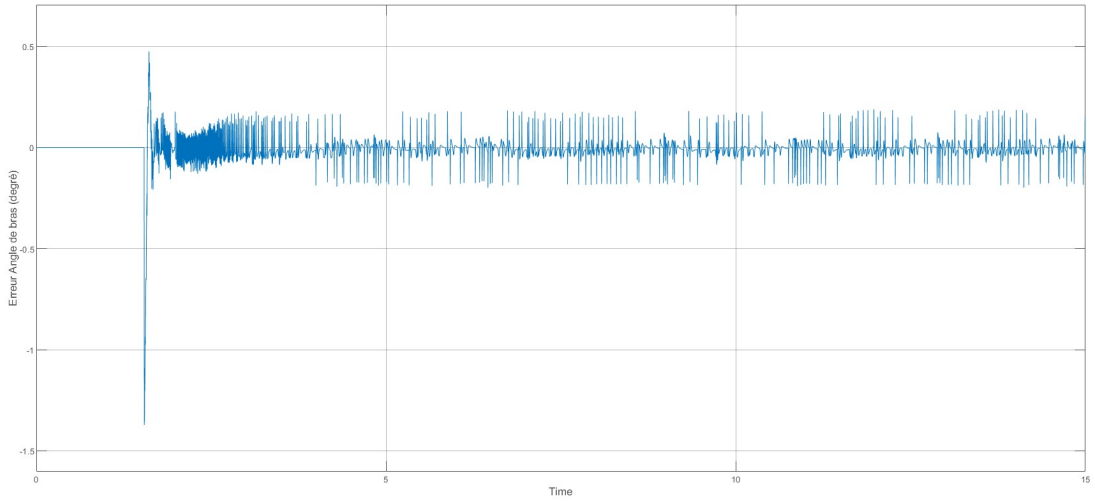


Figure II.12 – Erreur d'estimation de l'angle du bras θ.

La figure II.11 montre l'erreur $e_\alpha = \alpha - \hat{\alpha}$: une divergence transitoire hors zone de linéarité, due à l'initialisation loin de l'équilibre, puis une stabilisation à moins de $0{,}2^\circ$ une fois le pendule dans la zone linéaire. La figure II.12 présente un comportement analogue pour $e_\theta = \theta - \hat{\theta}$, avec une erreur résiduelle également inférieure à $0{,}2^\circ$ après 7 s, attestant la fiabilité de l'observateur dans la zone de validité du modèle linéarisé.

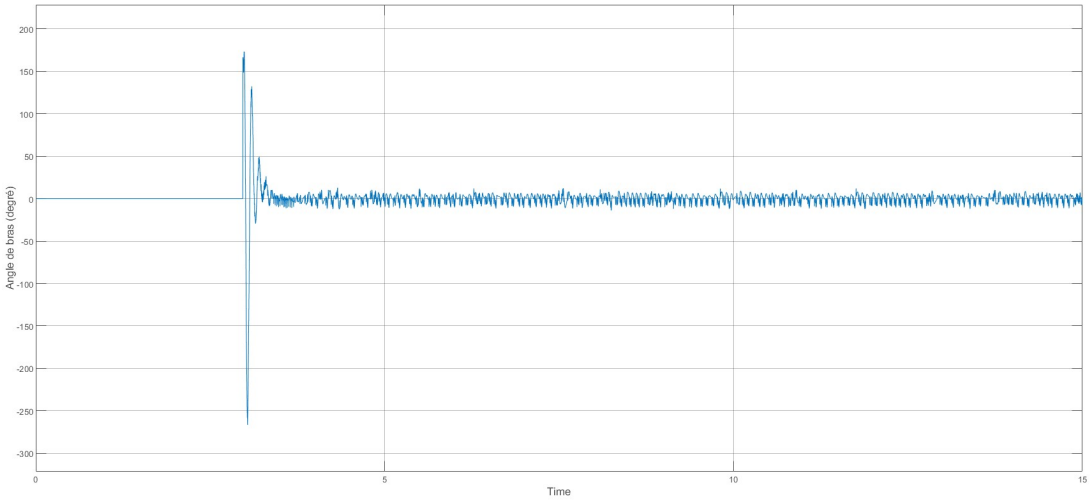


FIGURE II.13 – Erreur d'estimation de la vitesse angulaire du pendule $\dot{\alpha}$.

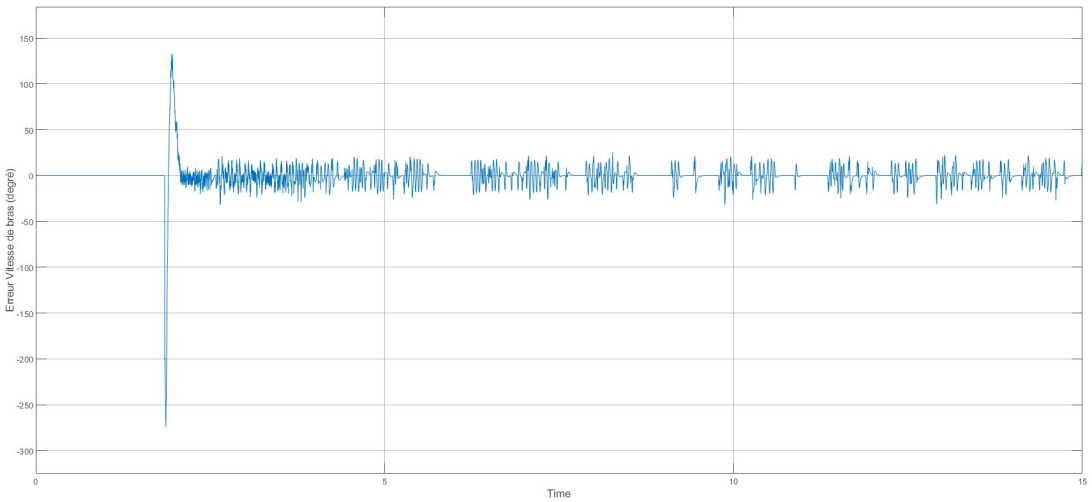


FIGURE II.14 – Erreur d'estimation de la vitesse angulaire du bras $\dot{\theta}$.

Les figures II.13 et II.14 montrent les erreurs $e_{\dot{\alpha}} = \dot{\alpha} - \hat{\dot{\alpha}}$ et $e_{\dot{\theta}} = \dot{\theta} - \hat{\dot{\theta}}$. Après un transitoire initial lié à la phase de swing-up, l'erreur devient négligeable en régime permanent, avec une amplitude inférieure à 0,5 deg/s, confirmant la bonne reconstruction des vitesses angulaires par l'observateur.

II.8 Conclusion

Les résultats de simulation confirment l'efficacité de l'observateur de Luenberger comme substitut fiable aux capteurs de vitesse pour le pendule inversé rotatif. Les erreurs résiduelles obtenues dans la zone de linéarité valident la pertinence de l'approche par placement de pôles adoptée pour la synthèse de l'observateur. La commande LQR basée sur les états estimés assure par ailleurs une stabilisation satisfaisante du pendule autour de son point d'équilibre instable. Toutefois, cette étude reste confinée au cadre linéaire et ne permet pas de prendre en compte les perturbations externes ni les non-linéarités inhérentes au système. Afin de pallier ces limitations, le chapitre suivant sera consacré à l'application d'un observateur à état étendu linéaire dont la structure augmentée permet d'estimer conjointement les variables d'état et les perturbations agissant sur le PIR, tout en conservant un cadre de synthèse linéaire.

Chapitre III

Observateur à État Étendu Linéaire (LESO) pour le PIR

III.1 Introduction

Le chapitre précédent a montré que l'observateur de Luenberger permet de reconstruire efficacement les états du pendule inversé rotatif (PIR) dans la zone de linéarité. Cependant, cet observateur repose sur un modèle linéarisé et ne prend pas en compte les perturbations externes ni les non-linéarités du système. Or, dans un contexte réel, le PIR est soumis à des frottements, des incertitudes paramétriques et des perturbations qui dégradent les performances de l'estimateur classique.

Dans ce chapitre, nous introduisons l'Observateur à État Étendu Linéaire (*Linear Extended State Observer*, LESO), une extension de l'observateur classique qui augmente le vecteur d'état afin d'estimer simultanément les variables d'état et les perturbations agissant sur le système. Le LESO est ici utilisé spécifiquement pour estimer les vitesses angulaires $\dot{\theta}$ et $\dot{\alpha}$ du bras et du pendule, qui sont des grandeurs difficiles à mesurer directement avec précision. Ces estimations sont ensuite injectées dans la loi de commande LQR afin d'assurer la stabilisation du pendule autour de sa position d'équilibre instable.

III.2 Principe du LESO

L'observateur à état étendu (ESO) a été introduit par Han (24) dans le cadre de la commande par rejet actif des perturbations (*Active Disturbance Rejection Control*, ADRC). Sa version linéaire, le LESO, a ensuite été proposée par Gao (25), qui a également établi une méthode

systématique de réglage des gains par paramétrisation par largeur de bande.

L'idée fondamentale du LESO consiste à traiter l'ensemble des non-linéarités, des perturbations externes et des incertitudes de modélisation comme un *état étendu* supplémentaire, noté x_{n+1}, à estimer conjointement avec les variables d'état classiques. Cela permet de s'affranchir d'un modèle précis du système tout en conservant un cadre de synthèse linéaire.

Considérons un système du second ordre de la forme générale :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = f(x_1, x_2, t) + b_0\, u \\ y = x_1 \end{cases} \tag{III.1}$$

où $f(\cdot)$ représente la dynamique totale inconnue du système (non-linéarités, perturbations, incertitudes), et b_0 est le gain de commande nominal.

On introduit l'état étendu $x_3 = f(\cdot)$, supposé à variation lente ($\dot{x}_3 \approx 0$), ce qui conduit au système augmenté :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_3 + b_0\, u \\ \dot{x}_3 = \dot{f} \approx 0 \\ y = x_1 \end{cases} \tag{III.2}$$

Le LESO associé à ce système augmenté s'écrit alors :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}_1 = \hat{x}_2 + \beta_1\,(y - \hat{x}_1) \\ \dot{\hat{x}}_2 = \hat{x}_3 + \beta_2\,(y - \hat{x}_1) + b_0\, u \\ \dot{\hat{x}}_3 = \beta_3\,(y - \hat{x}_1) \end{cases} \tag{III.3}$$

où β_1, β_2, β_3 sont les gains de l'observateur, choisis de manière à placer les pôles de la matrice d'erreur $(A - LC)$ dans le demi-plan gauche du plan complexe.

La convergence asymptotique est garantie si et seulement si la matrice $(A_{obs} - LC_{obs})$ est de Hurwitz, c'est-à-dire si toutes ses valeurs propres ont une partie réelle strictement négative.

Afin de simplifier le réglage, Gao (25) propose de placer tous les pôles de l'observateur en un point unique $-\omega_0$ sur l'axe réel négatif, ce qui conduit au polynôme caractéristique :

$$\lambda(s) = (s + \omega_0)^3 = s^3 + 3\omega_0 s^2 + 3\omega_0^2 s + \omega_0^3 \tag{III.4}$$

et par identification :

$$\beta_1 = 3\omega_0, \qquad \beta_2 = 3\omega_0^2, \qquad \beta_3 = \omega_0^3 \tag{III.5}$$

Le seul paramètre de réglage est donc la largeur de bande ω_0, ce qui constitue l'un des principaux avantages du LESO.

III.3 Synthèse du LESO pour le PIR

III.3.1 Modèle augmenté (bras + pendule)

Le PIR est un système à quatre variables d'état :

$$x = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{bmatrix}^\top = \begin{bmatrix} \theta & \alpha & \dot{\theta} & \dot{\alpha} \end{bmatrix}^\top \tag{III.6}$$

où θ est l'angle du bras rotatif et α est l'angle du pendule.

Dans notre application, seules les vitesses angulaires $\dot{\theta}$ (x_3) et $\dot{\alpha}$ (x_4) sont à estimer par le LESO, car elles ne sont pas mesurées directement avec suffisamment de précision. Les positions θ et α sont quant à elles mesurées par les encodeurs du QUBE-Servo 2.

On construit donc deux LESO indépendants, l'un dédié au sous-système du bras et l'autre au sous-système du pendule.

LESO pour le bras (sous-système 1) :

On considère le sous-système :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_3 \\ \dot{x}_3 = f_1(x) + b_{0,\text{bras}}\, u \end{cases} \tag{III.7}$$

où $f_1(x)$ regroupe toutes les dynamiques non modélisées et perturbations agissant sur le bras, et $b_{0,\text{bras}}$ est le gain de commande nominal du bras. On augmente le vecteur d'état avec $x_5 = f_1(x)$, ce qui donne le LESO du bras :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}_1 = \hat{x}_3 + \beta_1 (x_1 - \hat{x}_1) \\ \dot{\hat{x}}_3 = \hat{x}_5 + \beta_3 (x_1 - \hat{x}_1) + b_{0,\text{bras}}\, u \\ \dot{\hat{x}}_5 = \beta_5 (x_1 - \hat{x}_1) \end{cases} \tag{III.8}$$

LESO pour le pendule (sous-système 2) :

De manière analogue, pour le pendule :

$$\begin{cases} \dot{x}_2 = x_4 \\ \dot{x}_4 = f_2(x) + b_{0,\text{pend}}\, u \end{cases} \tag{III.9}$$

avec $x_6 = f_2(x)$ l'état étendu du pendule, le LESO associé est :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}_2 = \hat{x}_4 + \beta_2 \,(x_2 - \hat{x}_2) \\ \dot{\hat{x}}_4 = \hat{x}_6 + \beta_4 \,(x_2 - \hat{x}_2) + b_{0,\text{pend}}\, u \\ \dot{\hat{x}}_6 = \beta_6 \,(x_2 - \hat{x}_2) \end{cases} \tag{III.10}$$

III.3.2 Calcul des gains ($\beta_1 \dots \beta_6$)

En appliquant la paramétrisation par largeur de bande de Gao (25), les pôles de chaque LESO sont placés en $-\omega_0$. Le polynôme caractéristique de chaque observateur est :

$$\lambda(s) = s^3 + \beta_i s^2 + \beta_j s + \beta_k = (s + \omega_0)^3 \tag{III.11}$$

Par identification, les gains sont :

$$\beta_1 = \beta_2 = 3\,\omega_0, \qquad \beta_3 = \beta_4 = 3\,\omega_0^2, \qquad \beta_5 = \beta_6 = \omega_0^3 \tag{III.12}$$

Les valeurs numériques retenues pour notre système, avec $\omega_{0,\text{bras}} = \omega_{0,\text{pend}} = 100$ rad/s, sont :

Table III.1 – Gains du LESO pour le PIR (QUBE-Servo 2)

Gain	Expression	Valeur numérique
β_1	$3\,\omega_{0,\text{bras}}$	300
β_3	$3\,\omega_{0,\text{bras}}^2$	30 000
β_5	$\omega_{0,\text{bras}}^3$	1 000 000
β_2	$3\,\omega_{0,\text{pend}}$	300
β_4	$3\,\omega_{0,\text{pend}}^2$	30 000
β_6	$\omega_{0,\text{pend}}^3$	1 000 000

III.3.3 Choix de la largeur de bande ω_0

Le paramètre ω_0 est le seul degré de liberté dans la conception du LESO. Son choix résulte d'un compromis fondamental :

— Une valeur **élevée** de ω_0 accélère la convergence de l'observateur et améliore le suivi des états réels, mais augmente la sensibilité au bruit de mesure.
— Une valeur **faible** de ω_0 rend l'observateur plus robuste au bruit, mais ralentit la convergence et peut dégrader les performances de la commande.

En pratique, ω_0 est choisi 3 à 5 fois plus grand que la largeur de bande de la boucle fermée (25). Dans notre cas, les pôles de la boucle fermée LQR étant de l'ordre de -10 à -20 rad/s, nous avons retenu :

$$\omega_0 = 100 \text{ rad/s} \tag{III.13}$$

Ce choix assure une dynamique de l'observateur suffisamment rapide par rapport à celle de la boucle fermée, garantissant ainsi que les états estimés convergent avant que la commande LQR ne soit activée.

III.4 Couplage LESO + LQR

III.4.1 Architecture de commande

L'architecture globale de commande du PIR est constituée de deux blocs fonctionnels distincts, activés successivement selon la position angulaire du pendule :

1. **Commande Swing-Up** : active lorsque $|\alpha| > 20$. Elle amène le pendule depuis sa position basse stable vers le voisinage de la position haute instable, en utilisant une loi d'énergie non linéaire.
2. **Commande LQR + LESO** : active lorsque $|\alpha| \leq 20$. Elle stabilise le pendule autour de sa position d'équilibre instable $\alpha = 0$, en utilisant les états estimés par le LESO.

La loi de commande LQR s'écrit :

$$u = -K\hat{x} \tag{III.14}$$

où K est le gain LQR calculé au chapitre précédent, et $\hat{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \hat{x}_3 & \hat{x}_4 \end{bmatrix}^\top$ est le vecteur d'état reconstruit, dans lequel les positions $x_1 = \theta$ et $x_2 = \alpha$ sont directement mesurées par les encodeurs, tandis que les vitesses $\hat{x}_3 = \hat{\dot{\theta}}$ et $\hat{x}_4 = \hat{\dot{\alpha}}$ sont fournies par le LESO.

III.4.2 Substitution des vitesses estimées ($\hat{x}_3$, $\hat{x}_4$)

L'apport essentiel du LESO dans cette architecture réside dans le remplacement des vitesses angulaires mesurées (généralement obtenues par dérivation numérique des signaux des encodeurs, ce qui introduit du bruit) par les vitesses estimées $\hat{x}_3$ et $\hat{x}_4$ fournies par l'observateur.

En effet, la dérivation numérique amplifie le bruit de quantification des encodeurs, ce qui dégrade la qualité du signal de commande et peut nuire à la stabilité de la boucle fermée. Le LESO, grâce à sa structure de filtre d'ordre trois, fournit une estimation lissée et précise des vitesses, tout en rejetant implicitement les perturbations via l'état étendu $\hat{x}_5$ (bras) et $\hat{x}_6$ (pendule).

La loi de commande finale avec substitution des états estimés est donc :

$$u = -K_1 x_1 - K_2 x_2 - K_3 \hat{x}_3 - K_4 \hat{x}_4 \tag{III.15}$$

où $K = \begin{bmatrix} K_1 & K_2 & K_3 & K_4 \end{bmatrix}$ est le vecteur de gain LQR, et $\hat{x}_3$, $\hat{x}_4$ sont les estimations fournies par les deux LESO indépendants synthétisés à la section précédente.

Cette substitution constitue l'implémentation du *principe de séparation* entre la synthèse du régulateur et celle de l'observateur, qui est valide pour les systèmes linéaires et reste une bonne approximation dans la zone de fonctionnement linéaire du PIR ($|\alpha| \leq 20$).

III.5 Résultats de simulation

Les expériences ont été réalisées sur le système réel **QUBE-Servo 2**, interfacé avec l'environnement Simulink de MATLAB. Le système comporte quatre variables d'état : l'angle du bras θ et l'angle du pendule α, mesurés directement par les encodeurs, ainsi que les vitesses angulaires $\dot{\theta}$ et $\dot{\alpha}$, reconstruites par filtres passe-haut. L'évaluation se déroule en deux phases : une comparaison des états estimés aux états réels mesurés, suivie de la substitution de ces estimations dans la loi de commande LQR afin de valider la stabilisation du pendule en position inverse. Afin d'amener le pendule dans la zone de linéarité, une stratégie de **swing-up** est utilisée : elle consiste à imprimer au bras des oscillations successives permettant d'accumuler de l'énergie jusqu'à ce que le pendule atteigne le voisinage du point d'équilibre instable $\tilde{x}_1$, où la commande LQR prend alors le relais pour assurer la stabilisation.

III.5.1 Reconstruction des états

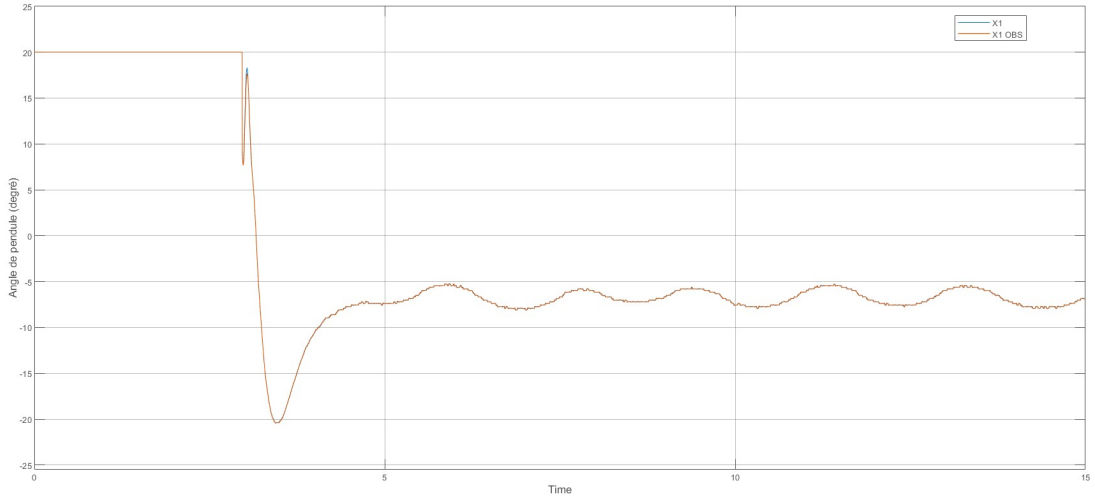


FIGURE III.1 – Évolution de l'angle réel et estimé du bras θ

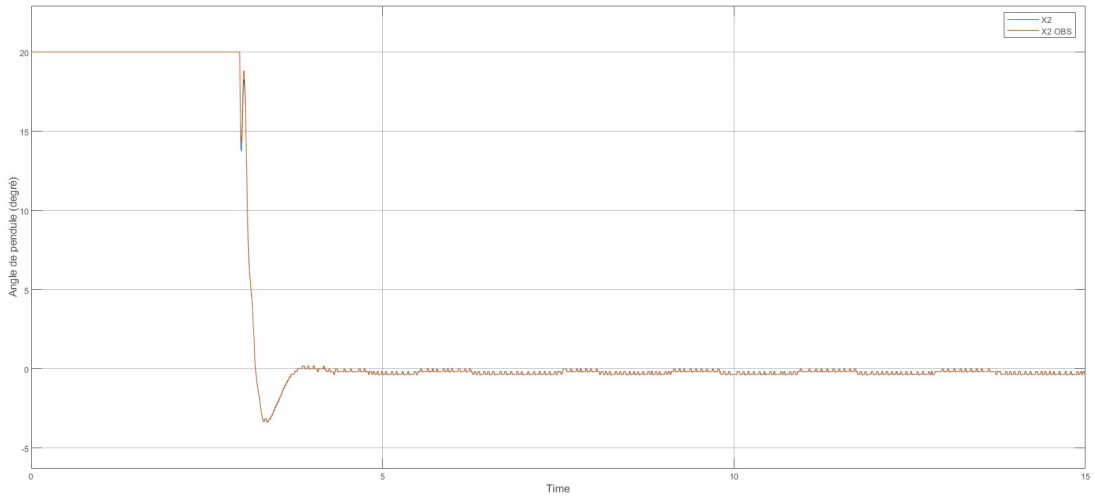


FIGURE III.2 – Évolution de l'angle réel et estimé du pendule α

Les figures III.1 et III.2 comparent les trajectoires réelles et estimées des angles du bras et du pendule lors de l'utilisation de l'observateur à état étendu linéaire (LESO). Pour l'angle du bras, l'état réel reste proche de $0°$ tandis que l'estimation du LESO converge rapidement sans divergence importante, démontrant la robustesse de l'observateur face aux non-linéarités. Pour l'angle du pendule, l'état réel part de $-180°$ et rejoint $0°$; l'estimation, malgré un écart initial, rejoint la trajectoire réelle en environ 6 s, confirmant l'efficacité du LESO pour la reconstruction des états non mesurés.

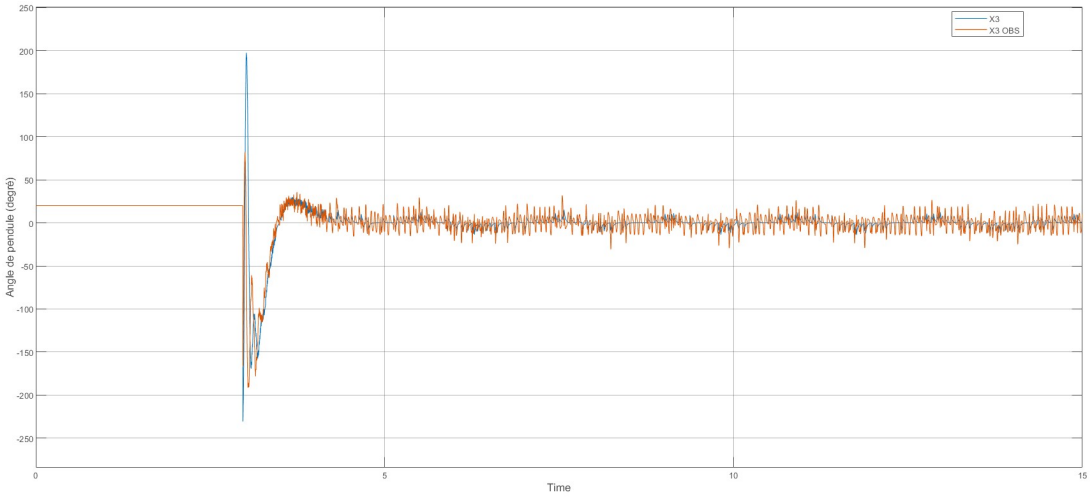


FIGURE III.3 – Évolution de la vitesse angulaire réelle et estimée du bras $\dot{\theta}$

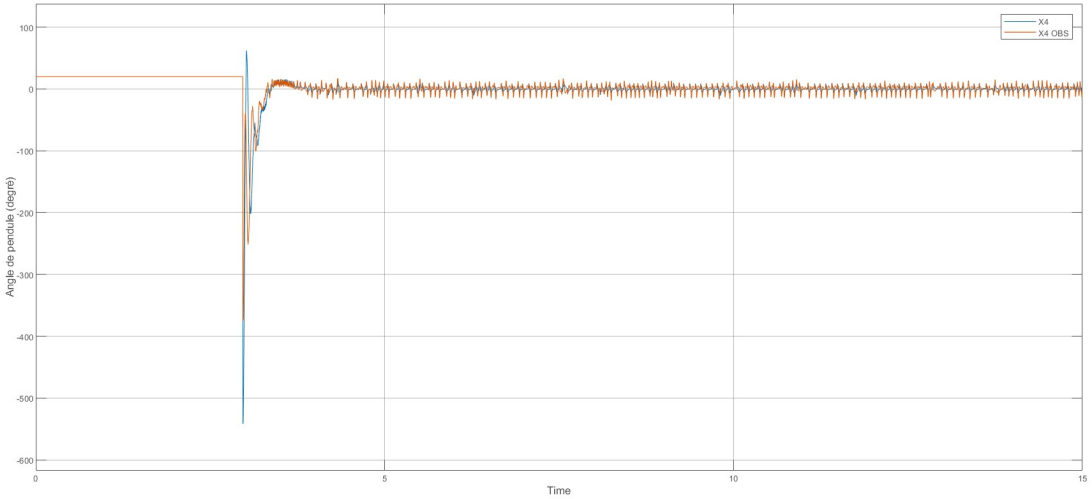


FIGURE III.4 – Évolution de la vitesse angulaire réelle et estimée du pendule $\dot{\alpha}$

Les figures III.3 et III.4 présentent respectivement l'évolution des vitesses angulaires estimées par le LESO. Pour la vitesse du bras on observe une bonne superposition entre l'estimation et la valeur réelle, avec un léger dépassement transitoire rapidement amorti. Quant à la vitesse du pendule , l'estimation suit la tendance générale de la vitesse réelle, malgré des écarts d'amplitude en début de simulation. Les deux courbes convergent vers zéro en environ 7 s, confirmant l'efficacité du LESO pour la reconstruction des vitesses non mesurées.

III.5.2 Reconstruction de la commande LQR

Les états estimés présentant une forte concordance avec les états réels, la commande LQR est reconstruite uniquement à partir des estimations de l'observateur, afin d'évaluer la stabilisation du PIR en boucle fermée.

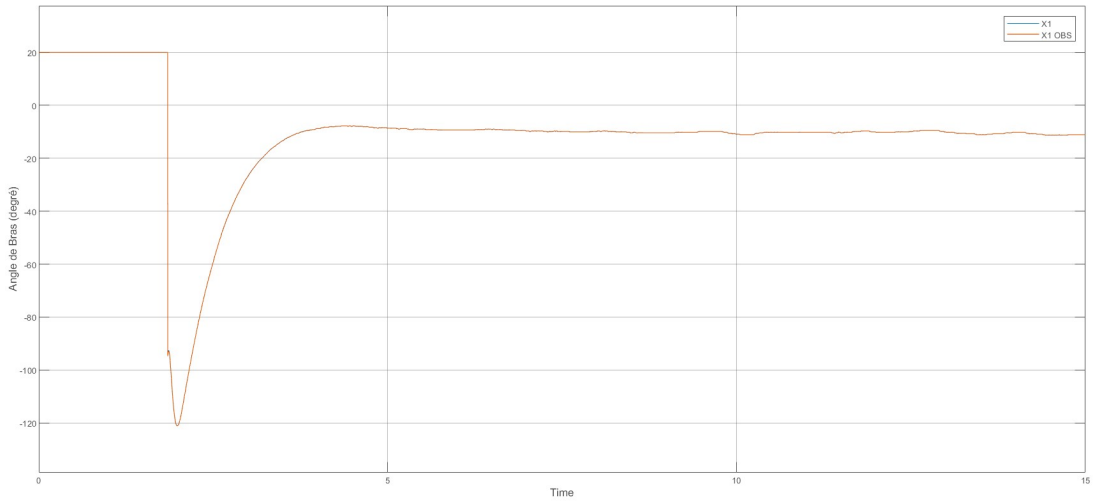


FIGURE III.5 – Angle du bras réel et estimé avec commande LQR basée sur l'observateur

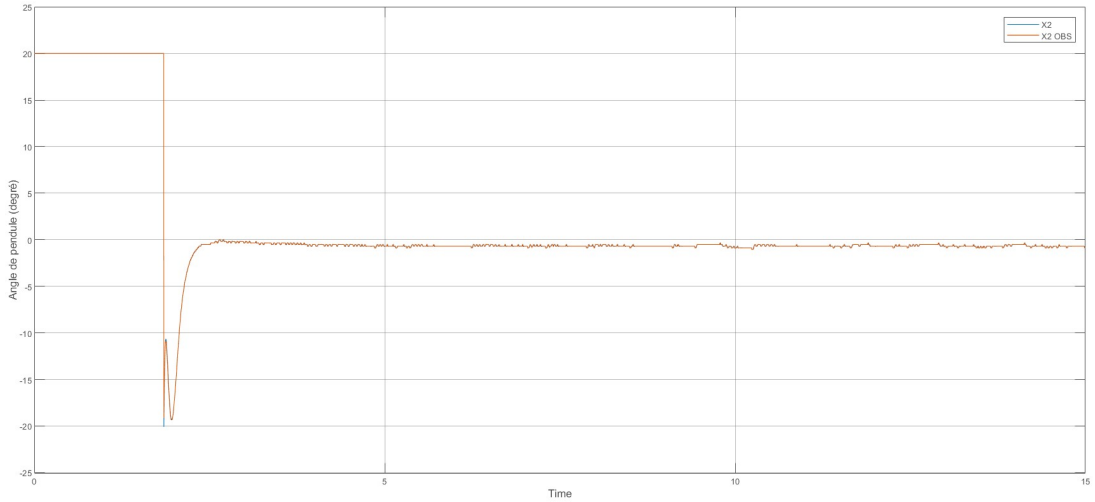


FIGURE III.6 – Angle du pendule réel et estimé avec commande LQR basée sur l'observateur

Les figures III.5 et III.6 présentent respectivement l'évolution de θ et α réels et estimés, lors de l'application de la commande LQR basée sur les états estimés par le LESO.

Pour θ (Figure III.5), les deux courbes partent de 20° et présentent des oscillations amorties. Les courbes se superposent très rapidement, confirmant que le LESO reconstruit fidèlement la dynamique du bras et que la commande LQR maintient le bras autour de 0°.

Pour α (Figure III.6), les courbes partent de 30° et convergent vers 0° en environ 2,5 s, avec

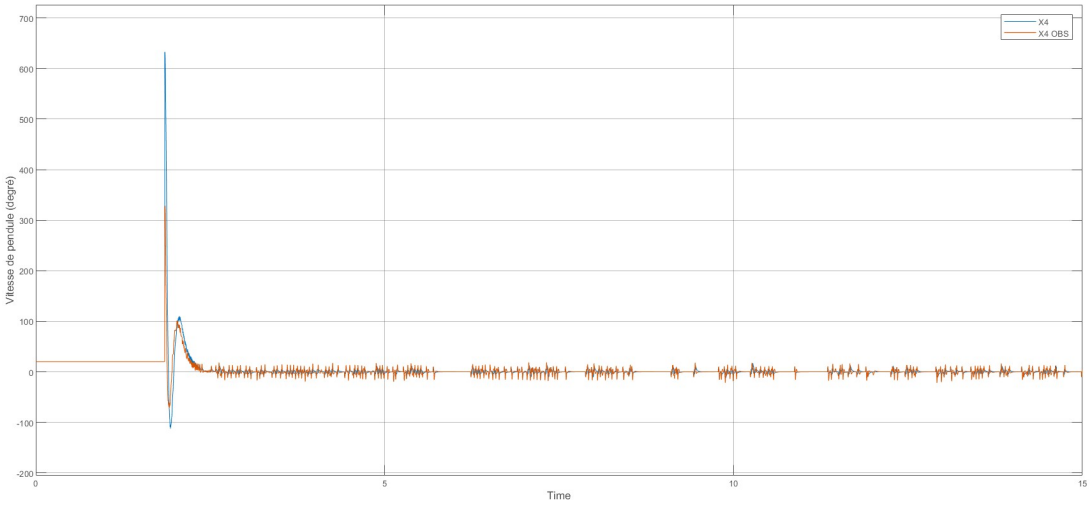


FIGURE III.8 – Vitesse angulaire du pendule réelle et estimée avec commande LQR

des oscillations résiduelles très faibles. La convergence rapide démontre la robustesse du LESO et l'efficacité de la commande LQR pour stabiliser le pendule.

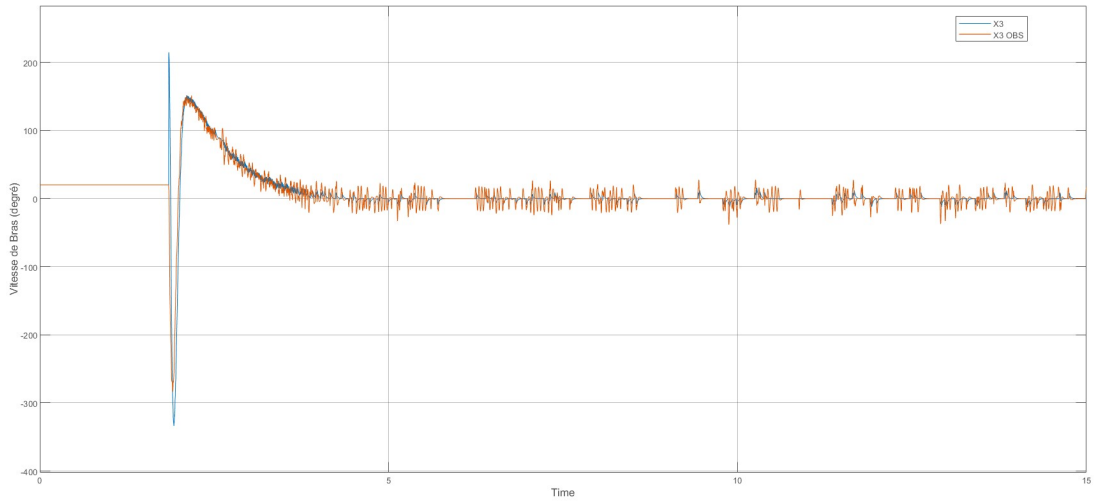


FIGURE III.7 – Vitesse angulaire du bras réelle et estimée avec commande LQR

Les figures III.7 et III.8 illustrent respectivement l'évolution des vitesses angulaires du bras et du pendule, réelles et estimées, sous commande LQR avec le LESO. Pour la vitesse du bras , on observe un pic initial d'environ -400 deg/s, puis une convergence rapide vers zéro en 3 s. L'estimation suit fidèlement la valeur réelle. Pour la vitesse du pendule l'amplitude atteint environ 600 deg/s en début de simulation, puis s'amortit en 3 s. Le LESO parvient à estimer correctement ces dynamiques rapides, ce qui valide son utilisation pour la commande LQR sans capteurs de vitesse.

III.5.3 Erreurs d'estimation

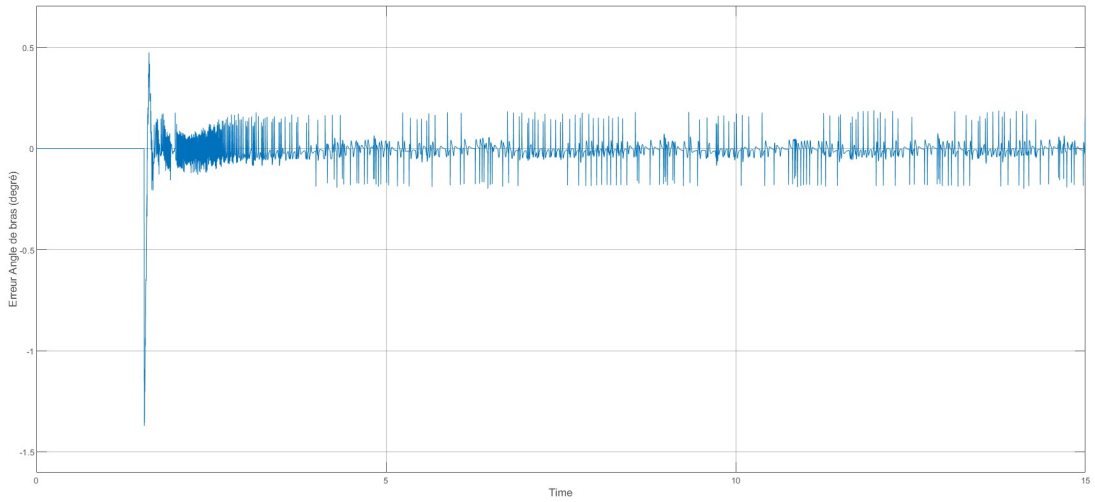


FIGURE III.9 – Erreur d'estimation de l'angle du pendule θ

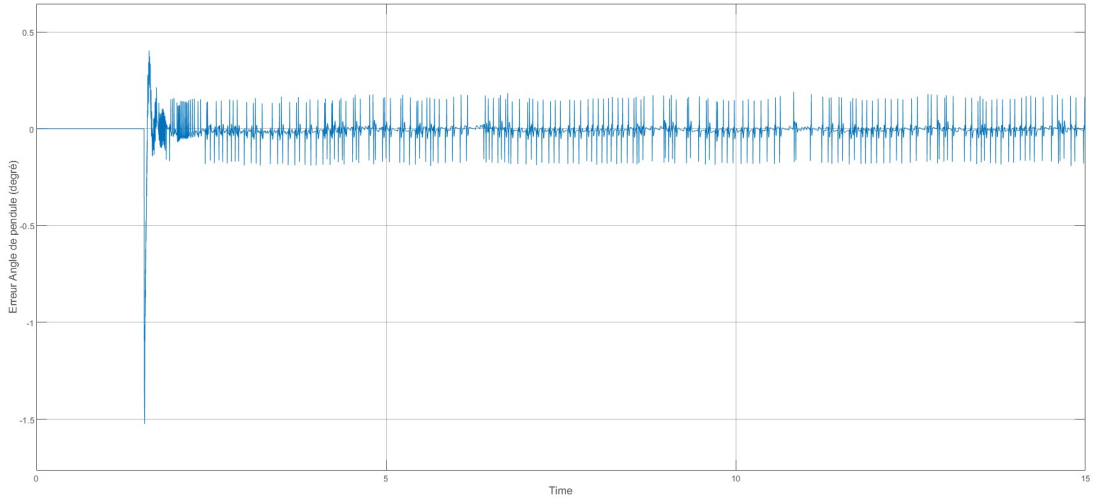


FIGURE III.10 – Erreur d'estimation de l'angle du pendule α

Les figures III.9 et III.10 présentent les erreurs d'estimation des angles. On observe que l'erreur reste très faible (inférieure à 0,5°) après le régime transitoire, ce qui confirme la précision du LESO pour la reconstruction des angles.

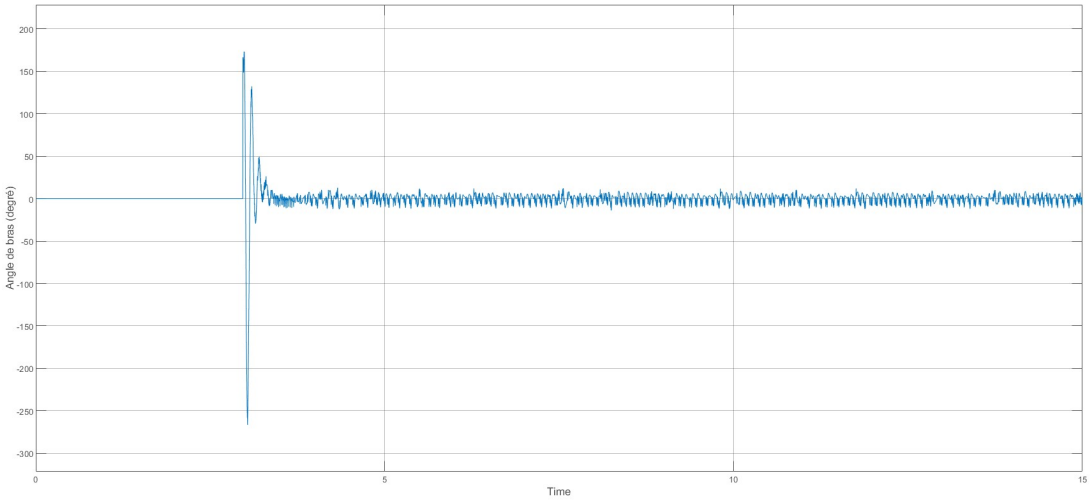


FIGURE III.11 – Erreur d'estimation Vitesse angulaire du pendule $\dot{\alpha}$

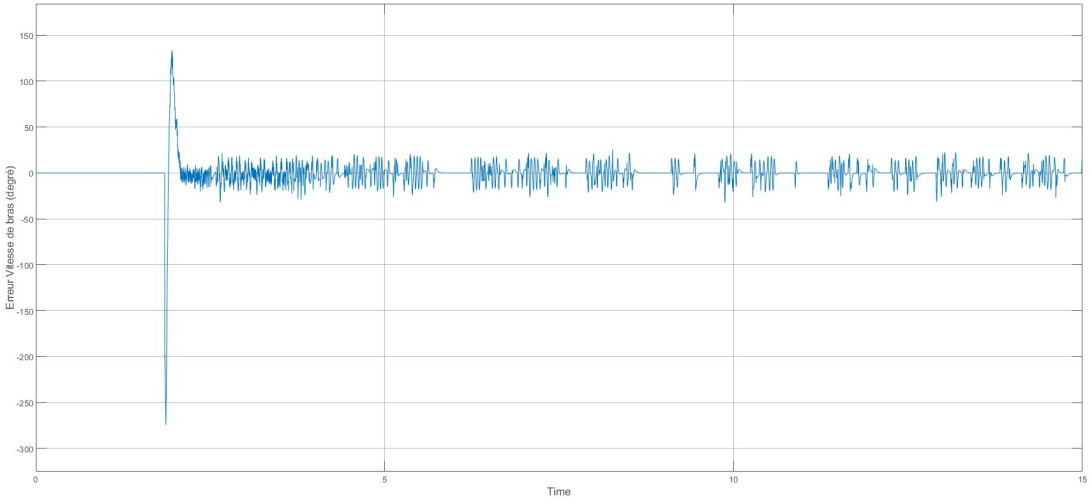


FIGURE III.12 – Erreur d'estimation Vitesse angulaire du Bras $\dot{\theta}$

Les figures III.11 et III.12 montrent les erreurs d'estimation des vitesses. Pour $\dot{\alpha}$, l'erreur atteint un pic de -300 deg/s en transitoire puis se stabilise après 6 s. Pour $\dot{\theta}$, l'erreur reste inférieure à 50 deg/s et s'annule en 3 s. Le LESO assure une estimation convergente des vitesses avec des erreurs résiduelles négligeables en régime permanent.

III.6 Test de robustesse

Afin d'évaluer les performances de l'observateur LESO, un test de robustesse a été effectué expérimentalement sur la maquette réelle QUBE-Servo 2. Ce test consiste à appliquer des perturbations manuelles sur le pendule à différents instants, afin de comparer le comportement du système dans deux cas :

— Sans états estimés : la commande LQR utilise uniquement les états mesurés.
— Avec états estimés : la commande LQR utilise les états estimés par le LESO ($\hat{x}_3$, $\hat{x}_4$).

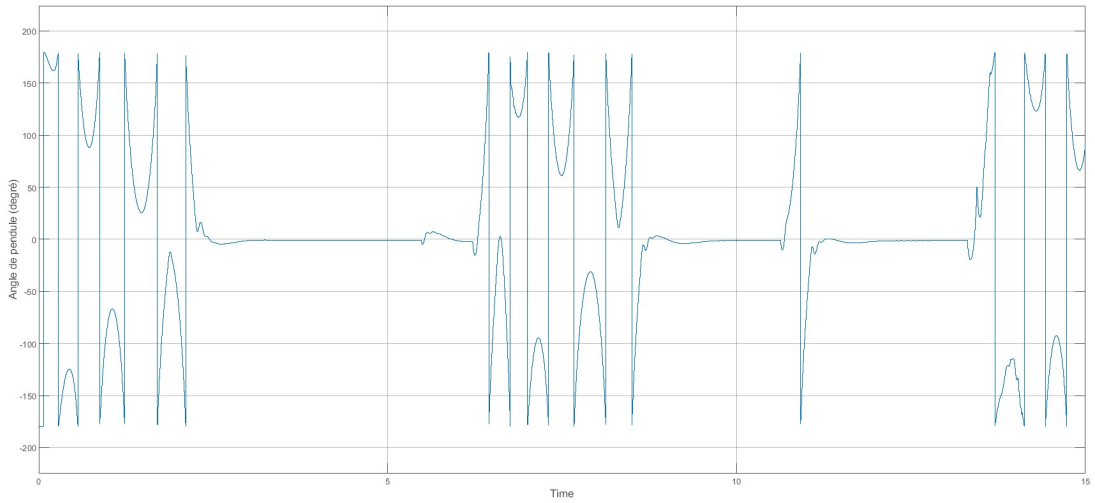


FIGURE III.13 – Angle du pendule α sans états estimés (LQR seul)

La figure III.13 représente l'évolution de l'angle du pendule α sans l'utilisation des états estimés. On observe qu'après chaque perturbation manuelle appliquée à différents instants, le pendule présente des oscillations importantes atteignant ± 180. Bien que le système parvient à revenir vers la position d'équilibre instable $\alpha = 0$, le temps de rejet de la perturbation est relativement long, et les oscillations transitoires sont prononcées.

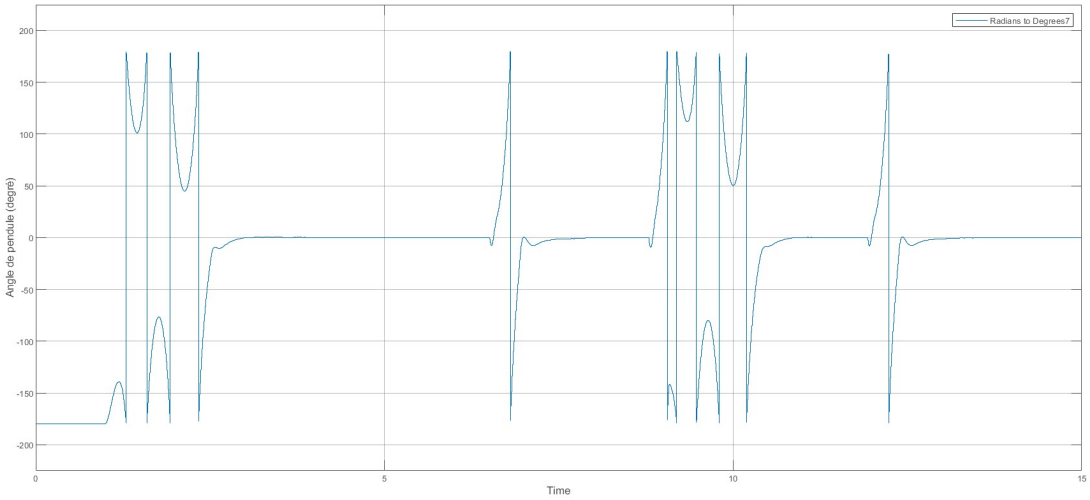


FIGURE III.14 – Angle du pendule α avec états estimés (LQR + LESO)

La figure III.14 illustre l'évolution de l'angle du pendule α avec l'utilisation des états estimés fournis par le LESO. On constate que suite aux mêmes perturbations manuelles, le système réagit de manière plus efficace. En effet, le pendule revient à la position d'équilibre $\alpha = 0$ plus rapidement, avec des oscillations transitoires moins importantes. Cela démontre clairement l'apport du LESO dans l'amélioration des performances de la commande LQR.

En comparant les deux cas, on peut conclure que l'intégration du LESO dans la boucle de commande améliore significativement la robustesse du système face aux perturbations extérieures, grâce à une meilleure estimation des vitesses angulaires $\dot{\theta}$ et $\dot{\alpha}$ qui ne sont pas directement mesurables.

III.7 Conclusion

Ce chapitre a présenté l'application d'un observateur à état étendu linéaire (LESO) pour le PIR. Le LESO estime conjointement les états et les perturbations, ce qui lui permet de reconstruire efficacement les vitesses angulaires avec des erreurs résiduelles faibles. Couplé à une commande LQR, il assure une stabilisation rapide du pendule autour de sa position d'équilibre instable. Les tests de robustesse sur la maquette réelle montrent que le LESO réduit significativement l'effet des perturbations par rapport à une commande LQR utilisant uniquement les mesures directes.

Conclusion Générale

Dans cette étude, nous avons introduit deux types d'observateurs pour le pendule inversé rotatif, qui représente un système non linéaire, sous-actionné et instable. Le premier observateur est spécifiquement dédié à la zone linéaire du système, obtenue par linéarisation autour du point d'équilibre désiré : il s'agit de l'observateur de Luenberger. Le second observateur est également linéaire, mais opère sur un modèle augmenté intégrant les perturbations et les non-linéarités comme des états supplémentaires à estimer ; il s'agit de l'observateur à état étendu linéaire (LESO). Grâce à sa synthèse, le LESO s'est avéré plus polyvalent que son homologue classique, en offrant une meilleure robustesse vis-à-vis des perturbations tout en conservant la simplicité d'un cadre linéaire.

Les résultats obtenus démontrent la capacité des observateurs à estimer de manière précise les états du pendule inversé rotatif, même en présence de perturbations et d'incertitudes de modélisation.

Il est important de souligner que cette étude ne se limite pas uniquement au pendule inversé rotatif, mais peut également être étendue à d'autres systèmes d'intérêt pratique. Les observateurs présentés ici offrent une approche prometteuse pour la commande et l'estimation des états dans des systèmes complexes, contribuant ainsi à une meilleure compréhension du comportement dynamique de ces systèmes.

Cette avancée technologique ouvre de nouvelles perspectives dans le domaine industriel en offrant des solutions de surveillance et de contrôle sans la nécessité d'utiliser des capteurs physiques dans des zones inaccessibles ou difficiles à équiper.

L'utilisation de ces capteurs virtuels, c'est-à-dire les observateurs, a montré des avantages significatifs tels que l'optimisation des processus industriels, la réduction des coûts liés à l'installation et à la maintenance des capteurs physiques, ainsi que l'accélération des opérations grâce à une estimation rapide et précise des états du système.

Cependant, il convient de souligner que des efforts supplémentaires de recherche et de

développement sont nécessaires pour améliorer encore la performance des observateurs, en particulier dans des systèmes complexes et non linéaires. De nouvelles techniques de synthèse et d'adaptation des observateurs pour répondre aux exigences spécifiques de chaque application seront essentielles pour atteindre des résultats optimaux.

Bibliographie

[1] H. K. Khalil, *Nonlinear Systems*, 3e éd., Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, 2002.

[2] G. Conte, C. H. Moog et A. M. Perdon, *Algebraic Methods for Nonlinear Control Systems*, 2e éd., Springer, London, 2007.

[3] D. G. Luenberger, "Observing the State of a Linear System," *IEEE Trans. Military Electronics*, vol. 8, no 2, p. 74–80, 1964.

[4] D. G. Luenberger, "An Introduction to Observers," *IEEE Trans. Automatic Control*, vol. 16, no 6, p. 596–602, 1971.

[5] G. Besançon, *Nonlinear Observers and Applications*, Springer, Berlin, 2007.

[6] C. T. Chen, *Linear System Theory and Design*, 3e éd., Oxford University Press, New York, 1999.

[7] C. Edwards, S. K. Spurgeon et R. J. Patton, "Sliding Mode Observers for Fault Detection and Isolation," *Automatica*, vol. 36, no 4, p. 541–553, 2000.

[8] Y. Shtessel, C. Edwards, L. Fridman et A. Levant, *Sliding Mode Control and Observation*, Birkhäuser, New York, 2014.

[9] J.-J. E. Slotine et W. Li, *Applied Nonlinear Control*, Prentice Hall, New Jersey, 1991.

[10] K. Ogata, *Modern Control Engineering*, 5e éd., Prentice Hall, New Jersey, 2010.

[11] G. F. Franklin, J. D. Powell et M. L. Workman, *Digital Control of Dynamic Systems*, 3e éd., Addison-Wesley, 1998.

[12] R. E. Kalman, "A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems," *Journal of Basic Engineering*, vol. 82, no 1, p. 35–45, 1960.

[13] P. J. Antsaklis et A. N. Michel, *Linear Systems*, Birkhäuser, Boston, 1997.

[14] B. D. O. Anderson et J. B. Moore, *Optimal Control : Linear Quadratic Methods*, Prentice Hall, New Jersey, 1990.

[15] M. W. Spong, S. Hutchinson et M. Vidyasagar, *Robot Modeling and Control*, Wiley, New York, 2006.

[16] N. P. Nguyen, H. Oh, Y. Kim et J. Moon, "A Nonlinear Hybrid Controller for Swinging-up and Stabilizing the Rotary Inverted Pendulum," *Nonlinear Dynamics*, vol. 104, p. 1117–1137, 2021.

[17] J. Han, "From PID to Active Disturbance Rejection Control," *IEEE Trans. Industrial Electronics*, vol. 56, n^{o} 3, p. 900–906, 2009.

[18] Z. Gao, "Scaling and Bandwidth-Parameterization Based Controller Tuning," in *Proc. American Control Conference*, Denver, CO, p. 4989–4996, 2003.

[19] Quanser Inc., *QUBE-Servo 2 — Rotary Inverted Pendulum, User Manual*, Quanser, Markham, Ontario, 2019.

[20] F. Bateman, "Chapitre 7 : Observateurs d'état," dans *Commande Optimale* . Disponible : http://francois.bateman.free.fr/HTML/commande%20optimale/chap7/Chap7.htm .

[21] A. Guezmil, *Sur la Synthèse et l'Implémentation des Observateurs d'État pour le Diagnostic et la Commande de la Machine Asynchrone*, Thèse de doctorat, ENI Monastir, Tunisie, 2017.

[22] M. N. Hadjali et Z. Moussaoui, *Commande à base d'observateur d'état : application au simulateur d'hélicoptère TRMS*, Mémoire de master, 2010.

[23] A. Thabet, *Estimation de l'état pour la surveillance des systèmes de grandes dimensions — Application aux réseaux électriques*, Thèse de doctorat, ENI Gabès, Tunisie, 2012.

[24] J. Han, "From PID to Active Disturbance Rejection Control," *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, vol. 56, no. 3, pp. 900–906, 2009.

[25] Z. Gao, "Scaling and Bandwidth-Parameterization Based Controller Tuning," in *Proceedings of the American Control Conference (ACC)*, Denver, CO, USA, vol. 6, pp. 4989–4996, 2003.