RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE

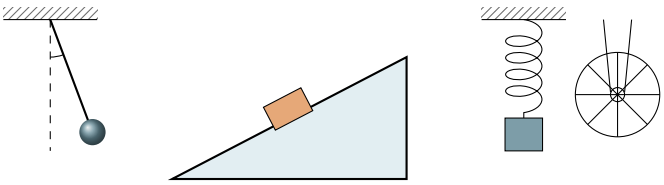
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

ÉCOLE SUPÉRIEURE EN SCIENCES APPLIQUÉES – TLEMCEN

Travaux Pratiques Physique I

Mécanique du point et du solide

Cours, protocoles expérimentaux, exercices et corrigés types



FARADJI née KHERBOUCHE Djamila

MEBROUKI Mohammed

Département de formation préparatoire

Table des matières

Avant-propos et consignes générales **vii**

1 Mesures et incertitudes **1**
I Grandeurs physiques et unités . . . 1
II Erreurs et incertitudes . . . 3
III Calcul d'incertitude : propagation des incertitudes . . . 6
IV Précision des grandeurs : chiffres significatifs . . . 8
V Instruments de mesure de longueur : le vernier . . . 9
VI Représentation graphique . . . 9
VII Applications . . . 13
VIII Corrigé type et barème . . . 15

2 Pendule simple et pendule élastique **18**
I Généralités sur les oscillateurs . . . 18
II Étude théorique . . . 19
III Étude expérimentale . . . 23
IV Conclusion attendue . . . 27
V Pour aller plus loin . . . 27
VI Corrigé type . . . 29

3 Plan incliné **33**
I Rappels de dynamique du point . . . 33
II Étude théorique . . . 34
III Étude expérimentale . . . 37
IV Conclusion attendue . . . 40
V Pour aller plus loin . . . 40
VI Corrigé type . . . 41

4 Moment d'inertie d'un solide **45**
I Principe de l'expérience . . . 45
II Liste du matériel . . . 46
III Théorie . . . 47
IV Étude théorique : calcul des moments d'inertie . . . 50
V Étude expérimentale . . . 52
VI Corrigé type . . . 54

5 Conservation de l'énergie mécanique – Roue de Maxwell **58**
I Principe de l'expérience . . . 58
II Rappels : énergie d'un solide . . . 58
III Matériel . . . 60
IV Montage et réglages . . . 61
V Étude théorique . . . 62
VI Étude expérimentale . . . 64
VII Corrigé type . . . 66

6 Frottement statique **70**
I Le frottement solide : généralités . . . 70
II Les lois de Coulomb . . . 71
III Étude théorique . . . 72
IV Étude expérimentale . . . 74
V Conclusion attendue . . . 77
VI Pour aller plus loin . . . 77
VII Corrigé type . . . 78

A Constantes et données utiles **81**

B Formulaire de mathématiques **83**

C Formulaire de mécanique **85**

D Régression linéaire avec un tableur ou Python **87**

E Modèle de compte rendu et grille d'évaluation **89**

F Fiches de mesures **91**

G Papier millimétré **98**

Bibliographie **100**

Liste des figures

0.1 Barrière optique et compteur digital. Le chronomètre est déclenché ou arrêté chaque fois qu'un objet coupe le faisceau infrarouge. ix

1.1 Illustration des notions de justesse et de fidélité. Le centre de la cible représente la valeur vraie ; les points noirs sont des mesures répétées. 4
1.2 Signification de l'écriture $x = x_0 \pm \Delta x$. 4
1.3 Erreur de parallaxe : l'œil doit être placé dans le plan perpendiculaire à la graduation passant par l'index. 5
1.4 Lecture d'un vernier au 1/10 de mm : le zéro du vernier se trouve entre 7 et 8 mm, et c'est le 6^{e} trait du vernier qui coïncide avec un trait de la règle. La lecture est $L = 7{,}6\,\text{mm}$. 9
1.5 Rectangle d'incertitude associé à un point de mesure $(x_i \pm \Delta x_i\,;\, y_i \pm \Delta y_i)$. 11
1.6 Méthode des rectangles d'erreur : droites de pente maximale et minimale passant par tous les rectangles (ici contraintes à passer par l'origine). 11
1.7 Les résidus e_i sont les écarts verticaux entre les points de mesure et la droite ; la méthode des moindres carrés minimise $\sum e_i^2$. 12
1.8 Nuages de points et coefficient de corrélation. 13
1.9 Corrigé de l'application 2 : points de mesure, segments d'erreur $\pm\sigma_y$ et droite des moindres carrés. 16

2.1 Élongation d'un oscillateur harmonique : sinusoïde de période T_0 et d'amplitude U_m. 19
2.2 Pendule simple : forces appliquées à la masse M et base polaire $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$. 19
2.3 Rapport T/T_0 en fonction de l'amplitude. En dessous de 10°, l'écart est inférieur à 0,2 % : la période peut être considérée comme indépendante de l'amplitude. 21
2.4 Échanges entre énergie potentielle et énergie cinétique (petites oscillations, sans frottement). Les énergies oscillent avec une période $T_0/2$. 21
2.5 Ressort à vide, masse à l'équilibre, masse en mouvement : allongement statique x et élongation dynamique $X(t)$ comptée à partir de la position d'équilibre O. 22
2.6 Photographie du pendule simple utilisé en salle de TP : fil fixé en haut de la tige verticale, rapporteur gradué à la suspension et boule suspendue. 24
2.7 Montage du pendule simple. La barrière optique est placée au point le plus bas de la trajectoire, là où la vitesse est maximale (meilleure précision de déclenchement). 24
2.8 Photographie du matériel du pendule élastique : ressort suspendu à un panneau-support, porte-masse et masses marquées, chronomètre et mètre ruban. 26

2.9 Les trois régimes d'un oscillateur amorti lâché sans vitesse initiale. En TP, les pendules sont très faiblement amortis (Q de l'ordre de plusieurs centaines) : la période mesurée est pratiquement égale à T_0. 28
2.10 Pendule pesant : solide oscillant autour d'un axe horizontal passant par O. 29
2.11 Corrigé : T^2 en fonction de L. Les rectangles d'erreur sont très petits ; ils ont été agrandis horizontalement pour être visibles. 30
2.12 Corrigé du pendule élastique : étude statique (à gauche) et étude dynamique (à droite). 31

3.1 MRUA partant du repos : accélération constante, vitesse linéaire, position parabolique en fonction du temps. 34
3.2 Chariot de masse m_1 sur un plan incliné d'angle α, relié par un fil à une masse suspendue m_2 : forces appliquées à chaque système. 34
3.3 Accélération théorique du chariot en fonction de l'inclinaison pour différentes masses suspendues ($a > 0$: le chariot monte). 36
3.4 Décomposition du poids sur un plan incliné : la composante $P \sin\alpha$ parallèle au plan est motrice, la composante $P \cos\alpha$ est compensée par la réaction $\vec{R}$. 36
3.5 Montage de l'étude dynamique : le chariot, retenu par l'électro-aimant, est libéré ; il déclenche le chronomètre en coupant le faisceau du pont 1 et l'arrête en coupant celui du pont 2. Ici $\sin\alpha = h/L_{\text{rail}}$. 38
3.6 Corrigé : t^2 en fonction de la distance parcourue x. 43
3.7 Corrigé : $1/t^2$ en fonction de $\sin\alpha$. 44

4.1 Pendule de torsion : le solide est fixé sur un axe vertical solidaire d'un ressort spiral qui exerce un couple de rappel proportionnel à l'angle de rotation. 45
4.2 Photographie du matériel du pendule de torsion : axe à ressort spiral sur trépied, barrière optique avec compteur, disque, cylindre plein, cylindre creux, sphère, barre munie de deux masses amovibles et dynamomètre. 46
4.3 Les solides étudiés ; l'axe de rotation (en pointillé) passe par le centre de masse. . 47
4.4 Moment d'une force par rapport à un axe perpendiculaire au plan de la figure en O : bras de levier d. 47
4.5 Théorème de Huygens : $I_\Delta = I_G + md^2$. Le moment d'inertie est minimal pour un axe passant par le centre de masse. 49
4.6 Découpage d'un disque (vu de dessus) en anneaux concentriques. 50
4.7 Découpage de la sphère en disques élémentaires d'épaisseur dz. 51
4.8 Méthode statique (vue de dessus) : on mesure la force F nécessaire pour maintenir la barre tournée de l'angle θ ; le moment de rappel vaut $M = F\,r = D\,\theta$. 53
4.9 Corrigé : moment de rappel du ressort spiral en fonction de l'angle de torsion. . . . 55
4.10 Corrigé : carré de la période en fonction du carré de la distance des masses à l'axe. 56

5.1 Photographie du dispositif de la roue de Maxwell : roue suspendue par deux fils à une potence, mètre de démonstration vertical, dispositif d'arrêt avec déclenchement et barrière optique réglable en hauteur. 60

5.2 Montage de la roue de Maxwell. La roue, suspendue par deux fils enroulés sur son axe, est libérée par le dispositif d'arrêt qui déclenche simultanément le compteur ; la barrière optique, placée à la distance ℓ sous la position de départ, arrête le compteur. 61
5.3 Déroulement sans glissement de l'axe le long du fil : le centre C descend à la vitesse $v = \omega r$. 62
5.4 Allure de la position $\ell(t)$ de la roue : descentes paraboliques puis remontées ; l'amplitude diminue lentement à cause des frottements et des chocs au point bas (axe des ordonnées orienté vers le bas). 64
5.5 Corrigé : à gauche, représentation logarithmique (pente 2 : $\ell \propto t^2$) ; à droite, linéarisation $\ell = f(t^2)$. 67
5.6 Corrigé : l'énergie potentielle perdue est transformée en énergie cinétique (presque entièrement de rotation) ; l'énergie totale reste constante. 69

6.1 Vue microscopique (très agrandie) d'un contact : seuls les sommets des aspérités se touchent. 70
6.2 Force de frottement en fonction de la force tangentielle appliquée : la force de frottement statique croît avec F jusqu'au seuil $\mu_s N$, puis le solide glisse et le frottement chute à $\mu_d N$. 71
6.3 Cône de frottement de demi-angle φ_s ($\tan\varphi_s = \mu_s$) : à l'équilibre, la réaction reste dans le cône. 72
6.4 Patin sur un plan horizontal, tiré par un fil tendu par la masse m : à la limite du glissement, la réaction est inclinée de l'angle φ_s par rapport à la normale. 73
6.5 Patin sur un plan incliné à la limite du glissement : la réaction $\vec{R}$ est verticale (elle compense le poids) et fait avec la normale un angle égal à α. 74
6.6 Photographie du plan inclinable utilisé en salle de TP : support réglable avec rapporteur et fil à plomb, patin en bois, poulie, porte-masse et masses marquées. . . . 75
6.7 Patin double face et surfaces de contact disponibles. 75
6.8 Corrigé : tension limite T en fonction du poids P du patin pour les quatre couples de matériaux ; les pentes sont les coefficients de frottement statique. 79

2.1 Cercle trigonométrique. 83

Avant-propos

Cet ouvrage s'adresse aux étudiants de première année des filières scientifiques et techniques de l'université et des écoles d'ingénieurs d'Algérie. Il suit dans ses grandes lignes le programme officiel de *Physique 1 – Mécanique du point matériel*. Les travaux pratiques qu'il propose sont dispensés à l'École Supérieure en Sciences Appliquées de Tlemcen (anciennement École Préparatoire) depuis 2015.

Cette édition enrichie conserve la structure d'origine en six séances, mais chaque séance a été développée afin que le polycopié puisse être utilisé de façon autonome, avant, pendant et après la séance :

- une **partie théorique** détaillée, avec les démonstrations complètes et de nombreuses figures ;
- une **description du matériel** et un **protocole expérimental** pas à pas ;
- des **questions de préparation** à traiter *avant* la séance ;
- des **exemples de traitement des données** (tableaux, graphes, calcul des incertitudes) ;
- un **corrigé type** avec des valeurs numériques cohérentes, ainsi que les erreurs fréquentes à éviter ;
- des **annexes** (constantes, formulaire, papier millimétré, modèle de compte rendu, grille d'évaluation).

Le manuscrit est divisé en six travaux pratiques :

TP	Intitulé	Notions clés
01	Mesures et incertitudes	incertitudes, rectangles d'erreur, régression linéaire
02	Pendule simple et pendule élastique	oscillateur harmonique, période, mesure de g et k
03	Plan incliné	2^{e} loi de Newton, MRUA, mesure de g
04	Moment d'inertie d'un solide	pendule de torsion, théorème de Huygens
05	Roue de Maxwell	conservation de l'énergie mécanique
06	Frottement statique	lois de Coulomb, cône de frottement

Organisation d'une séance de TP

Une séance dure en général 1 h 30 à 3 h. Elle se déroule en trois temps :

1. **Avant la séance** : lire le TP en entier, refaire les démonstrations de la partie théorique et répondre aux questions de préparation. L'enseignant peut contrôler cette préparation au début de la séance.
2. **Pendant la séance** : réaliser le montage, effectuer les mesures, les noter *immédiatement* dans un tableau avec leurs unités et leurs incertitudes, tracer les premiers graphes pour vérifier la cohérence des résultats avant de démonter.
3. **Après la séance** : exploiter les mesures, rédiger le compte rendu et le rendre dans les délais fixés par l'enseignant.

Règles de sécurité au laboratoire

△ Consignes de sécurité

- Ne jamais manger ni boire dans la salle de TP ; les sacs et vêtements restent hors des paillasses.
- Vérifier la stabilité des potences et des pieds de support avant de suspendre une masse.
- Ne pas laisser tomber les masses marquées : elles peuvent blesser et elles détériorent les capteurs.
- Ne jamais étirer un ressort au-delà de sa limite élastique (il serait déformé définitivement).
- Pour la roue de Maxwell et le pendule de torsion, ne pas dépasser les amplitudes indiquées.
- Les barrières optiques et chronomètres sont alimentés : ne pas manipuler les fiches avec les mains mouillées.
- En fin de séance : ranger le matériel, éteindre les appareils, laisser la paillasse propre.

Le compte rendu de TP

Le compte rendu est un document scientifique : il doit pouvoir être compris par un lecteur qui n'a pas assisté à la séance. Il comporte, dans l'ordre :

1. un **en-tête** : titre du TP, date, noms des membres du binôme, groupe ;
2. le **but** de la manipulation en deux ou trois lignes ;
3. un **rappel théorique** bref : les seules formules utiles, démontrées si cela est demandé ;
4. le **schéma du montage** annoté ;
5. les **tableaux de mesures**, avec unités et incertitudes ;
6. les **graphes** sur papier millimétré (titre, axes, unités, échelle, rectangles d'erreur) ;
7. l'**exploitation** : calculs, résultats encadrés sous la forme $X = (X_0 \pm \Delta X)$ unité ;

8. une **discussion critique** : comparaison avec la théorie, sources d'erreurs, améliorations possibles ;
9. une **conclusion** qui répond au but annoncé.

Les dix erreurs les plus fréquentes

1. Résultat donné sans unité.
2. Résultat sans incertitude.
3. Trop de chiffres significatifs (« $g = 9{,}8137452$ »).
4. Incertitude écrite avec plus d'un ou deux chiffres significatifs.
5. Graphe sans titre, sans unités ou avec une échelle irrégulière.
6. Points reliés par une ligne brisée au lieu d'une droite moyenne.
7. Pente lue sur deux points de mesure au lieu de deux points de la droite tracée.
8. Angles en degrés dans une formule qui exige des radians.
9. Confusion masse (kg) et poids (N).
10. Conclusion qui répète l'énoncé au lieu de discuter les résultats.

Matériel de mesure commun à plusieurs TP

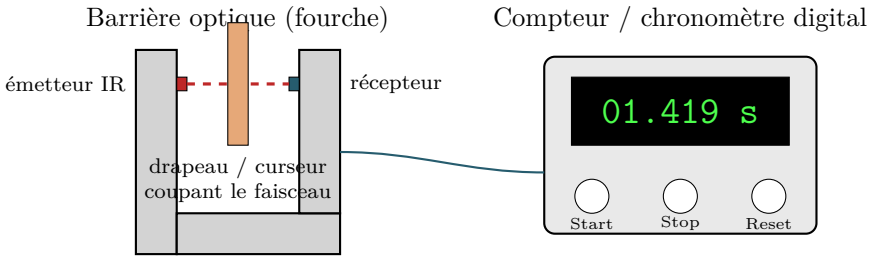


Figure 0.1 – Barrière optique et compteur digital. Le chronomètre est déclenché ou arrêté chaque fois qu'un objet coupe le faisceau infrarouge.

Barrière optique avec compteur. Elle possède plusieurs modes : mesure de la durée d'occultation du faisceau (mode « durée », utile pour une vitesse instantanée $v = d/\Delta t$), mesure du temps entre deux occultations (mode « période » pour un pendule) et comptage. Sa résolution est en général de 1 ms ; l'incertitude réelle est dominée par la manipulation (lâcher de l'objet, position du faisceau).

Chronomètre manuel. Le temps de réaction humain est de l'ordre de 0,1 à 0,2 s au déclenchement comme à l'arrêt. Pour mesurer une période, on chronomètre donc toujours **plusieurs périodes** (10 ou 20) et on divise : l'incertitude sur une période est alors divisée d'autant.

Dynamomètre. Ressort étalonné dont l'allongement est lu sur une graduation en newtons. Il faut faire le zéro dans la position d'utilisation (verticale ou horizontale) et tirer dans l'axe du

dynamomètre.

Règle, mètre, pied à coulisse. L'incertitude de lecture d'un instrument gradué est en général prise égale à une demi-graduation (ou une graduation si la lecture est difficile). Le pied à coulisse au 1/10 ou au 1/50 de mm est décrit au TP 01.

TP 01 : Mesures et incertitudes

Objectifs

- Apprendre les règles de base pour estimer les incertitudes expérimentales et valoriser ainsi les mesures effectuées au laboratoire.
- Savoir propager une incertitude dans un calcul (méthode différentielle et logarithmique).
- Écrire correctement un résultat (chiffres significatifs, unité, incertitude).
- Tracer une courbe expérimentale avec la méthode des rectangles d'erreur et exploiter la régression linéaire.
- Interpréter physiquement une courbe et la pente d'une droite.

Généralités

Vous devez acquérir de bons réflexes quant à la manipulation des grandeurs et de leurs unités, quant à l'utilisation des appareils de mesure ou de votre calculatrice. Dans un compte rendu de TP, il faut :

- répondre aux questions posées en apportant toutes les précisions et justifications nécessaires ;
- savoir porter un **regard critique** sur l'expérience, le matériel utilisé, les instruments de mesure, les résultats des manipulations, les écarts aux valeurs théoriques attendues…
- joindre les documents demandés (schémas, courbes, enregistrements…) en leur donnant un titre et en les annotant (points recherchés sur une courbe, précisions relatives au matériel, …).

I Grandeurs physiques et unités

Une **grandeur physique** est une grandeur que l'on mesure ou que l'on calcule : une longueur, un poids, une masse, une force, une quantité de chaleur, une tension, une intensité, une pression… sont des grandeurs physiques. Une grandeur s'exprime toujours par un **nombre** suivi d'une **unité** :

$$L = \underbrace{0{,}452}_{\text{valeur numérique}} \ \underbrace{\text{m}}_{\text{unité}}$$

Ces grandeurs peuvent être exprimées dans plusieurs unités, mais une seule est appelée « unité du Système International » (SI). C'est cette unité qu'il faut utiliser dans les formules de calcul : en exprimant toutes les grandeurs en unités SI, on élimine bien des erreurs.

I.1 Les sept unités de base du SI

Tableau 1.1 – Grandeurs et unités de base du Système International.

Grandeur	Unité	Symbole
Longueur	mètre	m
Masse	kilogramme	kg
Temps	seconde	s
Intensité du courant électrique	ampère	A
Température thermodynamique	kelvin	K
Quantité de matière	mole	mol
Intensité lumineuse	candela	cd

I.2 Unités dérivées utilisées en mécanique

Tableau 1.2 – Quelques unités dérivées rencontrées dans ce polycopié.

Grandeur	Unité	Symbole	En unités de base
Vitesse	mètre par seconde	m/s	$\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$
Accélération	mètre par seconde carrée	$\mathrm{m/s^2}$	$\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$
Force	newton	N	$\mathrm{kg{\cdot}m{\cdot}s^{-2}}$
Énergie, travail	joule	J	$\mathrm{kg{\cdot}m^2{\cdot}s^{-2}}$
Puissance	watt	W	$\mathrm{kg{\cdot}m^2{\cdot}s^{-3}}$
Pression	pascal	Pa	$\mathrm{kg{\cdot}m^{-1}{\cdot}s^{-2}}$
Moment d'une force	newton-mètre	N·m	$\mathrm{kg{\cdot}m^2{\cdot}s^{-2}}$
Moment d'inertie	kilogramme-mètre carré	$\mathrm{kg{\cdot}m^2}$	$\mathrm{kg{\cdot}m^2}$
Angle plan	radian	rad	(sans dimension)
Raideur d'un ressort	newton par mètre	N/m	$\mathrm{kg{\cdot}s^{-2}}$

I.3 Multiples et sous-multiples

giga	méga	kilo	–	centi	milli	micro	nano
G	M	k	–	c	m	μ	n
10^9	10^6	10^3	10^0	10^{-2}	10^{-3}	10^{-6}	10^{-9}

I.4 Analyse dimensionnelle

Chaque grandeur possède une **dimension**, notée entre crochets : $[L] = \mathsf{L}$, $[m] = \mathsf{M}$, $[t] = \mathsf{T}$. Une formule physique doit être **homogène** : les deux membres d'une égalité, et tous les termes d'une somme, ont la même dimension. C'est un outil puissant de vérification.

Exemple : homogénéité de la période du pendule simple

On affirme que $T = 2\pi\sqrt{\ell/g}$. Or $[\ell] = \mathsf{L}$ et $[g] = \mathsf{L}\,\mathsf{T}^{-2}$, donc

$$\left[\sqrt{\ell/g}\right] = \sqrt{\mathsf{L}/(\mathsf{L}\,\mathsf{T}^{-2})} = \sqrt{\mathsf{T}^2} = \mathsf{T}.$$

La formule est homogène à un temps. En revanche, $T = 2\pi\sqrt{g/\ell}$ serait homogène à l'inverse d'un temps : elle est *forcément* fausse.

△ Les angles

Un angle mesuré en degrés (°) doit être converti en radians avant d'être utilisé dans une formule où il apparaît seul (et non dans un sinus ou un cosinus calculé par la calculatrice en mode degrés) : $\theta(\text{rad}) = \theta(\text{ř}) \times \pi/180$. Par exemple, l'approximation $\sin\theta \approx \theta$ n'a de sens qu'en radians.

Dans un compte rendu de TP, pensez à préciser les unités et utilisez si possible celles du Système International.

II Erreurs et incertitudes

En sciences expérimentales, il n'existe pas de mesure parfaite. L'incertitude associée à un résultat de mesure fournit une indication quantitative sur la qualité de ce résultat.

II.1 Erreur

On appelle **erreur** sur une mesure la différence entre la valeur obtenue (valeur mesurée) et la valeur réelle (valeur exacte, inconnue en général) :

$$\text{Erreur} = x_{\text{mesuré}} - x_{\text{exact}}.$$

L'erreur est une grandeur algébrique, positive si la mesure est par excès, négative si la mesure est par défaut. Comme la valeur exacte est inconnue, l'erreur l'est aussi : on ne peut qu'en estimer un **majorant**, appelé incertitude.

II.2 Erreurs systématiques et erreurs aléatoires

Toute mesure est affectée d'erreurs dont les origines sont multiples : précision limitée des appareils, erreur humaine de lecture ou de manipulation, conditions de l'expérience (température, frottements…). On distingue :

- les **erreurs aléatoires** : elles varient de façon imprévisible d'une mesure à l'autre (temps de réaction de l'expérimentateur, vibrations…). On les réduit en *répétant* les mesures et en prenant la moyenne ;
- les **erreurs systématiques** : elles décalent toutes les mesures dans le même sens (zéro mal réglé, appareil mal étalonné, parallaxe toujours du même côté…). Répéter la mesure ne les

réduit pas ; il faut les détecter et corriger le protocole.

On parle de mesure **fidèle** (faible dispersion, peu d'erreurs aléatoires) et de mesure **juste** (pas d'erreur systématique). Une mesure à la fois juste et fidèle est dite **exacte** (figure 1.1).

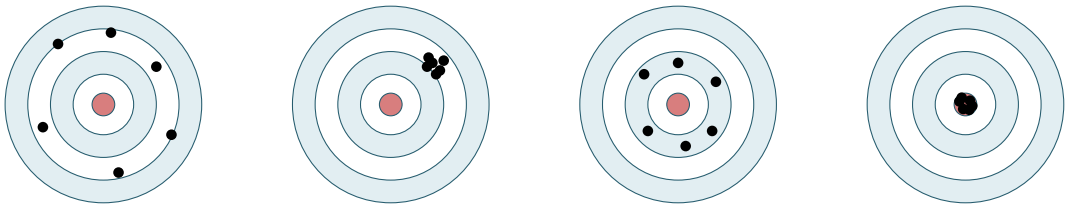


Figure 1.1 – Illustration des notions de justesse et de fidélité. Le centre de la cible représente la valeur vraie ; les points noirs sont des mesures répétées.

II.3 Incertitude absolue Δx

L'**incertitude absolue** Δx est l'erreur maximale que l'on est susceptible de commettre dans l'évaluation de x. Elle est toujours **positive** et s'exprime dans les **mêmes unités** que la grandeur mesurée. Le résultat d'une mesure n'est donc jamais une valeur unique : la valeur vraie se trouve à l'intérieur de l'intervalle

$$x_0 - \Delta x \;\leq\; x \;\leq\; x_0 + \Delta x, \qquad \text{ce que l'on écrit} \quad x = x_0 \pm \Delta x.$$

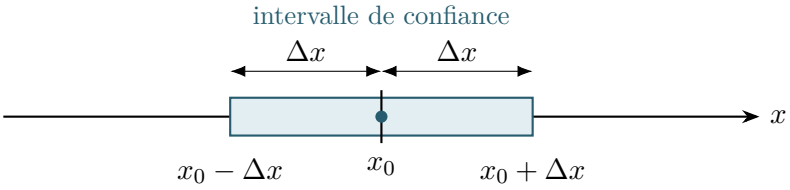


Figure 1.2 – Signification de l'écriture $x = x_0 \pm \Delta x$.

En pratique, au laboratoire, l'incertitude est évaluée en tenant compte des deux facteurs principaux : la précision limitée des appareils et l'erreur de l'expérimentateur :

$$\Delta x = \Delta x_{\text{appareil}} + \Delta x_{\text{expérimentateur}}.$$

Incertitude due à l'appareil

- **Appareil gradué** (règle, rapporteur, mètre ruban) : on prend en général une demi-graduation ; par exemple $\Delta \ell = 0{,}5\,\text{mm}$ pour une règle graduée en millimètres.
- **Appareil numérique** (chronomètre, balance) : on prend une unité du dernier chiffre affiché (résolution), éventuellement augmentée de la précision indiquée par le constructeur.
- **Appareil à vernier** (pied à coulisse) : la précision du vernier, par exemple 0,1 mm ou 0,02 mm.

Incertitude due à l'expérimentateur

Elle dépend de la difficulté de la mesure : repérage d'une position qui bouge, temps de réaction pour déclencher un chronomètre ($\approx 0{,}1$ à $0{,}2\,\mathrm{s}$), parallaxe lors de la lecture d'une graduation (figure 1.3), appréciation de l'instant d'équilibre…

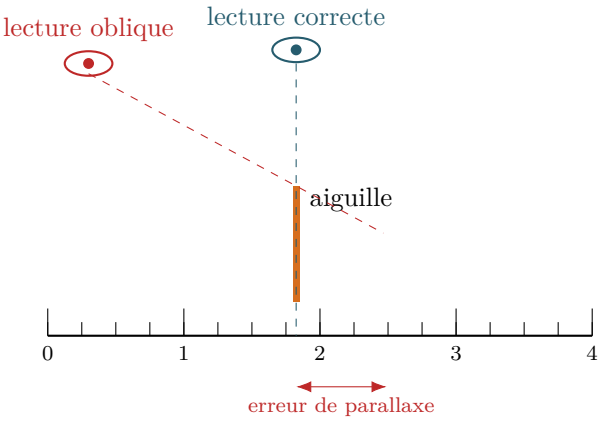


Figure 1.3 – Erreur de parallaxe : l'œil doit être placé dans le plan perpendiculaire à la graduation passant par l'index.

II.4 Mesures répétées : moyenne et écart-type

Lorsque l'on répète n fois la mesure d'une même grandeur dans les mêmes conditions, on obtient des valeurs $x_1, x_2, \ldots, x_n$ légèrement différentes. La meilleure estimation de la valeur vraie est la **moyenne arithmétique**

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i,$$

et la dispersion est caractérisée par l'**écart-type expérimental**

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}.$$

L'incertitude sur la moyenne diminue avec le nombre de mesures : $\Delta\bar{x} \approx \dfrac{s}{\sqrt{n}}$ (à multiplier par un facteur d'élargissement, environ 2, pour un niveau de confiance de 95 %).

Exemple : chronométrage de 10 périodes d'un pendule

Cinq étudiants mesurent la durée de 10 oscillations : 14,22 ; 14,10 ; 14,31 ; 14,18 ; 14,25 s. Moyenne : $\overline{10T} = 71{,}06/5 = 14{,}212\,\mathrm{s}$. Écart-type : $s \approx 0{,}078\,\mathrm{s}$. Incertitude sur la moyenne : $2s/\sqrt{5} \approx 0{,}07\,\mathrm{s}$.
Donc $10\,T = (14{,}21 \pm 0{,}07)\,\mathrm{s}$ et $T = (1{,}421 \pm 0{,}007)\,\mathrm{s}$.

II.5 Incertitude relative $\Delta x/x$

L'**incertitude relative** est le rapport entre l'incertitude absolue et la valeur mesurée. Elle n'a pas d'unité et s'exprime en général en pourcentage.

Exemple : $(23{,}4 \pm 0{,}5)\,\text{cm}$ peut aussi s'écrire $23{,}4\,\text{cm} \pm 2\,\%$, car $0{,}5/23{,}4 \approx 0{,}021$.

L'incertitude relative permet de comparer la précision de mesures différentes, même si elles portent sur des grandeurs de natures différentes. La mesure la plus précise est celle dont l'incertitude relative est la plus faible.

Exemple : quelle mesure est la plus précise ?

$\ell_1 = (1{,}000 \pm 0{,}001)\,\text{m}$ et $\ell_2 = (2{,}0 \pm 0{,}1)\,\text{mm}$.
$\Delta\ell_1/\ell_1 = 0{,}1\,\%$ tandis que $\Delta\ell_2/\ell_2 = 5\,\%$. Bien que l'incertitude absolue sur ℓ_2 soit 10 fois plus petite, c'est la mesure de ℓ_1 qui est la plus précise.

III Calcul d'incertitude : propagation des incertitudes

Une expérience comporte souvent la mesure de plusieurs grandeurs $x, y, z, \ldots$ puis le calcul d'une grandeur $f(x, y, z, \ldots)$. Il faut alors déterminer l'incertitude Δf à partir de $\Delta x, \Delta y, \Delta z, \ldots$

III.1 Méthode de la différentielle totale

On écrit la différentielle de f :

$$\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial f}{\partial z}\mathrm{d}z + \cdots$$

puis on remplace chaque différentielle par l'incertitude correspondante et chaque coefficient par sa valeur absolue (on se place dans le cas le plus défavorable où toutes les erreurs s'ajoutent) :

$$\boxed{\Delta f = \left|\frac{\partial f}{\partial x}\right|\Delta x + \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|\Delta y + \left|\frac{\partial f}{\partial z}\right|\Delta z + \cdots}$$

III.2 Méthode de la différentielle logarithmique

Elle est particulièrement commode lorsque f est un produit, un quotient ou une puissance. On prend le logarithme népérien de f, puis on différencie :

$$f = K\,x^a\,y^b\,z^c \;\Rightarrow\; \ln f = \ln K + a\ln x + b\ln y + c\ln z \;\Rightarrow\; \frac{\mathrm{d}f}{f} = a\frac{\mathrm{d}x}{x} + b\frac{\mathrm{d}y}{y} + c\frac{\mathrm{d}z}{z},$$

d'où

$$\boxed{\frac{\Delta f}{f} = |a|\frac{\Delta x}{x} + |b|\frac{\Delta y}{y} + |c|\frac{\Delta z}{z}}$$

△ Regrouper avant de passer aux incertitudes

Si une même variable apparaît plusieurs fois dans la différentielle, il faut **regrouper** ses termes *avant* de prendre les valeurs absolues ; sinon on surestime l'incertitude. Exemple : $f = \dfrac{x}{x+y}$, on écrit $\mathrm{d}f = \dfrac{y\,\mathrm{d}x - x\,\mathrm{d}y}{(x+y)^2}$ avant de passer aux incertitudes.

III.3 Cas usuels

Tableau 1.3 – Formules de propagation à retenir (K est une constante exacte).

Relation	Incertitude
$f = x + y \quad$ ou $\quad f = x - y$	$\Delta f = \Delta x + \Delta y$
$f = K\,x$	$\Delta f = \lvert K\rvert\,\Delta x$
$f = x\,y \quad$ ou $\quad f = x/y$	$\dfrac{\Delta f}{f} = \dfrac{\Delta x}{x} + \dfrac{\Delta y}{y}$
$f = x^n$	$\dfrac{\Delta f}{f} = \lvert n\rvert\,\dfrac{\Delta x}{x}$
$f = \sqrt{x}$	$\dfrac{\Delta f}{f} = \dfrac{1}{2}\dfrac{\Delta x}{x}$
$f = \sin x$ (x en rad)	$\Delta f = \lvert\cos x\rvert\,\Delta x$
$f = \ln x$	$\Delta f = \Delta x/x$

△ Différence de deux grandeurs voisines

Pour $f = x - y$, les incertitudes *s'ajoutent* même s'il s'agit d'une soustraction. Si x et y sont voisins, l'incertitude relative sur f devient très grande : il faut éviter de calculer une petite grandeur comme différence de deux grandes.

Exemple 1 : incertitude sur g mesuré avec un pendule simple

On a $g = \dfrac{4\pi^2\ell}{T^2}$ avec $\ell = (0{,}500 \pm 0{,}002)$ m et $T = (1{,}421 \pm 0{,}007)$ s.
Valeur : $g = 4\pi^2 \times 0{,}500/1{,}421^2 = 9{,}775\ \mathrm{m/s^2}$.
Différentielle logarithmique : $\ln g = \ln(4\pi^2) + \ln\ell - 2\ln T$, donc

$$\frac{\Delta g}{g} = \frac{\Delta\ell}{\ell} + 2\frac{\Delta T}{T} = \frac{0{,}002}{0{,}500} + 2 \times \frac{0{,}007}{1{,}421} = 0{,}0040 + 0{,}0099 = 0{,}0139.$$

$\Delta g = 9{,}775 \times 0{,}0139 \approx 0{,}14\ \mathrm{m/s^2}$. Résultat : $g = (9{,}78 \pm 0{,}14)\ \mathrm{m/s^2}$.
On remarque que c'est l'incertitude sur T qui domine (car T intervient au carré) : pour améliorer la mesure, il faut chronométrer plus d'oscillations.

Exemple 2 : volume d'un cylindre

$V = \pi R^2 h$ avec $R = (25{,}0 \pm 0{,}1)$ mm et $h = (100{,}0 \pm 0{,}5)$ mm.
$V = \pi \times 25{,}0^2 \times 100{,}0 = 196\,350\ \mathrm{mm^3}$.
$\dfrac{\Delta V}{V} = 2\dfrac{\Delta R}{R} + \dfrac{\Delta h}{h} = 2 \times 0{,}004 + 0{,}005 = 0{,}013$, d'où $\Delta V \approx 2\,600\ \mathrm{mm^3}$.
Résultat : $V = (196{,}4 \pm 2{,}6) \times 10^3\ \mathrm{mm^3} = (1{,}964 \pm 0{,}026) \times 10^{-4}\ \mathrm{m^3}$.

Exemple 3 : variable présente plusieurs fois

Accélération d'un système de deux masses : $a = \dfrac{m_2}{m_1 + m_2}\,g$ avec m_1, m_2 mesurées à Δm près.

$$\ln a = \ln m_2 - \ln(m_1+m_2) + \ln g \Rightarrow \frac{\mathrm{d}a}{a} = \frac{\mathrm{d}m_2}{m_2} - \frac{\mathrm{d}m_1+\mathrm{d}m_2}{m_1+m_2} = \frac{m_1\,\mathrm{d}m_2}{m_2(m_1+m_2)} - \frac{\mathrm{d}m_1}{m_1+m_2}.$$

D'où $\dfrac{\Delta a}{a} = \dfrac{m_1\Delta m_2}{m_2(m_1+m_2)} + \dfrac{\Delta m_1}{m_1+m_2}$ (en supposant g exact).

IV Précision des grandeurs : chiffres significatifs

Une expérience est souvent composée d'une prise de mesures et de la réalisation d'un calcul qui utilise les grandeurs mesurées. La précision des grandeurs mesurées fixe la précision avec laquelle on obtient la grandeur calculée.

IV.1 Définition

Les **chiffres significatifs** d'un nombre sont tous ses chiffres, à l'exception des zéros situés à gauche du premier chiffre non nul.

Nombre	Notation scientifique	Nombre de chiffres significatifs
0,520	$5{,}20 \times 10^{-1}$	3 (le zéro de droite compte)
0,009026	$9{,}026 \times 10^{-3}$	4
1200	ambigu	2, 3 ou 4
$1{,}20 \times 10^{3}$	$1{,}20 \times 10^{3}$	3
9,81	9,81	3

Une grandeur mesurée est d'autant plus précise qu'elle comporte un grand nombre de chiffres significatifs : 0,009026 est plus précis que 0,520.

IV.2 Règles d'écriture d'un résultat

1. Un résultat est toujours suivi de son incertitude absolue et de son unité.
2. L'incertitude absolue est arrondie **par excès** à **un** chiffre significatif (deux si le premier chiffre est 1 ou 2).
3. La valeur est arrondie de sorte que son dernier chiffre soit au **même rang décimal** que celui de l'incertitude.
4. Le nombre de chiffres significatifs est donc déterminé par l'incertitude, et non par la calculatrice.

Résultat brut de calcul	Écriture incorrecte	Écriture correcte
$g = 9{,}77514$; $\Delta g = 0{,}13587$	$g = 9{,}77514 \pm 0{,}13587$	$g = (9{,}78 \pm 0{,}14)\ \mathrm{m/s^2}$
$v = 7{,}1775$; $\Delta v = 0{,}268$	$v = 7{,}2 \pm 0{,}268$	$v = (7{,}2 \pm 0{,}3)\ \mathrm{m/s}$
$k = 10{,}1236$; $\Delta k = 0{,}421$	$k = 10 \pm 0{,}421$	$k = (10{,}1 \pm 0{,}5)\ \mathrm{N/m}$
$T = 1{,}4194$; $\Delta T = 0{,}0063$	$T = 1{,}4194 \pm 0{,}0063$	$T = (1{,}419 \pm 0{,}007)\ \mathrm{s}$

IV.3 Chiffres significatifs dans les calculs (sans incertitude explicite)

- **Produit, quotient** : le résultat a autant de chiffres significatifs que la donnée qui en a le moins. $3{,}14 \times 2{,}1 = 6{,}6$.
- **Somme, différence** : le résultat a autant de décimales que la donnée qui en a le moins. $12{,}52 + 1{,}3 = 13{,}8$.
- Garder un ou deux chiffres supplémentaires dans les calculs intermédiaires et n'arrondir qu'à la fin.

V Instruments de mesure de longueur : le vernier

Le pied à coulisse permet de mesurer des longueurs (diamètres, épaisseurs, profondeurs) avec une précision de 0,1, 0,05 ou 0,02 mm grâce à un **vernier**.

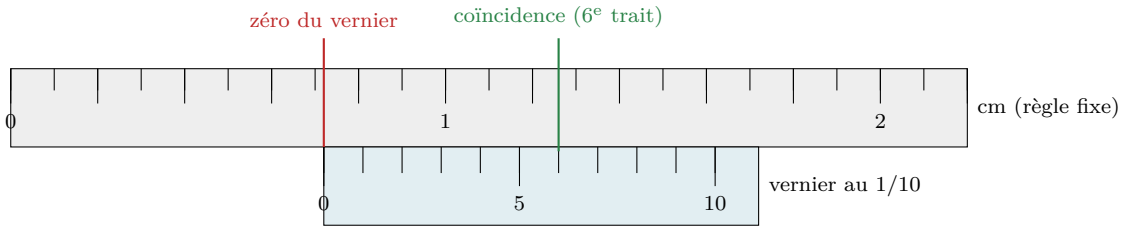


Figure 1.4 – Lecture d'un vernier au 1/10 de mm : le zéro du vernier se trouve entre 7 et 8 mm, et c'est le 6e trait du vernier qui coïncide avec un trait de la règle. La lecture est $L = 7{,}6$ mm.

Principe. Le vernier au 1/10 comporte 10 divisions qui occupent 9 mm : chaque division du vernier mesure donc 0,9 mm, soit 0,1 mm de moins qu'une division de la règle. Si le n-ième trait du vernier coïncide avec un trait de la règle, la fraction de millimètre à ajouter à la lecture entière vaut $n \times 0{,}1$ mm.

Lecture. (1) lire sur la règle le nombre entier de millimètres situé juste avant le zéro du vernier ; (2) chercher le trait du vernier qui coïncide le mieux avec un trait de la règle ; (3) ajouter $n\times$ (précision du vernier).

VI Représentation graphique

Un graphe permet de visualiser la relation entre deux grandeurs, de vérifier une loi et d'en extraire des paramètres (pente, ordonnée à l'origine).

VI.1 Règles de tracé sur papier millimétré

1. Donner un **titre** explicite au graphe, par exemple « $v = f(t)$: vitesse du chariot en fonction du temps ».
2. Porter la grandeur *imposée* (variable) en abscisse et la grandeur *mesurée* en ordonnée.
3. Indiquer sur chaque axe le nom (ou symbole) de la grandeur et son unité.

4. Choisir une **échelle** simple (1, 2 ou 5 unités par cm), régulière, qui utilise au mieux la feuille ; l'indiquer clairement (ex. : 1 cm $\leftrightarrow$ 0,5 s).

5. L'origine n'est pas obligatoirement représentée (sauf si l'on cherche une ordonnée à l'origine ou si la loi passe par l'origine).

6. Placer les points avec une croix fine, puis représenter le domaine d'incertitude.

7. Tracer la courbe **moyenne** (droite ou courbe continue) et **ne jamais relier les points** par une ligne brisée.

VI.2 Linéarisation

L'œil reconnaît facilement une droite, beaucoup moins une parabole ou une exponentielle. On cherche donc à transformer la loi étudiée en une relation affine $Y = aX + b$ par un changement de variables :

Loi	Changement de variables	Pente	Ordonnée à l'origine
$T = 2\pi\sqrt{\ell/g}$	$Y = T^2$, $X = \ell$	$4\pi^2/g$	0
$x = \frac{1}{2}at^2$	$Y = x$, $X = t^2$	$a/2$	0
$y = A\,x^k$	$Y = \ln y$, $X = \ln x$	k	$\ln A$
$y = A\,e^{-x/\tau}$	$Y = \ln y$, $X = x$	$-1/\tau$	$\ln A$
$T^2 = \frac{4\pi^2}{k}(m + m_0)$	$Y = T^2$, $X = m$	$4\pi^2/k$	$4\pi^2 m_0/k$

VI.3 Calcul de la pente

La pente d'une droite se calcule à partir de **deux points de la droite tracée**, choisis éloignés l'un de l'autre, et *non* à partir de deux points de mesure :

$$p = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}.$$

La pente a une unité : celle de l'ordonnée divisée par celle de l'abscisse.

VI.4 Méthode des rectangles d'erreur

Chacun des résultats expérimentaux possède son incertitude. Le résultat expérimental n'est donc pas un point du graphe, mais un domaine de valeurs possibles, en forme de rectangle de demi-côtés Δx_i et Δy_i (ou de segment si une seule des grandeurs est incertaine).

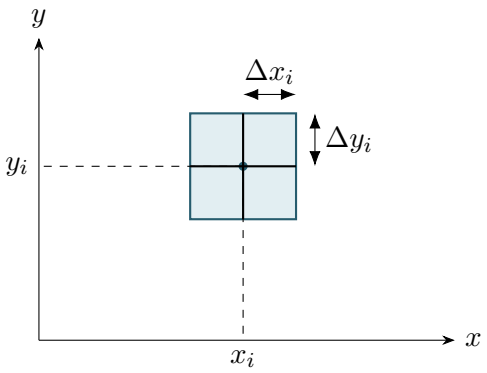


Figure 1.5 – Rectangle d'incertitude associé à un point de mesure $(x_i \pm \Delta x_i\,;\, y_i \pm \Delta y_i)$.

La démarche est la suivante :

- placer les résultats expérimentaux sur le graphe ;
- représenter autour de chacun son rectangle d'incertitude ;
- tracer la droite « moyenne » qui passe par la majorité des rectangles, avec une pente variant de façon continue (ni ligne brisée, ni zigzag) ;
- tracer les deux droites extrêmes qui traversent **tous** les rectangles : celle de pente maximale $P_{\max}$ et celle de pente minimale $P_{\min}$;
- la pente et son incertitude s'écrivent alors :

$$\boxed{P = \frac{P_{\max} + P_{\min}}{2}\,; \qquad \Delta P = \frac{P_{\max} - P_{\min}}{2}}$$

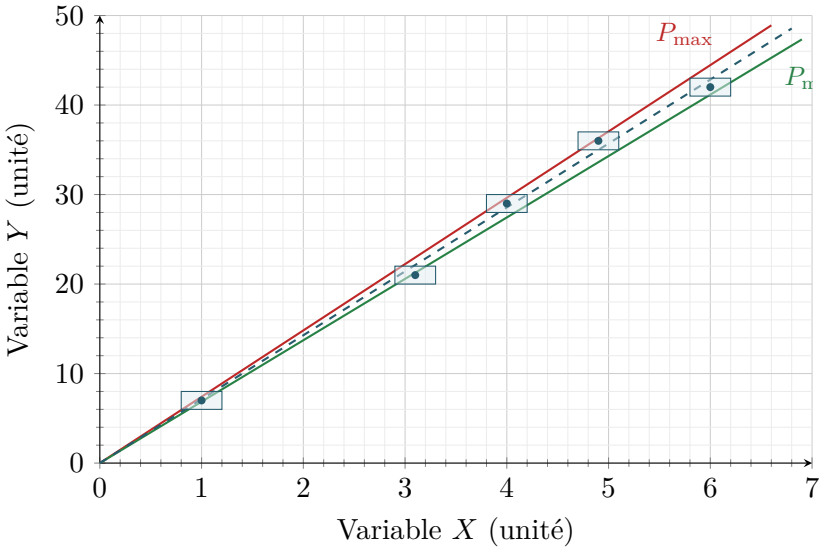


Figure 1.6 – Méthode des rectangles d'erreur : droites de pente maximale et minimale passant par tous les rectangles (ici contraintes à passer par l'origine).

VI.5 Régression linéaire (méthode des moindres carrés)

Supposons que l'on dispose de n couples $(x_i; y_i)$, $i = 1, \ldots, n$, de valeurs expérimentales mesurées. Placés dans le plan (x, y), ils forment un **nuage de points**. On cherche la droite $y^* = bx + a$ qui décrit au mieux la tendance du nuage.

On fait l'hypothèse que pour chaque point $y_i = bx_i + a + e_i$, où e_i est un « résidu » qui s'ajoute à la valeur $y_i^* = bx_i + a$ que donnerait une relation linéaire exacte. La droite des moindres carrés est celle qui rend minimale la somme des carrés des résidus (figure 1.7) :

$$S(a, b) = \sum_{i=1}^{n} e_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (y_i - a - bx_i)^2.$$

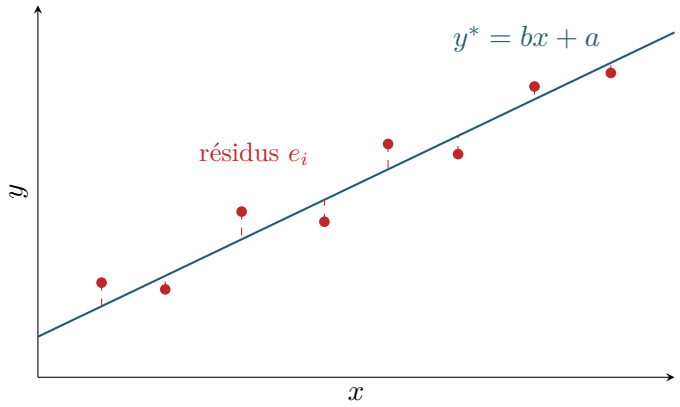


Figure 1.7 – Les résidus e_i sont les écarts verticaux entre les points de mesure et la droite ; la méthode des moindres carrés minimise $\sum e_i^2$.

Démonstration. Le minimum de S est atteint lorsque ses dérivées partielles s'annulent :

$$\frac{\partial S}{\partial a} = -2\sum(y_i - a - bx_i) = 0, \qquad \frac{\partial S}{\partial b} = -2\sum x_i(y_i - a - bx_i) = 0,$$

soit le système des « équations normales »

$$n\,a + b\sum x_i = \sum y_i, \qquad a\sum x_i + b\sum x_i^2 = \sum x_i y_i,$$

dont la résolution (par la méthode de Cramer) donne les estimateurs :

$$\hat{b} = \frac{n\sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{D_x}, \qquad \hat{a} = \frac{\sum x_i^2 \sum y_i - \sum x_i y_i \sum x_i}{D_x}, \qquad D_x = n\sum x_i^2 - \Big(\sum x_i\Big)^2$$

$\hat{a}$ et $\hat{b}$ s'appellent les **estimateurs des moindres carrés** de a et b ; $\hat{y} = \hat{a} + \hat{b}x$ est la valeur estimée (ou prédiction) de y ; la droite d'équation $\hat{y} = \hat{a} + \hat{b}x$ est la **droite de régression** de y en x. On remarque que la droite passe toujours par le point moyen $(\bar{x}, \bar{y})$.

Incertitudes. Dans la suite on note simplement a et b. L'écart-type des mesures y_i autour de la droite et les incertitudes-types sur a et b valent :

$$\sigma_y = \sqrt{\frac{S}{n-2}}, \qquad S = \sum_{i=1}^{n} \big(y_i - (a + bx_i)\big)^2, \qquad \sigma_a = \sigma_y \sqrt{\frac{\sum x_i^2}{D_x}}, \qquad \sigma_b = \sigma_y \sqrt{\frac{n}{D_x}}.$$

Le facteur $n-2$ traduit le fait que deux paramètres (a et b) ont été ajustés sur les données.

Droite passant par l'origine. Si la théorie impose $a = 0$, la droite s'écrit $y = bx$ et l'on minimise $S = \sum (y_i - bx_i)^2$:

$$b = \frac{\sum x_i y_i}{\sum x_i^2}, \qquad \sigma_y = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum (y_i - bx_i)^2}, \qquad \sigma_b = \frac{\sigma_y}{\sqrt{\sum x_i^2}}.$$

Coefficient de corrélation.

$$r = \frac{n \sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{\sqrt{D_x \, D_y}}, \qquad D_y = n \sum y_i^2 - \Big(\sum y_i\Big)^2, \qquad -1 \le r \le 1.$$

Plus $|r|$ se rapproche de 1, plus la relation linéaire est fiable. Si r tend vers 0, la relation entre x et y n'est pas linéaire (ou il n'y a pas de relation). En physique on attend en général $|r| > 0{,}99$. Attention : un r proche de 1 ne prouve pas que le modèle est le bon ; il faut aussi regarder la répartition des résidus.

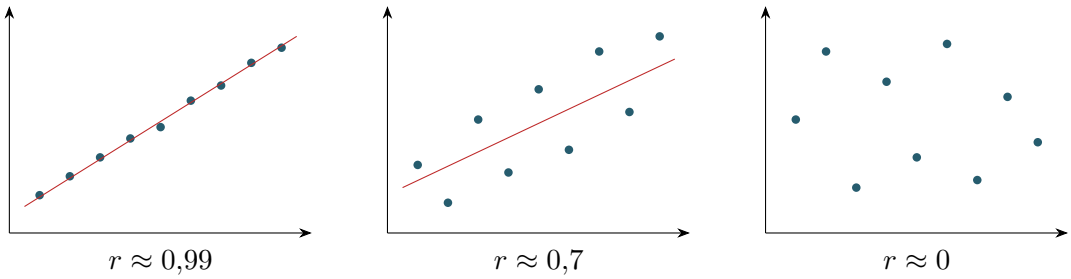


Figure 1.8 – Nuages de points et coefficient de corrélation.

Organisation pratique du calcul

On dresse un tableau avec les colonnes x_i, y_i, x_i^2, y_i^2, $x_i y_i$, puis on calcule les cinq sommes. La plupart des calculatrices scientifiques (mode STAT / REG) et les tableurs (fonctions `DROITEREG`, `PENTE`, `ORDONNEE.ORIGINE`, `COEFFICIENT.CORRELATION`) donnent directement a, b et r.

VII Applications

VII.1 Rectangles d'erreur

En utilisant les résultats du tableau suivant, déterminer la pente du graphe de la vitesse en fonction du temps. Que représente la pente (physiquement) ?

Tableau 1.4 – Vitesse d'un mobile en fonction du temps.

temps t (s)	$\pm 0{,}2$	1,0	3,1	4,0	4,9	6,0
vitesse v (m/s)	± 1	7	21	29	36	42

VII.2 Régression linéaire

Le tableau ci-dessous rassemble cinq mesures de la pression P et de la température T d'un gaz, obtenues par un étudiant. Estimant que ses mesures de P ont une incertitude négligeable et que celles sur T sont toutes égales à quelques degrés, l'étudiant admet que ses valeurs s'ajustent à une droite. Sur une feuille millimétrée, représenter les mesures avec les segments d'erreur associés à ΔT et la droite de régression linéaire $T = aP + b$.

Tableau 1.5 – Température d'un gaz en fonction de sa pression.

P (mm de mercure)	65	75	85	95	105
T (°C)	-20	17	42	94	127

1. Calculer a, b, σ_y, σ_a, σ_b et r.
2. En déduire la valeur de la température pour laquelle la pression du gaz s'annulerait (zéro absolu expérimental). Comparer à $-273{,}15\,°\text{C}$.

VII.3 Exercices complémentaires

Exercices d'entraînement

1. Combien de chiffres significatifs comportent : 0,0450 ; $3{,}00 \times 10^8$; 1007 ; 0,1 ?
2. On mesure la longueur d'une table $L = (152{,}3 \pm 0{,}2)\,\text{cm}$ et sa largeur $\ell = (76{,}1 \pm 0{,}2)\,\text{cm}$. Calculer le périmètre, l'aire et leurs incertitudes.
3. La période d'un ressort est $T = 2\pi\sqrt{m/k}$. Exprimer k et $\Delta k/k$ en fonction de m, T, Δm, ΔT. Application : $m = (100 \pm 1)\,\text{g}$, $10\,T = (6{,}28 \pm 0{,}10)\,\text{s}$.
4. Un mobile parcourt $d = (1{,}000 \pm 0{,}002)\,\text{m}$ en $t = (0{,}452 \pm 0{,}001)\,\text{s}$. Calculer sa vitesse moyenne avec son incertitude.
5. Une bille tombe en chute libre d'une hauteur h : $h = \frac{1}{2}gt^2$. On mesure $h = (1{,}20 \pm 0{,}01)\,\text{m}$ et $t = (0{,}495 \pm 0{,}005)\,\text{s}$. Calculer g et Δg ; quelle mesure faut-il améliorer en priorité ?
6. Montrer que pour $f = \dfrac{x-y}{x+y}$, $\Delta f = \dfrac{2(y\,\Delta x + x\,\Delta y)}{(x+y)^2}$.

VIII Corrigé type et barème

Corrigé – Application 1 : rectangles d'erreur (10 pts)

Présentation du graphe (figure 1.6) : axes avec grandeurs et unités (0,25 + 0,25 pt) ; échelle avec unités, par exemple 1 cm ↔ 0,5 s et 1 cm ↔ 5 m/s (0,5 + 0,5 pt) ; titre « $v = f(t)$ » (0,5 pt) ; points expérimentaux avec leurs rectangles $2\Delta t \times 2\Delta v = 0{,}4\,\text{s} \times 2\,\text{m/s}$ (2 pts) ; droites de pentes extrêmes (1 + 1 pt).

Détermination des pentes. Le mouvement part du repos, les droites passent par l'origine. Une droite $v = p\,t$ traverse le rectangle i si $\dfrac{v_i - 1}{t_i + 0{,}2} \le p \le \dfrac{v_i + 1}{t_i - 0{,}2}$:

Point	(1,0 ; 7)	(3,1 ; 21)	(4,0 ; 29)	(4,9 ; 36)	(6,0 ; 42)
p minimal	5,00	6,06	6,67	**6,86**	6,61
p maximal	10,0	7,59	7,89	7,87	**7,41**

Ainsi $P_{\min} = 6{,}86\,\text{m/s}^2$ (1 pt) et $P_{\max} = 7{,}41\,\text{m/s}^2$ (1 pt), d'où

$$P = \frac{7{,}41 + 6{,}86}{2} = 7{,}14\ \text{m/s}^2, \qquad \Delta P = \frac{7{,}41 - 6{,}86}{2} = 0{,}28\ \text{m/s}^2$$

$$P = (7{,}1 \pm 0{,}3)\ \text{m/s}^2 \qquad (0{,}5 + 0{,}5\ \text{pt})$$

(Une lecture graphique moins rigoureuse donne des valeurs voisines, par exemple $P_{\min} \approx 6{,}83$ et $P_{\max} \approx 7{,}1\,\text{m/s}^2$; tout résultat compatible est accepté.)

Signification physique (1 pt) : la pente $\mathrm{d}v/\mathrm{d}t$ est l'**accélération** du mobile. La courbe étant une droite, l'accélération est constante : le mouvement est rectiligne uniformément accéléré.

Vérification par régression linéaire : $b = 7{,}18\,\text{m/s}^2$, $\sigma_b = 0{,}27\,\text{m/s}^2$, $a = -0{,}27 \pm 1{,}12\,\text{m/s}$ (compatible avec 0), $r = 0{,}998$. Les deux méthodes concordent.

Corrigé – Application 2 : régression linéaire (8 pts)

Tableau de calcul ($x = P$ en mmHg, $y = T$ en °C, $n = 5$) :

x_i	y_i	x_i^2	y_i^2	$x_i y_i$
65	−20	4225	400	−1300
75	17	5625	289	1275
85	42	7225	1764	3570
95	94	9025	8836	8930
105	127	11025	16129	13335
$\Sigma = 425$	$\Sigma = 260$	$\Sigma = 37125$	$\Sigma = 27418$	$\Sigma = 25810$

$D_x = 5 \times 37125 - 425^2 = 5000$; $\quad D_y = 5 \times 27418 - 260^2 = 69490$.

$$b_{\text{pente}} = \frac{5 \times 25810 - 425 \times 260}{5000} = \frac{18550}{5000} = 3{,}71\ \text{°C/mmHg},$$

$$a_{\text{ord}} = \frac{37125 \times 260 - 25810 \times 425}{5000} = -263{,}35 \text{ °C}.$$

Résidus : $e_i = y_i - (3{,}71 x_i - 263{,}35) = 2{,}2\,;\ 2{,}1\,;\ -10{,}0\,;\ 4{,}9\,;\ 0{,}8$ (°C), d'où $S = \sum e_i^2 = 133{,}9$ $(\text{°C})^2$ et

$$\sigma_y = \sqrt{133{,}9/3} = 6{,}68 \text{ °C}, \qquad \sigma_{\text{pente}} = 6{,}68\sqrt{5/5000} = 0{,}21 \text{ °C/mmHg},$$

$$\sigma_{\text{ord}} = 6{,}68\sqrt{37125/5000} = 18 \text{ °C}.$$

$$r = \frac{18550}{\sqrt{5000 \times 69490}} = 0{,}995.$$

$$T = (3{,}71 \pm 0{,}21)\,P + (-263 \pm 18) \quad (\text{°C},\ P \text{ en mmHg}), \quad r = 0{,}995$$

Barème : graphe (axes 0,5 ; échelle 1 ; titre 0,5 ; points, segments d'erreur et droite 2) ; pente avec unité (1) ; ordonnée à l'origine avec unité (1) ; σ_y (0,5) ; σ_a (0,5) ; σ_b (0,5) ; r (0,5).

Interprétation : l'ordonnée à l'origine est la température pour laquelle la pression s'annulerait : $T_0 = (-263 \pm 18)\,\text{°C}$. La valeur théorique du zéro absolu, $-273{,}15\,\text{°C}$, appartient à l'intervalle $[-281\,;\ -245]\,\text{°C}$: le résultat est compatible avec la loi des gaz parfaits à volume constant ($P \propto T$ absolue).

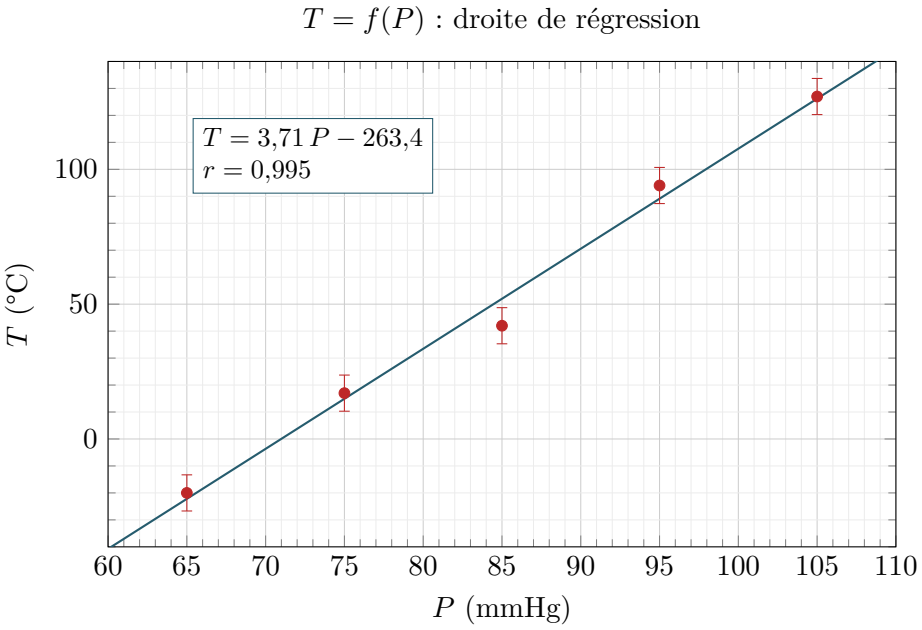


Figure 1.9 – Corrigé de l'application 2 : points de mesure, segments d'erreur $\pm\sigma_y$ et droite des moindres carrés.

△ Erreurs fréquentes dans ce TP

- Tracer les droites extrêmes par deux points de mesure au lieu de les faire passer par tous les rectangles.
- Oublier les unités de la pente (ici $\mathrm{m/s^2}$ et °C/mmHg).
- Écrire $r = 0{,}9951711$: deux ou trois chiffres suffisent.
- Confondre σ_a (ordonnée à l'origine) et σ_b (pente) à cause des notations $y = a + bx$ ou $y = ax + b$: toujours préciser la convention utilisée.

TP 02 : Pendule simple et pendule élastique

Objectifs

- Étudier le mouvement du centre d'inertie d'un pendule simple et d'un oscillateur élastique (masse–ressort).
- Étudier l'influence de l'amplitude, de la masse et de la longueur du fil sur la période T du pendule simple.
- Mesurer l'intensité de la pesanteur g à l'aide d'un pendule simple.
- Déterminer la constante de raideur k d'un ressort par deux méthodes (statique et dynamique) et les comparer.

I Généralités sur les oscillateurs

Un système est dit **oscillant** lorsqu'il effectue un mouvement de va-et-vient autour d'une position d'équilibre stable. Lorsque ce mouvement se répète identique à lui-même à intervalles de temps égaux, il est **périodique** ; la durée d'un aller-retour complet est la **période** T (en s), son inverse est la **fréquence** $f = 1/T$ (en Hz) et l'on définit la **pulsation** $\omega_0 = 2\pi f = 2\pi/T$ (en rad/s).

Un **oscillateur harmonique** est un système dont l'élongation $u(t)$ (angle, déplacement…) obéit à l'équation différentielle

$$\boxed{\ddot{u} + \omega_0^2\, u = 0}$$

dont la solution générale est sinusoïdale :

$$u(t) = U_m \cos(\omega_0 t + \varphi),$$

où l'amplitude U_m et la phase à l'origine φ sont fixées par les conditions initiales. Point essentiel : la période $T_0 = 2\pi/\omega_0$ **ne dépend pas de l'amplitude** (isochronisme).

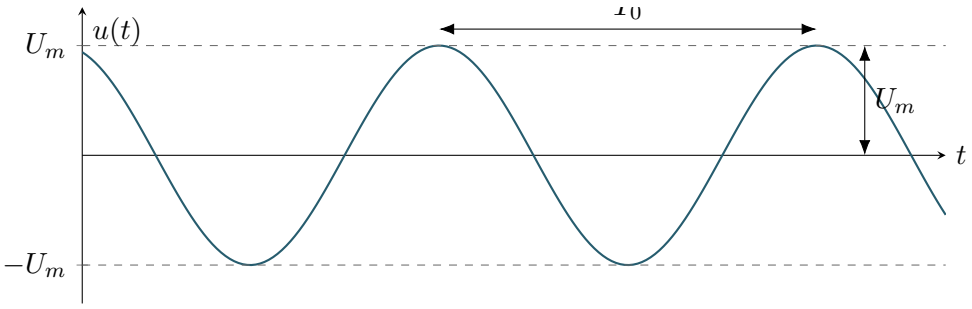


Figure 2.1 – Élongation d'un oscillateur harmonique : sinusoïde de période T_0 et d'amplitude U_m.

II Étude théorique

II.1 Le pendule simple

On constitue un pendule simple en suspendant une boule de masse M à un fil de masse négligeable et de longueur ℓ, fixé à une potence par son extrémité supérieure. On écarte légèrement la boule de sa position d'équilibre (amplitude θ_0 inférieure à 10°) puis on la lâche.

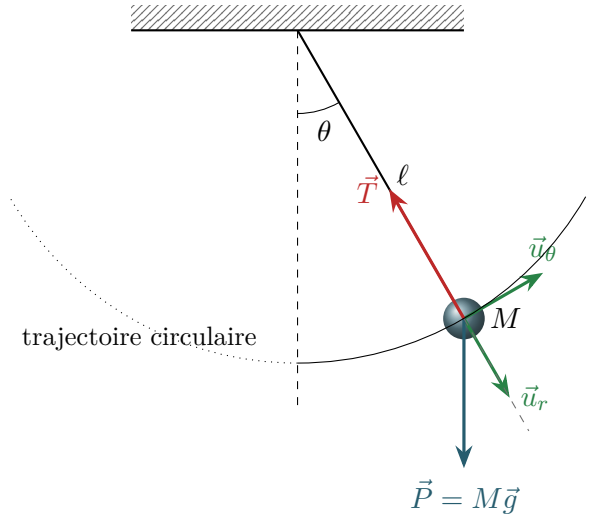


Figure 2.2 – Pendule simple : forces appliquées à la masse M et base polaire $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$.

Bilan des forces. Dans le référentiel terrestre supposé galiléen, la masse est soumise à son poids $\vec{P} = M\vec{g}$ et à la tension $\vec{T}$ du fil (on néglige les frottements de l'air). Le principe fondamental de la dynamique s'écrit

$$\sum \vec{F} = M\vec{\gamma} \;\Rightarrow\; \vec{P} + \vec{T} = M\vec{\gamma}.$$

Cinématique en coordonnées polaires. La position de la masse est $\overrightarrow{OM} = \ell\,\vec{u}_r$ avec ℓ constant. En dérivant (avec $\mathrm{d}\vec{u}_r/\mathrm{d}\theta = \vec{u}_\theta$ et $\mathrm{d}\vec{u}_\theta/\mathrm{d}\theta = -\vec{u}_r$) :

$$\vec{v} = \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t} = \ell\,\dot{\theta}\,\vec{u}_\theta, \qquad \vec{\gamma} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \ell\ddot{\theta}\,\vec{u}_\theta - \ell\dot{\theta}^2\,\vec{u}_r.$$

Projections.

$$\text{sur } \vec{u}_r : \quad -M\ell\dot{\theta}^2 = Mg\cos\theta - T \tag{2.1}$$

$$\text{sur } \vec{u}_\theta : \quad M\ell\ddot{\theta} = -Mg\sin\theta \tag{2.2}$$

L'équation (2.2) donne l'**équation du mouvement**

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell}\sin\theta = 0,$$

et l'équation (2.1) permet de calculer la tension du fil : $T = Mg\cos\theta + M\ell\dot{\theta}^2$.

Petites oscillations. Pour θ petit (en radians), $\sin\theta \simeq \theta$ et l'équation devient celle d'un oscillateur harmonique :

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell}\theta = 0, \qquad \omega_0^2 = \frac{g}{\ell} = \left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2$$

d'où la formule de la période propre du pendule simple :

$$T_0 \quad = \quad 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$$

Cette période est **indépendante de la masse** M (elle se simplifie dans l'équation) et, dans l'approximation des petites oscillations, **indépendante de l'amplitude**.

Validité de l'approximation $\sin\theta \simeq \theta$**.**

θ (°)	5	10	20	30	45	60
θ (rad)	0,0873	0,1745	0,3491	0,5236	0,7854	1,0472
$\sin\theta$	0,0872	0,1736	0,3420	0,5000	0,7071	0,8660
Écart relatif	0,13 %	0,51 %	2,1 %	4,7 %	11 %	21 %

II.2 Influence de l'amplitude : formule de Borda

Pour des amplitudes plus grandes, l'équation non linéaire $\ddot{\theta} + \omega_0^2\sin\theta = 0$ conduit à une période qui **augmente avec l'amplitude** θ_0. Un développement limité donne la formule de Borda :

$$T(\theta_0) \simeq T_0\left(1 + \frac{\theta_0^2}{16} + \frac{11\,\theta_0^4}{3072} + \cdots\right) \qquad (\theta_0 \text{ en rad}).$$

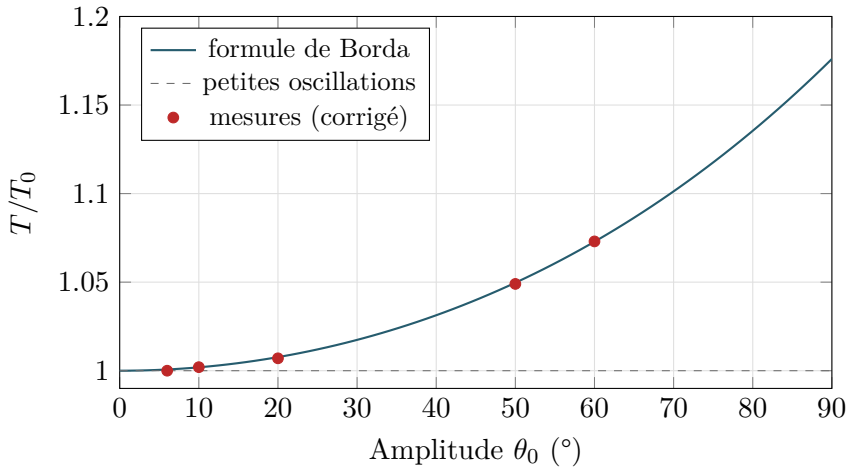


Figure 2.3 – Rapport T/T_0 en fonction de l'amplitude. En dessous de 10°, l'écart est inférieur à 0,2 % : la période peut être considérée comme indépendante de l'amplitude.

II.3 Approche énergétique

L'énergie mécanique du pendule (référence de l'énergie potentielle au point le plus bas) s'écrit

$$E_m = \frac{1}{2} M\ell^2\dot{\theta}^2 + Mg\ell(1-\cos\theta).$$

En l'absence de frottements, E_m est constante : $\mathrm{d}E_m/\mathrm{d}t = M\ell^2\dot{\theta}\ddot{\theta} + Mg\ell\dot{\theta}\sin\theta = 0$, ce qui redonne l'équation du mouvement. Au cours d'une oscillation, l'énergie potentielle (maximale aux positions extrêmes) se transforme en énergie cinétique (maximale au passage par la verticale), et inversement. La vitesse maximale est $v_{\max} = \sqrt{2g\ell(1-\cos\theta_0)}$.

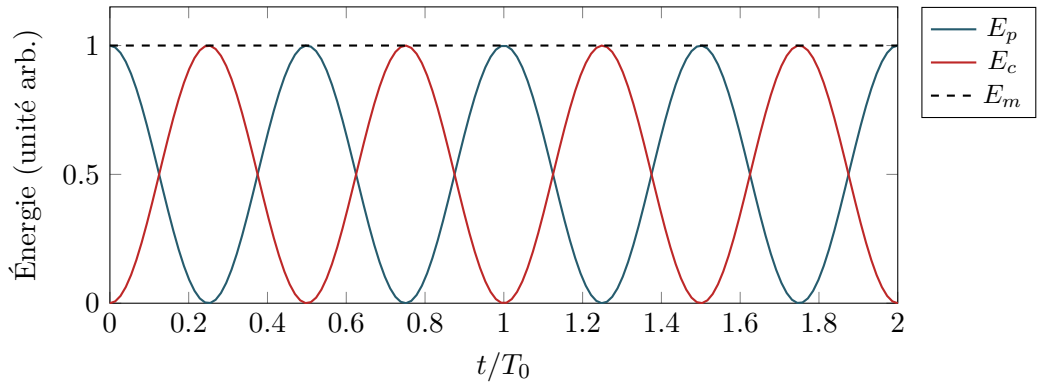


Figure 2.4 – Échanges entre énergie potentielle et énergie cinétique (petites oscillations, sans frottement). Les énergies oscillent avec une période $T_0/2$.

II.4 Le pendule élastique vertical

II.4.1 Étude statique

On dispose d'un ressort à spires non jointives, de masse négligeable, suspendu verticalement, l'extrémité supérieure fixée à un support. On appelle ℓ_0 la longueur du ressort à vide. Lorsqu'on accroche une masse m (à l'aide d'un porte-masse), le ressort s'allonge d'une quantité x et sa

longueur devient $\ell = \ell_0 + x$. D'après la loi de Hooke, la tension du ressort est proportionnelle à son allongement : $T = kx$, où k est la **constante de raideur** (N/m).

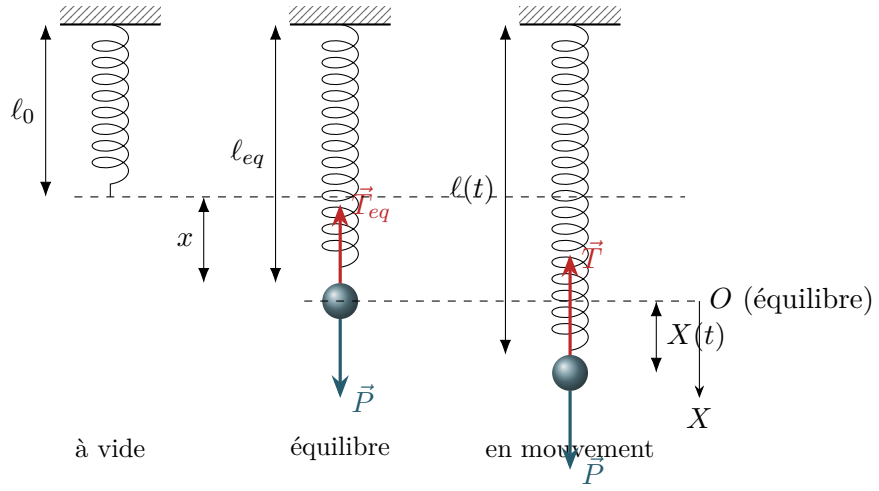


Figure 2.5 – Ressort à vide, masse à l'équilibre, masse en mouvement : allongement statique x et élongation dynamique $X(t)$ comptée à partir de la position d'équilibre O.

À l'équilibre :

$$\sum \vec{F} = \vec{0} \;\Rightarrow\; \vec{P} + \vec{T} = \vec{0} \;\Rightarrow\; mg - kx = 0.$$

En remplaçant $x = \ell - \ell_0$, on obtient une relation **affine** entre ℓ et m :

$$\ell \;=\; \frac{g}{k}\,m \;+\; \ell_0$$

Le graphe $\ell = f(m)$ est donc une droite de pente g/k et d'ordonnée à l'origine ℓ_0.

II.4.2 Étude dynamique

On écarte la masse de sa position d'équilibre d'une distance X_m vers le bas puis on la lâche sans vitesse initiale ; elle oscille autour de sa position d'équilibre. On repère sa position par l'élongation $X(t)$ comptée à partir de l'équilibre, axe orienté vers le bas. À un instant t, l'allongement total du ressort vaut $x + X$:

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} \;\Rightarrow\; mg - k(x + X) = m\frac{\mathrm{d}^2X}{\mathrm{d}t^2}.$$

Compte tenu de la condition d'équilibre $mg = kx$, il reste

$$\ddot{X} + \frac{k}{m}X = 0, \qquad \omega_0^2 = \frac{k}{m} = \left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2$$

d'où

$$T_0 \;=\; 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \qquad \Longleftrightarrow \qquad T_0^2 \;=\; \frac{4\pi^2}{k}\,m$$

Le poids n'intervient que pour déplacer la position d'équilibre : la période d'un oscillateur vertical est la même que celle d'un oscillateur horizontal sans frottement.

Influence de la masse du ressort

Un ressort réel a une masse m_r non nulle. On montre que tout se passe comme si l'on ajoutait à m environ un tiers de la masse du ressort (ainsi que la masse du porte-masse m_p) : $T^2 = \dfrac{4\pi^2}{k}\left(m + m_p + \dfrac{m_r}{3}\right)$. Le graphe $T^2 = f(m)$ reste une droite de pente $4\pi^2/k$, mais son ordonnée à l'origine n'est plus nulle. C'est pourquoi on détermine k à partir de la **pente** et non à partir d'un seul point.

II.5 Comparaison des deux oscillateurs

	Pendule simple	Pendule élastique
Variable	angle θ (rad)	élongation X (m)
Force de rappel	composante du poids $-Mg\sin\theta$	tension du ressort $-kX$
Équation	$\ddot{\theta} + (g/\ell)\theta = 0$	$\ddot{X} + (k/m)X = 0$
Période	$T_0 = 2\pi\sqrt{\ell/g}$	$T_0 = 2\pi\sqrt{m/k}$
Dépend de la masse ?	non	oui ($\propto \sqrt{m}$)
Dépend de g ?	oui	non
Linéaire ?	seulement pour θ petit	tant que le ressort reste élastique

Questions de préparation

1. Vérifier l'homogénéité des deux formules de période.
2. Calculer la période d'un pendule de longueur 1 m à Tlemcen ($g \approx 9{,}80\,\mathrm{m/s^2}$). Quelle longueur faut-il pour avoir $T_0 = 2\,\mathrm{s}$ (« pendule qui bat la seconde ») ?
3. Pourquoi mesure-t-on la durée de 10 oscillations plutôt que d'une seule ? Que devient l'incertitude sur T ?
4. Montrer que $\dfrac{\Delta g}{g} = \dfrac{\Delta \ell}{\ell} + 2\dfrac{\Delta T}{T}$.
5. Un ressort de raideur $k = 10\,\mathrm{N/m}$ porte une masse de 50 g. Calculer son allongement statique et sa période.
6. Pourquoi doit-on mesurer la longueur du pendule jusqu'au **centre** de la boule ?

III Étude expérimentale

III.1 Pendule simple

Matériel. Fil réglable de longueur L et de masse négligeable relié à une masse m ; rapporteur fixé à la potence ; barrière optique avec compteur (mode « période ») ; règle graduée ; jeu de masses.



Figure 2.6 – Photographie du pendule simple utilisé en salle de TP : fil fixé en haut de la tige verticale, rapporteur gradué à la suspension et boule suspendue.

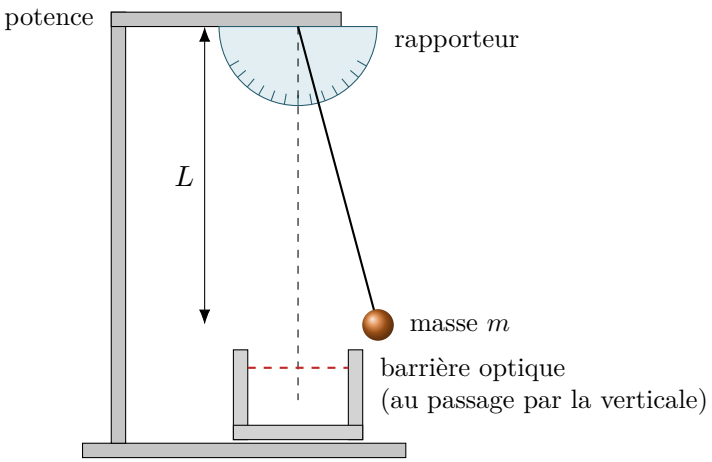


Figure 2.7 – Montage du pendule simple. La barrière optique est placée au point le plus bas de la trajectoire, là où la vitesse est maximale (meilleure précision de déclenchement).

Protocole.

1. Régler le rapporteur de sorte que le fil au repos passe par la graduation $\theta = 0$.
2. Mesurer la longueur L du point de suspension au **centre** de la masse.
3. Écarter la masse de l'angle θ_0 voulu, le fil restant tendu, puis la lâcher **sans vitesse initiale** (éviter de la lancer et éviter les mouvements elliptiques).
4. Laisser passer une ou deux oscillations, puis mesurer T à l'aide de la barrière optique. Répéter

trois fois et prendre la moyenne.

1. Influence de l'amplitude

Pour une longueur fixe ($L = 0{,}50\,\text{m}$) et une masse fixe, mesurer T pour différentes amplitudes.

θ_0 (°)	60	50	20	10	6
T (s)					

Que peut-on conclure ?

2. Influence de la longueur

Prenons le même pendule de masse m et d'angle initial $\theta_0 \leq 10$ř (le texte original indique 40° ; on recommande une petite amplitude pour rester dans le cadre de la formule $T_0 = 2\pi\sqrt{L/g}$). Refaire les mêmes étapes en faisant varier L.

L (m)	0,30	0,40	0,50	0,60	0,70
T (s)					
T^2 (s^2)					
ΔT^2 (s^2)					

a) Donner l'erreur sur L et sur T.

b) Tracer le graphe $T^2 = f(L)$ avec les rectangles d'erreur.

c) Interpréter la courbe.

d) Déduire du graphe la valeur de la pesanteur g ainsi que son incertitude absolue : $g =$ (_____ $\pm$ _____) (unité).

3. Influence de la masse

Prenons un pendule de même longueur L mais de masses différentes (boules de même diamètre si possible).

m (g)			
T (s)			

Que peut-on conclure concernant la relation entre la masse m et la période T ?

III.2 Pendule élastique

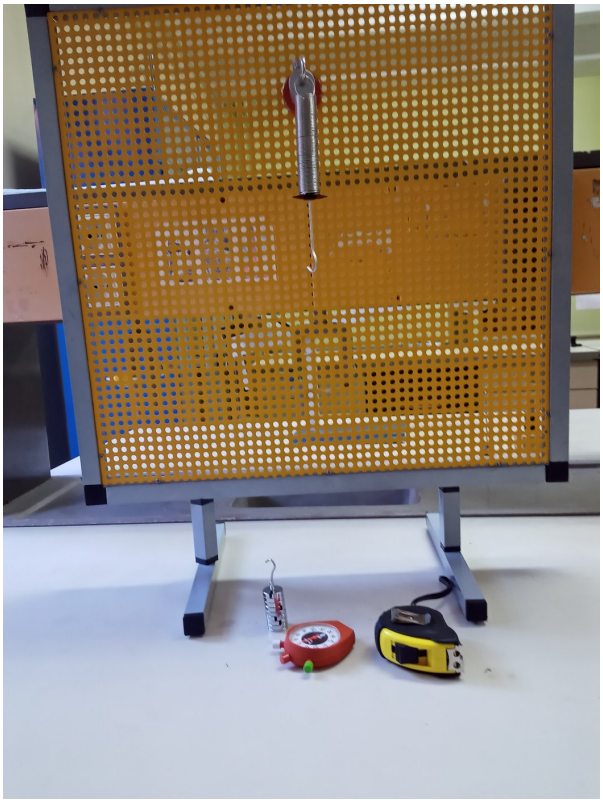


Figure 2.8 – Photographie du matériel du pendule élastique : ressort suspendu à un panneau-support, porte-masse et masses marquées, chronomètre et mètre ruban.

1. Étude statique

Le dispositif comporte un ressort de masse négligeable accroché à un support vertical, et une règle verticale. On note L_0 la longueur du ressort à vide ; on suspend une masse m à son extrémité et on relève la nouvelle longueur L.

a) Mesurer $L_0 = (\ _____\ \pm\ _____\ )$ (unité).

b) Noter la longueur L pour chaque masse et reporter les mesures dans le tableau :

m (g)	60	70	80	90
L (m)				

c) Tracer le graphe $L = f(m)$.

d) Interpréter la courbe.

e) Déduire la constante de raideur k à partir de la pente, avec son incertitude.

△ Attention

Ne pas dépasser la masse maximale indiquée pour le ressort ; vérifier après chaque mesure que le ressort reprend sa longueur à vide (sinon, il a été déformé de façon permanente).

2. Étude dynamique

Le ressort précédent est utilisé pour réaliser un oscillateur élastique vertical. À l'équilibre, le ressort est allongé par la masse accrochée à son extrémité. La masse est écartée de sa position d'équilibre (de 1 à 2 cm) et lâchée sans vitesse initiale ; au même moment on déclenche le chronomètre. Le système oscille ; on mesure la durée t de 10 oscillations.

m (g)	40	50	60
$t = 10T$ (s)			
T (s)			
T^2 (s^2)			
ΔT^2 (s^2)			

a) Tracer $T^2 = f(m)$.

b) Interpréter cette courbe.

c) Déduire la valeur de la constante de raideur k et Δk.

d) Comparer la valeur de k trouvée par l'étude dynamique avec celle trouvée par l'étude statique.

IV Conclusion attendue

À partir des résultats obtenus, donner une conclusion sur :

- les paramètres qui influent sur la période T du pendule simple ;
- la valeur trouvée de la pesanteur g ;
- les différentes études utilisées pour calculer la constante de raideur k.

V Pour aller plus loin

V.1 Oscillations amorties

En réalité, les frottements de l'air (et, pour le ressort, les frottements internes) dissipent progressivement l'énergie : l'amplitude des oscillations diminue au cours du temps. Pour des vitesses faibles, on modélise la force de frottement fluide par $\vec{f} = -\lambda\vec{v}$. L'équation du mouvement du pendule élastique devient

$$m\ddot{X} + \lambda\dot{X} + kX = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \ddot{X} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{X} + \omega_0^2 X = 0,$$

où $Q = m\omega_0/\lambda$ est le **facteur de qualité**. Trois régimes sont possibles :

- $Q > 1/2$: régime **pseudo-périodique** ; l'élongation oscille avec une amplitude qui décroît exponentiellement, $X(t) = X_m e^{-t/\tau}\cos(\omega t + \varphi)$, avec $\tau = 2m/\lambda$ et une pseudo-pulsation $\omega = \omega_0\sqrt{1 - 1/(4Q^2)}$, légèrement inférieure à ω_0 ;
- $Q = 1/2$: régime **critique** ; retour le plus rapide à l'équilibre sans oscillation ;

- $Q < 1/2$: régime **apériodique** ; retour lent à l'équilibre sans oscillation.

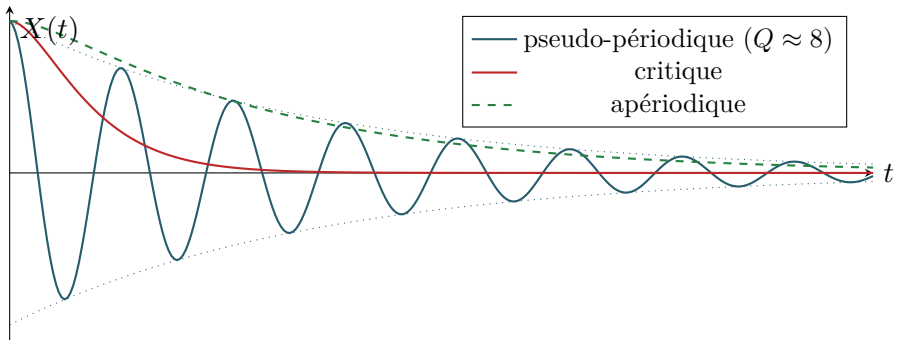


Figure 2.9 – Les trois régimes d'un oscillateur amorti lâché sans vitesse initiale. En TP, les pendules sont très faiblement amortis (Q de l'ordre de plusieurs centaines) : la période mesurée est pratiquement égale à T_0.

Décrément logarithmique. En régime pseudo-périodique faiblement amorti, le rapport de deux amplitudes successives est constant : $\delta = \ln \dfrac{X_n}{X_{n+1}} = \dfrac{T}{\tau} \approx \dfrac{\pi}{Q}$. En relevant l'amplitude du pendule toutes les 10 oscillations on peut ainsi estimer Q, et vérifier que l'amortissement ne modifie pas la période de façon mesurable.

V.2 Le pendule pesant

Un **pendule pesant** est un solide quelconque mobile autour d'un axe horizontal fixe ne passant pas par son centre de masse G. Si d est la distance de G à l'axe et I_Δ le moment d'inertie par rapport à l'axe, le théorème du moment cinétique donne

$$I_\Delta \ddot{\theta} = -mgd\sin\theta \quad \Rightarrow \quad T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{I_\Delta}{mgd}} \quad \text{(petites oscillations)}.$$

Le pendule simple en est un cas particulier ($I_\Delta = m\ell^2$, $d = \ell$). Pour une boule de rayon R suspendue à un fil de longueur ℓ (mesurée jusqu'au centre), $I_\Delta = m\ell^2 + \frac{2}{5}mR^2$ et

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}\sqrt{1+\frac{2R^2}{5\ell^2}}.$$

Pour $R = 2\,\text{cm}$ et $\ell = 50\,\text{cm}$, la correction vaut 0,03 % : le modèle du pendule simple est donc excellent dans nos conditions.

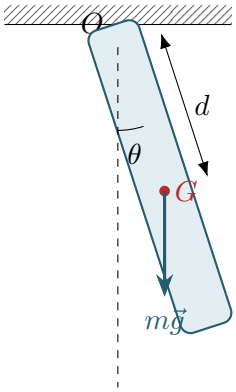


Figure 2.10 – Pendule pesant : solide oscillant autour d'un axe horizontal passant par O.

V.3 Exercices complémentaires

Exercices

1. Un pendule de longueur $\ell = (1{,}000 \pm 0{,}002)$ m effectue 20 oscillations en $(40{,}1 \pm 0{,}2)$ s. Calculer g et Δg.
2. On veut mesurer g à 0,1 % près avec un pendule de 1 m. Combien d'oscillations faut-il chronométrer si l'incertitude sur la durée totale est de 0,2 s ?
3. Deux ressorts de raideurs k_1 et k_2 sont associés en série puis en parallèle. Montrer que les raideurs équivalentes sont respectivement $k_s = \frac{k_1 k_2}{k_1+k_2}$ et $k_p = k_1 + k_2$. En déduire les périodes correspondantes pour une masse m.
4. Un ressort de raideur $k = 10$ N/m et de masse $m_r = 30$ g porte un porte-masse de 10 g. Calculer l'ordonnée à l'origine attendue du graphe $T^2 = f(m)$.
5. Montrer que l'énergie mécanique d'un oscillateur élastique non amorti est $E_m = \frac{1}{2}kX_m^2$, indépendante du temps.

VI Corrigé type

Pendule simple – influence de l'amplitude ($L = 0{,}50$ m)

θ_0 (°)	60	50	20	10	6
T (s)	1,522	1,489	1,429	1,421	1,419
T/T_0	1,073	1,049	1,007	1,001	1,000

Conclusion : pour $\theta_0 \leq 10$ŕ la période est constante à mieux que 0,2 % près (isochronisme des petites oscillations). Pour les grandes amplitudes, la période augmente, conformément à la formule de Borda : l'approximation $\sin\theta \simeq \theta$ n'est plus valable.

Pendule simple – influence de la longueur ($\theta_0 = 6$ř)

L (m)	0,30	0,40	0,50	0,60	0,70
T (s)	1,101	1,268	1,421	1,553	1,680
T^2 (s^2)	1,212	1,608	2,019	2,412	2,822
ΔT^2 (s^2)	0,011	0,013	0,014	0,016	0,017

Incertitudes : $\Delta L = 2\,\text{mm}$ (repérage du centre de la boule + lecture) ; T est obtenu à partir de 10 périodes chronométrées à $\pm 0{,}05\,\text{s}$, d'où $\Delta T = 0{,}005\,\text{s}$ et $\Delta T^2 = 2T\,\Delta T$.

Interprétation : $T^2 = f(L)$ est une droite passant par l'origine, $T^2 = \dfrac{4\pi^2}{g} L$: T^2 est proportionnel à L, ce qui valide le modèle.

Pente (régression linéaire forcée par l'origine) : $p = \dfrac{\sum L_i T_i^2}{\sum L_i^2} = 4{,}029\,\text{s}^2/\text{m}$, et par la méthode des rectangles $p_{\max} = 4{,}09$, $p_{\min} = 3{,}97\,\text{s}^2/\text{m}$, soit $p = (4{,}03 \pm 0{,}06)\,\text{s}^2/\text{m}$.

$$g = \frac{4\pi^2}{p} = \frac{39{,}48}{4{,}03} = 9{,}80\ \text{m/s}^2, \qquad \frac{\Delta g}{g} = \frac{\Delta p}{p} = 1{,}5\,\%$$

$$g \quad = \quad (9{,}80 \ \pm \ 0{,}15)\ \text{m/s}^2$$

La valeur de référence ($9{,}80\,\text{m/s}^2$ à la latitude de Tlemcen) est dans l'intervalle de confiance.

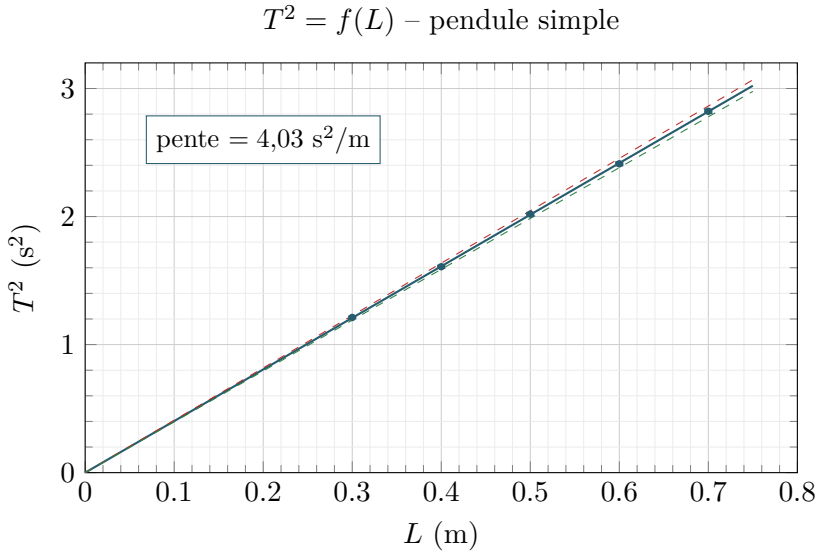


Figure 2.11 – Corrigé : T^2 en fonction de L. Les rectangles d'erreur sont très petits ; ils ont été agrandis horizontalement pour être visibles.

Pendule simple – influence de la masse ($L = 0{,}50$ m)

m (g)	50	100	200
T (s)	1,420	1,421	1,419

Les écarts ($\leq 0{,}002$ s) sont inférieurs à l'incertitude : la période ne dépend pas de la masse, comme le prévoit $T_0 = 2\pi\sqrt{L/g}$. Physiquement, la masse intervient à la fois dans le poids (force motrice) et dans l'inertie : son effet se compense.

Pendule élastique – étude statique

$L_0 = (15{,}0 \pm 0{,}1)$ cm.

m (g)	60	70	80	90
L (m)	0,209	0,219	0,228	0,238

Interprétation : $L = f(m)$ est une droite qui ne passe pas par l'origine ; son ordonnée à l'origine (extrapolation à $m = 0$) vaut $\approx 0{,}150$ m $= L_0$, ce qui vérifie la loi de Hooke $L = \frac{g}{k}m + L_0$.

Pente : $p = \dfrac{0{,}238 - 0{,}209}{0{,}090 - 0{,}060} = 0{,}967$ m/kg (régression : $0{,}960$ m/kg ; $\sigma_p = 0{,}02$ m/kg).

$$k = \frac{g}{p} = \frac{9{,}81}{0{,}960} = 10{,}2 \text{ N/m}, \qquad \frac{\Delta k}{k} = \frac{\Delta p}{p} \approx 3\,\%$$

$$k_{\text{stat}} = (10{,}2 \pm 0{,}3) \text{ N/m}$$

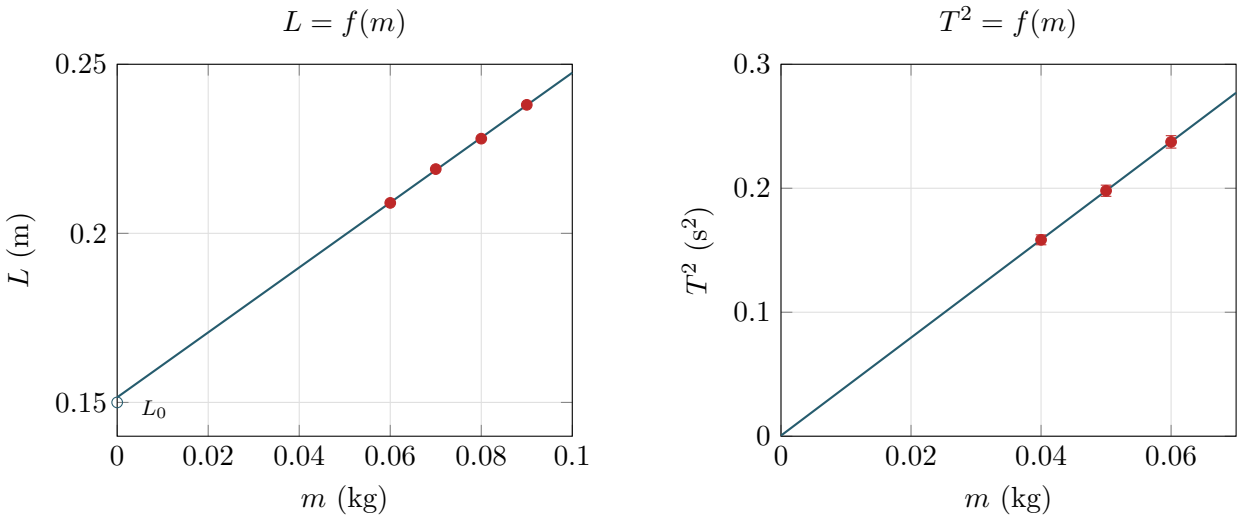


Figure 2.12 – Corrigé du pendule élastique : étude statique (à gauche) et étude dynamique (à droite).

Pendule élastique – étude dynamique

m (g)	40	50	60
$t = 10T$ (s)	3,98	4,45	4,87
T (s)	0,398	0,445	0,487
T^2 (s^2)	0,1584	0,1980	0,2372
ΔT^2 (s^2)	0,0040	0,0045	0,0049

($\Delta t = 0{,}05\,\text{s}$ pour 10 périodes, donc $\Delta T = 0{,}005\,\text{s}$ et $\Delta T^2 = 2T\Delta T$.)

Interprétation : $T^2 = f(m)$ est une droite passant pratiquement par l'origine : $T^2 = \frac{4\pi^2}{k} m$.

Pente : $p = \dfrac{0{,}2372 - 0{,}1584}{0{,}060 - 0{,}040} = 3{,}94\,\text{s}^2/\text{kg}$, avec $\Delta p \approx 0{,}25\,\text{s}^2/\text{kg}$ (rectangles d'erreur).

$$k = \frac{4\pi^2}{p} = \frac{39{,}48}{3{,}94} = 10{,}0\ \text{N/m}, \qquad \Delta k = k\frac{\Delta p}{p} \approx 0{,}7\ \text{N/m}$$

$$k_{\text{dyn}} \quad = \quad (10{,}0\ \pm\ 0{,}7)\ \text{N/m}$$

Comparaison : $k_{\text{stat}} = (10{,}2 \pm 0{,}3)\,\text{N/m}$ et $k_{\text{dyn}} = (10{,}0 \pm 0{,}7)\,\text{N/m}$; les intervalles se recouvrent, l'écart relatif est de 2 % : les deux méthodes sont **compatibles**. La méthode statique est ici plus précise ; la méthode dynamique est sensible à la masse du ressort et du porte-masse (qui décale l'ordonnée à l'origine sans modifier la pente).

△ Remarque sur l'ancien corrigé

Une version antérieure du corrigé donnait $k_{\text{stat}} \approx 5{,}45\,\text{N/m}$ et $k_{\text{dyn}} \approx 2{,}18\,\text{N/m}$, valeurs incompatibles entre elles pour un même ressort : un tel écart doit toujours alerter l'expérimentateur (erreur d'unités g/kg, oubli du facteur 10 des périodes, ou ressort différent). Les valeurs ci-dessus sont cohérentes entre elles.

Conclusion

- La période du pendule simple dépend de la longueur ($T \propto \sqrt{L}$) et de g ; elle ne dépend ni de la masse, ni de l'amplitude tant que celle-ci reste inférieure à une dizaine de degrés.
- La mesure donne $g = (9{,}80 \pm 0{,}15)\,\text{m/s}^2$, en accord avec la valeur locale. Principales sources d'erreur : repérage du centre de la boule, amortissement par l'air, amplitude non nulle, déclenchement du chronomètre.
- La constante de raideur a été obtenue par deux méthodes indépendantes (loi de Hooke à l'équilibre, période des oscillations) qui donnent des résultats compatibles, $k \approx 10\,\text{N/m}$.

TP 03 : Plan incliné

Objectifs

- Étudier l'équilibre (état statique) d'un chariot sur un plan incliné.
- Étudier le mouvement d'un chariot sur un plan incliné et montrer qu'il est rectiligne uniformément accéléré.
- Étudier l'influence de l'angle d'inclinaison sur l'accélération.
- Déduire la valeur de l'accélération de la pesanteur terrestre g.

I Rappels de dynamique du point

I.1 Les lois de Newton

1. **Principe d'inertie** : dans un référentiel galiléen, un corps isolé (ou pseudo-isolé, $\sum \vec{F} = \vec{0}$) est soit au repos, soit en mouvement rectiligne uniforme.
2. **Principe fondamental de la dynamique** : dans un référentiel galiléen,

$$\sum \vec{F}_{\text{ext}} = m\,\vec{a}.$$

3. **Principe des actions réciproques** : si un corps A exerce sur un corps B une force $\vec{F}_{A/B}$, alors B exerce sur A la force $\vec{F}_{B/A} = -\vec{F}_{A/B}$.

I.2 Méthode de résolution d'un problème de dynamique

1. Définir le **système** étudié et le **référentiel** (ici le référentiel terrestre, supposé galiléen).
2. Faire le **bilan des forces** extérieures et les représenter sur un schéma.
3. Choisir un **repère** adapté (un axe parallèle au mouvement).
4. Écrire le PFD sous forme vectorielle puis le **projeter** sur les axes.
5. Résoudre, vérifier l'homogénéité et les cas limites.

I.3 Le mouvement rectiligne uniformément accéléré (MRUA)

Si l'accélération a est constante, l'intégration par rapport au temps donne

$$v(t) = a\,t + v_0, \qquad x(t) = \frac{1}{2}a\,t^2 + v_0\,t + x_0,$$

et, en éliminant le temps : $v^2 - v_0^2 = 2a(x - x_0)$.

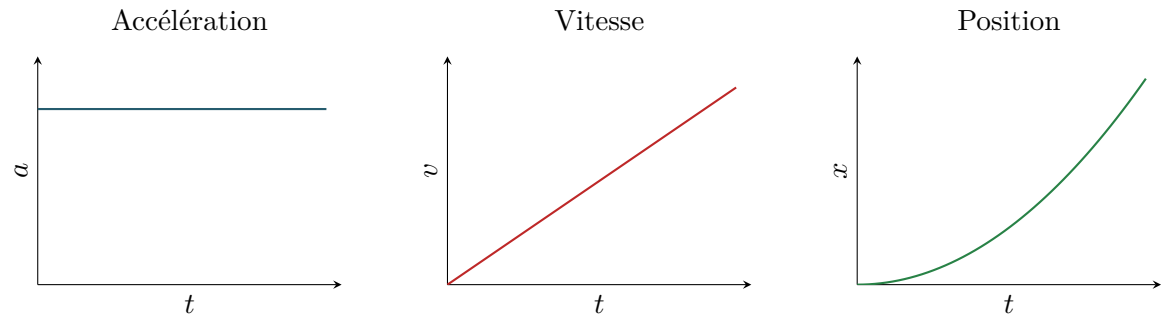


Figure 3.1 – MRUA partant du repos : accélération constante, vitesse linéaire, position parabolique en fonction du temps.

II Étude théorique

Pour réaliser un mouvement uniformément varié, on utilise un rail incliné d'un angle α sur lequel un chariot de masse m_1 peut être tiré par un fil inextensible, de masse négligeable, passant sur une poulie de masse négligeable et tendu par une masse m_2 accrochée à son extrémité. On considère d'abord les frottements comme négligeables.

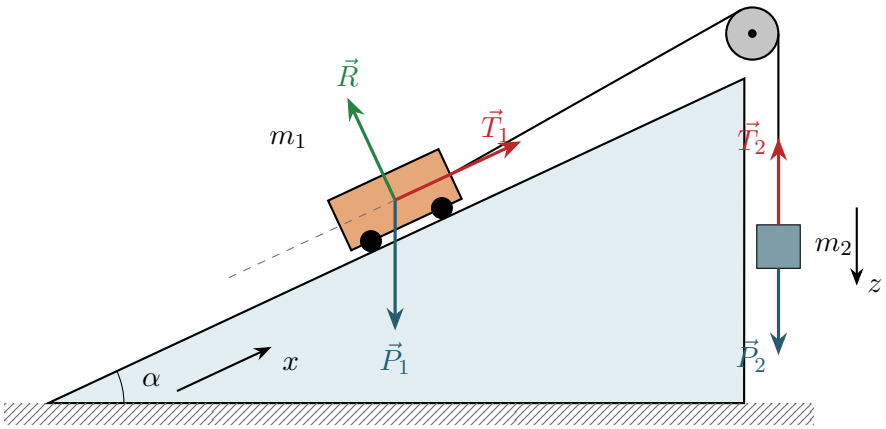


Figure 3.2 – Chariot de masse m_1 sur un plan incliné d'angle α, relié par un fil à une masse suspendue m_2 : forces appliquées à chaque système.

II.1 Application de la deuxième loi de Newton

Système chariot. Il est soumis à son poids $\vec{P}_1$, à la réaction normale $\vec{R}$ du rail et à la tension $\vec{T}_1$ du fil :

$$\vec{P}_1 + \vec{T}_1 + \vec{R} = m_1\vec{a}.$$

Projection sur l'axe $(x'x)$ parallèle au rail, orienté dans le sens du mouvement (vers le haut) :

$$T_1 - m_1 g \sin\alpha = m_1 a \;\Rightarrow\; T_1 = m_1 g \sin\alpha + m_1 a \tag{3.1}$$

Projection sur l'axe perpendiculaire au rail (pas de mouvement selon cet axe) :

$$R - m_1 g \cos\alpha = 0 \;\Rightarrow\; R = m_1 g \cos\alpha.$$

Système masse suspendue. Soumise à son poids $\vec{P}_2$ et à la tension $\vec{T}_2$; projection sur l'axe $(z'z)$ vertical descendant :

$$P_2 - T_2 = m_2 a \;\Rightarrow\; T_2 = m_2 g - m_2 a \tag{3.2}$$

(le fil étant inextensible, les deux masses ont la même accélération a en valeur).

Système poulie. La poulie et le fil étant de masse négligeable et la poulie sans frottement, la tension se transmet intégralement : $T_1 = T_2 = T$.

Accélération. En égalant (3.1) et (3.2) :

$$m_1 g \sin\alpha + m_1 a = m_2 g - m_2 a \;\Rightarrow\; (m_1 + m_2)\, a = (m_2 - m_1 \sin\alpha)\, g$$

$$a = \frac{m_2 - m_1 \sin\alpha}{m_1 + m_2}\, g = \frac{m_2}{m_1 + m_2} g - \frac{m_1 g}{m_1 + m_2} \sin\alpha$$

- Si $m_2 > m_1 \sin\alpha$: $a > 0$, le chariot monte le long du plan.
- Si $m_2 = m_1 \sin\alpha$: $a = 0$, équilibre (ou mouvement uniforme).
- Si $m_2 < m_1 \sin\alpha$: $a < 0$, le chariot descend.
- Cas particulier sans masse suspendue ($m_2 = 0$) : $a = -g \sin\alpha$, c'est-à-dire que le chariot descend avec une accélération de module $g \sin\alpha$.
- Cas particulier du plan horizontal ($\alpha = 0$) : $a = \dfrac{m_2}{m_1 + m_2} g$ (« machine d'Atwood horizontale »).

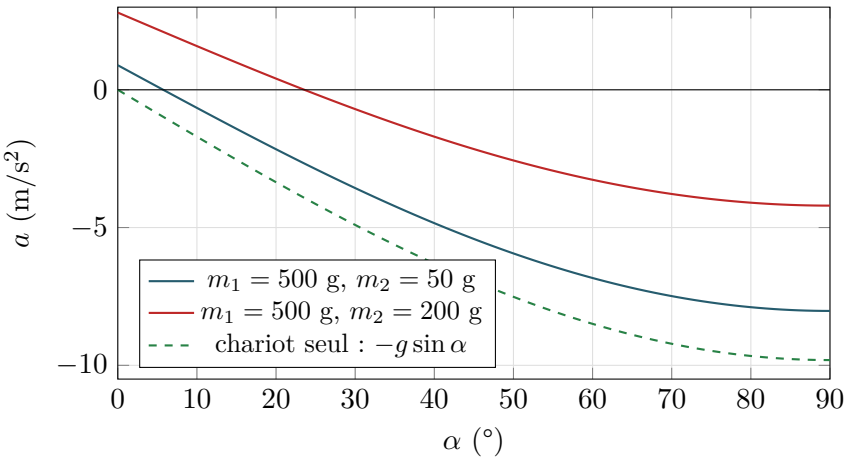


Figure 3.3 – Accélération théorique du chariot en fonction de l'inclinaison pour différentes masses suspendues ($a > 0$: le chariot monte).

II.2 Chariot seul sur le plan incliné

Dans l'étude dynamique de ce TP, le chariot (masse M) est simplement lâché sur le plan, sans masse suspendue. On oriente alors l'axe x **vers le bas** du plan. Le PFD projeté donne

$$Mg \sin \alpha = Ma \Rightarrow \boxed{a = g \sin \alpha}$$

L'accélération ne dépend pas de la masse du chariot. Si x est la longueur du plan et h la hauteur de son extrémité levée, $\sin \alpha = h/x$.

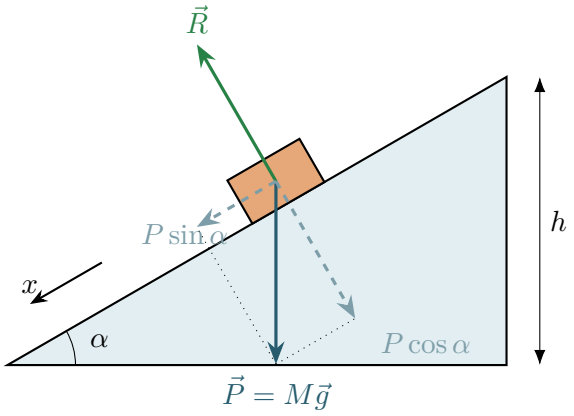


Figure 3.4 – Décomposition du poids sur un plan incliné : la composante $P \sin \alpha$ parallèle au plan est motrice, la composante $P \cos \alpha$ est compensée par la réaction $\vec{R}$.

II.3 Prise en compte des frottements

En réalité le chariot subit une force de frottement $\vec{f}$ opposée au mouvement (frottements des roues, de l'air). En la supposant constante, l'accélération du chariot seul devient

$$a = g \sin \alpha - \frac{f}{M}.$$

Si le frottement est de type solide ($f = \mu R = \mu M g \cos\alpha$, voir TP 06) : $a = g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)$. Pour de petits angles, $\cos\alpha \approx 1$ et $a \approx g\sin\alpha - \mu g$: le graphe $a = f(\sin\alpha)$ est encore une droite de pente g, mais elle ne passe plus par l'origine. C'est une méthode élégante pour séparer g et les frottements.

II.4 Équations du mouvement

L'accélération a est constante : le mouvement du chariot est rectiligne uniformément accéléré.

a) L'équation de la vitesse instantanée est $v = at + v_0$.

b) L'équation horaire est $x = \int (at + v_0)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + x_0$.

Comme le chariot commence son mouvement sans vitesse initiale ($v_0 = 0$) à la position $x_0 = 0$:

$$x = \frac{1}{2}at^2 \qquad \Longleftrightarrow \qquad t^2 = \frac{2}{a}x$$

II.5 Relation entre $1/t^2$ et $\sin\alpha$

Pour une distance x fixée et un chariot seul ($a = g\sin\alpha$) :

$$x = \frac{1}{2}g\sin\alpha\, t^2 \;\Rightarrow\; \boxed{\frac{1}{t^2} = \frac{g}{2x}\sin\alpha}$$

Le graphe $1/t^2 = f(\sin\alpha)$ est une droite passant par l'origine, de pente $g/(2x)$.

Questions de préparation

1. Retrouver l'expression de a en appliquant le théorème de l'énergie cinétique au système {chariot + masse}.
2. Calculer T et R pour $m_1 = 500\,\mathrm{g}$, $\alpha = 30$ř à l'équilibre.
3. Calculer l'accélération d'un chariot seul pour $\sin\alpha = 0{,}10$. Combien de temps met-il pour parcourir 80 cm ?
4. Montrer que $\dfrac{\Delta a}{a} = \dfrac{\Delta x}{x} + 2\dfrac{\Delta t}{t}$ pour $a = 2x/t^2$.
5. Pourquoi faut-il impérativement que la vitesse du chariot soit nulle au moment où il coupe le premier faisceau ?

III Étude expérimentale

III.1 Description du matériel

Le dispositif est constitué de :

- un rail (plan) incliné d'un angle α réglable par rapport au plan horizontal ;
- un chariot de masse M pouvant se mouvoir sur le rail avec très peu de frottement ;

- une plaque de repérage (drapeau) placée sur le chariot ;
- deux ponts optiques (barrières lumineuses) reliés à un chronomètre digital ;
- un électro-aimant lanceur avec interrupteur, qui retient le chariot puis le libère sans vitesse initiale ;
- une poulie, un fil, un porte-masse et des masses marquées pour l'étude statique.

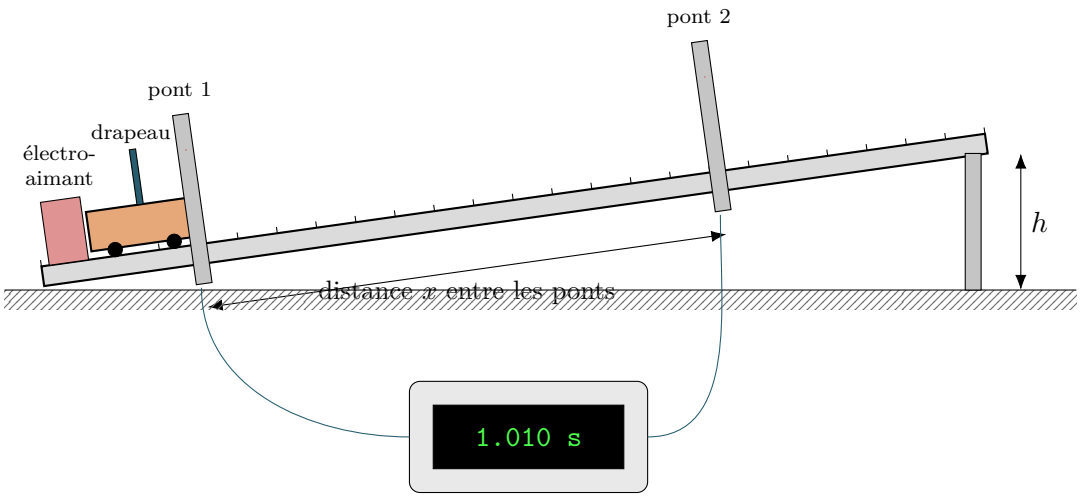


Figure 3.5 – Montage de l'étude dynamique : le chariot, retenu par l'électro-aimant, est libéré ; il déclenche le chronomètre en coupant le faisceau du pont 1 et l'arrête en coupant celui du pont 2. Ici $\sin\alpha = h/L_{\text{rail}}$.

III.2 Étude statique

Démarche.

- Disposer le chariot de masse M sur le plan incliné d'un angle α fixe.
- Relier le chariot à la masse suspendue M', à l'aide d'un fil passant par une poulie.
- Faire varier la masse suspendue M' jusqu'à ce que le chariot soit à l'équilibre (il ne monte ni ne descend lorsqu'on le lâche, ou se déplace très lentement dans les deux sens sous une légère impulsion).
- Noter cette valeur de M'.
- Utiliser la loi de Newton pour montrer que dans ce cas $P' = P\sin\alpha$, où P' est le poids de la masse suspendue M' et P le poids du chariot.
- Vérifier, d'après les données expérimentales, que l'on a bien $P' = P\sin\alpha$.
- Calculer la valeur de la réaction R du plan incliné, ainsi que la tension T du fil inextensible.

α (°)	10	20	30
M (g)			
M' mesurée (g)			
$P' = M'g$ (N)			
$P \sin\alpha$ (N)			
Écart relatif (%)			

III.3 Étude dynamique : position en fonction du temps

Soit x la distance parcourue sur le plan incliné, h la hauteur de l'extrémité levée du plan de longueur L, avec $\sin\alpha = h/L$. Un chariot de masse M est lâché sans vitesse initiale ; il acquiert un mouvement uniformément accéléré.

Protocole.

a) Placer le chariot sur le rail de telle sorte que son curseur soit à la limite du faisceau du premier pont optique (ceci permet d'avoir une vitesse initiale nulle au déclenchement). **Si cette consigne n'est pas respectée, les résultats seront faux.**

b) Appuyer sur l'interrupteur : l'électro-aimant libère le chariot, qui commence son mouvement ; son curseur coupe le faisceau du pont optique (1) et le chronomètre se déclenche.

c) Lorsque le curseur du chariot traverse le faisceau du deuxième pont optique, le chronomètre s'arrête et affiche la durée du parcours.

d) Pour différentes distances x croissantes entre les deux ponts optiques, mesurer les durées t correspondantes. Pour chaque distance, faire trois mesures (chaque étudiant fait une mesure) et calculer la moyenne.

x (cm)	30	50	70	80
t_1 (s)				
t_2 (s)				
t_3 (s)				
t_{moy} (s)				
t^2 (s^2)				
Δt^2 (s^2)				

Exploitation.

e) Donner l'erreur sur x et sur t.

f) Tracer le graphe $t^2 = f(x)$.

g) Interpréter la courbe.

h) Déterminer graphiquement la valeur de l'accélération a_{exp} et son incertitude Δa_{exp}.

i) Déterminer théoriquement la valeur de l'accélération a_{th} et son incertitude Δa_{th}, en considérant les incertitudes sur les masses comme nulles.

j) Comparer les valeurs de l'accélération théorique et expérimentale.

k) Connaissant la relation théorique qui lie g et l'accélération a, déduire g.

III.4 Variation de l'angle d'inclinaison

Travail à effectuer.

- On fixe la distance entre les deux ponts optiques à $x = 60\,\text{cm}$.
- On fait varier l'angle d'inclinaison α (en modifiant la hauteur h des cales).
- Pour chaque valeur de α, on mesure le temps t mis par le chariot pour parcourir la distance x.
- On inscrit les résultats dans le tableau suivant :

h (cm)				
$\sin\alpha$				
t (s)				
$1/t^2$ (s^{-2})				

- Tracer le graphe $1/t^2$ en fonction de $\sin\alpha$ en utilisant la méthode de régression linéaire.
- Interpréter la courbe.
- Si la courbe obtenue est une droite passant par l'origine, calculer sa pente.
- Montrer que théoriquement : $1/t^2 = \dfrac{g}{2x}\sin\alpha$.
- Déduire du graphe la valeur de g ainsi que son incertitude Δg.

IV Conclusion attendue

À partir des résultats obtenus, donner une conclusion sur les paramètres qui influent sur l'accélération du chariot et sur la valeur trouvée de la pesanteur g.

V Pour aller plus loin

V.1 Approche énergétique du plan incliné

Pour le chariot seul partant du repos, le théorème de l'énergie cinétique entre le départ et une position où il a parcouru la distance x donne, sans frottement :

$$\frac{1}{2}Mv^2 - 0 = W(\vec{P}) + W(\vec{R}) = Mg\,x\sin\alpha + 0 \quad \Rightarrow \quad v^2 = 2g\sin\alpha\; x.$$

La réaction normale ne travaille pas (elle est perpendiculaire au déplacement). On retrouve $v^2 = 2ax$ avec $a = g\sin\alpha$: la vitesse acquise ne dépend que de la **hauteur de chute** $h = x\sin\alpha$, $v = \sqrt{2gh}$, comme en chute libre.

Avec des frottements constants f, $\frac{1}{2}Mv^2 = (Mg\sin\alpha - f)\,x$: en mesurant v au second pont (avec un drapeau de largeur connue et le mode « durée d'occultation ») on peut évaluer f.

V.2 Comparaison avec la chute libre

Le plan incliné, utilisé par Galilée dès 1604, « dilue » la pesanteur : l'accélération $g\sin\alpha$ est réduite dans le rapport $\sin\alpha$, ce qui rend les durées suffisamment longues pour être mesurées avec des moyens simples. Pour $\sin\alpha = 0{,}10$, il faut environ 1,28 s pour parcourir 80 cm, contre 0,40 s en chute libre sur la même distance.

V.3 Exercices complémentaires

Exercices

1. Un chariot de 400 g est lâché sans vitesse sur un rail incliné ($\sin\alpha = 0{,}15$). Il parcourt 0,60 m en 0,95 s. Calculer l'accélération mesurée et la comparer à $g\sin\alpha$. En déduire la force de frottement moyenne.
2. Dans le montage chariot ($m_1 = 500$ g) + masse suspendue (m_2), sur un rail horizontal, quelle masse m_2 faut-il pour obtenir $a = 1{,}0\ \text{m/s}^2$? Calculer alors la tension du fil.
3. Montrer que, pour le système chariot + masse suspendue, la tension vaut $T = \dfrac{m_1 m_2\, g(1+\sin\alpha)}{m_1 + m_2}$. Vérifier que $T < m_2 g$ lorsque le chariot monte.
4. On mesure t pour $x = 0{,}60$ m à $\Delta t = 0{,}01$ s près. Pour quel angle l'incertitude relative sur a est-elle minimale ? Discuter (rôle des frottements à petit angle, de la durée trop courte à grand angle).
5. Un objet glisse sur un plan incliné avec frottement ($\mu_d = 0{,}2$). Pour quel angle sa vitesse reste-t-elle constante ? Lien avec le TP 06.

VI Corrigé type

Étude statique ($M = 500$ g)

Démonstration. À l'équilibre $a = 0$. Pour le chariot (axe parallèle au plan) : $T - Mg\sin\alpha = 0$. Pour la masse suspendue : $M'g - T = 0$. Le fil transmettant la tension : $M'g = Mg\sin\alpha$, soit $\boxed{P' = P\sin\alpha}$, c'est-à-dire $M' = M\sin\alpha$.

α (°)	10	20	30
M' mesurée (g)	88	172	250
$P' = M'g$ (N)	0,863	1,687	2,453
$P\sin\alpha$ (N)	0,852	1,678	2,453
Écart (%)	1,3	0,6	0,0

La relation $P' = P\sin\alpha$ est vérifiée à mieux que 2 % près, l'écart s'expliquant par les frottements (qui permettent l'équilibre pour une petite plage de valeurs de M') et la précision sur α.

Réaction et tension pour $\alpha = 30$ř :

$$T = Mg\sin\alpha = 0{,}500\times9{,}81\times0{,}5 = 2{,}45\ \text{N}, \qquad R = Mg\cos\alpha = 0{,}500\times9{,}81\times0{,}866 = 4{,}25\ \text{N}.$$

On vérifie que $\sqrt{T^2+R^2} = 4{,}91\ \text{N} = Mg$: la tension et la réaction compensent exactement le poids.

Étude dynamique : $t^2 = f(x)$ (chariot seul, $h = 10{,}0$ cm sur $L = 1{,}00$ m, $\sin\alpha = 0{,}100$)

x (m)	0,30	0,50	0,70	0,80
t_{moy} (s)	0,784	1,012	1,198	1,281
t^2 (s^2)	0,615	1,024	1,435	1,641
Δt^2 (s^2)	0,016	0,020	0,024	0,026

Erreurs : $\Delta x = 0{,}5$ cm (position des ponts lue sur la règle du rail) ; $\Delta t = 0{,}01$ s (dispersion des trois mesures, bien supérieure à la résolution du chronomètre) ; $\Delta t^2 = 2t\,\Delta t$.

Interprétation : $t^2 = f(x)$ est une droite passant par l'origine : $t^2 = \frac{2}{a}x$, donc $x = \frac{1}{2}at^2$, ce qui confirme que le mouvement est rectiligne uniformément accéléré.

Pente : régression par l'origine $p = \dfrac{\sum x_i t_i^2}{\sum x_i^2} = 2{,}05\,\text{s}^2/\text{m}$; droites extrêmes : $p_{\max} = 2{,}12$, $p_{\min} = 1{,}99\,\text{s}^2/\text{m}$, donc $\Delta p = 0{,}07\,\text{s}^2/\text{m}$.

$$a_{\text{exp}} = \frac{2}{p} = \frac{2}{2{,}05} = 0{,}976\ \text{m/s}^2, \qquad \Delta a_{\text{exp}} = a\frac{\Delta p}{p} = 0{,}03\ \text{m/s}^2$$

$$a_{\text{exp}} \;=\; (0{,}98 \;\pm\; 0{,}03)\ \text{m/s}^2$$

Valeur théorique : $a_{\text{th}} = g\sin\alpha = g\,h/L = 9{,}81\times0{,}100 = 0{,}981\,\text{m/s}^2$; $\dfrac{\Delta a_{\text{th}}}{a_{\text{th}}} = \dfrac{\Delta h}{h} + \dfrac{\Delta L}{L} = \dfrac{0{,}1}{10{,}0} + \dfrac{0{,}2}{100} = 1{,}2\,\%$, soit $a_{\text{th}} = (0{,}981 \pm 0{,}012)\,\text{m/s}^2$.

Comparaison : écart relatif 0,5 %, inférieur aux incertitudes : accord très satisfaisant. On note que a_{exp} est légèrement inférieure à a_{th}, ce qui est cohérent avec la présence de faibles frottements.

Valeur de g : $g = \dfrac{a_{\text{exp}}}{\sin\alpha} = \dfrac{0{,}976}{0{,}100} = 9{,}76\,\text{m/s}^2$; $\dfrac{\Delta g}{g} = \dfrac{\Delta a}{a} + \dfrac{\Delta(\sin\alpha)}{\sin\alpha} \approx 3\,\% + 1{,}2\,\%$.

$$g \quad = \quad (9{,}8 \ \pm \ 0{,}4)\ \text{m/s}^2$$

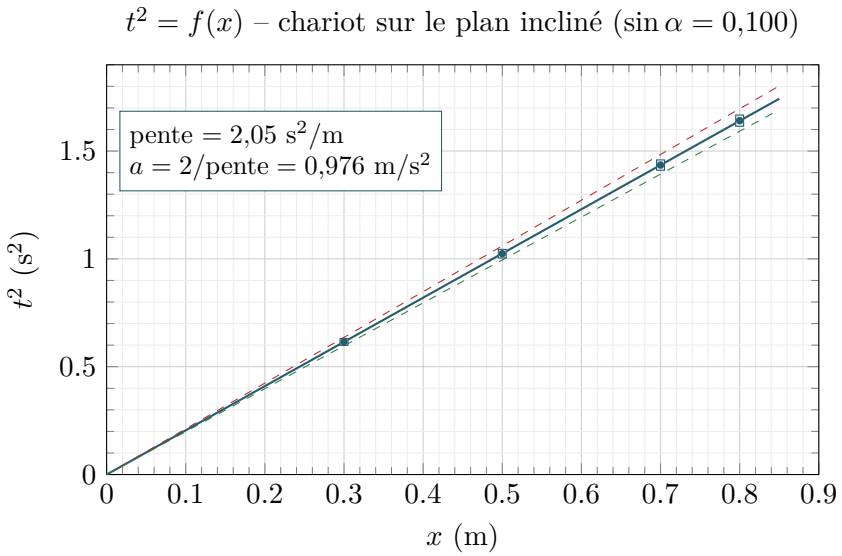


Figure 3.6 – Corrigé : t^2 en fonction de la distance parcourue x.

Variation de l'angle d'inclinaison ($x = 0{,}60$ m)

h (cm)	5,0	10,0	15,0	20,0
$\sin\alpha$	0,050	0,100	0,150	0,200
t (s)	1,580	1,110	0,905	0,783
$1/t^2$ (s^{-2})	0,401	0,812	1,221	1,631

Démonstration : $x = \frac{1}{2}at^2$ avec $a = g\sin\alpha$ donne $\dfrac{1}{t^2} = \dfrac{g}{2x}\sin\alpha$.
Régression linéaire ($X = \sin\alpha$, $Y = 1/t^2$) : pente $b = 8{,}20\,\text{s}^{-2}$, ordonnée à l'origine $a_0 = -0{,}009\,\text{s}^{-2}$ (pratiquement nulle), $\sigma_b = 0{,}04\,\text{s}^{-2}$, $r = 0{,}9999$.
Interprétation : la droite passe (aux incertitudes près) par l'origine : $1/t^2$ est proportionnel à $\sin\alpha$, donc l'accélération est proportionnelle à $\sin\alpha$, comme prévu par $a = g\sin\alpha$.

$$g = 2x \cdot b = 2 \times 0{,}60 \times 8{,}20 = 9{,}84\ \text{m/s}^2, \qquad \frac{\Delta g}{g} = \frac{\Delta x}{x} + \frac{\sigma_b}{b} = 0{,}8\,\% + 0{,}5\,\%$$

$$g \quad = \quad (9{,}84 \ \pm \ 0{,}13)\ \text{m/s}^2$$

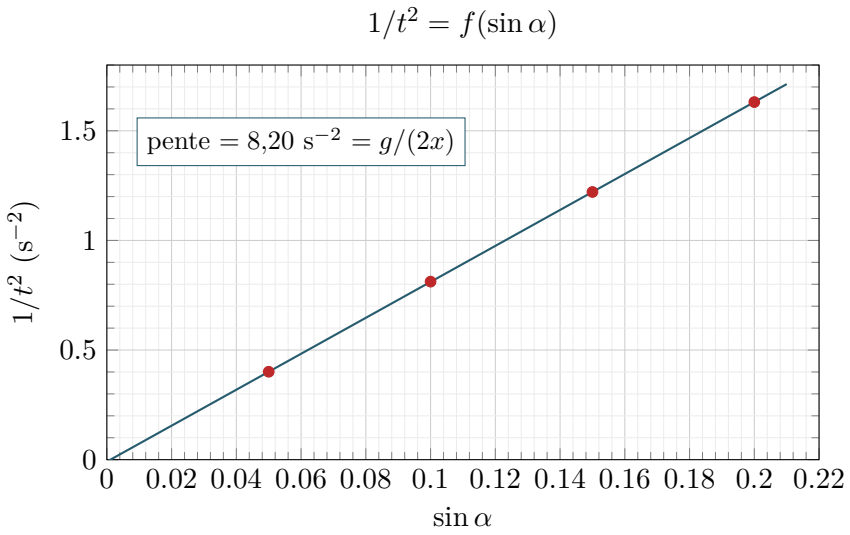


Figure 3.7 – Corrigé : $1/t^2$ en fonction de $\sin\alpha$.

△ Remarque sur l'ancien corrigé

L'ancienne version du corrigé obtenait $g \approx 3{,}75\,\mathrm{m/s^2}$ ou $6{,}24\,\mathrm{m/s^2}$: ces valeurs, très éloignées de $9{,}81\,\mathrm{m/s^2}$, provenaient d'un angle mal identifié ($\alpha = 15$ř au lieu de $\sin\alpha \approx 0{,}10$). **Un résultat physiquement aberrant ne doit jamais être présenté sans discussion** : il faut rechercher l'erreur (unité, angle en degrés/radians, mauvaise formule) avant de conclure.

Conclusion

- L'accélération du chariot dépend de l'angle d'inclinaison (proportionnelle à $\sin\alpha$ pour le chariot seul), de la masse suspendue et de la masse du chariot lorsqu'il est tiré par un fil ; elle est diminuée par les frottements. Pour le chariot seul, elle est indépendante de sa masse.
- Le mouvement est rectiligne uniformément accéléré ($x \propto t^2$).
- Les deux méthodes donnent $g = (9{,}8 \pm 0{,}4)\,\mathrm{m/s^2}$ et $g = (9{,}84 \pm 0{,}13)\,\mathrm{m/s^2}$, compatibles avec la valeur de référence. La seconde, qui exploite quatre inclinaisons par régression, est la plus précise.
- Sources d'erreurs : vitesse initiale non nulle au premier pont, mesure de h, frottements, inclinaison latérale du rail.

TP 04 : Moment d'inertie d'un solide

Objectifs

- Déterminer la constante de torsion D d'un ressort spiral par une méthode statique et par une méthode dynamique.
- Déterminer expérimentalement le moment d'inertie de plusieurs solides indéformables (disque, cylindre plein, cylindre creux, sphère, barre munie de masses amovibles).
- Comparer les valeurs expérimentales aux valeurs théoriques calculées par intégration.
- Vérifier le théorème de Huygens (axes parallèles).

Mots clés : moment d'une force, couple, moment cinétique, coefficient de torsion, période des oscillations de torsion, moment d'inertie.

I Principe de l'expérience

Différents corps, fixés sur un axe vertical relié à un ressort spiral, effectuent des oscillations de torsion autour d'un axe passant par leur centre de gravité. La mesure de la période de ces oscillations permet de déterminer le moment d'inertie du solide par rapport à cet axe.

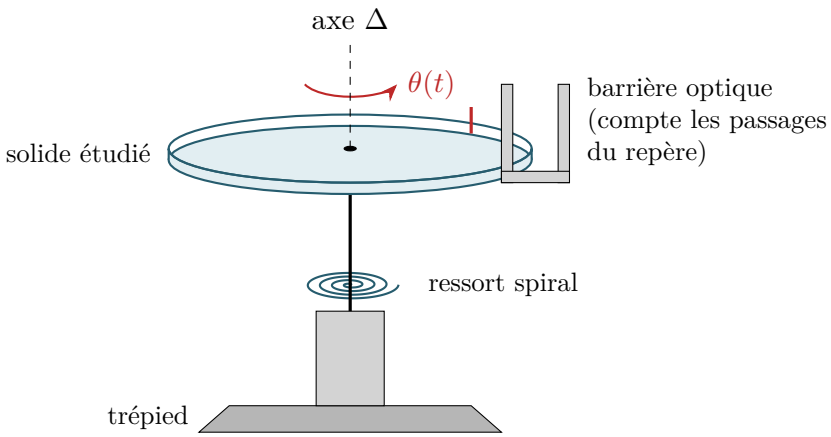


Figure 4.1 – Pendule de torsion : le solide est fixé sur un axe vertical solidaire d'un ressort spiral qui exerce un couple de rappel proportionnel à l'angle de rotation.

II Liste du matériel



Figure 4.2 – Photographie du matériel du pendule de torsion : axe à ressort spiral sur trépied, barrière optique avec compteur, disque, cylindre plein, cylindre creux, sphère, barre munie de deux masses amovibles et dynamomètre.

Élément	Caractéristiques
Axe de rotation	avec ressort spiral, monté sur trépied
Disque	diamètre 220 mm, masse 300 g
Cylindre plein	diamètre extérieur 100 mm, hauteur 10 mm (galette), masse 380 g
Cylindre creux	diamètre 100 mm, hauteur 100 mm, épaisseur de paroi 4 mm, masse 380 g
Sphère	diamètre 140 mm, masse 760 g
Barre métallique	longueur 600 mm, graduée
Masses amovibles	deux masses cylindriques de 210 g chacune
Dynamomètre	calibre 2,5 N
Barrière optique avec compteur	mode « période »
Trépied et embase	–

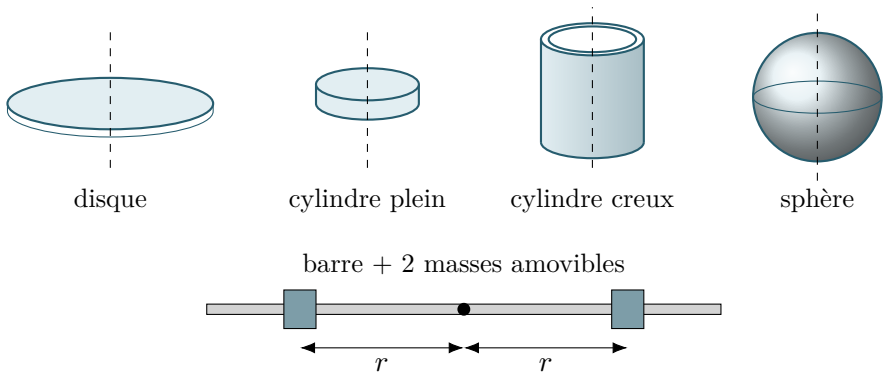


Figure 4.3 – Les solides étudiés ; l'axe de rotation (en pointillé) passe par le centre de masse.

III Théorie

III.1 Moment d'une force et couple

Soit $\vec{F}$ une force appliquée en un point M. Le moment de $\vec{F}$ par rapport à un point O est

$$\vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F}) = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F}.$$

Le **moment par rapport à un axe** Δ (de vecteur unitaire $\vec{k}$, passant par O) est la projection de ce vecteur sur l'axe :

$$\Gamma = \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F}) \cdot \vec{k}.$$

Si $\vec{F}$ est perpendiculaire à l'axe et appliquée à la distance d de celui-ci (bras de levier), $|\Gamma| = F\,d$. Le moment s'exprime en newton-mètre (N·m).

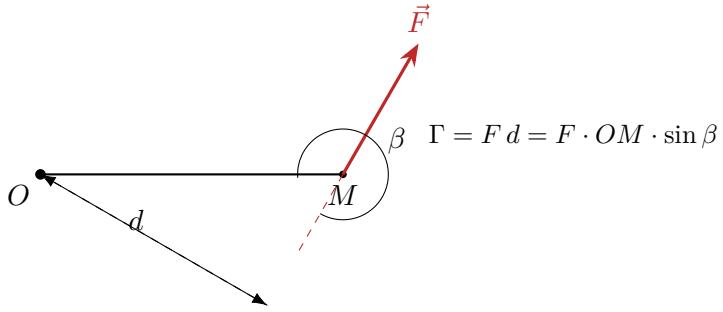


Figure 4.4 – Moment d'une force par rapport à un axe perpendiculaire au plan de la figure en O : bras de levier d.

III.2 Moment cinétique

Le moment cinétique en O d'un point matériel de masse m et de vitesse $\vec{v}$ est $\vec{L}_O = \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{v}$. Pour un solide, on somme sur tous ses points. Le **théorème du moment cinétique** s'écrit, dans un référentiel galiléen et pour O fixe :

$$\frac{\mathrm{d}\vec{L}_O}{\mathrm{d}t} = \sum \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F}_{\text{ext}})$$

(le moment des forces extérieures fait varier le moment cinétique).

III.3 Moment d'inertie

Le moment d'inertie par rapport à un axe Δ d'un ensemble de N masses ponctuelles m_i situées aux distances r_i de l'axe est

$$I_\Delta = \sum_{i=1}^{N} m_i\, r_i^2.$$

Pour un solide continu de masse volumique $\rho(x, y, z)$, et pour l'axe Oz :

$$I_{Oz} = \iiint \rho(x, y, z)\,(x^2 + y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int r^2\,\mathrm{d}m.$$

Le moment d'inertie caractérise la **répartition de la masse autour de l'axe**. Il joue en rotation le rôle que joue la masse en translation : plus il est grand, plus il est difficile de mettre le solide en rotation. Pour une masse ponctuelle $I = mr^2$: I augmente rapidement lorsque la masse s'éloigne de l'axe.

Le moment d'inertie est **additif** : si deux solides S_1 et S_2 ont pour moments d'inertie I_1 et I_2 par rapport à un même axe, le système $\{S_1 + S_2\}$ a pour moment d'inertie $I = I_1 + I_2$.

III.4 Moment cinétique et vitesse angulaire

Pour un solide en rotation à la vitesse angulaire Ω autour d'un axe fixe Oz, chaque point décrit un cercle de rayon r_i à la vitesse $v_i = r_i\Omega$. La projection du moment cinétique sur l'axe vaut

$$L_z = \sum m_i r_i v_i = \Big(\sum m_i r_i^2\Big)\Omega = I_{Oz}\,\Omega.$$

De même, l'énergie cinétique de rotation s'écrit $E_c = \frac{1}{2}\sum m_i v_i^2 = \frac{1}{2} I\Omega^2$.

Translation	Rotation autour d'un axe fixe	Correspondance
position x	angle θ	
vitesse $v = \dot{x}$	vitesse angulaire $\Omega = \dot{\theta}$	$v = r\Omega$
masse m	moment d'inertie I	$I = \sum mr^2$
force F	couple Γ	$\Gamma = Fd$
quantité de mouvement $p = mv$	moment cinétique $L = I\Omega$	
$F = m\ddot{x}$	$\Gamma = I\ddot{\theta}$	
$E_c = \frac{1}{2}mv^2$	$E_c = \frac{1}{2}I\Omega^2$	
ressort : $F = -kx$	ressort spiral : $\Gamma = -D\theta$	
$T = 2\pi\sqrt{m/k}$	$T = 2\pi\sqrt{I/D}$	

III.5 Oscillations de torsion

Considérons un solide effectuant un mouvement d'oscillation de torsion autour de l'axe Oz. Sa position à l'instant t est repérée par l'angle θ de rotation par rapport à la position d'équilibre. À chaque instant, il est soumis au couple de rappel du ressort spiral, supposé proportionnel à l'angle de torsion :

$$\vec{\mathcal{M}} \cdot \vec{k} = -D\,\theta \tag{4.1}$$

où D est la **constante de torsion**, caractéristique du ressort spiral (unité : N·m/rad, souvent notée N·m). Le poids et la réaction de l'axe ont un moment nul par rapport à l'axe (ils lui sont parallèles ou le rencontrent). Le théorème du moment cinétique projeté sur l'axe donne :

$$\frac{\mathrm{d}L_z}{\mathrm{d}t} = I\ddot{\theta} = -D\theta \quad \Rightarrow \quad \ddot{\theta} + \frac{D}{I}\theta = 0.$$

C'est l'équation différentielle d'un oscillateur harmonique de pulsation $\omega_0 = \sqrt{D/I}$, d'où la période des oscillations de torsion :

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{D}} \qquad \Longleftrightarrow \qquad I = \frac{D\,T^2}{4\pi^2}$$

Contrairement au pendule simple, cette relation n'est pas limitée aux petits angles : tant que le ressort reste dans son domaine élastique ($\Gamma \propto \theta$), la période ne dépend pas de l'amplitude (on peut tourner le solide d'un demi-tour).

III.6 Théorème de Huygens (axes parallèles)

Soit I_G le moment d'inertie d'un solide de masse m par rapport à un axe Δ_G passant par son centre de masse G, et Δ un axe parallèle à Δ_G situé à la distance d. Alors :

$$I_\Delta = I_G + m\,d^2$$

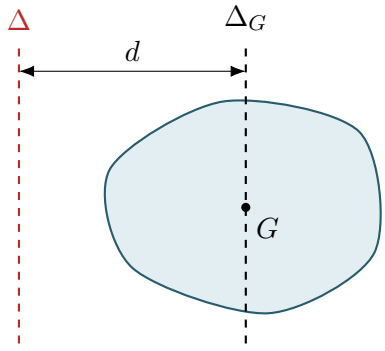


Figure 4.5 – Théorème de Huygens : $I_\Delta = I_G + md^2$. Le moment d'inertie est minimal pour un axe passant par le centre de masse.

Démonstration. Prenons Δ_G comme axe Gz et Δ passant par le point $(d, 0)$ du plan xy. Pour un élément de masse $\mathrm{d}m$ en (x, y, z) :

$$I_\Delta = \int [(x-d)^2 + y^2]\mathrm{d}m = \int (x^2+y^2)\mathrm{d}m - 2d\int x\,\mathrm{d}m + d^2\int \mathrm{d}m = I_G - 0 + md^2,$$

car $\int x\,\mathrm{d}m = m\,x_G = 0$ (G est à l'origine).

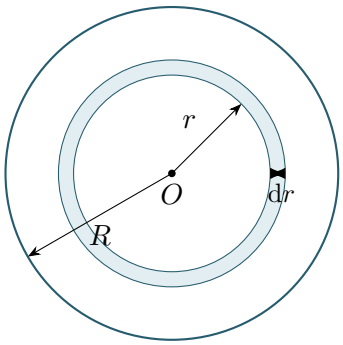
IV Étude théorique : calcul des moments d'inertie

IV.1 Disque et cylindre plein (axe de révolution)

Soit un cylindre plein homogène de rayon R, hauteur h, masse m (un disque est un cylindre de faible hauteur). On le découpe en anneaux de rayon r, d'épaisseur dr et de hauteur h :

$$\mathrm{d}m = \rho\,(2\pi r\,\mathrm{d}r)\,h, \qquad \rho = \frac{m}{\pi R^2 h}$$

$$I = \int_0^R r^2\,\mathrm{d}m = 2\pi\rho h \int_0^R r^3 \mathrm{d}r = 2\pi\rho h \frac{R^4}{4} = \frac{m}{\pi R^2 h}\cdot\frac{\pi h R^4}{2} \;\Rightarrow\; \boxed{I = \tfrac{1}{2}mR^2}$$



anneau élémentaire :
$\mathrm{d}m = \rho\,2\pi r h\,\mathrm{d}r$
distance à l'axe : r

Figure 4.6 – Découpage d'un disque (vu de dessus) en anneaux concentriques.

IV.2 Cylindre creux

Pour un cylindre creux de rayons intérieur R_1 et extérieur R_2, la même intégration entre R_1 et R_2 donne

$$I = 2\pi\rho h\,\frac{R_2^4 - R_1^4}{4}, \qquad m = \rho\pi h(R_2^2 - R_1^2) \;\Rightarrow\; \boxed{I = \tfrac{1}{2}m(R_1^2 + R_2^2)}$$

(car $R_2^4 - R_1^4 = (R_2^2 - R_1^2)(R_2^2 + R_1^2)$). Pour une paroi mince ($R_1 \approx R_2 \approx R$) : $I \approx mR^2$: toute la masse est à la distance R de l'axe.

IV.3 Sphère pleine

On découpe la sphère de rayon R en disques d'épaisseur dz, de rayon $r(z) = \sqrt{R^2 - z^2}$ et de masse $\mathrm{d}m = \rho\pi r^2 \mathrm{d}z$. Chaque disque contribue pour $\mathrm{d}I = \frac{1}{2}\,\mathrm{d}m\,r^2$:

$$I = \int_{-R}^{R} \frac{1}{2}\rho\pi(R^2 - z^2)^2\,\mathrm{d}z = \frac{\rho\pi}{2}\left[R^4 z - \frac{2R^2 z^3}{3} + \frac{z^5}{5}\right]_{-R}^{R} = \frac{\rho\pi}{2}\cdot\frac{16R^5}{15} = \frac{8\pi\rho R^5}{15}.$$

Avec $m = \frac{4}{3}\pi R^3\rho$: $\boxed{I = \frac{2}{5}mR^2}$.

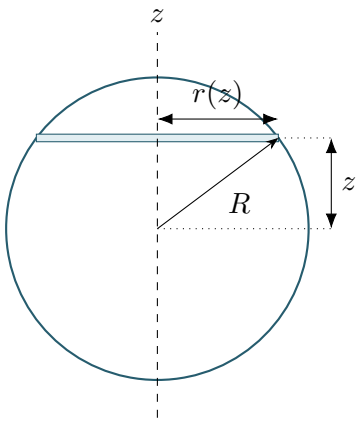


Figure 4.7 – Découpage de la sphère en disques élémentaires d'épaisseur dz.

IV.4 Tige mince et barre avec masses

Pour une tige homogène de longueur L et de masse m_b tournant autour d'un axe perpendiculaire passant par son milieu : $\mathrm{d}m = (m_b/L)\mathrm{d}x$ et

$$I_0 = \int_{-L/2}^{L/2} x^2 \frac{m_b}{L}\mathrm{d}x = \frac{m_b L^2}{12}.$$

Pour la barre munie de deux masses m identiques placées symétriquement à la distance r de l'axe, l'additivité et le théorème de Huygens donnent

$$I = I_0 + 2(I_{G,m} + mr^2).$$

IV.5 Masses amovibles : quand peut-on les considérer comme ponctuelles ?

Une masse cylindrique de rayon r_c (axe du cylindre parallèle à l'axe de rotation) a pour moment d'inertie propre $I_{G,m} = \frac{1}{2}mr_c^2$. Par Huygens, son moment d'inertie réel par rapport à l'axe est

$$I_{\text{réel}} = mr^2 + \tfrac{1}{2}mr_c^2,$$

alors que l'approximation ponctuelle donne $I_{\text{ponct}} = mr^2$. Les énergies cinétiques de rotation sont dans le même rapport :

$$\frac{E_{c,\text{rigide}}}{E_{c,\text{ponct}}} = \frac{\frac{1}{2}I_{\text{réel}}\Omega^2}{\frac{1}{2}I_{\text{ponct}}\Omega^2} = 1 + \frac{r_c^2}{2r^2}.$$

L'approximation ponctuelle est justifiée si $r_c \ll r$; par exemple pour $r_c = 1{,}5\,\text{cm}$ et $r \geq 12\,\text{cm}$, l'erreur est inférieure à 0,8 % (et elle n'affecte que l'ordonnée à l'origine de la droite $T^2 = f(r^2)$, pas sa pente).

IV.6 Récapitulatif

Tableau 4.1 – Moments d'inertie de solides homogènes usuels par rapport à un axe passant par leur centre de masse.

Solide	Axe	I_G
Masse ponctuelle à la distance r	–	mr^2
Anneau / cylindre creux mince, rayon R	axe de révolution	mR^2
Cylindre creux épais, rayons R_1, R_2	axe de révolution	$\frac{1}{2}m(R_1^2+R_2^2)$
Disque / cylindre plein, rayon R	axe de révolution	$\frac{1}{2}mR^2$
Disque, rayon R	diamètre	$\frac{1}{4}mR^2$
Sphère pleine, rayon R	diamètre	$\frac{2}{5}mR^2$
Sphère creuse mince, rayon R	diamètre	$\frac{2}{3}mR^2$
Tige mince, longueur L	perpendiculaire, au milieu	$\frac{1}{12}mL^2$
Tige mince, longueur L	perpendiculaire, à une extrémité	$\frac{1}{3}mL^2$
Parallélépipède $a \times b$	perpendiculaire à la face $a \times b$	$\frac{1}{12}m(a^2+b^2)$

Étude théorique à préparer

1.a) Déterminer en fonction de R et m le moment d'inertie : du disque, du cylindre plein, du cylindre creux, de la sphère. Faire l'application numérique avec les données du matériel.

1.b) Cas de la barre et des deux masses cylindriques : dans quelles conditions les masses peuvent-elles être considérées comme ponctuelles ? (Comparer les énergies cinétiques dans les deux cas : masses rigides et masses ponctuelles.)

2. Pourquoi le cylindre plein et le cylindre creux, de même masse et de même rayon, n'ont-ils pas la même période ? Lequel oscille le plus lentement ?

3. Montrer que $\dfrac{\Delta I}{I} = \dfrac{\Delta D}{D} + 2\dfrac{\Delta T}{T}$.

V Étude expérimentale

V.1 Détermination de la constante de torsion D

V.1.1 Méthode statique

Vérifier que la barre (sans les deux masses) est fixée en son milieu sur l'axe de rotation, et repérer la position d'équilibre ($\theta = 0$). Faire tourner la barre d'un angle θ à l'aide du dynamomètre accroché à la distance r de l'axe, le dynamomètre étant tenu **perpendiculairement** à la barre et dans le plan horizontal. Mesurer la force de rappel F, puis en déduire le moment $M = F\,r$. À chaque nouvelle mesure, ramener la barre à sa position d'équilibre.

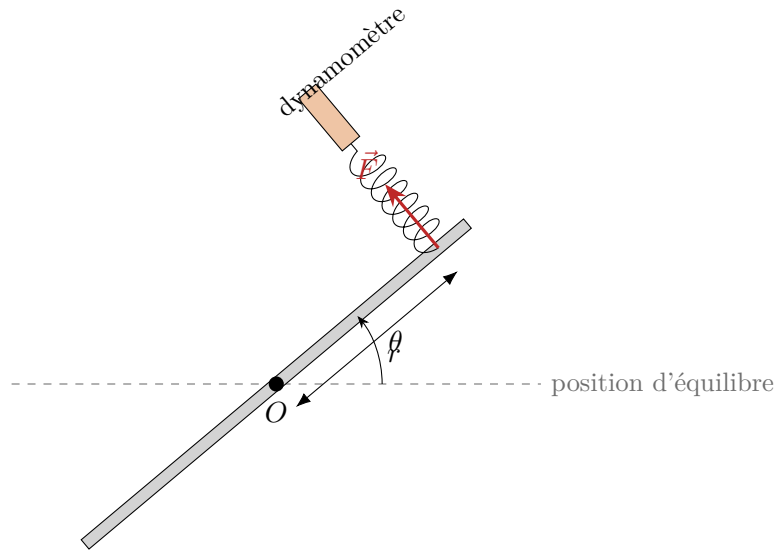


Figure 4.8 – Méthode statique (vue de dessus) : on mesure la force F nécessaire pour maintenir la barre tournée de l'angle θ ; le moment de rappel vaut $M = F\,r = D\,\theta$.

θ (rad)	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π	$5\pi/2$	3π
F (N)						
$M = F\,r$ (N·m)						
ΔM (N·m)						

1. Tracer la courbe du moment de la force M en fonction de l'angle θ (rectangles d'erreur).
2. Interpréter la courbe.
3. En déduire la valeur de la constante de torsion D.
4. Écrire D sous la forme $D = (D_0 \pm \Delta D)$ (unité).

V.1.2 Méthode dynamique

Fixer les deux masses amovibles (210 g chacune) sur la barre, symétriquement par rapport à l'axe, de sorte que le centre de masse soit confondu avec l'axe de rotation.

1. Montrer qu'en mesurant la période T des oscillations en fonction de la distance r des masses à l'axe, on peut déterminer la constante de torsion D et le moment d'inertie I_0 de la barre seule.
2. Tourner la barre d'un demi-tour, la lâcher, puis mesurer la période T à l'aide de la barrière optique avec compteur ; compléter le tableau pour les différentes valeurs de r.

r (cm)	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30
r^2 (m^2)										
T (s)										
T^2 (s^2)										
ΔT^2 (s^2)										

3. Tracer la courbe $T^2 = f(r^2)$; en déduire la valeur de D ainsi que celle de I_0 (barre seule).
4. Interpréter la courbe.
5. Écrire D sous la forme $D = (D_0 \pm \Delta D)$ et comparer à la valeur statique.

V.2 Moment d'inertie de quelques solides

1. Mesurer la période des oscillations de torsion T de chaque solide (disque, cylindre plein, cylindre creux, sphère) et en déduire, à l'aide de la relation $I = DT^2/4\pi^2$, son moment d'inertie I par rapport à l'axe de rotation. La mesure s'effectue en faisant tourner le solide d'un demi-tour, puis en mesurant T à l'aide de la barrière optique avec compteur.
2. Comparer les valeurs obtenues expérimentalement avec les valeurs théoriques.

Solide	Disque	Cylindre plein	Cylindre creux	Sphère
T (s)				
I_{th} (kg·m^2)				
I_{exp} (kg·m^2)				
Écart (%)				

3. Conclusion.

△ Précautions

- Ne pas tourner le ressort spiral au-delà de $\pm 3\pi$: il pourrait se déformer définitivement.
- Le support de chaque solide (la pièce de liaison avec l'axe) a lui-même un moment d'inertie, généralement faible ; il peut être mesuré seul et soustrait.
- Mesurer plusieurs périodes et faire la moyenne ; vérifier que l'axe est bien vertical (niveau à bulle) pour éviter les frottements.

VI Corrigé type

Valeurs théoriques

Solide	Formule	Données	I_{th} (kg·m^2)
Disque	$\frac{1}{2}mR^2$	$m = 0{,}300$ kg, $R = 0{,}110$ m	$1{,}82 \times 10^{-3}$
Cylindre plein	$\frac{1}{2}mR^2$	$m = 0{,}380$ kg, $R = 0{,}050$ m	$4{,}75 \times 10^{-4}$
Cylindre creux	$\frac{1}{2}m(R_1^2 + R_2^2)$	$R_1 = 0{,}046$ m, $R_2 = 0{,}050$ m	$8{,}77 \times 10^{-4}$
Sphère	$\frac{2}{5}mR^2$	$m = 0{,}760$ kg, $R = 0{,}070$ m	$1{,}49 \times 10^{-3}$

Masses amovibles : avec $r_c \approx 1{,}5\,\text{cm}$ et $r \geq 12\,\text{cm}$, $1 + r_c^2/(2r^2) \leq 1{,}008$: l'approximation ponctuelle est justifiée.

Méthode statique ($r = 0{,}30$ m)

θ (rad)	1,571	3,142	4,712	6,283	7,854	9,425
F (N)	0,14	0,28	0,43	0,57	0,71	0,85
M (N·m)	0,042	0,084	0,129	0,171	0,213	0,255
ΔM (N·m)	0,006	0,006	0,006	0,006	0,006	0,006

$\Delta M = r\Delta F + F\Delta r \approx 0{,}30 \times 0{,}02 = 0{,}006\,\text{N·m}$ (le dynamomètre est gradué tous les 0,05 N ; $\Delta F \approx 0{,}02\,\text{N}$).

Interprétation : $M = f(\theta)$ est une droite passant par l'origine : le couple de rappel est proportionnel à l'angle de torsion (loi de Hooke en rotation), $M = D\theta$.

Pente : régression par l'origine $D = \sum \theta_i M_i / \sum \theta_i^2 = 0{,}0271\,\text{N·m/rad}$; droites extrêmes : 0,0280 et 0,0263.

$$D_{\text{stat}} = (2{,}71 \pm 0{,}09) \times 10^{-2}\ \text{N·m/rad}$$

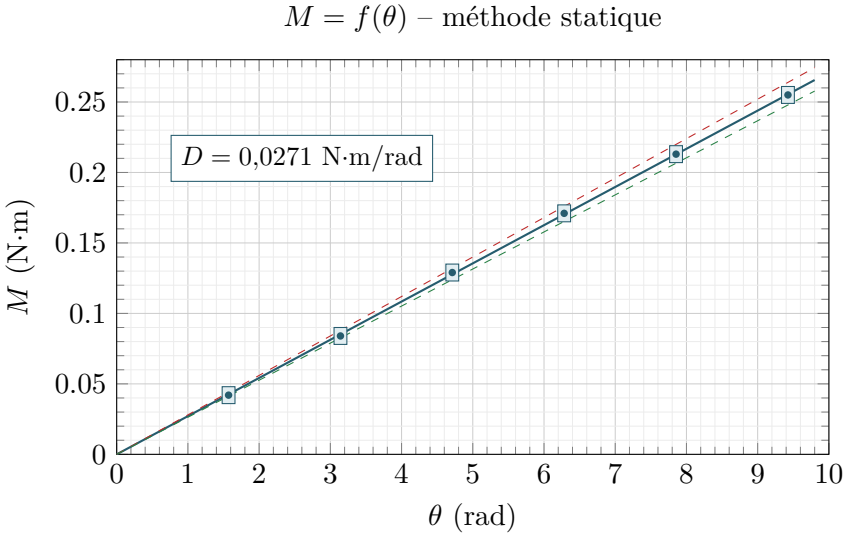


Figure 4.9 – Corrigé : moment de rappel du ressort spiral en fonction de l'angle de torsion.

Méthode dynamique (2 masses de 210 g)

Démonstration : $I_{\text{tot}} = I_0 + 2mr^2$ (masses ponctuelles), donc

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{D} I_{\text{tot}} = \underbrace{\frac{8\pi^2 m}{D}}_{\text{pente } p}\, r^2 + \underbrace{\frac{4\pi^2 I_0}{D}}_{\text{ordonnée } T_0^2} .$$

r (cm)	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30
r^2 (m^2)	0,0144	0,0196	0,0256	0,0324	0,0400	0,0484	0,0576	0,0676	0,0784	0,0900
T (s)	3,84	4,24	4,65	5,08	5,52	5,97	6,43	6,89	7,35	7,82
T^2 (s^2)	14,7	18,0	21,6	25,8	30,5	35,6	41,3	47,5	54,0	61,2
ΔT^2 (s^2)	0,4	0,4	0,5	0,5	0,6	0,6	0,6	0,7	0,7	0,8

($\Delta T = 0{,}05\,\text{s}$, $\Delta T^2 = 2T\Delta T$.)

Régression linéaire : pente $p = 614\,\text{s}^2/\text{m}^2$ ($\sigma_p = 4\,\text{s}^2/\text{m}^2$) ; ordonnée à l'origine $T_0^2 = 5{,}9\,\text{s}^2$ ($\sigma = 0{,}2\,\text{s}^2$) ; $r = 0{,}9999$.

Interprétation : T^2 est une fonction affine de r^2 : le moment d'inertie croît comme le carré de la distance des masses à l'axe, et l'ordonnée à l'origine représente la contribution de la barre seule.

$$D = \frac{8\pi^2 m}{p} = \frac{8 \times 9{,}870 \times 0{,}210}{614} = 2{,}70 \times 10^{-2}\ \text{N}\cdot\text{m/rad}$$

$$I_0 = \frac{T_0^2\, D}{4\pi^2} = \frac{5{,}9 \times 0{,}0270}{39{,}48} = 4{,}0 \times 10^{-3}\ \text{kg}\cdot\text{m}^2$$

$$D_{\text{dyn}} \;=\; (2{,}70 \,\pm\, 0{,}04) \,\times\, 10^{-2}\ \text{N·m/rad}$$

Comparaison : $D_{\text{stat}} = (2{,}71 \pm 0{,}09) \times 10^{-2}\,\text{N·m/rad}$, écart 0,4 % : les deux méthodes concordent ; la méthode dynamique est plus précise. Vérification de I_0 : pour une barre de 135 g et 60 cm, $m_b L^2/12 = 4{,}05 \times 10^{-3}\,\text{kg·m}^2$, en accord avec la valeur expérimentale.

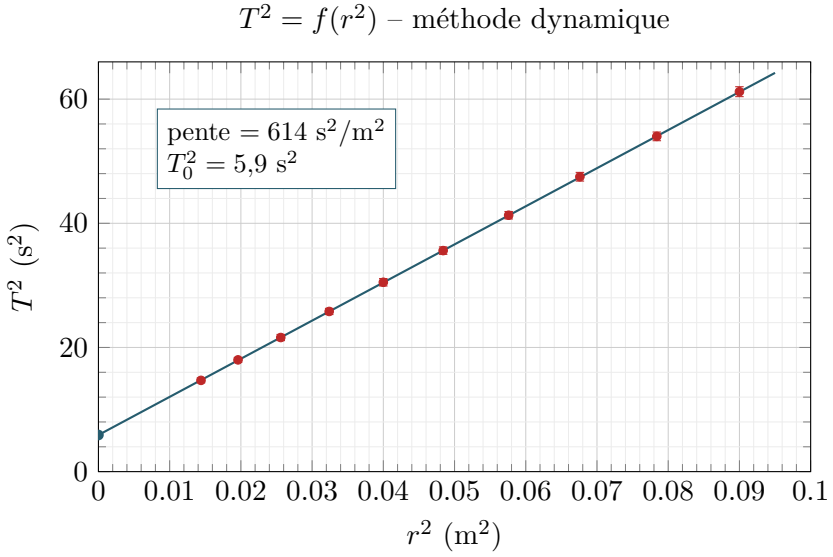


Figure 4.10 – Corrigé : carré de la période en fonction du carré de la distance des masses à l'axe.

Moments d'inertie des solides ($D = 2{,}70 \times 10^{-2}$ N·m/rad)

Solide	Disque	Cyl. plein	Cyl. creux	Sphère
T mesurée (s)	1,65	0,86	1,13	1,49
$I_{\text{exp}} = DT^2/4\pi^2$ (kg·m^2)	$1{,}86 \times 10^{-3}$	$5{,}06 \times 10^{-4}$	$8{,}73 \times 10^{-4}$	$1{,}52 \times 10^{-3}$
I_{th} (kg·m^2)	$1{,}82 \times 10^{-3}$	$4{,}75 \times 10^{-4}$	$8{,}77 \times 10^{-4}$	$1{,}49 \times 10^{-3}$
Écart (%)	2,4	6,5	0,5	2,0

Incertitude : $\dfrac{\Delta I}{I} = \dfrac{\Delta D}{D} + 2\dfrac{\Delta T}{T} \approx 1{,}5\,\% + 2 \times \dfrac{0{,}01}{T}$, soit 3 à 4 % selon le solide.

Conclusion : les valeurs expérimentales sont en bon accord avec les valeurs théoriques. Elles sont systématiquement un peu plus grandes, car la pièce de liaison entre le solide et l'axe ajoute son propre moment d'inertie (effet relativement plus important pour le cylindre plein, dont le moment d'inertie est le plus faible). À masse et rayon égaux, le cylindre creux a un moment d'inertie presque double de celui du cylindre plein : sa masse est concentrée loin de l'axe.

△ Remarque sur l'ancien corrigé

L'ancienne version donnait deux valeurs incompatibles de D ($8{,}6 \times 10^{-3}$ et $3{,}15 \times 10^{-2}$ N·m/rad) et des périodes incohérentes avec ces valeurs. Un même ressort a une seule constante de torsion : les deux méthodes doivent donner des valeurs compatibles, faute de quoi il faut rechercher l'erreur (bras de levier, degrés au lieu de radians, masse en g au lieu de kg…).

TP 05 : Conservation de l'énergie mécanique – Roue de Maxwell

Objectifs

1. Déterminer le moment d'inertie de la roue de Maxwell.
2. À l'aide de la roue de Maxwell, déterminer en fonction du temps :
   a) l'énergie potentielle de pesanteur,
   b) l'énergie cinétique de translation,
   c) l'énergie cinétique de rotation.
3. Vérifier la conservation de l'énergie mécanique et discuter les pertes.

Mots clés : roue de Maxwell, énergies cinétiques de translation et de rotation, énergie potentielle, énergie mécanique, moment d'inertie, vitesse angulaire, vitesse instantanée, roulement sans glissement.

I Principe de l'expérience

Une roue massive, pouvant se dérouler avec son axe le long de deux fils, est en mouvement dans le champ de pesanteur. En descendant, elle perd de l'énergie potentielle et gagne de l'énergie cinétique, à la fois de translation (son centre descend) et de rotation (elle tourne autour de son axe). Ces énergies sont converties les unes en les autres et sont déterminées en fonction du temps.

Arrivée en bas, la roue continue de tourner : les fils s'enroulent à nouveau sur l'axe et la roue remonte, presque jusqu'à sa hauteur de départ, à la manière d'un yo-yo. C'est une très belle illustration de la conservation de l'énergie.

II Rappels : énergie d'un solide

II.1 Énergie cinétique d'un solide

D'après le théorème de König, l'énergie cinétique d'un solide est la somme de l'énergie cinétique de translation de son centre de masse G (comme si toute la masse y était concentrée) et de l'énergie

cinétique de rotation autour de G :

$$E_c = \underbrace{\frac{1}{2}mv_G^2}_{E_t \text{ : translation}} + \underbrace{\frac{1}{2}I_G\,\omega^2}_{E_r \text{ : rotation}} .$$

II.2 Énergie potentielle de pesanteur

Au voisinage de la Terre, $E_p = mgz + \text{cste}$, avec z l'altitude du centre de masse (axe vertical ascendant). Si l'on repère la position par la distance ℓ **parcourue vers le bas** depuis le point de départ, $E_p = -mg\ell$ (référence au point de départ).

II.3 Théorème de l'énergie mécanique

L'énergie mécanique $E_m = E_c + E_p$ d'un système varie du travail des forces non conservatives :

$$\Delta E_m = W(\vec{F}_{\text{nc}}).$$

Si ces forces ne travaillent pas (ou si leur travail est négligeable), l'énergie mécanique se conserve.

II.4 Roulement sans glissement

Lorsqu'un cylindre de rayon r roule sans glisser sur un support (ici, il se déroule le long des fils), le point de contact a une vitesse nulle. La vitesse du centre et la vitesse angulaire sont alors liées par

$$\vec{v} = \vec{\omega} \wedge \vec{r} \qquad \Rightarrow \qquad v = \omega\, r.$$

III Matériel



Figure 5.1 – Photographie du dispositif de la roue de Maxwell : roue suspendue par deux fils à une potence, mètre de démonstration vertical, dispositif d'arrêt avec déclenchement et barrière optique réglable en hauteur.

Élément	Rôle
Pied de support en A, tige carrée (1000 mm), noix double	potence
Roue de Maxwell	roue de masse $m = 0{,}436\,\text{kg}$, axe de rayon $r = 2{,}5\,\text{mm}$
Mètre de démonstration (1000 mm) et curseurs	repérage des positions
Barrière optique avec compteur	mesure des durées
Dispositif d'arrêt avec déclenchement Bowden	libère la roue et démarre le compteur
Porte-plaque, adaptateur BNC, condensateur 100 nF	montage électrique du déclenchement
Alimentation 5 V DC	alimentation de la barrière
Fils de connexion	–

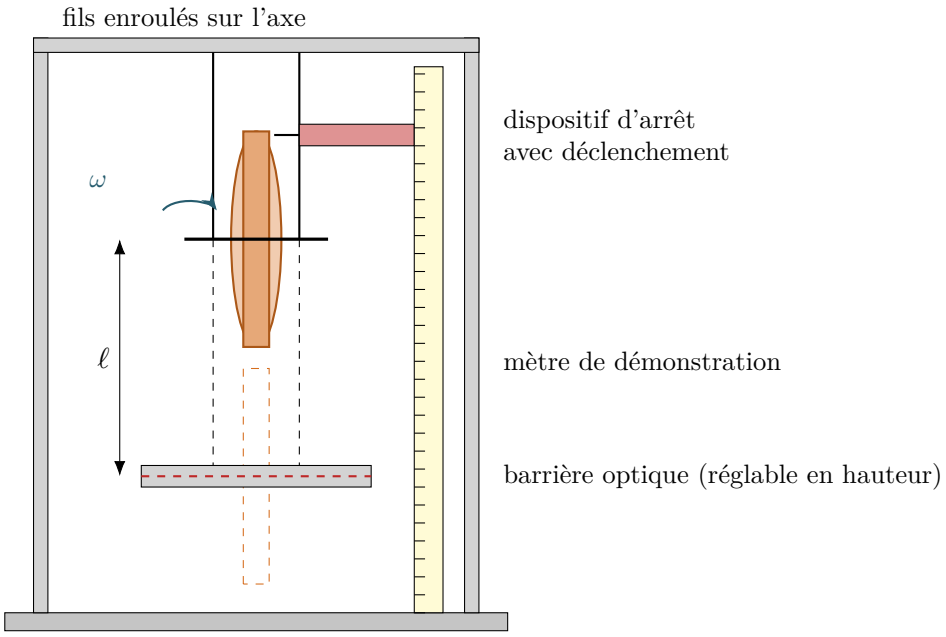


Figure 5.2 – Montage de la roue de Maxwell. La roue, suspendue par deux fils enroulés sur son axe, est libérée par le dispositif d'arrêt qui déclenche simultanément le compteur ; la barrière optique, placée à la distance ℓ sous la position de départ, arrête le compteur.

IV Montage et réglages

L'axe de la roue de Maxwell est attaché de part et d'autre à deux fils qui s'enroulent et se déroulent pendant que la roue descend ou monte. À l'état déroulé, l'axe doit être **horizontal**. Une broche reliée à un commutateur de déverrouillage, et pouvant s'introduire dans un trou de la circonférence du disque, permet de libérer la roue mécaniquement et de démarrer simultanément le compteur, afin de déterminer la distance et la durée du mouvement. La densité d'enroulement doit être à peu près égale des deux côtés, et le fil doit toujours être enroulé dans le même sens pour le démarrage.

△ Réglages indispensables

- Régler la longueur des deux fils pour que l'axe reste horizontal sur toute la descente (sinon la roue frotte contre un fil et oscille latéralement).
- Enrouler les fils **régulièrement**, spire contre spire, sans chevauchement : le rayon d'enroulement r doit rester constant.
- Repérer la position de départ de l'axe (curseur rouge du mètre) : ℓ est la distance verticale entre cette position et le faisceau de la barrière.
- Pour mesurer une vitesse, la barrière est réglée en mode « durée d'occultation » : on mesure le temps Δt mis par l'axe (de diamètre $d = 2r = 5\,\text{mm}$) pour traverser le faisceau.

V Étude théorique

L'énergie totale E de la roue de Maxwell, de masse m et de moment d'inertie I_z autour de son axe de rotation, est la somme de son énergie potentielle E_p, de son énergie cinétique de translation E_t et de son énergie cinétique de rotation E_r.

1. Expression de l'énergie totale.

$$E = E_p + E_t + E_r = -m\,\vec{g}\cdot\vec{\ell} + \frac{1}{2}m\,\vec{v}^{\,2} + \frac{1}{2}I_z\,\vec{\omega}^{\,2}$$

où $\vec{g}$ est l'accélération de la pesanteur, $\vec{\ell}$ le déplacement du centre de la roue depuis le point de départ (choisi comme référence de l'énergie potentielle), $\vec{v}$ la vitesse linéaire du centre de la roue et $\vec{\omega}$ sa vitesse angulaire, parallèle à l'axe de rotation. (Le signe moins traduit le fait que l'énergie potentielle diminue lorsque la roue descend dans le sens de $\vec{g}$.)

2. Relation entre v et ω. Les fils étant immobiles et l'axe roulant sans glisser le long des fils, le point de l'axe en contact avec le fil (point A) a une vitesse nulle. Pour le solide en rotation, la vitesse du centre C s'obtient par la relation de transport des vitesses :

$$\vec{v}_C = \vec{v}_A + \vec{\omega}\wedge\overrightarrow{AC} = \vec{\omega}\wedge\overrightarrow{AC},$$

soit, en notant $\vec{r} = \overrightarrow{AC}$ (de norme r, rayon de l'axe) : $\vec{v} = \vec{\omega}\wedge\vec{r}$, et comme $\vec{\omega}\perp\vec{r}$:

$$v = \omega\, r \qquad\Longleftrightarrow\qquad \omega = \frac{v}{r}.$$

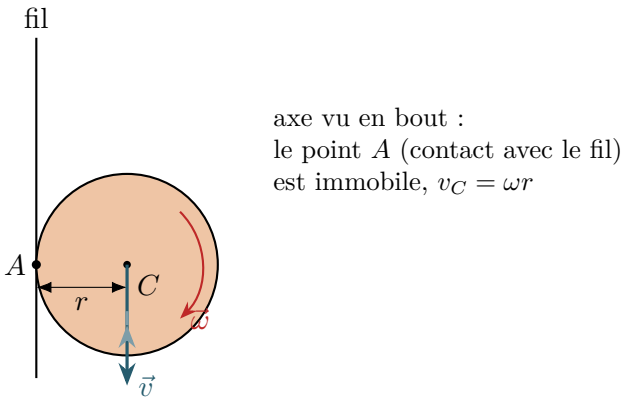


Figure 5.3 – Déroulement sans glissement de l'axe le long du fil : le centre C descend à la vitesse $v = \omega r$.

3. Énergie en fonction de $v(t)$ et $\ell(t)$. En projetant sur un axe vertical orienté vers le bas (ℓ positif vers le bas, $\vec{g}\cdot\vec{\ell} = g\,\ell$) et en remplaçant $\omega = v/r$:

$$E_r = \frac{1}{2}I_z\frac{v^2}{r^2} \qquad\Rightarrow\qquad \boxed{E = -mg\,\ell(t) + \frac{1}{2}\left(m + \frac{I_z}{r^2}\right)v^2(t)}$$

Tout se passe comme si la roue avait une masse « effective » $m_{\text{eff}} = m + I_z/r^2$ pour la translation. Comme r est très petit, I_z/r^2 est très grand devant m.

4. Expressions de $v(t)$ et $\ell(t)$. La roue part du repos : à $t = 0$, $\ell = 0$ et $v = 0$, donc $E = 0$. La conservation de l'énergie impose à chaque instant

$$\frac{1}{2}\left(m + \frac{I_z}{r^2}\right) v^2 = mg\,\ell.$$

En dérivant par rapport au temps ($\dot{\ell} = v$) :

$$\left(m + \frac{I_z}{r^2}\right) v\,\dot{v} = mg\,v \quad \Rightarrow \quad \dot{v} = a = \frac{mg}{m + I_z/r^2} = \text{cste}.$$

Le mouvement du centre est donc uniformément accéléré, et avec les conditions initiales nulles :

$$\boxed{v(t) = \frac{mg}{m + I_z/r^2}\,t, \qquad \ell(t) = \frac{1}{2}\,\frac{mg}{m + I_z/r^2}\,t^2}$$

L'accélération $a = \dfrac{g}{1 + I_z/(mr^2)}$ est d'autant plus faible devant g que le moment d'inertie est grand ou que l'axe est fin. Inversement, la mesure de a permet de calculer le moment d'inertie :

$$\boxed{I_z = mr^2\left(\frac{g}{a} - 1\right)}$$

Approche dynamique (vérification). On peut retrouver ce résultat avec les lois de Newton. Soit T la tension totale des deux fils. Translation : $mg - T = ma$. Rotation autour de C : $T\,r = I_z\dot{\omega} = I_z a/r$. En éliminant T : $mg = a(m + I_z/r^2)$. On obtient de plus la tension $T = I_z a/r^2 = mg - ma$, presque égale au poids : la roue « descend en tirant fort » sur les fils.

Répartition de l'énergie cinétique.

$$\frac{E_r}{E_t} = \frac{\frac{1}{2}I_z v^2/r^2}{\frac{1}{2}mv^2} = \frac{I_z}{mr^2} \quad \text{(constant au cours du mouvement)}.$$

Remontée. Arrivée au point le plus bas (fils complètement déroulés), la roue possède une énergie de rotation importante ; elle continue de tourner, les fils s'enroulent de nouveau et la roue remonte. Au point bas, la vitesse du centre s'inverse brutalement (choc), ce qui dissipe un peu d'énergie : la roue remonte un peu moins haut à chaque cycle.

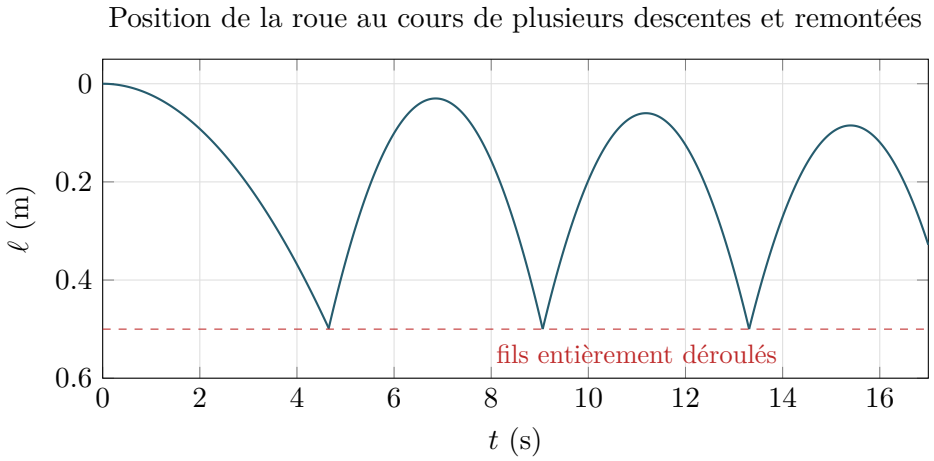


Figure 5.4 – Allure de la position $\ell(t)$ de la roue : descentes paraboliques puis remontées ; l'amplitude diminue lentement à cause des frottements et des chocs au point bas (axe des ordonnées orienté vers le bas).

Questions de préparation

1. Pourquoi la roue de Maxwell descend-elle beaucoup plus lentement qu'un objet en chute libre ?
2. Calculer I_z/r^2 pour $I_z = 5{,}8 \times 10^{-4}\,\text{kg·m}^2$ et $r = 2{,}5\,\text{mm}$; comparer à $m = 0{,}436\,\text{kg}$. Quelle fraction de l'énergie cinétique est sous forme de rotation ?
3. Calculer la durée de chute sur $\ell = 0{,}50\,\text{m}$.
4. La vitesse instantanée est mesurée par $v = d/\Delta t$, où $d = 5\,\text{mm}$ est le diamètre de l'axe. Pourquoi est-ce une bonne approximation de la vitesse instantanée ?
5. Exprimer $\Delta I_z/I_z$ en fonction de $\Delta a/a$ (on considérera m, r et g comme exacts).

VI Étude expérimentale

On donne la masse de la roue $m = 0{,}436\,\text{kg}$ et le rayon de son axe $r = 2{,}5\,\text{mm}$.

VI.1 Variation de la hauteur en fonction du temps

Protocole. La barrière optique est en mode « temps entre déclenchement et occultation ». Pour différentes valeurs de ℓ (position de la barrière), lâcher la roue avec le déclencheur et mesurer la durée t de la descente. Faire trois mesures pour chaque position et calculer le temps moyen.

ℓ (m)							
t_{moy} (s)							
t^2_{moy} (s^2)							
$\ln \ell$							
$\ln t_{\text{moy}}$							

1. Tracer sur papier millimétré $\ln \ell$ en fonction de $\ln t_{\text{moy}}$.

2. En supposant une loi de puissance entre la hauteur ℓ et le temps t de la forme $\ell = \alpha\, t^k$, en déduire les valeurs de α et de l'exposant k.

3. Quelle est la nature du mouvement ?

4. Tracer sur papier millimétré la courbe ℓ en fonction de t^2 et déterminer la pente de la droite.

5. En déduire la valeur de l'accélération $a = (\ _____ \pm _____\ )$ et le moment d'inertie de la roue $I_z = (\ _____ \pm _____\ )$ (n'oubliez pas les unités). On prend $g = 9{,}81\,\mathrm{m/s^2}$.

6. Conclusion.

Pourquoi tracer $\ln \ell = f(\ln t)$?

Si $\ell = \alpha t^k$, alors $\ln \ell = k \ln t + \ln \alpha$: en coordonnées logarithmiques, toute loi de puissance devient une droite dont la **pente est l'exposant** k et l'ordonnée à l'origine $\ln \alpha$. Cette méthode permet de *déterminer* l'exposant sans le supposer connu à l'avance.

VI.2 Vitesse en fonction du temps

Protocole. La barrière est en mode « durée d'occultation ». Pour différentes valeurs de ℓ, mesurer la durée moyenne Δt de passage de l'axe (diamètre $d = 5\,\mathrm{mm}$) dans le faisceau, et le temps de chute t correspondant (mesuré précédemment). La vitesse au point considéré vaut $v = d/\Delta t$.

t_{moy} (s)							
$\ell(t)$ (m)							
Δt_{moy} (s)							
v (m/s)							

1. Tracer sur papier millimétré la courbe $v = f(t_{\mathrm{moy}})$ et déterminer sa pente.

2. En déduire la valeur de l'accélération $a = (\ _____ \pm _____\ )$ et le moment d'inertie $I_z = (\ _____ \pm _____\ )$.

3. Que peut-on conclure ?

VI.3 Conservation de l'énergie totale

En utilisant les résultats précédents, remplir le tableau suivant pour différentes valeurs de ℓ, avec :

$$E_p = -mg\ell, \qquad E_t = \frac{1}{2}mv^2, \qquad E_r = \frac{1}{2}\frac{I_z}{r^2}v^2, \qquad E_{\mathrm{tot}} = E_p + E_t + E_r.$$

ℓ (m)						
t_{moy} (s)						
v^2 (m^2/s^2)						
E_p (J)						
E_t (J)						
E_r (J)						
E_{tot} (J)						

1. Comparer les valeurs des énergies E_t et E_r.
2. Tracer sur papier millimétré les courbes des énergies E_p, $E_t + E_r$ et E_{tot} en fonction de t_{moy}.
3. Comparer les courbes E_p et $E_t + E_r$.
4. Que peut-on conclure à propos de l'énergie totale E_{tot} ?
5. Si on abandonne la roue en mouvement à partir d'une hauteur fixe pendant un temps plus long, va-t-elle s'arrêter ? Expliquer.

VII Corrigé type

Hauteur en fonction du temps

t_{moy} (s)	1,00	1,50	2,00	2,50	3,00	3,50
t^2 (s^2)	1,00	2,25	4,00	6,25	9,00	12,25
ℓ (m)	0,023	0,052	0,092	0,144	0,207	0,282
$\ln t$	0	0,405	0,693	0,916	1,099	1,253
$\ln \ell$	−3,772	−2,956	−2,386	−1,938	−1,575	−1,266

Graphe log-log : droite de pente $k = \dfrac{-1{,}266 - (-3{,}772)}{1{,}253 - 0} = 2{,}00$ et d'ordonnée à l'origine $\ln \alpha = -3{,}772$, soit $\alpha = e^{-3{,}772} = 0{,}023\,\text{m/s}^2$.

$$\ell = 0{,}023\,t^2 \quad (\ell \text{ en m}, t \text{ en s}), \qquad k = 2{,}00$$

Nature du mouvement : $\ell \propto t^2$, donc $v = \mathrm{d}\ell/\mathrm{d}t \propto t$ et l'accélération est constante : le mouvement du centre de la roue est rectiligne uniformément accéléré.
Graphe $\ell = f(t^2)$: droite passant par l'origine de pente $p = 0{,}0230\,\text{m/s}^2$ ($\Delta p \approx 0{,}0008\,\text{m/s}^2$). Or $\ell = \frac{1}{2}at^2$, donc

$$a = 2p = 0{,}046\ \text{m/s}^2, \qquad \Delta a = 2\Delta p = 0{,}002\ \text{m/s}^2.$$

$$I_z = mr^2\left(\frac{g}{a} - 1\right) = 0{,}436 \times (2{,}5 \times 10^{-3})^2\left(\frac{9{,}81}{0{,}046} - 1\right) = 5{,}78 \times 10^{-4}\ \text{kg} \cdot \text{m}^2$$

$$\frac{\Delta I_z}{I_z} \approx \frac{\Delta a}{a} = 4\,\% \quad (\text{car } g/a \gg 1)$$

$$a = (0{,}046 \pm 0{,}002)\ \text{m/s}^2 \qquad I_z = (5{,}8 \pm 0{,}3) \times 10^{-4}\ \text{kg·m}^2$$

Conclusion : l'accélération est environ 200 fois plus faible que g : presque toute l'énergie libérée sert à faire tourner la roue.

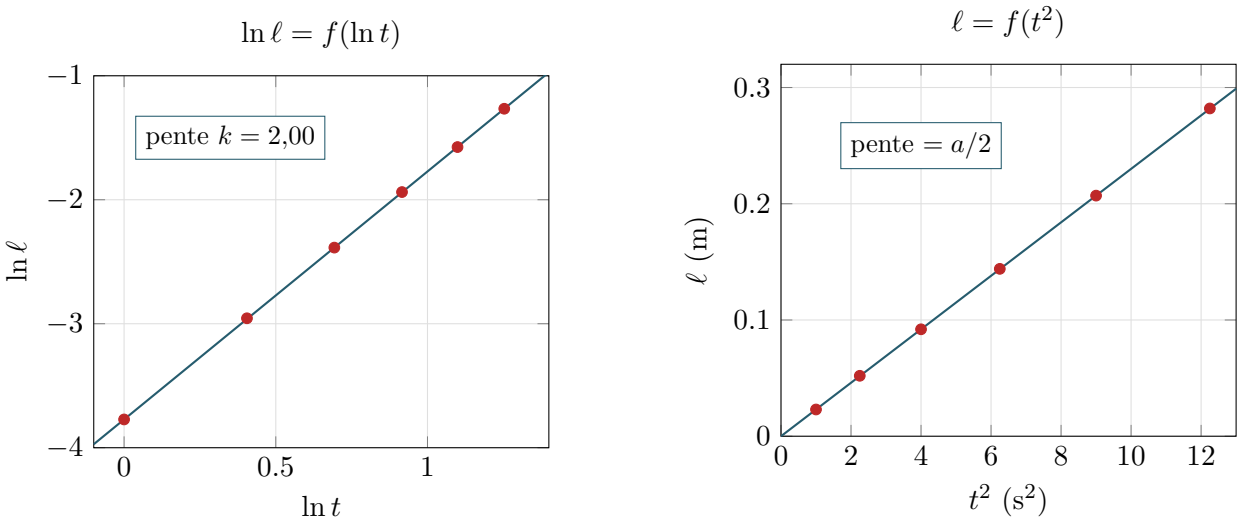


Figure 5.5 – Corrigé : à gauche, représentation logarithmique (pente 2 : $\ell \propto t^2$) ; à droite, linéarisation $\ell = f(t^2)$.

Vitesse en fonction du temps ($d = 5{,}0$ mm)

t_{moy} (s)	1,00	1,50	2,00	2,50	3,00	3,50
ℓ (m)	0,023	0,052	0,092	0,144	0,207	0,282
Δt_{moy} (s)	0,109	0,072	0,054	0,043	0,036	0,031
$v = d/\Delta t$ (m/s)	0,046	0,069	0,093	0,116	0,139	0,161

Graphe $v = f(t)$: droite passant par l'origine, de pente

$$a = \frac{0{,}161 - 0{,}046}{3{,}50 - 1{,}00} = 0{,}046\ \text{m/s}^2.$$

$$a = (0{,}046 \pm 0{,}002)\ \text{m/s}^2 \qquad I_z = (5{,}8 \pm 0{,}3) \times 10^{-4}\ \text{kg·m}^2$$

Conclusion : les deux méthodes indépendantes (positions et vitesses) donnent la même accélération : la vitesse croît linéairement avec le temps, ce qui confirme le modèle et la cohérence des mesures.

Conservation de l'énergie ($I_z/r^2 = 92{,}5$ kg)

ℓ (m)	0,023	0,052	0,092	0,144	0,207	0,282
t_{moy} (s)	1,00	1,50	2,00	2,50	3,00	3,50
v^2 (m^2/s^2)	0,00212	0,00476	0,00865	0,01346	0,01932	0,02592
E_p (J)	−0,0984	−0,2224	−0,3935	−0,6159	−0,8854	−1,2062
E_t (J)	0,0005	0,0010	0,0019	0,0029	0,0042	0,0057
E_r (J)	0,0980	0,2201	0,4001	0,6225	0,8936	1,1988
E_{tot} (J)	0,0001	−0,0013	0,0085	0,0095	0,0124	−0,0017

1. $E_r/E_t = I_z/(mr^2) = 92{,}5/0{,}436 \approx 212$: l'énergie de rotation est plus de 200 fois plus grande que l'énergie de translation. Plus de 99,5 % de l'énergie cinétique est stockée dans la rotation.
2. Voir la figure ci-dessous.
3. Les courbes $E_p(t)$ et $(E_t + E_r)(t)$ sont symétriques par rapport à l'axe des temps : à chaque instant, l'énergie potentielle perdue est intégralement transformée en énergie cinétique (essentiellement de rotation).
4. E_{tot} reste nulle aux incertitudes près (écarts $\leq 0{,}012$ J, soit ≤ 1 % de $|E_p|$) : l'énergie mécanique est conservée au cours de la descente ; les frottements sont négligeables sur une descente.
5. En théorie (sans frottement), la roue descendrait et remonterait indéfiniment jusqu'à sa hauteur initiale. En pratique, les frottements de l'air, la déformation des fils et surtout le choc au point bas (inversion du sens de la vitesse) dissipent une petite fraction de l'énergie à chaque cycle sous forme de chaleur : la hauteur atteinte diminue progressivement et **la roue finit par s'arrêter** au point bas, fils déroulés.

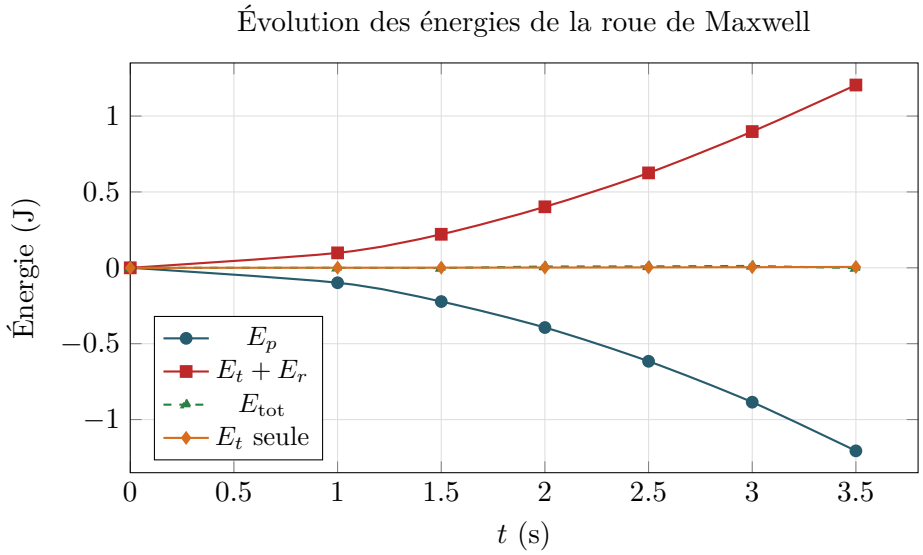


Figure 5.6 – Corrigé : l'énergie potentielle perdue est transformée en énergie cinétique (presque entièrement de rotation) ; l'énergie totale reste constante.

△ Remarque sur l'ancien corrigé

Dans l'ancienne version du tableau des énergies, E_r avait été calculée avec un facteur erroné (par exemple $E_r = 0{,}023\,\text{J}$ au lieu de $0{,}098\,\text{J}$ pour $t = 1\,\text{s}$), ce qui conduisait à une énergie totale qui décroissait régulièrement jusqu'à $-0{,}92\,\text{J}$, en contradiction avec la conclusion « l'énergie totale reste constante ». Toujours vérifier qu'une conclusion est cohérente avec les nombres du tableau !

Pour aller plus loin

- Mesurer la hauteur atteinte après chaque remontée et tracer h_n en fonction du numéro n de la remontée ; en déduire la fraction d'énergie perdue par cycle.
- Comparer le moment d'inertie mesuré à une estimation géométrique : roue (anneau) de rayon intérieur R_1, extérieur R_2, et disque central de rayon R_1.
- Refaire l'expérience en enroulant les fils sur un rayon plus grand (manchon) : prévoir et vérifier l'augmentation de l'accélération.

TP 06 : Frottement statique

Objectifs

- Calculer les coefficients de frottement statique μ_s de différents couples de surfaces en contact : bois/acier, bois/verre, caoutchouc/acier et caoutchouc/verre, sur un plan horizontal.
- Déterminer les mêmes coefficients par la méthode du plan incliné (angle limite de glissement).
- Comparer les deux méthodes et vérifier les lois de Coulomb (indépendance vis-à-vis de la masse et de l'aire de contact).

I Le frottement solide : généralités

Lorsque deux solides sont en contact, la force qu'exerce l'un sur l'autre, appelée **réaction** $\vec{R}$, possède en général deux composantes :

- une composante **normale** $\vec{N}$, perpendiculaire à la surface de contact, qui empêche les solides de s'interpénétrer ;
- une composante **tangentielle** $\vec{f}$, parallèle à la surface de contact : c'est la **force de frottement**. Elle s'oppose au glissement (effectif ou potentiel) d'un solide sur l'autre.

$$\vec{R} = \vec{N} + \vec{f}.$$

L'angle φ entre $\vec{R}$ et la normale à la surface vérifie $\tan\varphi = f/N$.

Origine microscopique. À l'échelle microscopique, les surfaces les plus lisses présentent des aspérités. Le contact réel ne se fait que sur une petite fraction de l'aire apparente, au sommet des aspérités, où se forment des micro-soudures (liaisons d'adhésion). Pour faire glisser un solide, il faut cisailler ces jonctions : c'est l'origine de la force de frottement. L'aire de contact réelle est proportionnelle à la force normale, ce qui explique la loi $f \propto N$.

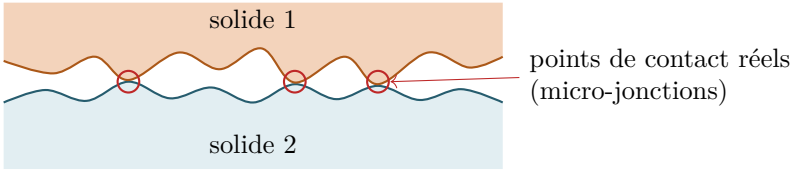


Figure 6.1 – Vue microscopique (très agrandie) d'un contact : seuls les sommets des aspérités se touchent.

II Les lois de Coulomb

II.1 Frottement statique (pas de glissement)

Tant que le solide ne glisse pas, la force de frottement s'ajuste pour assurer l'équilibre, mais elle ne peut pas dépasser une valeur limite :

$$\boxed{f \leq \mu_s\, N} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \varphi \leq \varphi_s \quad \text{avec} \quad \tan\varphi_s = \mu_s.$$

μ_s est le **coefficient de frottement statique** (sans dimension) et φ_s l'**angle de frottement statique**. À la limite du glissement, $f = \mu_s N$.

II.2 Frottement dynamique (glissement)

Lorsque le solide glisse, la force de frottement est opposée à la vitesse de glissement et vaut

$$f = \mu_d\, N,$$

où μ_d est le **coefficient de frottement dynamique** (ou cinétique). En général $\mu_d < \mu_s$: il est plus difficile de mettre un objet en mouvement que de l'entretenir.

II.3 Propriétés

- μ_s et μ_d dépendent de la nature des deux matériaux, de leur état de surface (rugosité, propreté, humidité, lubrification).
- En première approximation, ils ne dépendent **ni de l'aire apparente de contact, ni de la masse** du solide, ni (pour μ_d) de la vitesse de glissement.

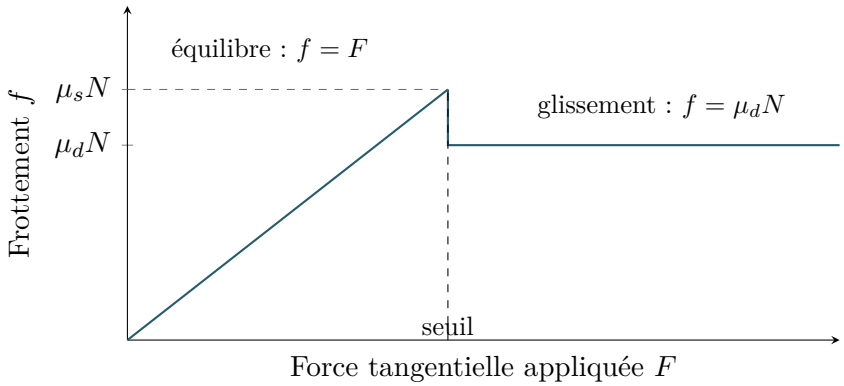


Figure 6.2 – Force de frottement en fonction de la force tangentielle appliquée : la force de frottement statique croît avec F jusqu'au seuil $\mu_s N$, puis le solide glisse et le frottement chute à $\mu_d N$.

II.4 Cône de frottement

La condition $\varphi \leq \varphi_s$ signifie que, à l'équilibre, la réaction $\vec{R}$ doit rester à l'intérieur d'un cône de demi-angle au sommet φ_s dont l'axe est la normale au contact : c'est le **cône de frottement**. Si les autres forces exigent une réaction hors de ce cône, l'équilibre est impossible et le solide glisse.

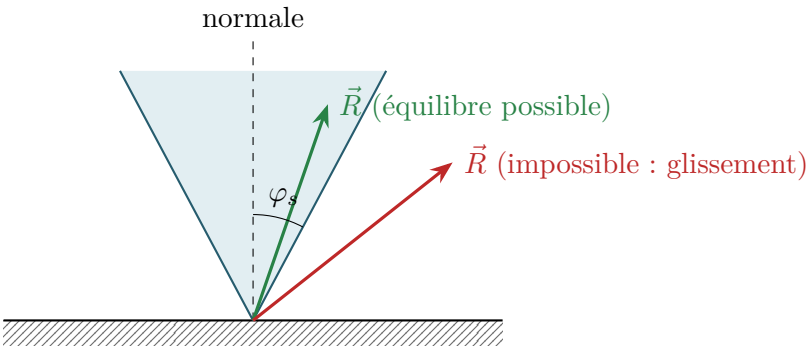


Figure 6.3 – Cône de frottement de demi-angle φ_s ($\tan\varphi_s = \mu_s$) : à l'équilibre, la réaction reste dans le cône.

Tableau 6.1 – Ordres de grandeur de coefficients de frottement (surfaces sèches, valeurs indicatives).

Couple de matériaux	μ_s	μ_d
Acier / acier	0,5 – 0,8	0,4 – 0,6
Bois / bois	0,25 – 0,5	0,2
Bois / acier	0,2 – 0,6	0,2 – 0,4
Bois / verre	0,2 – 0,3	0,15 – 0,25
Caoutchouc / acier	0,5 – 0,8	0,4 – 0,6
Caoutchouc / verre	0,5 – 0,9	0,4 – 0,7
Caoutchouc / béton sec	1,0	0,8
Caoutchouc / béton mouillé	0,7	0,5
Téflon / acier	0,04	0,04
Glace / glace	0,1	0,03

III Étude théorique

Pour réaliser ce TP, on utilise un support en acier inclinable muni d'un rapporteur, sur lequel un patin de masse M peut être tiré par un fil de masse négligeable et inextensible. Ce fil, qui passe sur une poulie, est tendu par une masse m accrochée à son extrémité. On change à chaque fois le type de patin (face bois ou face caoutchouc) et le support (acier ou plaque de verre) pour déterminer le coefficient de frottement statique dans chaque cas.

III.1 Frottement sur un plan horizontal

On place sur un plan horizontal un patin sur lequel on exerce, à l'aide du fil, une force horizontale $\vec{F}$ capable d'amorcer le glissement.

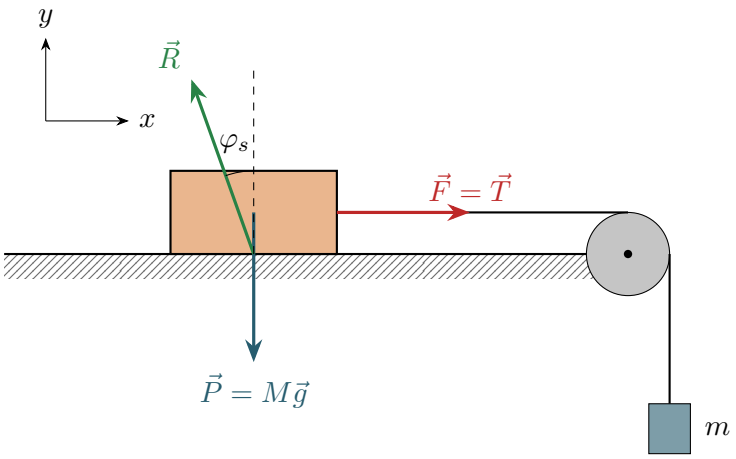


Figure 6.4 – Patin sur un plan horizontal, tiré par un fil tendu par la masse m : à la limite du glissement, la réaction est inclinée de l'angle φ_s par rapport à la normale.

À la limite du glissement, le patin est encore en équilibre :

$$\sum \vec{F} = \vec{0} \;\Rightarrow\; \vec{F} + \vec{P} + \vec{R} = \vec{0}.$$

Projection sur x : $F - R\sin\varphi_s = 0$ (1)

Projection sur y : $-P + R\cos\varphi_s = 0$ (2)

En divisant (1) par (2) :

$$\frac{F}{P} = \tan\varphi_s = \mu_s \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{F = \mu_s\, P} \quad (3)$$

La force F est la tension du fil, égale au poids de la masse accrochée : $F = T = mg$. Ainsi $\mu_s = \dfrac{m}{M}$: la mesure ne fait intervenir que deux masses. En traçant $T = f(P)$ pour plusieurs charges du patin, on obtient une droite passant par l'origine de pente μ_s.

III.2 Frottement sur un plan incliné

Soit un plan incliné d'angle α variable, sur lequel on place le patin de masse M (sans fil). Le patin est soumis à son poids et à la réaction du plan.

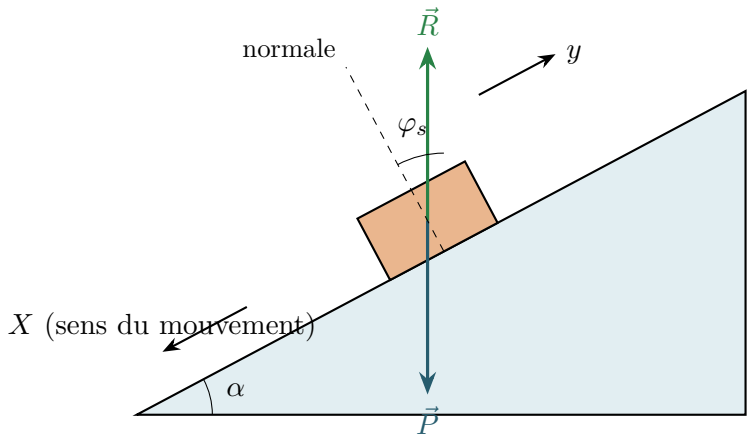


Figure 6.5 – Patin sur un plan incliné à la limite du glissement : la réaction $\vec{R}$ est verticale (elle compense le poids) et fait avec la normale un angle égal à α.

À l'équilibre $\vec{P} + \vec{R} = \vec{0}$: la réaction est verticale. En projetant sur l'axe X parallèle au plan (dirigé vers le bas) et sur l'axe Y perpendiculaire :

$$-R\sin\varphi + P\sin\alpha = 0 \qquad (4), \qquad\qquad R\cos\varphi - P\cos\alpha = 0 \qquad (5)$$

d'où $\tan\varphi = \tan\alpha$, soit $\varphi = \alpha$. L'équilibre est possible tant que $\varphi \leq \varphi_s$, c'est-à-dire $\alpha \leq \varphi_s$. Le glissement commence lorsque l'inclinaison atteint l'angle limite $\alpha_s = \varphi_s$:

$$\mu_s \quad = \quad \tan\alpha_s$$

Cette méthode, très simple, ne nécessite ni masse ni fil : il suffit de lire un angle. Elle montre immédiatement que μ_s ne dépend pas de la masse du patin (la masse se simplifie).

Questions de préparation

1. Montrer que sur le plan horizontal $\mu_s = m/M$ à la limite du glissement.
2. Un patin glisse pour $\alpha_s = 17$ř ; calculer μ_s et φ_s.
3. Exprimer $\Delta\mu_s$ en fonction de $\Delta\alpha$ (en radians) pour la méthode du plan incliné. Application : $\alpha_s = 17$ř $\pm\, 1$ř.
4. Pourquoi la masse de la poulie et ses frottements peuvent-ils fausser la méthode du plan horizontal ? Dans quel sens ?
5. Pourquoi un pneu « lisse » adhère-t-il moins sur route mouillée ?

IV Étude expérimentale

IV.1 Description du matériel

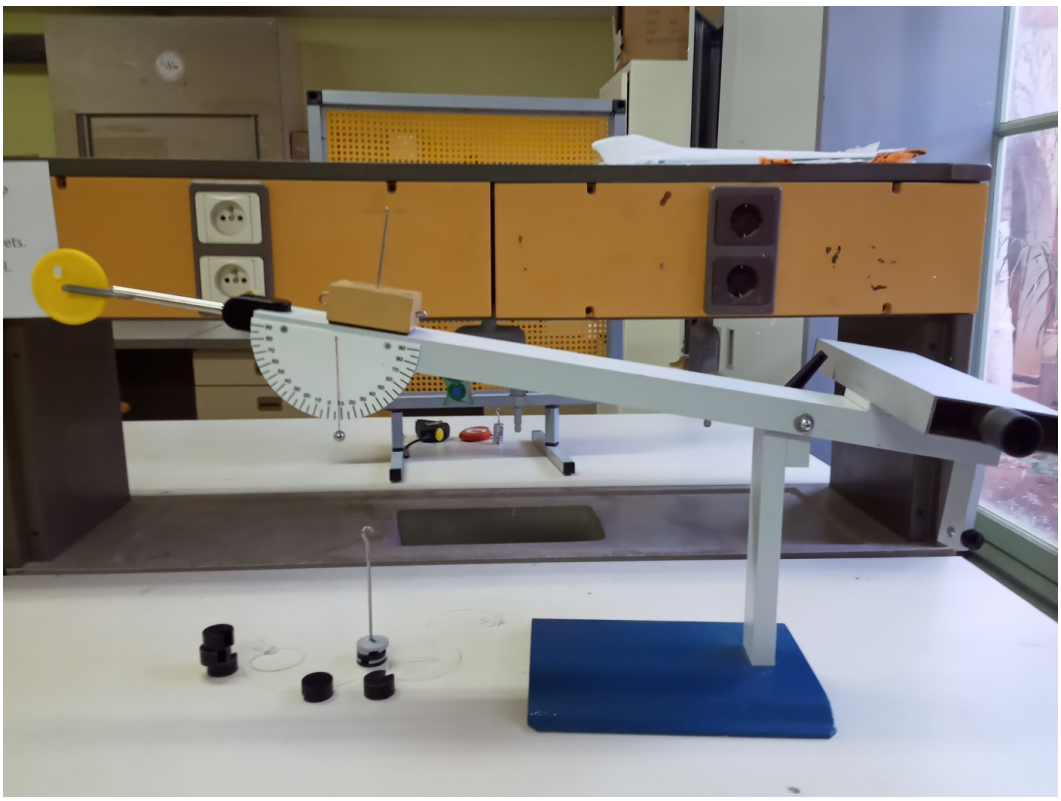


Figure 6.6 – Photographie du plan inclinable utilisé en salle de TP : support réglable avec rapporteur et fil à plomb, patin en bois, poulie, porte-masse et masses marquées.

- Un support en acier inclinable muni d'un rapporteur.
- Un patin double face (bois d'un côté, caoutchouc de l'autre) formant avec le plan en acier doux deux couples : bois/acier et caoutchouc/acier.
- Une plaque de verre placée sur le plan en acier, formant deux autres couples : bois/verre et caoutchouc/verre.
- Des masses marquées et un porte-masse, pour atteindre la limite d'équilibre.
- Une poulie et un fil.
- Un niveau à bulle.

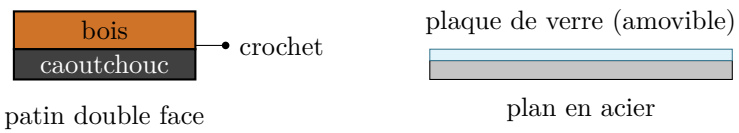


Figure 6.7 – Patin double face et surfaces de contact disponibles.

IV.2 Étude statique d'un solide sur un plan horizontal

Protocole.

- Vérifier l'horizontalité du plan inclinable avec un niveau à bulle.
- Peser le patin (M). Poser le patin sur la face étudiée, installer le fil (horizontal, dans l'axe du patin) et le porte-masse.
- Placer sur le porte-masse le nombre de masses nécessaires pour provoquer un mouvement uniforme très lent du patin. (Donner éventuellement une petite impulsion au patin pour déclencher le mouvement.)
- Renouveler cette mesure en plaçant successivement des masses additionnelles sur le patin.
- Remplir le tableau ci-dessous pour chaque couple de matériaux.

Charge du patin (g)	M	$M+50$	$M+100$	$M+120$	$M+150$
$P = Mg$ (N)					
m (g)					
$T = mg$ (N)					
T/P					

- Tracer la courbe $T = f(P)$ pour chaque couple de matériaux en contact (sur le même graphe).
- En déduire les coefficients de frottement statique μ_s (respectivement pour bois/acier, caoutchouc/acier, bois/verre, caoutchouc/verre).

△ Remarque sur la méthode

Le protocole demande la masse qui entretient un mouvement *uniforme très lent* après une petite impulsion : à strictement parler, on mesure alors plutôt le coefficient de frottement *dynamique* μ_d (légèrement inférieur à μ_s). Pour mesurer μ_s au sens strict, il faut ajouter progressivement les masses *sans impulsion* et noter la masse pour laquelle le patin se met en mouvement de lui-même. On peut faire les deux et comparer.

IV.3 Étude statique d'un solide sur un plan incliné

Protocole.

- Poser le patin (sans fil) sur le plan inclinable horizontal.
- Incliner progressivement et lentement le plan jusqu'à l'angle nécessaire pour provoquer un mouvement uniforme très lent du patin (donner éventuellement une petite impulsion). Lire l'angle α_s sur le rapporteur.
- Répéter la mesure trois fois, puis renouveler en plaçant des masses additionnelles sur le patin.

Couple	bois/acier	caout./acier	bois/verre	caout./verre
α_s (°) – patin seul				
α_s (°) – patin +100 g				
α_s moyen (°)				
$\mu_s = \tan \alpha_s$				
$\Delta\mu_s$				

V Conclusion attendue

À partir des résultats obtenus, comparer les coefficients de frottement statique μ_s obtenus par les deux méthodes (plan horizontal et plan incliné), pour chaque couple de matériaux. Discuter l'influence de la masse du patin et de la nature des surfaces.

VI Pour aller plus loin

VI.1 Le frottement dans la vie courante

- **Marche et roulement** : c'est la force de frottement statique exercée par le sol sur la semelle (ou sur le pneu) qui permet d'avancer. Sans frottement (glace), impossible de démarrer ou de tourner.
- **Freinage et ABS** : un pneu qui roule sans glisser utilise le frottement *statique* (μ_s), plus grand que le frottement dynamique (μ_d) d'un pneu bloqué qui dérape. Le système ABS empêche le blocage des roues pour conserver la meilleure adhérence et la possibilité de diriger le véhicule.
- **Distance de freinage** : roues bloquées, la décélération vaut $\mu_d g$ et la distance d'arrêt $d = v^2/(2\mu_d g)$. À 90 km/h (25 m/s) sur route sèche ($\mu_d \approx 0{,}7$), $d \approx 46$ m ; sur route mouillée ($\mu_d \approx 0{,}4$), $d \approx 80$ m.
- **Frottement utile ou nuisible** : utile pour les freins, les embrayages, les nœuds, les vis ; nuisible dans les mécanismes (usure, échauffement), d'où l'usage de lubrifiants et de roulements à billes.

VI.2 Solide sur un plan incliné tiré par un fil

Un patin de masse M est posé sur un plan incliné d'angle $\alpha < \varphi_s$ et tiré vers le haut par un fil parallèle au plan, de tension T. Selon la valeur de T, la force de frottement change de sens :

$$Mg(\sin\alpha - \mu_s \cos\alpha) \;\le\; T \;\le\; Mg(\sin\alpha + \mu_s \cos\alpha).$$

En mesurant les deux tensions limites $T_{\max}$ (le patin commence à monter) et $T_{\min}$ (il commence à descendre), on obtient

$$\mu_s = \frac{T_{\max} - T_{\min}}{2Mg\cos\alpha}, \qquad \sin\alpha = \frac{T_{\max} + T_{\min}}{2Mg},$$

ce qui constitue une troisième méthode de mesure, indépendante des deux précédentes.

Exercices

1. Démontrer l'encadrement de T ci-dessus en faisant le bilan des forces dans les deux cas limites.
2. Un livre de 1 kg est posé sur une table ($\mu_s = 0{,}4$). Quelle force horizontale minimale faut-il pour le mettre en mouvement ? Quelle est la force de frottement si l'on pousse avec 2 N ?
3. Un patin glisse à vitesse constante sur un plan incliné à 12°. Que vaut μ_d ? Pourquoi faut-il un angle plus grand pour *démarrer* le glissement ?
4. Montrer que, sur le plan horizontal, si le fil tire le patin avec un angle β au-dessus de l'horizontale, la force nécessaire est $F = \dfrac{\mu_s M g}{\cos\beta + \mu_s \sin\beta}$. Pour quel angle est-elle minimale ?

VII Corrigé type

Plan horizontal (patin $M = 300$ g, $g = 9{,}81$ m/s^2)

Charge (g)	300	350	400	420	450
P (N)	2,943	3,434	3,924	4,120	4,415
T (N) bois/acier	0,88	1,03	1,18	1,24	1,32
T (N) caoutchouc/acier	1,77	2,06	2,35	2,47	2,65
T (N) bois/verre	0,74	0,86	0,98	1,03	1,10
T (N) caoutchouc/verre	1,62	1,89	2,16	2,27	2,43

Pour chaque couple, $T = f(P)$ est une droite passant par l'origine : la force de frottement limite est proportionnelle à la force normale (loi de Coulomb), et le rapport T/P est indépendant de la masse du patin. Les pentes donnent :

Couple	bois/acier	caoutchouc/acier	bois/verre	caoutchouc/verre
μ_s (pente)	0,30	0,60	0,25	0,55
$\Delta\mu_s$	0,01	0,02	0,01	0,02

($\Delta\mu_s/\mu_s = \Delta m/m + \Delta M/M$, avec Δm = plus petite masse ajoutable, ici 5 g.)

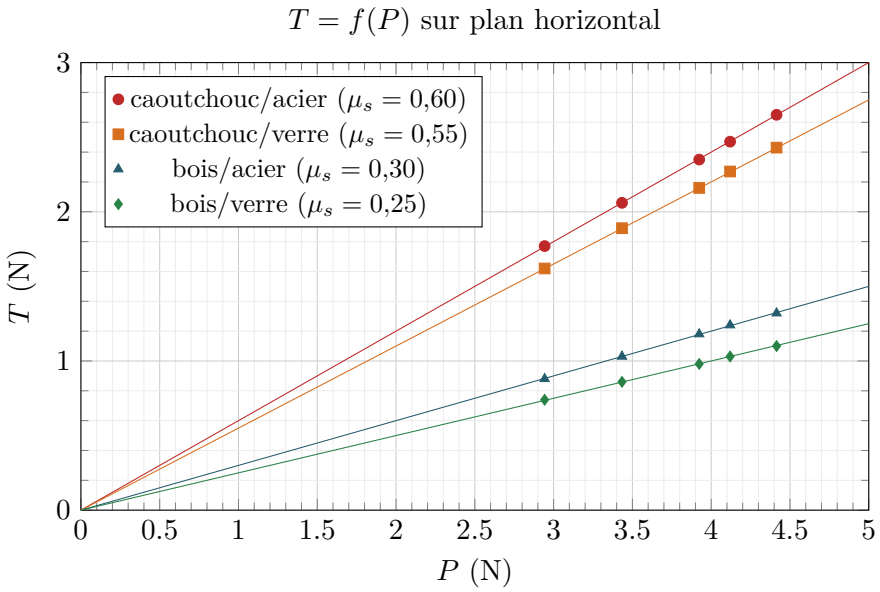


Figure 6.8 – Corrigé : tension limite T en fonction du poids P du patin pour les quatre couples de matériaux ; les pentes sont les coefficients de frottement statique.

Plan incliné

Couple	bois/acier	caoutchouc/acier	bois/verre	caoutchouc/verre
α_s patin seul (°)	16,5	31,0	14,0	29,0
α_s patin +100 g (°)	17,0	31,0	14,0	28,5
α_s moyen (°)	16,7	31,0	14,0	28,8
$\mu_s = \tan\alpha_s$	0,30	0,60	0,25	0,55
$\Delta\mu_s$	0,02	0,02	0,02	0,02

Incertitude : $\Delta\mu_s = \dfrac{\Delta\alpha}{\cos^2\alpha_s}$ avec $\Delta\alpha = 1\text{ř} = 0{,}017\,\text{rad}$; par exemple pour bois/acier : $\Delta\mu_s = 0{,}017/\cos^2(16{,}7\text{ř}) = 0{,}019$.

L'angle limite ne dépend pas de la charge du patin (aux incertitudes près) : μ_s est indépendant de la masse, conformément aux lois de Coulomb.

Conclusion – comparaison des deux méthodes

Couple	μ_s (horizontal)	μ_s (incliné)	Écart	Littérature
bois/acier	$0{,}30 \pm 0{,}01$	$0{,}30 \pm 0{,}02$	$< 2\,\%$	0,2 – 0,6
caoutchouc/acier	$0{,}60 \pm 0{,}02$	$0{,}60 \pm 0{,}02$	$< 2\,\%$	0,5 – 0,8
bois/verre	$0{,}25 \pm 0{,}01$	$0{,}25 \pm 0{,}02$	$< 2\,\%$	0,2 – 0,3
caoutchouc/verre	$0{,}55 \pm 0{,}02$	$0{,}55 \pm 0{,}02$	$< 2\,\%$	0,5 – 0,9

- Les deux méthodes donnent des valeurs compatibles pour chaque couple : elles reposent sur la même loi ($f_{\max} = \mu_s N$).

- Le caoutchouc présente des coefficients environ deux fois plus élevés que le bois : matériau plus déformable, l'aire de contact réelle et l'adhésion sont plus grandes.
- Le verre, plus lisse que l'acier, donne des coefficients légèrement plus faibles.
- Le coefficient ne dépend ni de la masse du patin ni de l'aire apparente de contact (loi de Coulomb).
- La méthode du plan incliné est plus rapide mais limitée par la lecture de l'angle (± 1ř) ; la méthode du plan horizontal est plus précise mais sensible aux frottements de la poulie et à l'horizontalité du fil.

Annexe A – Constantes et données utiles

Constantes physiques

Grandeur	Symbole	Valeur
Accélération normale de la pesanteur	g_n	$9{,}806\,65\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$ (valeur conventionnelle)
Pesanteur à Tlemcen (35° N, $\approx 800\,\mathrm{m}$)	g	$\approx 9{,}795\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$
Constante de gravitation	G	$6{,}674 \times 10^{-11}\,\mathrm{N{\cdot}m^2{\cdot}kg^{-2}}$
Masse de la Terre	M_T	$5{,}97 \times 10^{24}\,\mathrm{kg}$
Rayon moyen de la Terre	R_T	$6{,}37 \times 10^{6}\,\mathrm{m}$
Pression atmosphérique normale	p_0	$1{,}013 \times 10^{5}\,\mathrm{Pa} = 760\,\mathrm{mmHg}$
Zéro absolu	T_0	$0\,\mathrm{K} = -273{,}15\,^\circ\mathrm{C}$
Masse volumique de l'air (20 °C)	ρ_{air}	$1{,}20\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$

Variation de g avec la latitude

La pesanteur dépend de la latitude λ (rotation et aplatissement de la Terre) et de l'altitude z. Une bonne approximation est :

$$g(\lambda, z) \approx 9{,}780\,3\,\left(1 + 0{,}005\,3 \sin^2 \lambda\right) - 3{,}086 \times 10^{-6}\, z \quad (\mathrm{m/s^2},\ z \text{ en m}).$$

Lieu	Latitude	Altitude (m)	g (m/s^2)
Équateur (niveau de la mer)	0°	0	9,780
Tamanrasset	22,8° N	1 320	9,784
Alger	36,8° N	0	9,799
Tlemcen	34,9° N	800	9,795
Paris	48,8° N	60	9,809
Pôles	90°	0	9,832

Masses volumiques de quelques matériaux

Matériau	ρ (kg/m^3)	Matériau	ρ (kg/m^3)
Aluminium	2 700	Bois (chêne)	600 – 900
Acier	7 850	Verre	2 500
Laiton	8 500	Caoutchouc	1 100 – 1 200
Cuivre	8 960	PVC	1 380
Plomb	11 340	Eau (4 °C)	1 000

Conversions utiles

1 tour $= 2\pi$ rad $= 360$ř	1 rad $\approx 57{,}30$ř
1 tr/min $= 2\pi/60$ rad/s $\approx 0{,}1047$ rad/s	1 mmHg $= 133{,}3$ Pa
1 g $= 10^{-3}$ kg	1 cm^2 $= 10^{-4}$ m^2
1 km/h $= 1/3{,}6$ m/s	1 kWh $= 3{,}6 \times 10^6$ J
$T(\mathrm{K}) = \theta(\mathrm{\check{r}C}) + 273{,}15$	1 L $= 10^{-3}$ m^3

Annexe B – Formulaire de mathématiques

Trigonométrie

θ	0	$\pi/6$ (30°)	$\pi/4$ (45°)	$\pi/3$ (60°)	$\pi/2$ (90°)
$\sin\theta$	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1
$\cos\theta$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0
$\tan\theta$	0	$\sqrt{3}/3$	1	$\sqrt{3}$	–

$$\cos^2\theta+\sin^2\theta=1, \qquad \sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta, \qquad \cos 2\theta=1-2\sin^2\theta, \qquad 1+\tan^2\theta=\frac{1}{\cos^2\theta}.$$

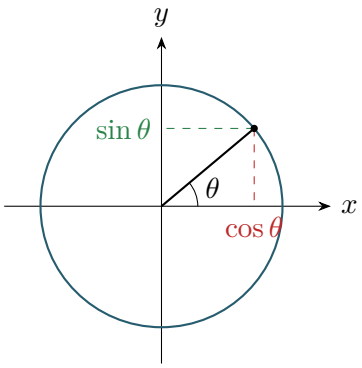


Figure 2.1 – Cercle trigonométrique.

Développements limités au voisinage de 0

$$\sin x\simeq x-\frac{x^3}{6}, \qquad \cos x\simeq 1-\frac{x^2}{2}, \qquad \tan x\simeq x+\frac{x^3}{3}, \qquad (1+x)^n\simeq 1+nx, \qquad \sqrt{1+x}\simeq 1+\frac{x}{2},$$

$$e^x\simeq 1+x+\frac{x^2}{2}, \qquad \ln(1+x)\simeq x-\frac{x^2}{2}, \qquad \frac{1}{1+x}\simeq 1-x.$$

Dérivées et primitives usuelles

$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	$\int f(x)\,\mathrm{d}x$
x^n	nx^{n-1}	x^n $(n \neq -1)$	$\dfrac{x^{n+1}}{n+1}$
$\sin(\omega x)$	$\omega\cos(\omega x)$	$1/x$	$\ln\lvert x\rvert$
$\cos(\omega x)$	$-\omega\sin(\omega x)$	$\cos x$	$\sin x$
e^{ax}	$a\,e^{ax}$	$\sin x$	$-\cos x$
$\ln x$	$1/x$	e^{ax}	e^{ax}/a
$\sqrt{x}$	$1/(2\sqrt{x})$	$1/\sqrt{x}$	$2\sqrt{x}$

Vecteurs

Produit scalaire : $\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|\cos(\vec{u},\vec{v}) = u_x v_x + u_y v_y + u_z v_z$.
Produit vectoriel : $\vec{u}\wedge\vec{v}$ est perpendiculaire à $\vec{u}$ et $\vec{v}$, de norme $\|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|\,|\sin(\vec{u},\vec{v})|$, et

$$\vec{u}\wedge\vec{v} = \begin{pmatrix} u_y v_z - u_z v_y \\ u_z v_x - u_x v_z \\ u_x v_y - u_y v_x \end{pmatrix}.$$

Règle de la main droite : $\vec{i}\wedge\vec{j} = \vec{k}$, $\vec{j}\wedge\vec{k} = \vec{i}$, $\vec{k}\wedge\vec{i} = \vec{j}$.

Coordonnées polaires

$\overrightarrow{OM} = r\,\vec{u}_r$; $\quad \vec{v} = \dot{r}\,\vec{u}_r + r\dot{\theta}\,\vec{u}_\theta$; $\quad \vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\,\vec{u}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\,\vec{u}_\theta$.

Équations différentielles

Équation	Solution générale
$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$	$x = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t) = X_m\cos(\omega_0 t + \varphi)$
$\ddot{x} = a$ (constante)	$x = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + x_0$
$\dot{x} + x/\tau = 0$	$x = x_0\,e^{-t/\tau}$

Annexe C – Formulaire de mécanique

Notion	Relation
Vitesse, accélération	$\vec{v} = \dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}, \quad \vec{a} = \dfrac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}$
MRUA	$v = at + v_0, \quad x = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + x_0, \quad v^2 - v_0^2 = 2a\Delta x$
Principe fondamental	$\sum \vec{F}_{\text{ext}} = m\vec{a}$
Poids	$\vec{P} = m\vec{g}$
Loi de Hooke	$\vec{T} = -k(\ell - \ell_0)\,\vec{u}$
Frottement solide (Coulomb)	statique $f \leq \mu_s N$; dynamique $f = \mu_d N$
Travail d'une force constante	$W = \vec{F} \cdot \overrightarrow{AB}$
Énergie cinétique	$E_c = \frac{1}{2}mv^2$ (point) ; $E_c = \frac{1}{2}mv_G^2 + \frac{1}{2}I_G\omega^2$ (solide)
Énergie potentielle	pesanteur mgz ; élastique $\frac{1}{2}kx^2$; torsion $\frac{1}{2}D\theta^2$
Théorème de l'énergie cinétique	$\Delta E_c = \sum W(\vec{F})$
Énergie mécanique	$\Delta E_m = W(\vec{F}_{\text{non conservatives}})$
Moment d'une force	$\vec{\mathcal{M}}_O = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F}$; $\quad \lvert\Gamma\rvert = Fd$
Moment cinétique	$\vec{L}_O = \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{v}$; $\quad L_z = I\omega$
Théorème du moment cinétique	$\dfrac{\mathrm{d}\vec{L}_O}{\mathrm{d}t} = \sum \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F}_{\text{ext}})$
Moment d'inertie	$I = \sum m_i r_i^2 = \int r^2 \mathrm{d}m$; Huygens : $I_\Delta = I_G + md^2$
Pendule simple	$T_0 = 2\pi\sqrt{\ell/g}$
Pendule élastique	$T_0 = 2\pi\sqrt{m/k}$
Pendule de torsion	$T_0 = 2\pi\sqrt{I/D}$
Pendule pesant	$T_0 = 2\pi\sqrt{I_\Delta/(mgd)}$
Roue de Maxwell	$a = \dfrac{g}{1 + I_z/(mr^2)}$

Annexe D – Régression linéaire avec un tableur ou Python

Avec un tableur (Excel, LibreOffice Calc)

On saisit les valeurs de x dans la colonne A (A2:A6) et celles de y dans la colonne B (B2:B6).

Grandeur	Formule
Pente b	`=PENTE(B2:B6;A2:A6)`
Ordonnée à l'origine a	`=ORDONNEE.ORIGINE(B2:B6;A2:A6)`
Coefficient de corrélation r	`=COEFFICIENT.CORRELATION(A2:A6;B2:B6)`
Pente, ordonnée et incertitudes	`=DROITEREG(B2:B6;A2:A6;VRAI;VRAI)` (formule matricielle)
Droite forcée par l'origine	`=DROITEREG(B2:B6;A2:A6;FAUX;VRAI)`

`DROITEREG` renvoie un tableau : 1re ligne b et a, 2e ligne σ_b et σ_a, 3e ligne r^2 et σ_y. Pour tracer : insérer un graphique « nuage de points (XY) », ajouter une courbe de tendance linéaire et cocher « afficher l'équation » et « afficher R^2 ».

Avec Python

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

x = np.array([65, 75, 85, 95, 105])     # P (mmHg)
y = np.array([-20, 17, 42, 94, 127])    # T (degC)
n = len(x)

Dx = n*np.sum(x**2) - np.sum(x)**2
b  = (n*np.sum(x*y) - np.sum(x)*np.sum(y)) / Dx        # pente
a  = (np.sum(x**2)*np.sum(y) - np.sum(x*y)*np.sum(x)) / Dx
S  = np.sum((y - (a + b*x))**2)
sy = np.sqrt(S/(n-2))
sa = sy*np.sqrt(np.sum(x**2)/Dx)
sb = sy*np.sqrt(n/Dx)
r  = np.corrcoef(x, y)[0, 1]
print(f"b = {b:.3f} +/- {sb:.3f}   a = {a:.1f} +/- {sa:.1f}   r = {r:.4f}")

plt.errorbar(x, y, yerr=sy, fmt='o', capsize=3, label='mesures')
xx = np.linspace(60, 110, 100)
plt.plot(xx, a + b*xx, label='droite de regression')
plt.xlabel('P (mmHg)'); plt.ylabel('T (degC)'); plt.grid(); plt.legend()
plt.show()
```

Résultat affiché : `b = 3.710 +/- 0.211 a = -263.4 +/- 18.2 r = 0.9952`, identique au corrigé du TP 01.

Avec une calculatrice scientifique

Mode **STAT** $\rightarrow$ type **A+BX** (régression linéaire) ; saisir les couples (x_i, y_i) ; puis dans le menu **REG** lire A (ordonnée à l'origine), B (pente) et r. Les incertitudes σ_a, σ_b doivent ensuite être calculées à la main à partir de $\sum x$, $\sum x^2$ et S.

Annexe E – Modèle de compte rendu et grille d'évaluation

Modèle de compte rendu

TP n° ____ : _____ Date : _____

Binôme : _____ et _____ Groupe : _____

1. But de la manipulation

2. Rappels théoriques (formules utilisées, démonstrations demandées)

3. Schéma du montage (annoté)

4. Mesures (tableaux avec unités et incertitudes)

5. Exploitation (graphes, calculs, résultats encadrés $X = (X_0 \pm \Delta X)$ unité)

6. Discussion (comparaison avec la théorie, sources d'erreurs, améliorations)

7. Conclusion

Grille d'évaluation indicative (sur 20)

Critère	Barème	Note
Préparation (questions préliminaires, lecture du TP)	2	
Présentation générale, soin, clarté	2	
Rappels théoriques et démonstrations	3	
Tableaux de mesures (unités, incertitudes)	3	
Graphes (titre, axes, échelle, rectangles d'erreur, droites)	4	
Exploitation et calcul d'incertitudes, écriture des résultats	4	
Discussion critique et conclusion	2	
Total	**20**	

Barème détaillé du TP 01 (à titre d'exemple)

Élément	Points
Présentation du TP	2
Rectangles d'erreur (10 pts)	
Axes avec unités	0,25 + 0,25
Échelle avec unités	0,5 + 0,5
Titre de la courbe	0,5
Points expérimentaux et rectangles d'erreur	2
Droites de pente maximale et minimale	1 + 1
$P_{\min}$ et $P_{\max}$ avec unités	1 + 1
Pente moyenne et incertitude avec unités	0,5 + 0,5
Signification physique de la pente	1
Régression linéaire (8 pts)	
Graphe (axes, échelle, titre, points, segments d'erreur, droite)	4
Pente et ordonnée à l'origine avec unités	1 + 1
σ_y, σ_a, σ_b, r	4 × 0,5

Annexe F – Fiches de mesures

Ces fiches peuvent être photocopiées et remplies pendant la séance, puis jointes au compte rendu.

Fiche TP 01 – Mesures et incertitudes

Binôme : _____ Groupe : _____

Application 1 : $P_{\min}$ = _____ $P_{\max}$ = _____ P = (_____ ± _____)

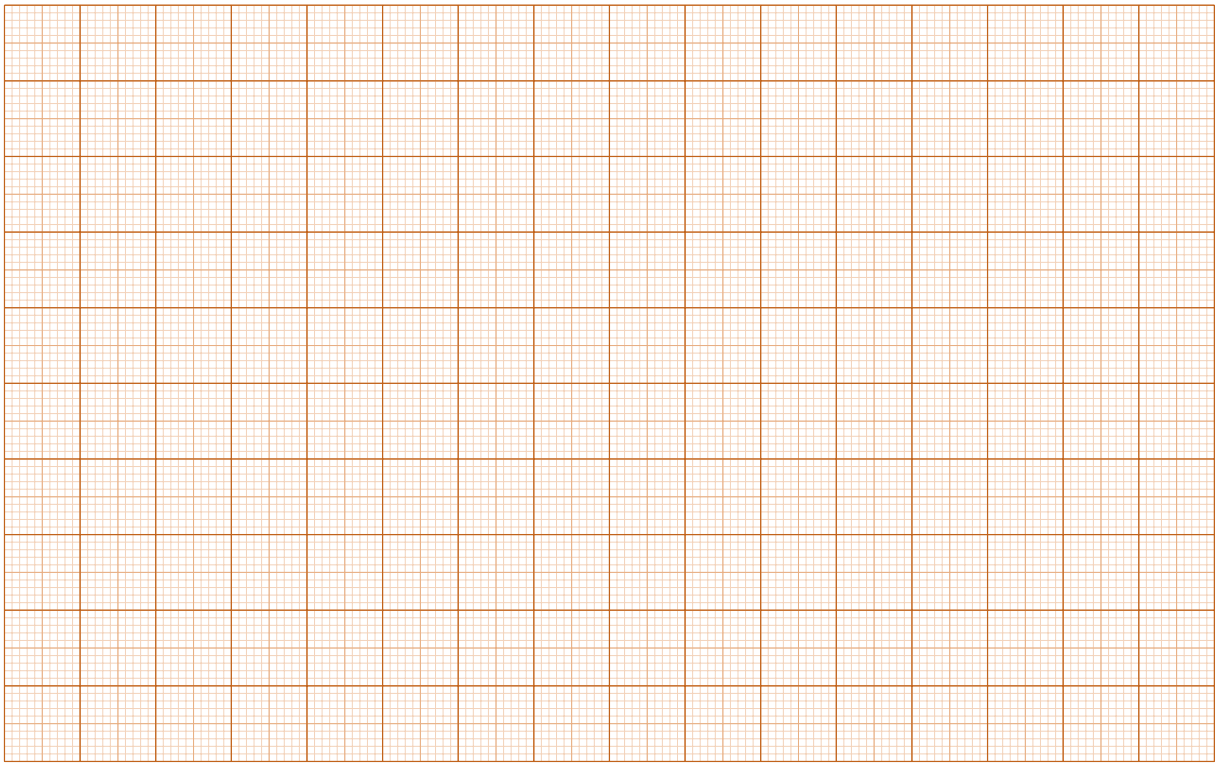
_____

Application 2 :

x_i	y_i	x_i^2	y_i^2	$x_i y_i$	$e_i^2 = (y_i - a - bx_i)^2$
$\Sigma =$	$\Sigma =$	$\Sigma =$	$\Sigma =$	$\Sigma =$	$S =$

b = _____ a = _____ σ_y = _____ σ_a = _____ σ_b = _____

r = _____



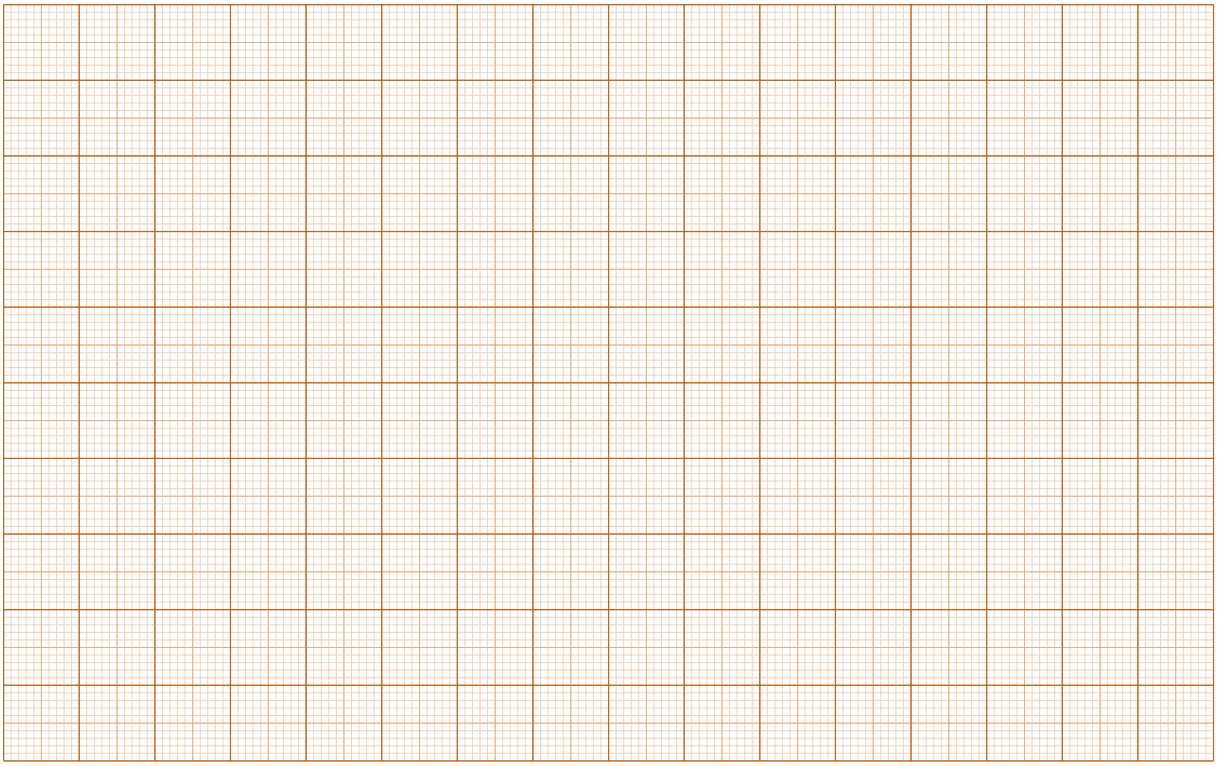
Fiche TP 02 – Pendule simple et pendule élastique

θ_0 (°)	60	50	20	10	6
$10\,T$ (s)					
T (s)					

L (m)					
$10\,T$ (s)					
T (s)					
T^2 (s^2)					
ΔT^2 (s^2)					

m (g)				
L (m) (statique)				
$10\,T$ (s) (dynamique)				
T^2 (s^2)				

$g = (\ _____ \pm _____\ )\,\mathrm{m/s^2}$ $k_{\mathrm{stat}} = (\ _____ \pm _____\ )\,\mathrm{N/m}$ $k_{\mathrm{dyn}} = (\ _____ \pm _____\ )\,\mathrm{N/m}$



Fiche TP 03 – Plan incliné

Étude statique : M = _____ α = _____ M' = _____ $P\sin\alpha$ = _____ T = _____ R = _____

x (m)	0,30	0,50	0,70	0,80
t_1 / t_2 / t_3 (s)				
t_{moy} (s)				
t^2 (s^2)				

h (cm)				
$\sin\alpha$				
t (s)				
$1/t^2$ (s^{-2})				

a_{exp} = (_____ ± _____) a_{th} = (_____ ± _____) g = (_____ ± _____)

Fiche TP 04 – Moment d'inertie

θ (rad)	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π	$5\pi/2$	3π
F (N)						
M (N·m)						

r (cm)	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30
T (s)										
T^2 (s^2)										

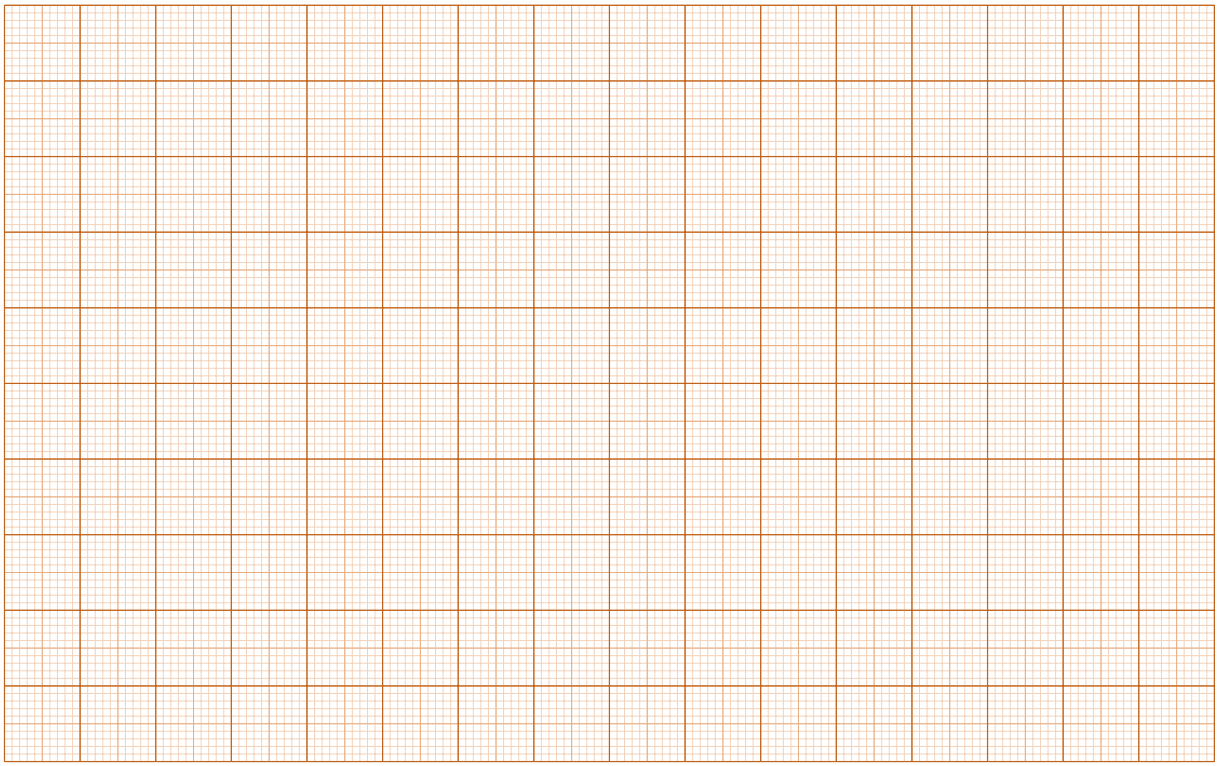
Solide	Disque	Cyl. plein	Cyl. creux	Sphère
T (s)				
I_{exp} (kg·m^2)				
I_{th} (kg·m^2)				

$D_{\text{stat}} = (\quad _____ \pm _____ \quad)$ $D_{\text{dyn}} = (\quad _____ \pm _____ \quad)$ $I_0 = _____$

Fiche TP 05 – Roue de Maxwell

ℓ (m)							
t_{moy} (s)							
t^2 (s^2)							
$\ln \ell$ / $\ln t$							
Δt_{moy} (s)							
v (m/s)							
E_p (J)							
E_t (J)							
E_r (J)							
E_{tot} (J)							

$k =$ _____ $\alpha =$ _____ $a =$ (_____ $\pm$ _____) $I_z =$ (_____ $\pm$ _____)

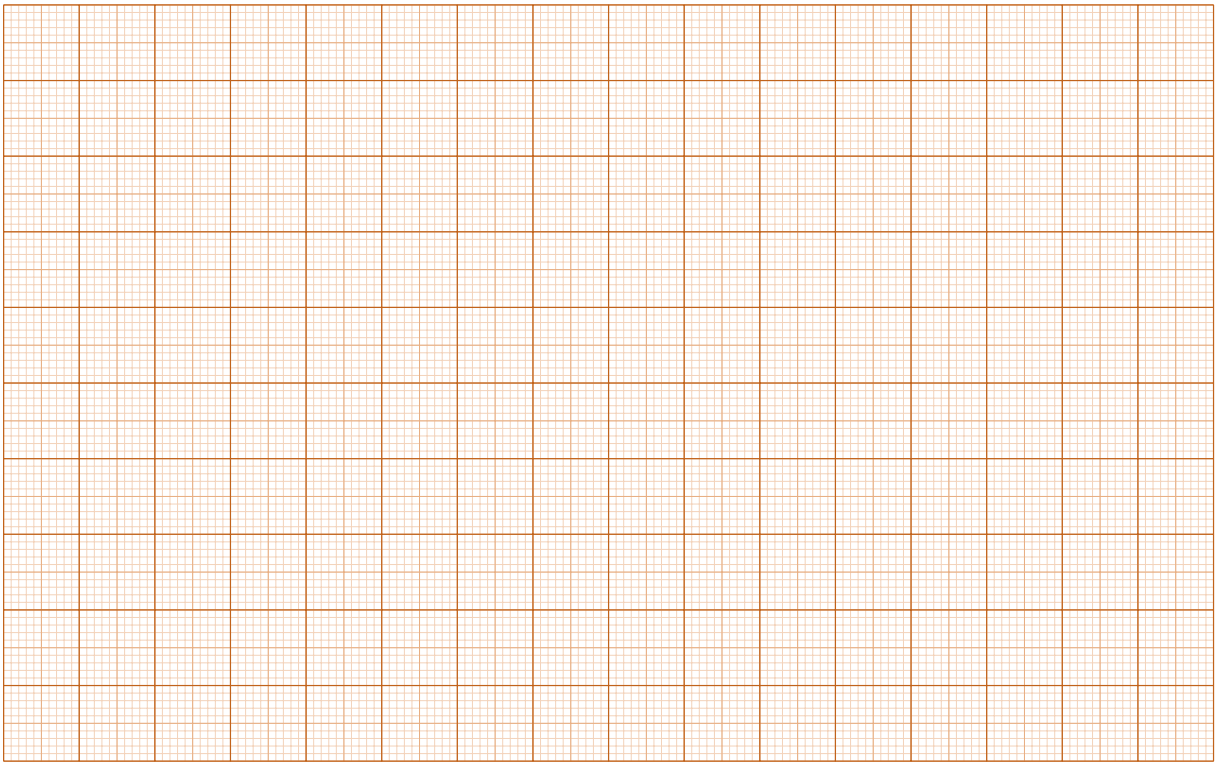


Fiche TP 06 – Frottement statique

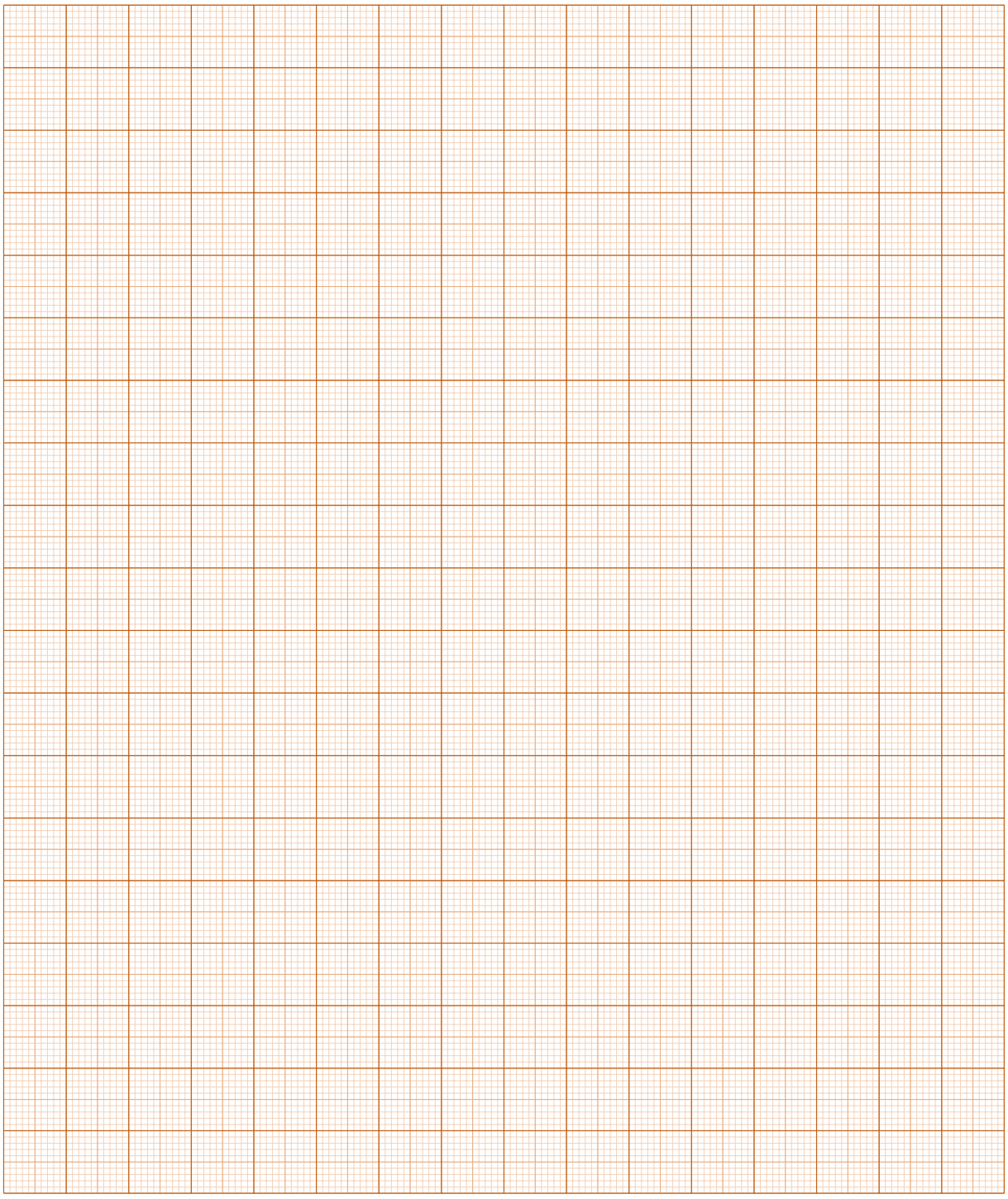
Masse du patin $M =$ _____

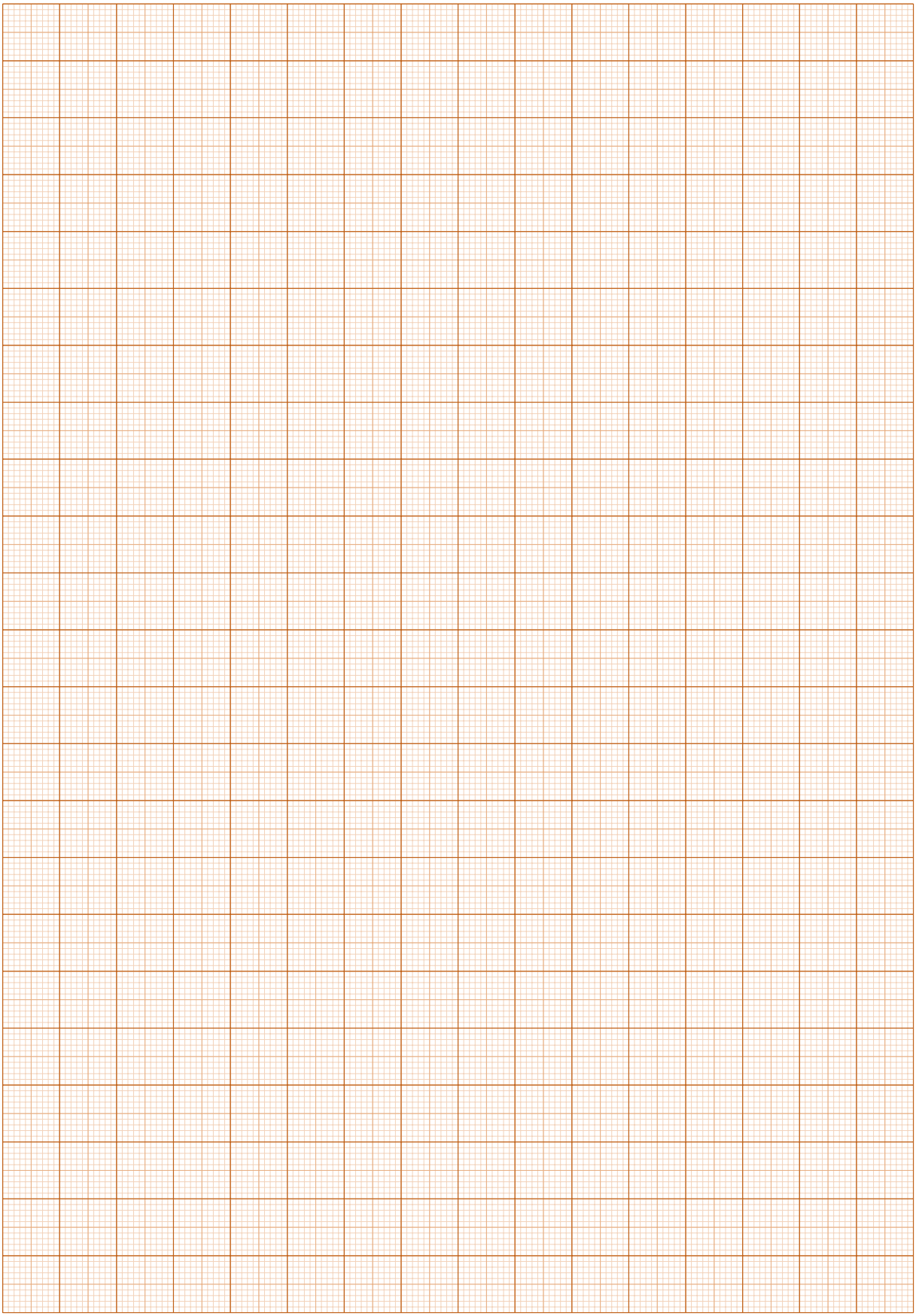
Charge (g)	M	$M+50$	$M+100$	$M+120$	$M+150$
P (N)					
T (N) bois/acier					
T (N) caoutchouc/acier					
T (N) bois/verre					
T (N) caoutchouc/verre					

Couple	bois/acier	caout./acier	bois/verre	caout./verre
α_s (°)				
μ_s (incliné)				
μ_s (horizontal)				



Annexe G – Papier millimétré





Bibliographie

[1] J.-P. Pérez, *Mécanique : fondements et applications*, Dunod.

[2] M. Alonso, E. J. Finn, *Physique générale, tome 1 : Mécanique et thermodynamique*, Dunod.

[3] D. Halliday, R. Resnick, J. Walker, *Fundamentals of Physics*, Wiley.

[4] H. Benson, *Physique 1 : Mécanique*, De Boeck.

[5] J. R. Taylor, *Incertitudes et analyse des erreurs dans les mesures physiques*, Dunod.

[6] Bureau International des Poids et Mesures, *Évaluation des données de mesure – Guide pour l'expression de l'incertitude de mesure (GUM)*, JCGM 100:2008.

[7] Bureau International des Poids et Mesures, *Le Système international d'unités (SI)*, 9e édition, 2019.

[8] Notices techniques des dispositifs expérimentaux PHYWE : pendule de torsion, roue de Maxwell, plan incliné.