Exercices Résolus en Electrostatique

Rafik Benallal

ESSA
Tlemcen-تلمسان

Exercices Résolus en Electrostatique

Rafik Benallal

Une ignorance parfaitement consciente est le prélude à tout véritable progrès scientifique.

James Clerk Maxwell.

Avant-propos

Cet ouvrage qui détaille, un tant soit peu, l'électrostatique s'adresse aux étudiants de première année des classes préparatoires, il respecte une partie du programme en vue de préparer le concours des grandes écoles d'ingénieurs.

Ce polycopié fournit, à l'étudiant, la résolution des exercices dispensés à l'école supérieure en sciences appliquées de Tlemcen. Il permettra à l'étudiant de s'initier aux méthodes de résolution fondamentales en électrostatique afin d'entamer le monde électrique avec plus de sérénité.

L'électrostatique, ou l'électricité en général, reste un des domaines les plus vastes des sciences fondamentales. Dans ce document, un éventail d'exercices est présenté, mettant en œuvre des méthodes de résolution importante ou classique.

Enfin nous tenons à signaler que nous ne négligerons pas les remarques ni les commentaires signalant des erreurs éventuelles, quelles soient de fond ou d'écriture.

Table des matières

1. Charge ponctuelle

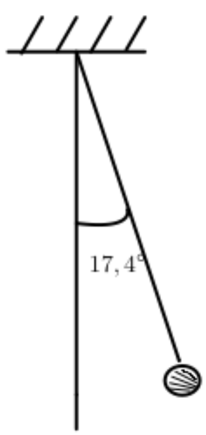
1.1 Exercices

Exercice 1

Une charge ponctuelle $q = -8\ nC$ est localisée à l'origine O. Trouver le champ électrique $\vec{E}$ au point P ($x = 1,2\,m\,; y = -1,6\,m$).

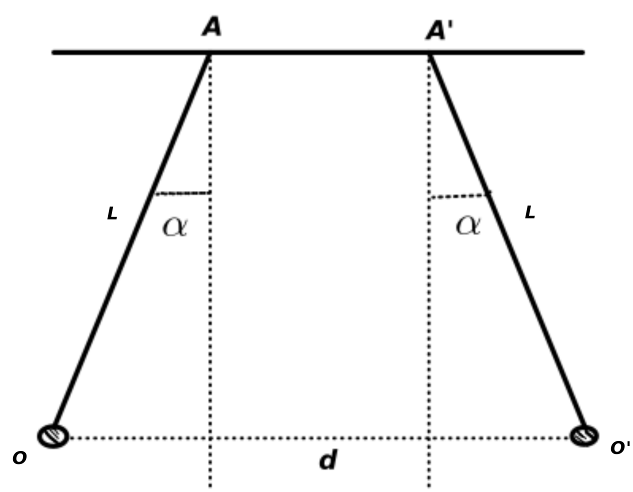
Exercice 2

Une petite balle en plastique de masse $m = 12,3$ grammes est reliée à un fil de $28,6$ centimètres. Un champ électrique uniforme existe dans la pièce où se trouve la balle. Quand on charge la balle de $-1,11\mu C$, on remarque que la balle reste suspendu faisant un angle de 17,4 ° avec la verticale. Calculer le vecteur champ électrique qui existe dans la pièce.



Exercice 3

Soient deux pendules électriques, formés de deux boules de masses m, suspendues par des fils de soie de longueurs L, aux points A et A'. Les deux boules portent une charge identique q que l'on considérera comme étant ponctuelle. Les deux pendules s'écartent d'un même angle α, comme indiquée sur la figure suivante :



1. Pourquoi ces masses s'écartent d'un même angle α ? Expliquer.
2. Déterminer la valeur de la charge q.
3. Si la charge q est négative, représenter le vecteur champ électrique créé par ce système en un point M se trouvant au milieu du segment de droite AA' et calculer son intensité.

On donne : L =10 cm ; m =1g ; OO' =d = 7 cm ; $b = AA' = 5$ cm.

Exercice 4

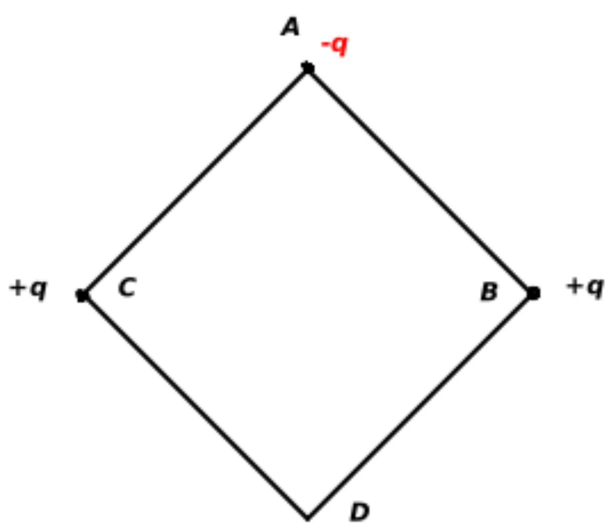
Soient quatre charges ponctuelles $q > 0$ identiques situées sur les sommets d'un carré d'arête a dans le plan Oxy.

1. Montrer sans calcul que le champ électrique créé en un point z sur la droite perpendiculaire à la surface du carré et passant par son centre est dirigé suivant l'axe z.
2. Donner le module du champ électrique et écrire l'expression du champ électrique.
3. Quelle serait l'expression du champ électrique si les deux charges sur la diagonale du carré étaient négatives alors que les deux autres charges positives (toutes de même valeur absolue).

Exercice 5

Des charges ponctuelles occupent les sommets, A, B et C d'un carré de côté a, comme indiqué sur la figure ci dessous (absence de charge en D).

1. Représenter graphiquement et calculer le champ électrique produit par les trois charges au sommet D.
2. Calculer le potentiel produit en D
3. On place, à présent, une charge $+2q$ au point D, calculer la force électrique exercée par les autres charges sur cette charge.
4. Calculer l'énergie potentielle de la charge $+2q$.



1.2 Solutions

Exercice 1

Le point P se trouve à une distance $r = \sqrt{x^2 + y^2} = 2\ m$,
le vecteur unitaire de cette distance est $\hat{r} = \frac{\vec{r}}{r}$

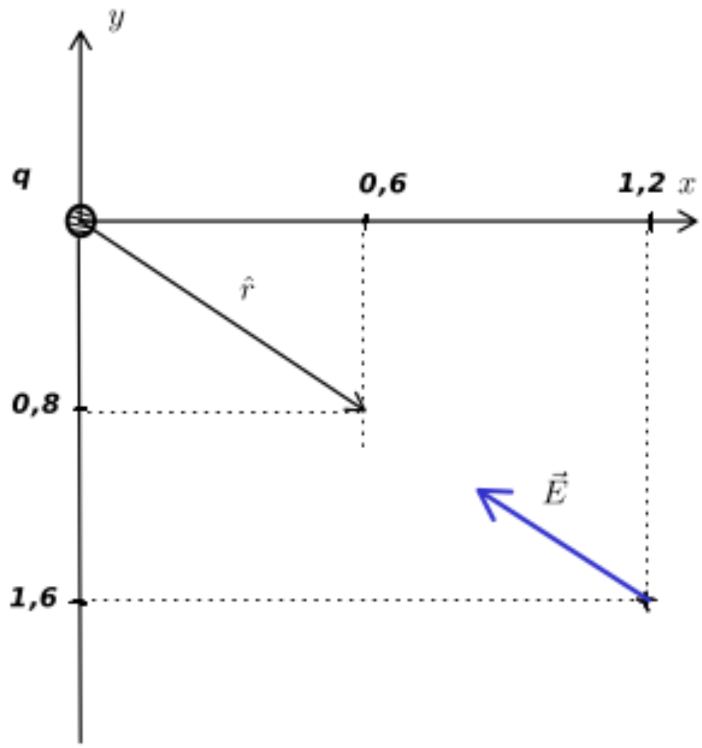
$$\hat{r} = \frac{x\vec{i} + y\vec{j}}{r} = \frac{1,2\vec{i} - 1,6\vec{j}}{2} = 0,6\vec{i} - 0,8\vec{j}$$

Cela nous indique la direction et le sens du vecteur position $\vec{r}$.
Le champ électrique sera alors ;

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi.\varepsilon_0 r^2}\hat{r} = 9 \times 10^9 \frac{-8 \times 10^{-9}}{2^2} = -11\vec{i} + 14\vec{j}\ N/C$$

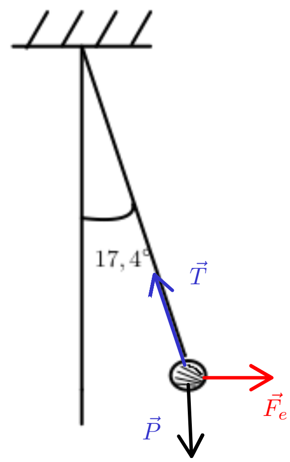
avec

$$\frac{1}{4\pi.\varepsilon_0} = 9 \times 10^9\ N.m^2/C^2$$



Exercice 2

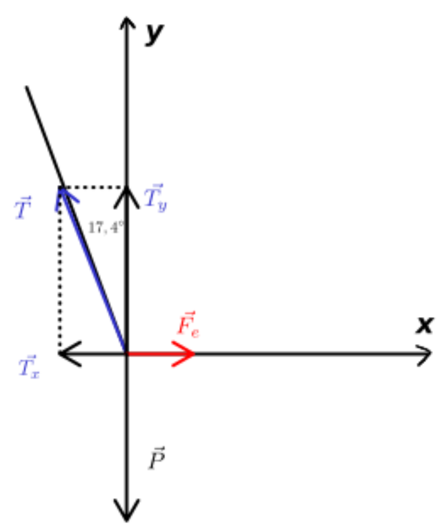
Pour déterminer le champ électrique existant, on doit tout d'abord expliquer la suspension de la balle faisant un angle de 17,4 ° avec la verticale.



La suspension de la balle est due à l'équilibre des forces qui agissent sur celle-ci.

$$\vec{T} + \vec{P} + \vec{F_e} = \vec{0}$$

En procédant à la projection des forces sur l'axe des x et l'axe des y ;



$$F_e = T \sin 17,4^\circ$$
$$P = T \cos 17,4^\circ$$

Avec

$$T = \frac{F_e}{\sin 17,4^\circ}$$

et

$$T = \frac{P}{\cos 17,4^\circ}$$

Donc

$$F_e = mg \tan 17,4^\circ$$

On sait aussi que la force électrique est égale à $\vec{F_e} = q\vec{E}$
On peut alors déduire que

$$\vec{E} = \frac{mg}{q} \tan 17,4^\circ \vec{i} = -\frac{37,81 \times 10^{-3}}{1,11 \times 10^{-6}} \vec{i}$$

$$\vec{E} = -34,06.10^3 \vec{i} \; (N/C)$$

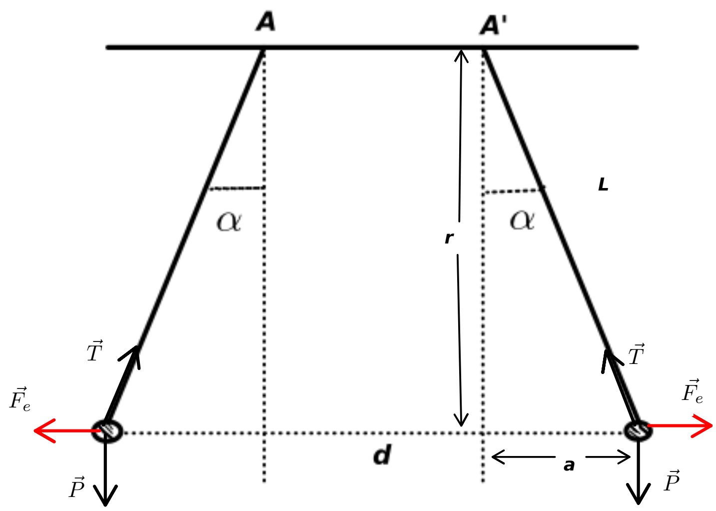
Exercice 3

1. Les masses ont une charge identique, elles s'écartent d'un angle identique α, compte tenu du fait que $m_1 = m_2$. Chaque masse chargée va interagir avec l'autre masse chargée par répulsion (même charge sur les deux masses).

$$\vec{F}_{e1/2} = -\vec{F}_{e2/1}$$

Et chaque masse sera soumise aux forces suivantes ;

$$\vec{T} + \vec{P} + \vec{F}_e = \vec{0}$$



En projetant les forces sur les axes x et y ;

$$F_e = T \sin\alpha$$

$$P = T \cos\alpha$$

Donc

$$F_e = mg \tan\alpha$$

2. Sachant que

$$\tan\alpha = \frac{a}{r} = \frac{\frac{d-AA'}{2}}{\sqrt{L^2 - \left(\frac{d-AA'}{2}\right)^2}} = 0,1$$

Avec $\quad L^2 = r^2 + a^2$

$$\Rightarrow \alpha = \arctan 0,1 = 5,71°$$

On peut déduire la valeur de la force électrique ;

$$F_e = mg \tan\alpha = 10^{-3} \times 9,81 \times 0,1 = 9,81 \times 10^{-4} \quad N$$

Le champ électrique a pour relation ;

$$E = K\frac{q}{d^2}$$

d représente la distance qui sépare les deux masses car chaque masse chargée va générer un champ électrique à la position d. Et

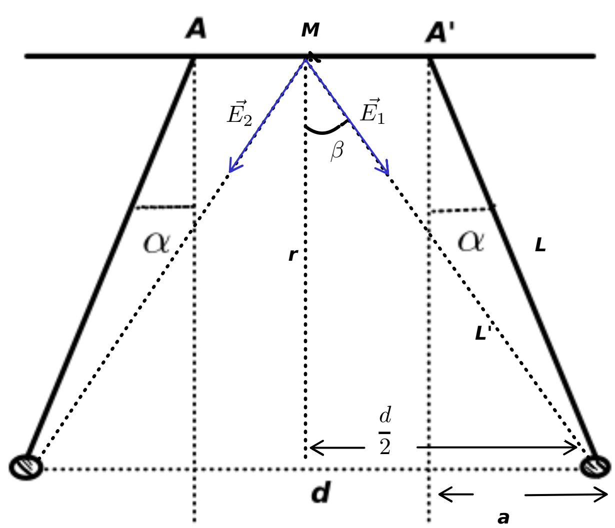
$$F_e = q.E$$

Alors on obtient la charge électrique portée par la masse ;

$$q = \frac{F_e}{E} \Rightarrow q^2 = \frac{F_e.d^2}{K} \Rightarrow q = \sqrt{\frac{F_e.d^2}{K}}$$

$$q = \sqrt{\frac{9,81 \times 10^{-4} \times (7 \times 10^{-2})^2}{9 \times 10^9}} = 2,31 \times 10^{-8}\ C$$

3. Chaque masse chargée va produire un champ électrique au point M distant de L'. Ces charges sont négatives, cela va induire des champs électrostatiques convergents, i.e. qui pointeront vers leurs charges respectives.



Le champ électrique total généré au point M ($\vec{E}$) peut être écrit sous la forme suivante ;

$$\vec{E} = \vec{E_x} + \vec{E_y}$$

Avec

$$\vec{E_x} = \vec{E}_{x1} + \vec{E}_{x2}$$

Et

$$\vec{E_y} = \vec{E}_{y1} + \vec{E}_{y2}$$

Sachant que les normes des champs électriques sont égales $E_1 = E_2$, car les deux masses portent une charge identique et se trouvent à une distance L' identique de M.

Suivant l'axe des x ;

$$\vec{E}_x = E_1 \sin\beta\vec{i} - E_2 \sin\beta\vec{i} = \vec{0}$$

On constate que sur l'axe des x, le champ résultant est nul.

Suivant l'axe des y ;

$$\vec{E}_y = \vec{E}_{y1} + \vec{E}_{y2} = -2E_1 \cos\beta\vec{j}$$

Car

$$\vec{E}_{y1} = \vec{E}_{y2} = -E_1 \cos\beta\vec{j} = -E_2 \cos\beta\vec{j}$$

La norme des champs électrique est ;

$$E_1 = E_2 = K\frac{q}{L'^2}$$

Donc

$$\vec{E}_{y1} = \vec{E}_{y2} = -K\frac{q}{L'^2}\cos\beta\vec{j}$$

Avec

$$L'^2 = r^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2$$

Et puisque

$$r = L\cos\alpha$$

Donc

$$L'^2 = (L\cos\alpha)^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2$$

Avec $\alpha = 5,71°$, on obtient $L' = 0,105\ m$.
Et

$$\cos\beta = \frac{r}{L'} = \frac{L\cos\alpha}{L'}$$

Alors

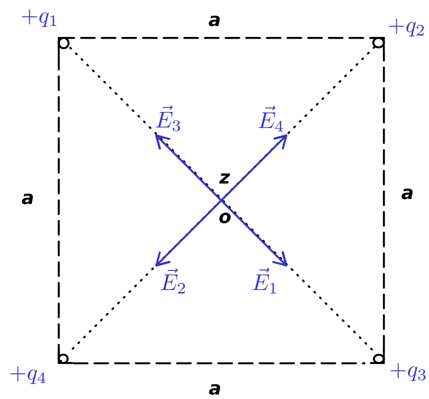
$$E_1 = E_2 = K\frac{q}{L'^2} = 9\times10^9\frac{2,31\times10^{-8}}{0,0111} = 18,729\times10^3\ N/C$$

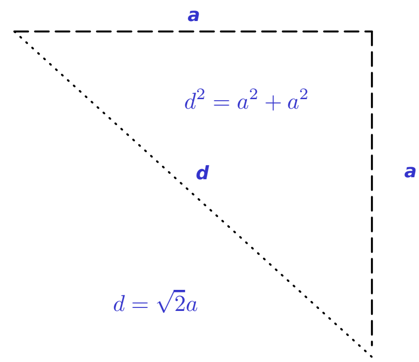
et le champ électrique total sera ;

$$\vec{E} = -2E_1\cos\beta\vec{j} = -2\times18,729\times10^3\frac{10^{-1}\cos 5,71°}{0,105} = -35910\vec{j}(N/C)$$

Exercice 4

1. Sur le plan (x,y), on peut constater que les champs électriques des charges, placées aux quatre coins du carré, vont s'annuler. Sachant que les normes $E_1 = E_2 = E_3 = E_4$ (même charge et même distance r).





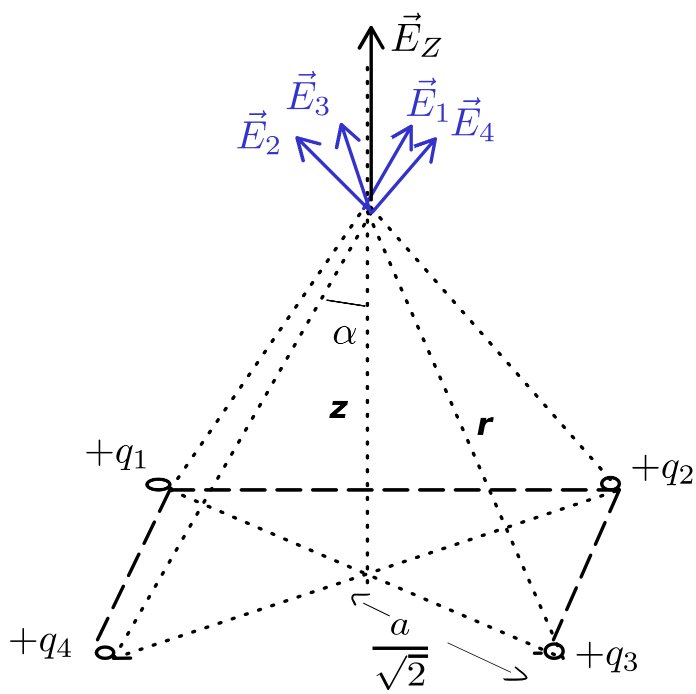
Sur l'axe des x, on aura ;

$$\vec{E}_x = E_{x1}\vec{\imath} + E_{x4}\vec{\imath} - E_{x2}\vec{\imath} - E_{x3}\vec{\imath} = \vec{0}$$

De même, sur l'axe des y ;

$$\vec{E}_y = -E_{y1}\vec{\jmath} - E_{y2}\vec{\jmath} + E_{y3}\vec{\jmath} + E_{y4}\vec{\jmath} = \vec{0}$$

En faisant pivoter notre carré, on peut voir que le champ électrique suivant l'axe des z ne s'annule pas.



Donc le champ résultant ne peut être que suivant l'axe des z.

$$\vec{E} = E_z\vec{k} = 4E_{z1}\vec{k}$$

2. Le champ électrique de la charge $+q_1$ va s'écrire ;

$$E_1 = K\frac{q_1}{r^2}$$

avec

$$r = \frac{z}{\cos\alpha}$$

Et aussi

$$r^2 = z^2 + \left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2$$

On peut donc écrire

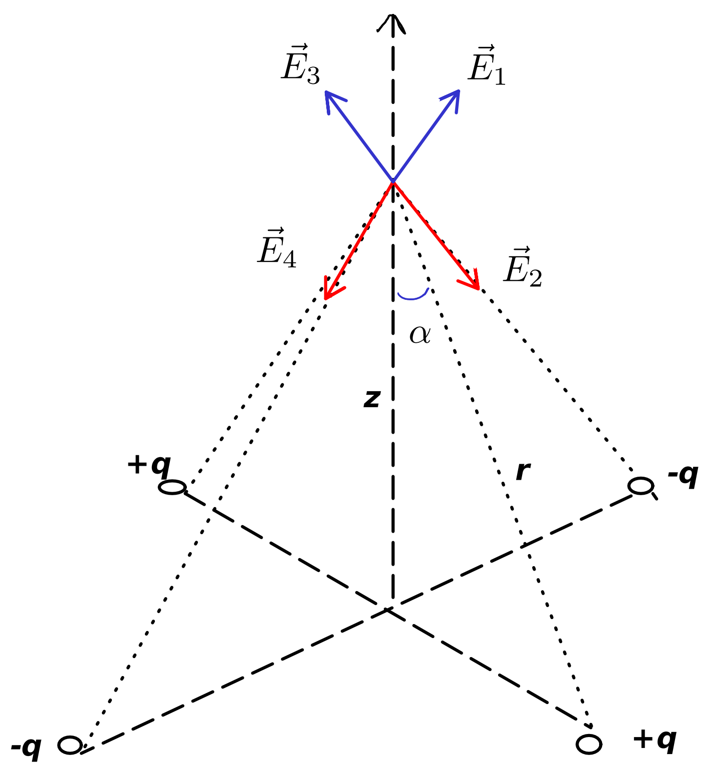
$$\cos\alpha = \frac{z}{\sqrt{z^2 + \frac{a^2}{2}}}$$

$$E_{z1} = E_1\cos\alpha = K\frac{q}{r^2}\frac{z}{\sqrt{z^2 + \frac{a^2}{2}}} = Kq\frac{z}{\left(z^2 + \frac{a^2}{2}\right)^{\frac{3}{2}}}$$

Et donc le champ total aura l'expression suivante ;

$$\vec{E} = \vec{E}_z = 4Kq\frac{z}{\left(z^2 + \frac{a^2}{2}\right)^{\frac{3}{2}}}\vec{k}$$

3. L'expression du champ électrique si les deux charges sur la diagonale du carré seraient négatives alors que les deux autres charges positives ;



$$\vec{E}_z^{+} = +2Kq\frac{z}{\left(z^2 + \frac{a^2}{2}\right)^{\frac{3}{2}}}\vec{k}$$

$$\vec{E}_z^{-} = -2Kq\frac{z}{\left(z^2 + \frac{a^2}{2}\right)^{\frac{3}{2}}}\vec{k}$$

Donc

$$\vec{E}_z = \vec{E}_z^+ + \vec{E}_z^- = \vec{0}$$

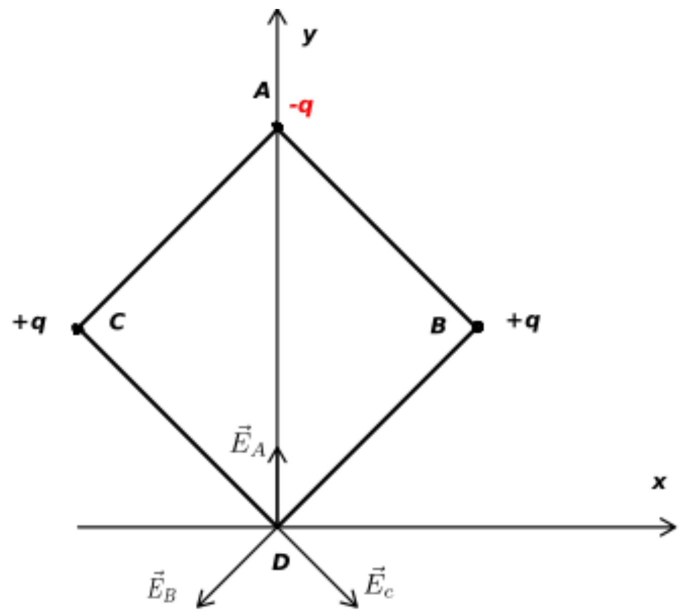
avec $|q_1| = |q_2| = |q_3| = |q_4| = q$

Exercice 5

1. La norme du champ électrique, en général, s'écrit comme suite :

$$E = K\frac{|Q|}{r^2}$$

Sachant que la norme d'un vecteur ne peut pas être négative !



$\vec{E}_A$, $\vec{E}_B$ et $\vec{E}_C$ représentent les champs électriques générés par les charges se trouvant en A, B et C au point D. En prenant compte du signe des charges impliquées, on peut écrire ;

$$\vec{E}_A = K\frac{|q_A|}{r_A^2}\vec{j}$$

Ici, le champ électrique étant un vecteur, on doit associer à la norme, qui est toujours positive, le vecteur unitaire qui nous indique la direction et le sens du vecteur $\vec{E}$. Le calcul des distances, en utilisant Pythagore, se fait de la manière suivante ;

$$r_A^2 = a^2 + a^2 = 2a^2$$

$$\Rightarrow r_A = \sqrt{2}a$$

$$r_B = r_C = a$$

Sachant que les distances $AB = AC = CD = BD = a$

Le calcul du champ électrique total créé en D sera ;

$$\vec{E}_D = \vec{E}_A + \vec{E}_B + \vec{E}_C$$

Et c'est aussi

$$\vec{E}_D = \vec{E}_{xD} + \vec{E}_{yD}$$

On pose α, l'angle entre le champ $\vec{E}_B$ et l'axe des x (de même pour $\vec{E}_C$ qui est perpendiculaire à $\vec{E}_B$ et donc a le même angle avec l'axe des x).

$$\vec{E}_{xD} = \vec{E}_{xA} + \vec{E}_{xB} + \vec{E}_{xC} = 0.\vec{i} - E_B \cos\alpha\vec{i} + E_C \cos\alpha\vec{i} = \vec{0}$$

Avec

$$E_B = E_C$$

$$K\frac{|q_B|}{a^2} = K\frac{|q_C|}{a^2}$$

Car $|q_B| = |q_C| = q$, avec $q > 0$.
La composante du champ électrique suivant l'axe des y s'écrit ;

$$\vec{E}_{yD} = \vec{E}_{yA} + \vec{E}_{yB} + \vec{E}_{yC} = K\frac{|q_A|}{r_A^2}\vec{j} - E_B \sin\alpha\vec{j} - E_c \sin\alpha\vec{j} = K\frac{|q_A|}{r_A^2}\vec{j} - 2E_B \sin\alpha\vec{j}$$

Et puisque $\vec{E}_B \perp \vec{E}_C$ donc $90° + 2\alpha = 180° \Rightarrow \alpha = 45°$

$$\vec{E}_{yD} = K\frac{|q_A|}{r_A^2}\vec{j} - \frac{2}{\sqrt{2}}E_B\vec{j} = K\frac{q}{2a^2}\vec{j} - \sqrt{2}K\frac{q}{a^2}\vec{j}$$

$$\Rightarrow \vec{E}_D = K\frac{q}{a^2}\left(\frac{1}{2} - \sqrt{2}\right)\vec{j}$$

2. Le potentiel produit au point D est ;

$$V_D = V_A + V_B + V_C$$

Avec V_A, V_B et V_C sont les potentiels au point D générés par les charges se trouvant aux points A, B et C respectivement.

$$V_D = K\left(-\frac{q}{\sqrt{2}a} + \frac{q}{a} + \frac{q}{a}\right) = \frac{Kq}{a}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + 2\right)$$

$$V_D = 1,29K\frac{q}{a}$$

3. La force électrique totale qui est agit sur la charge $Q = +2q$, placée en D, est ;

$$\vec{F}_{eD} = \vec{F}_{eA/D} + \vec{F}_{eB/D} + \vec{F}_{eC/D}$$

mais c'est aussi ;

$$\vec{F}_{eD} = 2q.\vec{E}_D$$

Le champ électrique généré au point D a été obtenu en 1.
On déduit la force électrique comme étant sous la forme suivante ;

$$\vec{F}_{eD} = -1,828K\frac{q^2}{a^2}\vec{j}$$

4. L'énergie potentielle de la charge $+2q$ placée au point D est ;

$$E_p = Q.V_D = 2q.V_D = -2,6K\frac{q^2}{a}$$

2. Distribution continue de charges

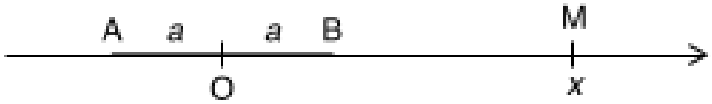
2.1 Exercices

Exercice 1

Une tige AB supposée filiforme, porte une densité linéique de charges λ. Sa longueur est égale $2a$. Calculer le champ électrique créé en tout point M d'un axe orthogonal à AB passant par son milieu O. La distance OM sera notée x.

Exercice 2

On considère la même tige AB que dans l'exercice précédent. Calculer le champ électrique créé en tout point M de l'axe contenant la tige AB, le point O correspondant au milieu de la tige. La distance OM sera notée x et on supposera que $x > a$.

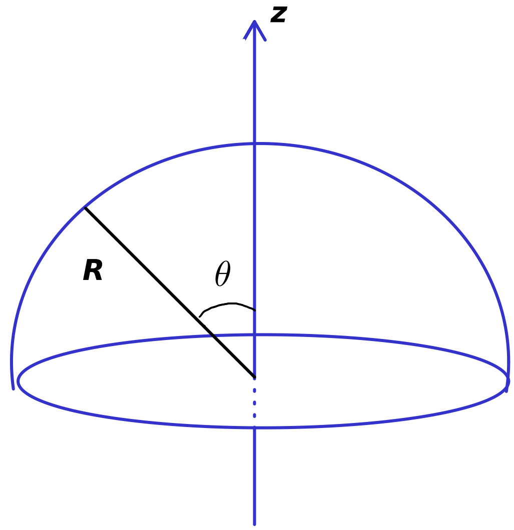


Exercice 3

Soit une demi-sphère de centre O et de rayon R.

a. Exprimer le champ électrostatique au centre O si la demi-sphère est chargée uniformément en surface avec la densité $\sigma < 0$.

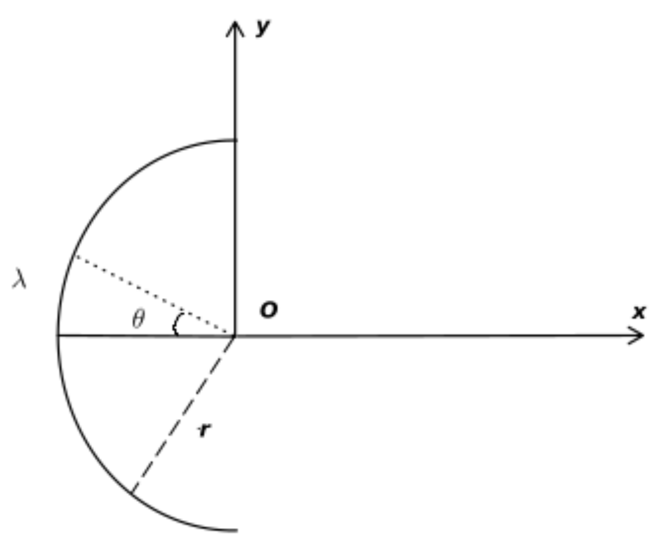
b. Exprimer le champ électrostatique au centre O si la demi-sphère est chargée uniformément sur tout le volume avec la densité $\rho > 0$.



Exercice 4

Un anneau circulaire, de rayon r est placé dans le plan xOy, on charge uniformément une partie de l'anneau à savoir de $\theta = \pi/2$ à $\theta = -\pi/2$, avec une densité linéique.

1. Donner l'expression du champ électrostatique au centre O si la partie de l'anneau est chargée uniformément avec une densité linéique $\lambda > 0$ de $\theta = \pi/2$ à $\theta = -\pi/2$. Faites un schéma.



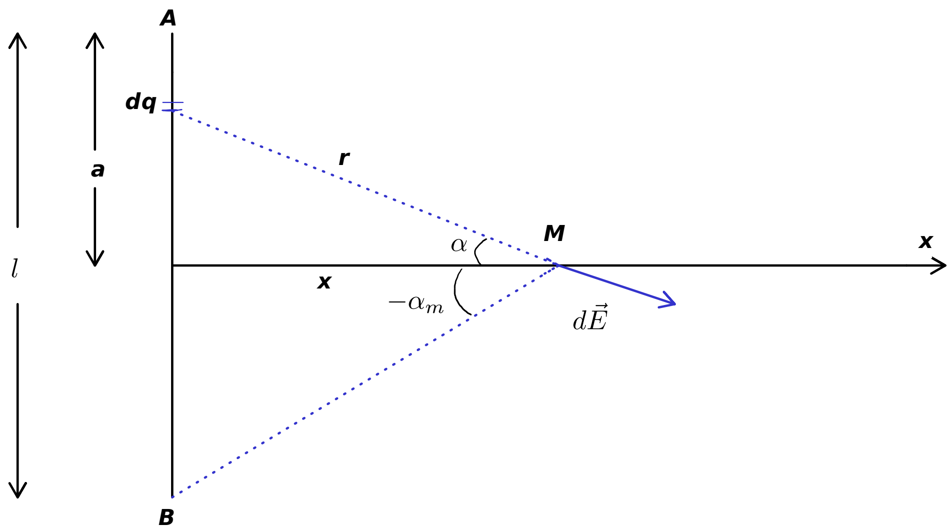
2. Donner l'expression du champ électrostatique au centre O si la partie de l'anneau est chargée uniformément avec une densité linéique positive λ^+ de $\theta = \pi/2$ à $\theta = 0$ et d'une densité linéique négative λ^- de $\theta = 0$ à $\theta = -\pi/2$, de telle sorte que $|\lambda^+| = |\lambda^-|$. Faites un schéma.

2.2 Solutions

Exercice 1

Le champ électrique peut s'écrire ;

$$\vec{E} = \vec{E}_x + \vec{E}_y$$



Sachant qu'un élement de charge dq génère un champ électrique au point M, sous la forme suivante :

$$d\vec{E} = K\frac{dq}{r^2}\ \vec{u}$$

Avec $\vec{u}$ le vecteur unitaire indiquant la direction et le sens de $d\vec{E}$. On peut donc écrire

$$d\vec{E}_x = K\frac{dq}{r^2}\cos\alpha\ \vec{i}$$

Et

$$d\vec{E}_y = -K\frac{dq}{r^2}\sin\alpha\ \vec{j}$$

La distribution continue de charges est linéique ;

$$dq = \lambda dy$$

Et on peut, à partir du schéma, écrire que ;

$$r = \frac{x}{\cos\alpha} = \frac{y}{\sin\alpha}$$

$$\Rightarrow y = \frac{x\sin\alpha}{\cos\alpha} = x\tan\alpha$$

Sa dérivée sera

$$dy = \frac{x}{\cos^2\alpha}d\alpha$$

Donc si on remplace dy et r par leurs valeurs respectives ;

$$d\vec{E}_x = K\frac{\lambda x\cos^2\alpha}{x^2\cos^2\alpha}\cos\alpha \;\; d\alpha \;\; \vec{i}$$

$$d\vec{E}_y = -K\frac{\lambda x\cos^2\alpha}{x^2\cos^2\alpha}\sin\alpha \;\; d\alpha \;\; \vec{j}$$

On obtient

$$d\vec{E}_x = K\frac{\lambda}{x}\cos\alpha \;\; d\alpha \;\; \vec{i}$$

$$d\vec{E}_y = -K\frac{\lambda}{x}\sin\alpha \;\; d\alpha \;\; \vec{j}$$

En procédant à l'intégration pour obtenir le champ électrique résultant ;

$$\int d\vec{E}_x = K\frac{\lambda}{x}\int_{-\alpha_m}^{\alpha_m}\cos\alpha \;\; d\alpha \;\; \vec{i}$$

$$\int d\vec{E}_y = -K\frac{\lambda}{x}\int_{-\alpha_m}^{\alpha_m}\sin\alpha \;\; d\alpha \;\; \vec{j}$$

On obtient

$$\vec{E}_x = 2K\frac{\lambda}{x}\sin\alpha_m \;\; \vec{i}$$

$$\vec{E}_y = \vec{0}$$

Avec $\cos\alpha = \cos(-\alpha)$ et $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$
Et

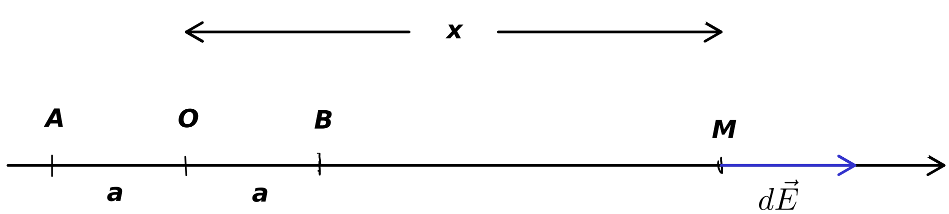
$$\sin\alpha_m = \frac{a}{r} = \frac{a}{\sqrt{a^2+x^2}}$$

L'expression finale du champ électrique sera sous la forme ;

$$\vec{E} = 2K\frac{\lambda}{x}\frac{a}{\sqrt{a^2+x^2}} \;\; \vec{i}$$

Exercice 2

Dans cet exercice, on peut voir que le champ électrique résultant ne peut être que suivant l'axe des x, puisque le point M choisi se trouve sur le même axe que la distribution continue de charges et elle est linéique $dq = \lambda dl$ sur le segment AB de longueur $2a$.
La distance r va varier en fonction de $x - l$, en considérant $x = OM$ (constante) et l variant de $-a$ (qui représente la distance OA) à a (qui est la distance de OB), comme indiqué dans la figure suivante.



Un élement de charge dq va créer un champ électrique dE.

$$dE = K\frac{dq}{r^2}$$

$$\Rightarrow dE = K\frac{dq}{(x-l)^2} = K\lambda\frac{dl}{(x-l)^2}$$

En l'intégrant, on aura

$$E = \int dE = K\lambda\int_{-a}^{a}\frac{dl}{(x-l)^2} = K\lambda\left[\frac{1}{x-l}\right]_{-a}^{a}$$

$$E = K\lambda\left[\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x+a}\right]$$

et l'expression finale du champ électrique résultant de cette distribution continue de charges est sous la forme suivante ;

$$\vec{E} = 2K\lambda\frac{a}{x^2-a^2}\ \vec{i}$$

Remarque : Nous n'avons pas résolu le problème avec les vecteurs, car tous les $d\vec{E}$ ont la même direction à savoir l'axe des x.

Exercice 3

a. Le champ électrique sera dirigé suivant l'axe z, car les composantes du champ électrique $\vec{E}_x$ et $\vec{E}_y$ vont s'annuler (symétrie), comme on peut le vérifier ;

$$dE = K\frac{dq}{R^2}$$

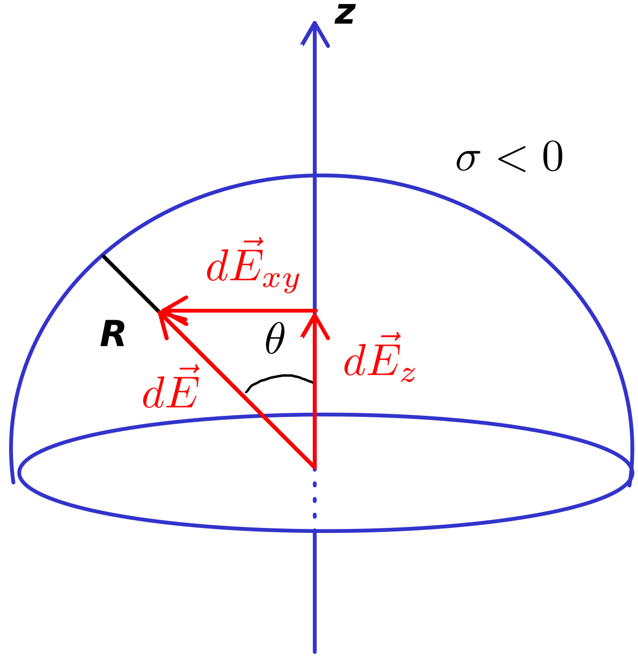
et

$$\vec{E} = \vec{E}_x + \vec{E}_y + \vec{E}_z$$

Avec

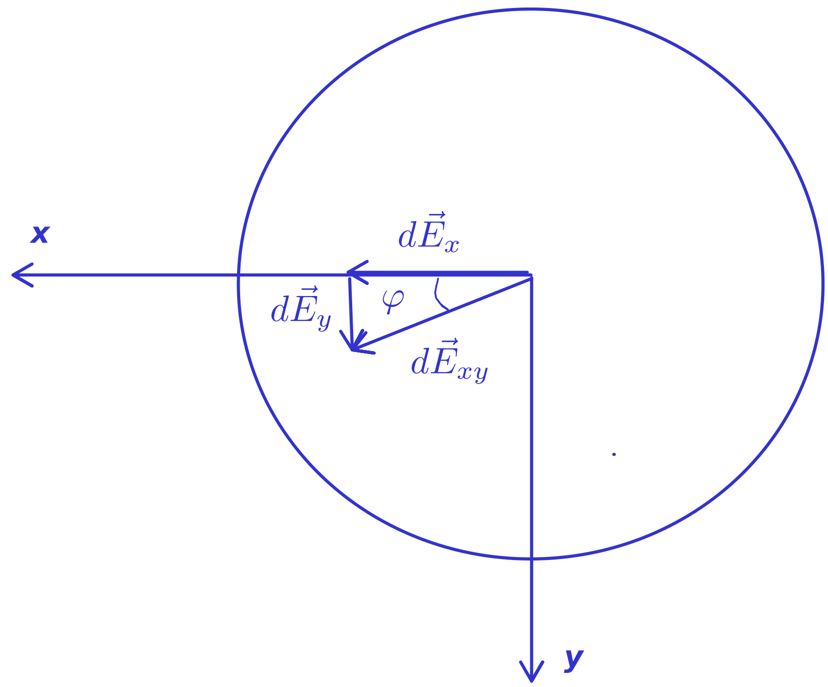
$$dE_z = dE\cos\theta$$

$$dE_{xy} = dE\sin\theta$$



et

$$d\vec{E}_{xy} = d\vec{E}_x + d\vec{E}_y = dE\sin\theta\cos\varphi\vec{i} + dE\sin\theta\sin\varphi\ \vec{j}$$



L'élement de charge est sous la forme ;

$$dq = \sigma dS = \sigma R^2 \sin\theta d\theta d\varphi$$

Avec θ variant de $0 \to \pi/2$ et φ de $0 \to 2\pi$ et $R = cste$

$$dE_x = K\frac{\sigma R^2}{R^2}\sin^2\theta d\theta\cos\varphi d\varphi$$

et

$$dE_y = K\frac{\sigma R^2}{R^2}\sin^2\theta d\theta \sin\varphi d\varphi$$

En intégrant, on constate que $\vec{E}_x = \vec{E}_y = \vec{0}$ car

$$\int_0^{2\pi}\cos\varphi d\varphi = 0$$

et

$$\int_0^{2\pi}\sin\varphi d\varphi = 0$$

Donc on peut en déduire que le champ électrique résultant de cette distribution surfacique sera suivant l'axe des z.

$$\vec{E} = \int d\vec{E}_z = K\frac{\sigma R^2}{R^2}\int_0^{\pi/2}\sin\theta\cos\theta d\theta\int_0^{2\pi}d\varphi\ \ \vec{k}$$

$$\vec{E} = 2\pi K\sigma\int_0^{\pi/2}\sin\theta\cos\theta d\theta\ \ \vec{k}$$

$$\vec{E} = 2\pi K\sigma\left[-\frac{\cos^2\theta}{2}\right]_0^{\pi/2}\ \ \vec{k}$$

$$\vec{E} = K\sigma\pi\ \ \vec{k} = \frac{\sigma}{4\varepsilon_0}\ \ \vec{k}$$

b. Dans le cas d'une distribution volumique de charges, r sera une variable.

$$dq = \rho dV = \rho r^2 dr\sin\theta d\theta d\varphi$$

De la même manière, on peut démontrer que le champ résultant ne peut être que suivant l'axe des z et puisque la densité de charges est positive, alors le champ électrique sera divergent et aura le sens de -z.

$$dE = K\frac{dq}{r^2} = K\frac{\rho r^2}{r^2}dr\sin\theta d\theta d\varphi$$

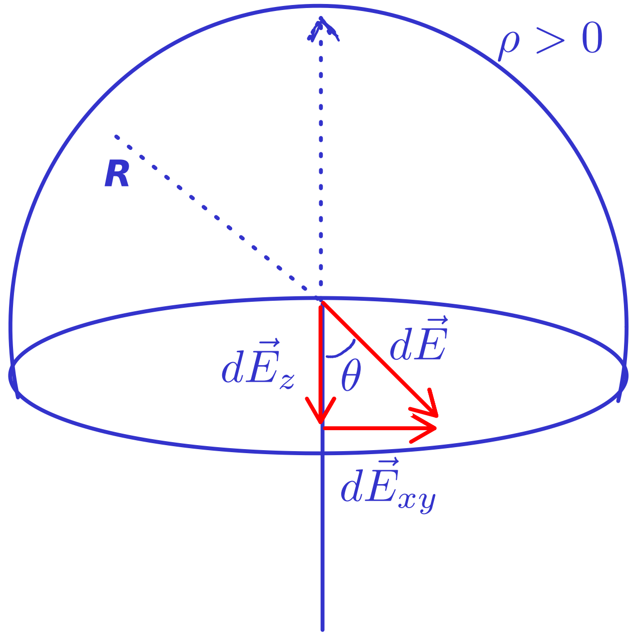
$$dE = K\rho dr\sin\theta d\theta d\varphi$$

$$d\vec{E}_z = -dE\cos\theta\ \ \vec{k}$$

$$d\vec{E}_z = -K\rho dr\sin\theta d\theta d\varphi\cos\theta\ \ \vec{k}$$

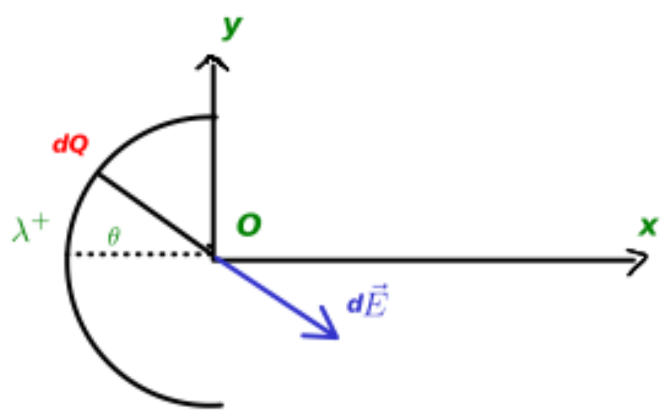
$$\vec{E} = \vec{E}_z = -K\rho\int_0^R dr\int_0^{\pi/2}\sin\theta\cos\theta d\theta\int_0^{2\pi}d\varphi\ \ \vec{k}$$

$$\vec{E} = -K\rho R\pi\ \ \vec{k} = -\frac{\rho R}{4\varepsilon_0}\ \ \vec{k}$$



Exercice 4

1. On commence par tracer $d\vec{E}$ généré au point O par un élément de charge $dQ = \lambda r d\theta$



On peut écrire $d\vec{E}$ en fonction des ses composantes suivant (x, y) :

$$d\vec{E} = d\vec{E_x} + d\vec{E_y}$$

Avec $\quad d\vec{E_x} = dE\cos\theta\vec{i} \quad$ et $\quad d\vec{E_y} = dE\sin\theta\vec{j}$
En intégrant

$$\vec{E_x} = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} dE\cos\theta\vec{i} = K\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{\lambda r d\theta}{r^2}\cos\theta\vec{i}$$

$$\vec{E_x} = K\frac{\lambda}{r}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos\theta d\theta\vec{i}$$

On obtiendra

$$\vec{E_x} = 2\frac{K\lambda}{r}\vec{i}$$

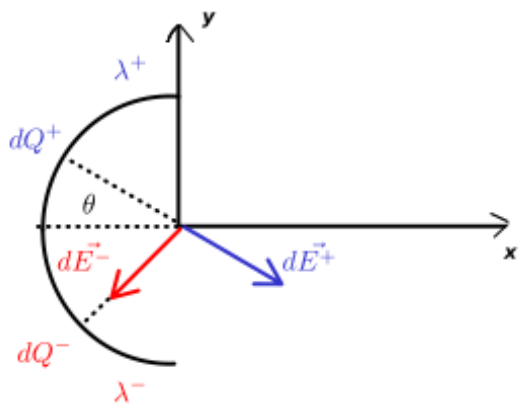
La composante $\vec{E_y}$ s'annule.

$$\vec{E_y} = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} dE \sin\theta\vec{j} = 0$$

Donc

$$\vec{E} = \vec{E_x} = 2\frac{K\lambda}{r}\vec{i}$$

2. Dans le cas de cette distribution, le champ électrostatique $\vec{E}$ est composé d'un champ $\vec{E^+}$ issu de la partie chargée uniformément avec une densité λ^+ de $\theta = \pi/2$ à $\theta = 0$ et d'un champ $\vec{E^-}$ généré par la partie chargée uniformément avec une densité λ^- de $\theta = 0$ à $\theta = -\pi/2$.



$$d\vec{E_y^+} = -dE^+ \sin\theta\vec{j}$$

Et

$$d\vec{E_y^-} = -dE^- \sin\theta\vec{j}$$

Avec dE^+ et dE^- sont des normes, donc positives.
On remarque que la disposition des charges influe sur la direction et le sens du champ électrique.

$$d\vec{E_x^+} = dE^+ \cos\theta\vec{i}$$

Et

$$d\vec{E_x^-} = -dE^- \cos\theta\vec{i}$$

Donc

$$d\vec{E_y} = d\vec{E_y^+} + d\vec{E_y^-} = -dE^+ \sin\theta\vec{j} - dE^- \sin\theta\vec{j}$$

et

$$d\vec{E_x} = d\vec{E_x^+} + d\vec{E_x^-} = dE^+ \cos\theta\vec{i} - dE^- \cos\theta\vec{i}$$

En intégrant

$$\begin{aligned}\vec{E_y} &= -\int_0^{\pi/2} dE^+ \sin\theta \vec{j} - \int_{-\pi/2}^{0} dE^- \sin\theta \vec{j} \\ &= -K\tfrac{\lambda}{r}\left[\int_0^{\pi/2} \sin\theta d\theta + \int_{-\pi/2}^{0} \sin\theta d\theta\right]\vec{j}\end{aligned}$$

Il est considéré dans cet exercice que $|\lambda^+| = |\lambda^-|$,

$$\vec{E_y} = -2\frac{K\lambda}{r}\vec{j}$$

Pour la composante suivant l'axe des X,

$$\vec{E_x} = K\frac{\lambda}{r}\left[\int_0^{\pi/2} \cos\theta d\theta - \int_{-\pi/2}^{0} \cos\theta d\theta\right]\vec{i} = \vec{0}$$

Donc le champ électrostatique $\vec{E}$ sera dirigé vers $-\vec{j}$;

$$\vec{E} = -2\frac{K\lambda}{r}\vec{j}$$

3. Le dipôle électrique

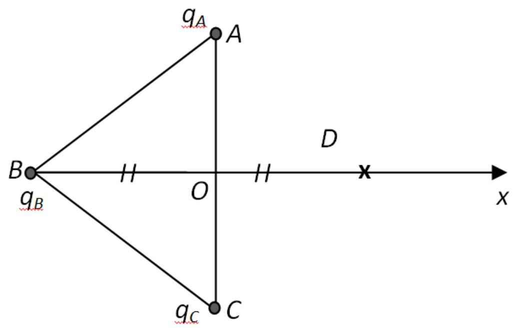
3.1 Exercices

Exercice 1

Trois charges ponctuelles sont placées aux sommets d'un triangle équilatérale ABC de côté a.

1. Calculer le potentiel électrique total au point D, qui est symétrique au point B par rapport à O.
2. Calculer les composantes E_x et E_y du champ électrique au point D et donner l'expression du vecteur $\vec{E}$.
3. On place au point D un dipôle électrique de moment dipolaire, $\vec{p} = -10^{-10}\vec{i}$ (C.m) ;
   * Représenter le dipôle dans sa position d'équilibre stable.
   * Calculer la variation de l'énergie potentielle du dipôle lorsqu'il passe de la position initiale à la position d'équilibre.

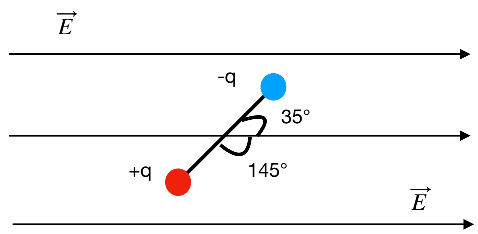
On donne : $q_A = -q_C = q$, $q_B = -3q$, $q < 0$.



Exercice 2

Soit un dipôle ($q = 1.6.10^{-19}\ C$, $d = 0.125\ nm$) baignant dans un champ électrique ($\vec{E} = 5.10^5 \vec{i}\ N/C$).

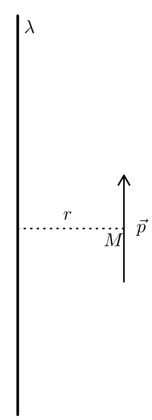
1. Calculer la force exercée par le champ sur le dipôle.
2. Trouver les normes du moment dipôlaire $\vec{p}$ et du moment de couple $\vec{C}$ et faire la représentation de ces vecteurs sur un schéma.
3. Calculer l'énergie potentielle du système dans la position donnée, puis dans la position finale. A t'il eu un gain ou une perte d'énergie ?



Exercice 03 :

Soit un fil de longueur infinie, chargé uniformément avec une densité linéaire de charge λ positive.

1. Calculer le champ électrique crée par le fil en un point M situé à la distance r du fil,
2. On place un dipôle $\vec{p}$ de longueur a en M, parallèlement au fil.
   a. Représenter les forces qui s'exercent sur le dipôle.
   b. Calculer le moment du couple agissant sur le dipôle.
   c. En déduire l'orientation finale du dipôle.



3. Le dipôle ayant l'orientation finale, déterminée à la question 2.c, calculer ;
   a. la force qui agit sur le dipôle,
   b. la variation d'énergie cinétique du dipôle quand il se déplace de la distance x à $x/2$ (on pourra négliger a par rapport à x).

3.2 Solutions

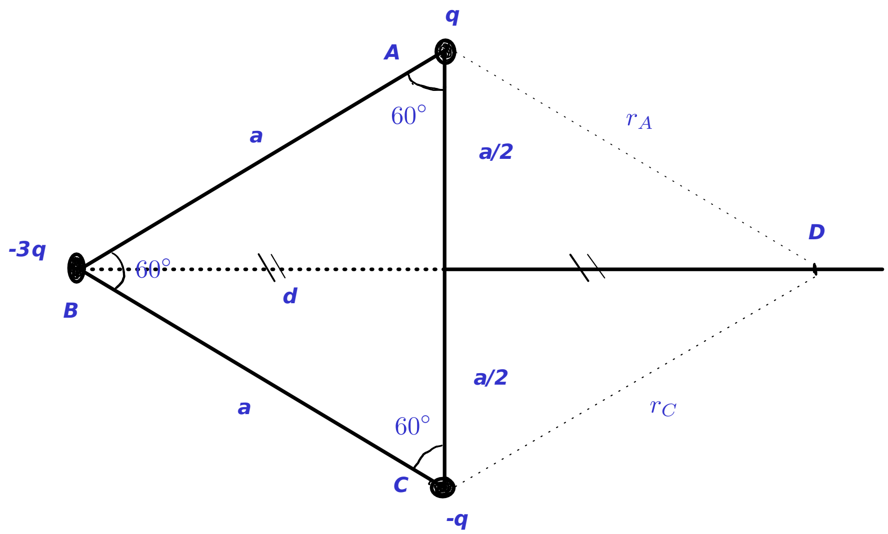
Exercice 1

Les charges sont placées sur les sommets d'un triangle équilatéral de côté a et les angles de ce triangle sont de 60°. La charge q est supposée négative !

1. Le potentiel créé au point D sera

$$V_D = V_A + V_B + V_C$$

$$V_D = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q_A}{r_A} + \frac{q_B}{r_B} + \frac{q_C}{r_c}\right)$$



Avec r_A,r_B et r_C les distances entre la charge au point A, la charge au point B et la charge au point c et le point D, respectivement.
Selon Pythagore

$$a^2 = d^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 \Rightarrow d^2 = a^2 - \frac{a^2}{4} \Rightarrow d^2 = \frac{3a^2}{4}$$

Et $r_B = 2d$, alors

$$r_B = \sqrt{3}a$$

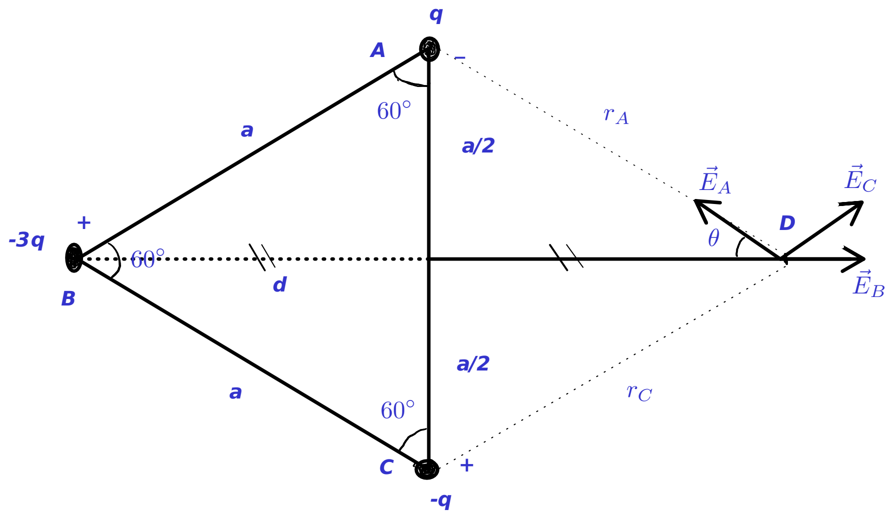
$$r_C = r_A = a$$

On obtient

$$V_D = -\frac{\sqrt{3}\ q}{4\pi\varepsilon_0 a}$$

Le potentiel est donc positif puisque $q < 0$.

2. Les composantes E_x et E_y du champ électrique au point D sont obtenues par la projection des champs électriques que chaque charge génére au point D.



$$\vec{E} = \vec{E}_A + \vec{E}_B + \vec{E}_C$$

L'orientation des vecteurs champs électriques dépendent du signes des charges impliquées. En prenant compte que $q < 0$, on constate que $\vec{E}_A$ est convergent, $\vec{E}_B$ et $\vec{E}_C$ quant à eux divergent. L'angle $\theta = 60°/2 = 30°$
Les normes des champs électriques sont

$$\begin{aligned} E_A &= K\frac{|q_A|}{a^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{|q|}{a^2} \\ E_B &= K\frac{|q_B|}{(\sqrt{3}a)^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{|q|}{a^2} \\ E_C &= K\frac{|q_C|}{a^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{|q|}{a^2} \end{aligned}$$

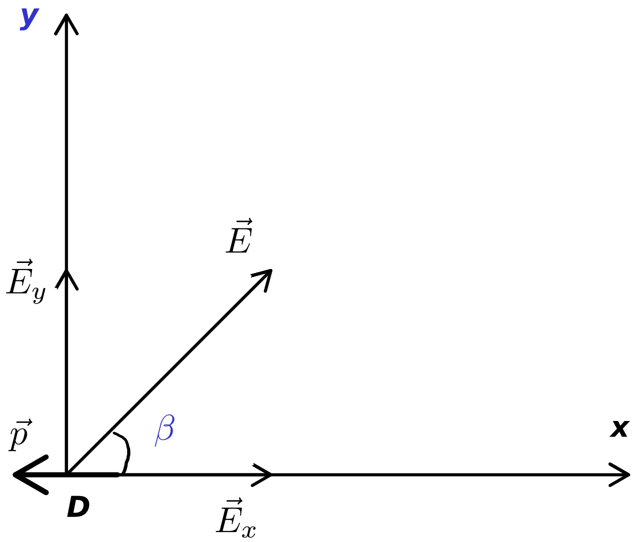
Rappel : La norme d'un vecteur est toujours positif !
On constate que $E_A = E_B = E_C$, il suffit à présent de projeter $\vec{E}_A$, $\vec{E}_B$ et $\vec{E}_C$ sur les axes x, y.

$$\begin{aligned} \vec{E}_x &= -E_A\cos\theta\ \vec{i} + E_B\ \vec{i} + E_C\cos\theta\ \vec{i} \\ \Rightarrow \vec{E}_x &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{|q|}{a^2}\ \vec{i} \\ \vec{E}_y &= E_A\sin\theta\ \vec{j} + E_C\sin\theta\ \vec{j} \\ \Rightarrow \vec{E}_y &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{|q|}{a^2}\ \vec{j} \end{aligned}$$

Donc

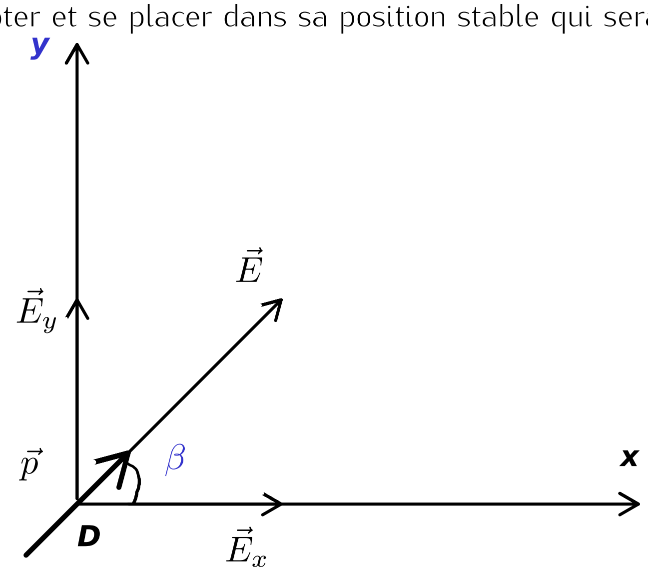
$$\begin{aligned} \vec{E} &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{|q|}{a^2}\ \vec{i} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{|q|}{a^2}\ \vec{j} \\ \vec{E} &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{|q|}{a^2}\left(\vec{i} + \vec{j}\right) \end{aligned}$$

3. La représentation du moment dipolaire initiale ($\vec{p} = -10^{-10}\vec{i}$ C.m) et du champ électrique résultant des charges disposées sur les sommets du triangle est la suivante



Avec $\tan\beta = \frac{E_y}{E_x} = 1$ donc $\beta = 45°$.

* Le dipôle va pivoter et se placer dans sa position stable qui sera $(\vec{p}, \vec{E}) = 0°$



* Le calcul de la variation de l'énergie potentielle du dipôle lorsqu'il passe de la position initiale à la position finale qui est la position stable :

$$\Delta E_p = E_{pf} - E_{pi}$$

Sachant que l'énergie potentielle est égale à $E_p = -\vec{E}.\vec{p} = -E.p\cos(\vec{E}, \vec{p})$ (produit scalaire), alors l'énergie potentielle initiale est

$$E_{pi} = -E.p\cos(\pi - \beta) = -E.p\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) = 0,70 \times E.p$$

La position initiale est celle où $\vec{p} = -10^{-10}\vec{i}$ C.m, et donc l'angle entre les vecteurs $\vec{E}$ et $\vec{p}$ sera $\pi - \beta$, avec $\beta = 45° = \pi/4$.

Et l'énergie potentielle quand le moment dipolaire va s'aligner au champ électrique est l'énergie potentielle finale qui est la position stable, donc l'angle entre les deux vecteurs sera 0°, d'où ;

$$E_{pf} = -E.p\cos(0°) = -E.p$$

Donc

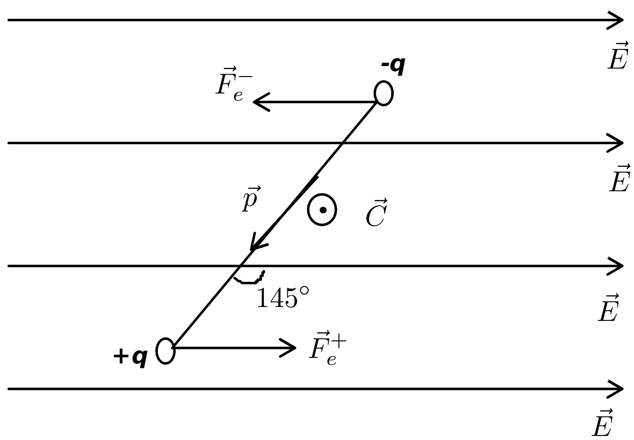
$$\Delta E_p = -1,70 \times E.p$$

On constate que le système a perdu de l'énergie, ce qui est correcte car le dipôle en s'alignant au champ électrique va avoir une énergie potentielle la plus basse, la plus stable.

Exercice 2

1. La force résultante qui va agir sur le dipôle est la somme des forces qui agissent sur les charges formant le dipôle.
   Et puisque $\vec{F}_e = q\vec{E}$, alors la force résultante sera nulle.

$$\vec{F}_e = \vec{F}_e^+ + \vec{F}_e^- = q\vec{E} - q\vec{E} = \vec{0}$$



2. Le moment dipolaire $\vec{p} = q\vec{d}$ est orienté, comme indiqué sur la figure, de la charge négative vers la charge positive. Et sa norme est :

$$p = q.d = 1,6.10^{-19} \times 0,125.10^{-9} = 2\ .10^{-29}\ \ C.m$$

   Le moment de couple $\vec{C} = \vec{p} \wedge \vec{E}$ est perpendiculaire au plan où se trouve les vecteurs champ électrique et moment dipolaire (produit vectoriel) et est dirigé comme indiqué sur la figure ci-dessus.

$$C = p.E\sin 145° = 5,7\ .10^{-24}\ \ N.m$$

3. L'énergie potentielle du système dans la position donnée est le produit scalaire suivant :

$$E_{pi} = -\vec{p}.\vec{E} = -p.E\cos 145° = 8,2\ 10^{-24}\ \ J$$

   La position finale sera quand le dipôle se retrouve dans sa position stable ($\theta = 0$)qui est

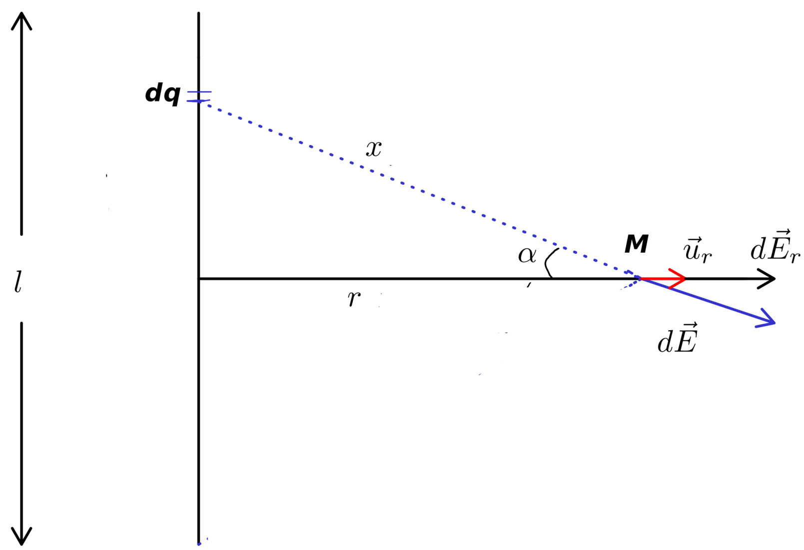
$$E_{pf} = -\vec{p}.\vec{E} = -p.E\cos 0° = -\ 10^{-23}\ \ J$$

$$\Delta E_p = E_{pf} - E_{pi} = -1,82\ 10^{-23}\ \ J$$

   Il y a une perte d'énergie, libérée par le système pour atteindre un état d'équilibre.

Exercice 3

1. Le champ électrique crée par le fil chargé par une distribution linéaire en un point M situé à la distance r du fil, peut être obtenu en utilisant le théorème de Gauss, ou en utilisant la méthode présentée au chapitre 2.
Un élément de charge dq génère un champ électrique au point M, sous la forme suivante :
$$d\vec{E} = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 x^2}\ \vec{u}$$
Avec $\vec{u}$ un vecteur unitaire indiquant la direction et le sens de $d\vec{E}$. On peut donc écrire
$$d\vec{E}_r = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 x^2}\cos\alpha\ \ \vec{u}_r$$
Et suivant la direction des Z, le champ électrique s'annule comme vu dans l'exercice 1 du chapitre précédent.



La distribution continue de charges est linéïque ;
$$dq = \lambda dl$$
Et on peut, à partir du schéma, écrire que ;
$$x = \frac{r}{\cos\alpha} = \frac{l}{\sin\alpha}$$
$$\Rightarrow l = \frac{r\sin\alpha}{\cos\alpha} = r\tan\alpha$$
Sa dérivée sera
$$dl = \frac{r}{\cos^2\alpha}d\alpha$$
Donc si on remplace dl par sa valeur respective ;

$$d\vec{E}_r = \frac{\lambda r \cos^2\alpha}{4\pi\varepsilon_0 r^2 \cos^2\alpha} \cos\alpha \;\; d\alpha \;\; \vec{u}_r$$

On obtient

$$d\vec{E}_r = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 r} \cos\alpha \;\; d\alpha \;\; \vec{u}_r$$

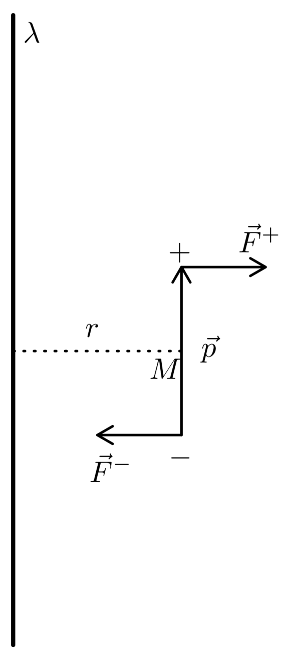
En procédant à l'intégration pour obtenir le champ électrique résultant ;

$$\int d\vec{E}_r = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 r} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos\alpha \;\; d\alpha \;\; \vec{u}_r$$

On obtient

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi r\varepsilon_0} \vec{u}_r$$

2. On place un dipôle $\vec{p}$ de longueur a en M, parallèlement au fil.
   a. Les forces qui s'exercent sur le dipôle sont représentées sur la figure suivante :



   Le vecteur champ électrique étant en parallèle avec le vecteur $\vec{F}^+$, car le fil est chargé positivement.

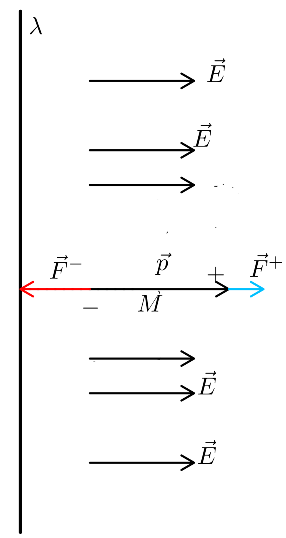
   b. Le moment du couple agissant sur le dipôle sera :

$$\vec{C} = \vec{p} \wedge \vec{E}$$

   L'angle entre $\vec{p}$ et $\vec{E}$ est $\pi/2$. Donc la norme du moment de couple sera

$$|\vec{C}| = p.E.\sin\pi/2 = p.E$$

c. L'orientation finale du dipôle est illustrée sur la figure suivante :



On remarque qu'une fois le moment dipolaire aligné au champ électrique, les normes des forces $\vec{F}^+$ et $\vec{F}^-$ ne sont plus égales.

3. Le dipôle ayant l'orientation finale, on calcule ;
   a. la force résultante qui agit sur le dipôle :

$$\vec{F} = \vec{F}^+ + \vec{F}^-$$

le pôle négatif du dipôle sera à une distance de $r - a/2$ et le pôle positif du dipôle sera à une distance $r + a/2$.

$$\vec{F} = q\vec{E}(r + a/2) - q\vec{E}(r - a/2)$$

avec

$$\vec{E}_r = \frac{\lambda}{2\pi r \varepsilon_0}\vec{u}_r$$

donc

$$\vec{E}(r + a/2) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0(r + a/2)}\vec{u}_r$$

et

$$\vec{E}(r - a/2) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0(r - a/2)}\vec{u}_r$$

$$\vec{F} = \frac{q\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r + a/2} - \frac{1}{r - a/2}\right)\vec{u}_r$$

$$\vec{F} = \frac{q\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\left(\frac{-a}{r^2 - a^2/4}\right)\vec{u}_r$$

b. D'après le théorème de l'énergie cinétique, à savoir $\Delta E_c = W_f$, l'énergie cinétique s'obtiendra par l'intégration de

$$\Delta E_c = \int_r^{r/2} \vec{F} dr \vec{u}_r$$

On nous informe que a est très petite par rapport à r, donc on peut supposer que

$$\vec{F} = \frac{q\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\left(\frac{-a}{r^2 - a^2/4}\right)\vec{u}_r \approx \frac{q\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\left(\frac{-a}{r^2}\right)\vec{u}_r$$

$$\Delta E_c = \int_r^{r/2} -\frac{q\lambda a}{2\pi\varepsilon_0}\frac{dr}{r^2}$$

Et finalement l'énergie cinétique sera

$$\Delta E_c = \frac{q\lambda a}{2\pi\varepsilon_0 r}$$

4. Loi de Gauss

4.1 Exercices

Exercice 1

Un plan conducteur supposé infini est positivement chargé avec une densité de charge surfacique uniforme $+\sigma$. En utilisant le théorème de Gauss :

1. Calculer le champ électrostatique créé dans l'espace par cette distribution de charges électriques.
2. En utilisant le résultat de la question précédente, déduire le champ électrique régnant à l'extérieur et à l'intérieur de deux armatures de charges opposées $+\sigma$ et $-\sigma$.

Exercice 2

Soit une boule de centre O, de rayon R et de charge volumique $\rho > 0$ constante.

1. Calculer le champ électrostatique créé par la boule en tout point de l'espace à l'aide du théorème de Gauss,
2. Calculer le potentiel électrostatique créé par la boule en tout point de l'espace. On supposera que le potentiel, lorsque r tend vers $+\infty$, vaut V_0.

Exercice 3

Un cylindre plein (Cy) de longueur infinie, de rayon R porte une densité de charge $\rho > 0$. En utilisant le théorème de Gauss,

1. calculer le champ électrostatique à l'intérieur et à l'extérieur du cylindre,
2. et déduire le potentiel à l'intérieur et à l'extérieur du cylindre, en considérant $V = 0$ sur l'axe du cylindre.

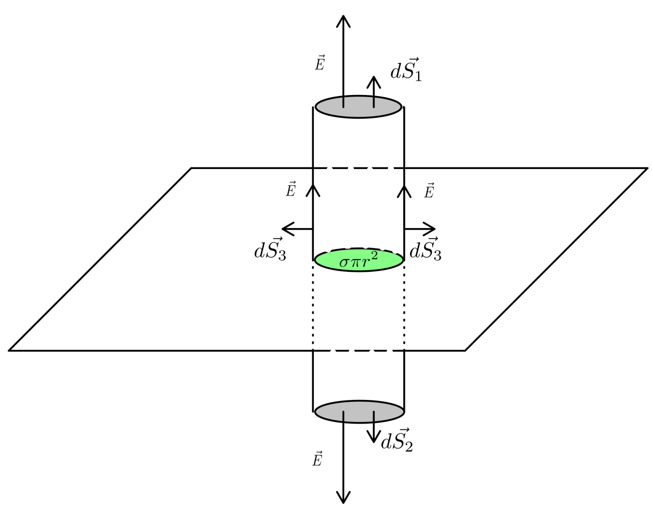
4.2 Solutions

Exercice 1

1. Le plan est supposé infini et sans épaisseur. On peut utiliser deux types de surfaces fermées ; le cylindre ou le cube. Dans la résolution de cet exercice, on utilisera la surface fermée du cylindre.
   Le cylindre a trois surfaces ; $dS_1 = dS_2 = r dr d\theta$ et $dS_3 = r d\theta dz$
   Le flux total sera

$$\begin{aligned}
\Phi &= \oint \vec{E}.d\vec{S} = \int \vec{E}.d\vec{S_1} + \int \vec{E}.d\vec{S_2} + \int \vec{E}.d\vec{S_3} = \vec{E}.\vec{S_1} + \vec{E}.\vec{S_2} + \vec{E}.\vec{S_3} \\
\Phi &= E.S_1.\cos 0^\circ + E.S_2.\cos 0^\circ + E.S_3.\cos 90^\circ \\
\Phi &= E.S_1 + E.S_2 = 2.E.\pi.r^2
\end{aligned}$$

Avec $S_1 = S_2 = \pi.r^2$ et $S_3 = 2\pi.rL$



La charge distribuée sera ;

$$Q = \int \sigma.dS = \sigma \int_0^r r dr \int_0^{2\pi} d\theta = \sigma\pi.r^2$$

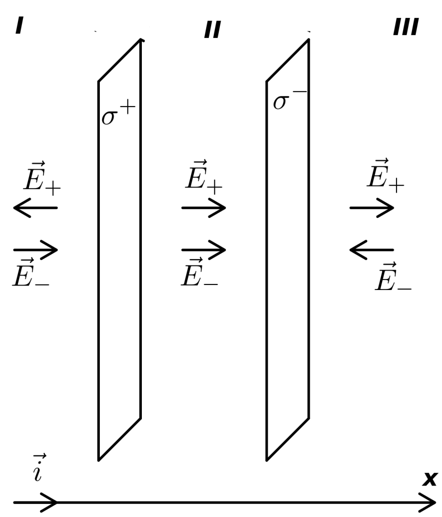
Le théorème de Gauss permet d'écrire

$$\begin{aligned}
\phi &= 2.E.\pi.r^2 &= \frac{Q}{\varepsilon_0} \\
&= 2.E.\pi.r^2 &= \frac{\sigma\pi.r^2}{\varepsilon_0}
\end{aligned}$$

On obtiendra

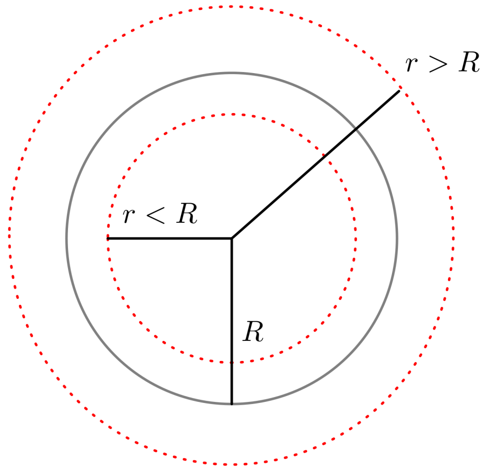
$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

2. On peut facilement déduire le champ électrique qui règne à l'extérieur et à l'intérieur de deux armatures de charges opposées σ^+ et σ.
   Sachant que la charge positive engendre un champ électrique divergent et la charge négative un champ électrique convergent, on obtient :
   * Dans la région I :
   $$\begin{aligned} \vec{E_+} &= -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{i} \\ \vec{E_-} &= \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{i} \\ \vec{E_I} &= \vec{E_+} + \vec{E_-} = \vec{0} \end{aligned}$$
   * Dans la région II :
   $$\begin{aligned} \vec{E_+} &= \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{i} \\ \vec{E_-} &= \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{i} \\ \vec{E_I}I &= \vec{E_+} + \vec{E_-} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{i} \end{aligned}$$
   * Dans la région III :
   $$\begin{aligned} \vec{E_+} &= \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{i} \\ \vec{E_-} &= -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{i} \\ \vec{E_I}II &= \vec{E_+} + \vec{E_-} = \vec{0} \end{aligned}$$



Exercice 2

1. La sphère (S) a une distribution de charge volumique ($\rho > 0$). On recherche l'expression du champ électrique en tout point de l'espace, c'est à dire à $r < R$ et à $r > R$.



La surface fermée de Gauss que l'on doit utiliser est intégrée à partir de :

$$S = \int dS = r^2 \int_0^{\pi} \sin(\theta) d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi$$

On obtient $S = 4\pi r^2$
Et la charge contenue **dans cette surface fermée** est obtenue par :

$$Q = \int \rho dV$$

Avec $dV = r^2 dr \sin(\theta) d\theta d\varphi$
<u>À $r < R$</u>; La charge contenue dans la surface fermée dépendra de r.

$$\begin{aligned} Q = \int \rho dV &= \rho \int_0^{\mathrm{r}} r^2 dr \int_0^{\pi} \sin(\theta) d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \\ &= 4\pi\rho \int_0^{\mathrm{r}} r^2 dr = \frac{4\rho}{3}\pi \mathbf{r}^3 \end{aligned}$$

Et en utilisant le théorème de Gauss;

$$E.4\pi r^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0} = \frac{4\rho}{3\varepsilon_0}\pi r^3$$

le champ électrique en tout point de l'espace "r" vérifiant la condition ($r < R$) sera sous la forme suivante;

$$E = \frac{\rho}{3\varepsilon_0} r$$

<u>À $r > R$</u>; La charge contenue dans la surface fermée ne dépendra pas de r, car la

sphère chargée est complètement enveloppée par la surface de Gauss ($r > R$).

$$\begin{aligned} Q = \int \rho dV &= \rho \int_0^{\mathrm{R}} r^2 dr \int_0^{\pi} \sin(\theta) d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \\ &= 4\pi\rho \int_0^{\mathrm{R}} r^2 dr = \frac{4\rho}{3}\pi \mathbf{R}^3 \end{aligned}$$

Et en utilisant le théorème de Gauss;

$$E.4\pi r^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0} = \frac{4\rho}{3\varepsilon_0}\pi \mathbf{R}^3$$

le champ électrique en tout point de l'espace "r" vérifiant la condition ($r > R$)) sera sous la forme suivante;

$$E = \frac{\rho}{3\varepsilon_0 r^2} R^3$$

L'expression totale du champ électrique s'écrira;

$$E(r) = \begin{cases} \frac{\rho}{3\varepsilon_0} r & \text{à } r < R \\ \\ \frac{\rho}{3\varepsilon_0 r^2} R^3 & \text{à } r > R \end{cases}$$

2. Le potentiel électrostatique créé par la boule s'obtient à partir de :

$$\vec{E} = -gr\vec{a}dV = -\vec{\nabla} V$$

L'opérateur $gr\vec{a}d$ ou encore $\vec{\nabla}$ en coordonnées sphériques s'écrit :

$$gr\vec{a}d = \frac{\delta}{\delta r}\vec{u_r} + \frac{1}{r}\frac{\delta}{\delta \theta}\vec{u_\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\delta}{\delta \varphi}\vec{u_\varphi}$$

Dans le cas d'étude de corps symétriques tels que la sphère ou encore un cylindre, le champs électrique est radial, en d'autre terme il va varier qu'avec "r". Donc θ et φ seront des invariantes, on peut alors simplifier notre opérateur :

$$gr\vec{a}dV = -\frac{dV}{dr}\vec{u_r}$$

car $\frac{\delta V}{\delta \theta} = 0$ et $\frac{\delta V}{\delta \varphi} = 0$
Pour calculer le potentiel, il suffira d'intégrer;

$$V = -\int E.dr$$

$$V(r) = \begin{cases} V_1 = -\frac{\rho}{6\varepsilon_0} r^2 + C & \text{à } 0 \leq r \leq R \\ \\ V_2 = \frac{\rho}{3\varepsilon_0 r} R^3 + D & \text{à } r \geq R \end{cases}$$

Avec "C" et "D" des constantes que l'on déterminera en utilisant la propriété de continuité du potentiel en $r = R$.
On donne le potentiel $V = V_0$ quand $r \to R$, alors

$$\lim_{r \to R} V = \lim_{r \to R} \frac{\rho}{3\varepsilon_0 r} R^3 + D = D$$

Donc $D = V_0$.
La condition de propriété de continuité du potentiel en $r = R$ s'écrit $V_1(R) = V_2(R)$.
Cela revient à remplacer r par R.

$$-\frac{\rho}{6\varepsilon_0} R^2 + C = \frac{\rho}{3\varepsilon_0 R} R^3 + V_0$$

D'oú

$$C = \frac{\rho}{2\varepsilon_0} R^2 + V_0$$

Finalement on obtient

$$V(r) = \begin{cases} V_1 = \frac{\rho(3R^2 - r^2)}{6\varepsilon_0} + V_0 & \text{à } 0 \leq r \leq R \\ \\ V_2 = \frac{\rho}{3\varepsilon_0 r} R^3 + V_0 & \text{à } r \geq R \end{cases}$$

Exercice 3

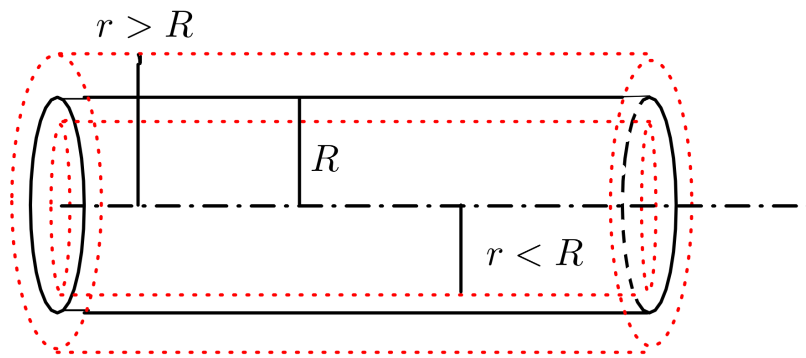
1. Le cylindre (Cy) a une distribution de charge volumique. On recherche l'expression du champ électrique en tout point de l'espace, c'est à dire à $r < R$ et à $r > R$.
   La surface fermée de Gauss que l'on doit utiliser est celle d'un cylindre composé de deux types de surfaces ; $S_L = 2\pi r L$ et $S_D = \pi r^2$.
   Sachant que le champ électrique est radial quand la longueur du cylindre est supposée infinie (ou encore $L >> r$), alors ;

$$\Phi = \oint \vec{E} d\vec{S} = E.S_L \cos 0° + E.S_D \cos 90° = E.S_L$$

   et

$$\Phi = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$$

   Avec $S_L = 2\pi r L$



<u>À $r < R$</u>; on aura

$$Q_{int} = \rho \int_0^r dV = \rho \int_0^r r dr \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^L dz = \rho \pi r^2 L$$

et donc

$$E.2\pi r L = \frac{\rho \pi r^2 L}{\varepsilon_0}$$

On obtiendra

$$E = \frac{\rho}{2\varepsilon_0} r$$

<u>À $r > R$</u>; la charge interne à la surface de Gauss considérée sera

$$Q_{int} = Q_1 = \rho \int_0^R r dr \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^L dz = \rho \pi R^2 L$$

et donc

$$E = \frac{\rho R^2}{2\varepsilon_0 r}$$

L'expression du champ électrique en tout point de l'espace sera :

$$E(r) = \begin{cases} \frac{\rho}{2\varepsilon_0} r & \text{à } r < R \\ \\ \frac{\rho R^2}{2\varepsilon_0 r} & \text{à } r > R \end{cases}$$

2. Le potentiel électrique dans toutes les régions du système est calculé à partir de la loi $V = -\int \vec{E}.d\vec{r}$.

$$V(r) = \begin{cases} -\frac{\rho}{4\varepsilon_0} r^2 + A & \text{à } 0 \leq r \leq R \\ \\ -\frac{\rho R^2}{2\varepsilon_0} \ln r + B & \text{à } r \geq R \end{cases}$$

Le potentiel s'annule en $r = 0$, cela implique que $A = 0$. En vérifiant la condition de continuité du potentiel en R, on peut écrire que

$$-\frac{\rho}{4\varepsilon_0}R^2 = -\frac{\rho R^2}{2\varepsilon_0}\ln R + B$$

On peut déduire ;

$$B = \frac{\rho R^2}{2\varepsilon_0}\left[\ln R - \frac{1}{2}\right]$$

L'expression du potentiel électrique en tout point de l'espace sera :

$$V(r) = \begin{cases} -\frac{\rho}{4\varepsilon_0}r^2 & \text{à } 0 \leq r \leq R \\ \\ \frac{\rho R^2}{2\varepsilon_0}\left[\ln\frac{R}{r} - \frac{1}{2}\right] & \text{à } r \geq R \end{cases}$$

5. Conducteurs à l'équilibre

5.1 Exercices

Exercice 1

Soit une sphère creuse conductrice, avec des rayons externe $r_{ext} = 0.25\ m$ et interne $r_{int} = 0.20\ m$, possèdant une densité de charge initiale $\sigma_i = 6.37\ \mu C/m^2$, dans laquelle on introduit en son centre, une charge $-0.5\ \mu C$:

1. Quelle sera, alors, la densité de charge totale distribuée à la sphère ?
2. Trouver la valeur du champ électrique à l'intérieure, l'extérieure et à la surface de la sphère.

Exercice 2

I. Une sphère métallique de rayon $0.45\ m$ porte une charge $Q = 0.25\ nC$. Trouver la valeur du champ électrique ;
   - * à $0.1\ m$ de la surface de la sphère,
   - ** et à $0.35\ m$ du centre de la sphère.

II. Combien d'électrons doit-on ajouter à un conducteur sphérique isolé de $32\ cm$ de diamètre pour produire un champ électrique équivalent à $1150\ N/C$ sur la surface de ce conducteur ?

Exercice 3

On se propose de calculer le champ électrique à une distance de 0,6 cm ;

1. du centre d'une sphère conductrice chargée (S_1) dont son rayon est $R_1 = 0,1$ cm, si le champ électrique a pour valeur 480 N/C à une distance de 0,2 cm du centre de la sphère.
2. de l'axe qui passe par le centre d'un cylindre métallique de longueur infinie, chargé (C_1) de rayon $R_1 = 0,1$ cm, si le champ électrique a pour valeur 480 N/C à une distance de 0,2 cm de l'axe qui passe par le centre du cylindre.
3. d'un plan infini chargé, si le le champ électrique a pour valeur 480 N/C à une distance de 0,2 cm du plan.

Exercice 4

Soient deux coquilles sphériques conductrices, l'une d'elles a pour rayons interne "a" et externe "b" , l'autre coquille a "c" et "d" respectivement. L'une se trouve imbriquée à l'intérieur de l'autre de telle sorte que $a < b < c < d$. La coquille interne (S_1) porte une charge initiale de $+2q$ tandis que la coquille externe (S_2), une charge initiale $+4q$.

1. Quelle est la charge totale répartie sur les surfaces internes et externes des deux coquilles ?
2. Calculer le champ électrique, en tout point, en fonction de q et r qui a pour origine le point O centre commun des deux coquilles.
3. Supposons, à présent, que la coquille externe a une charge initiale de $-2q$, calculer la répartition des charges sur les surfaces de chaque coquille et le champ électrique en tout point de l'espace.

Exercice 5

Soit un câble coaxial composé d'un câble interne conducteur de forme cylindrique et de rayon "a" recouvert d'un autre câble conducteur de rayons interne "b" et externe "c". Le câble externe est relié à un support isolant et n'est pas chargé. La distribution de charge sur le câble interne est linéique.

1. Calculer le champ électrique, en tout point r. Représenter dans un schéma le champ électrique de $r = 0$ à $r = 2c$.
2. Trouver la densité de charge sur les surfaces du câble externe.

Exercice 6

I. Soit un cylindre (Cy_1) plein doté d'une distribution de charge volumique ($\rho < 0$). Le rayon du cylindre est $R_1 = 1\ cm$ et sa longeur $L = 15\ cm$.
   a. Trouver l'expression du champ électrique en tout point de l'espace.
   b. Calculer la charge électrique contenue dans ce cylindre si $\rho = -0,106\ C/m^3$.

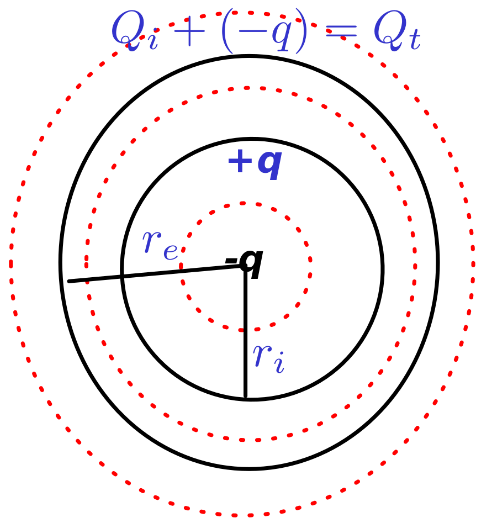
II. On enveloppe, à présent, le cylindre (Cy_1) par un cylindre (Cy_2) creux métallique de rayons interne $R_2 = 1,2\ cm$ et externe $R_3 = 1,5\ cm$, la longueur du cylindre est $L = 15\ cm$.
   a. Quantifier la nouvelle distribution de charges du système.
   b. Donner l'expression du champ électrique en tout point de l'espace.
   c. Calculer le potentiel électrique dans toutes les régions du système si le potentiel s'annule en $r = 0$.
   d. Quelle sera la densité de charge sur la surface externe du cylindre (Cy_2) ?

5.2 Solutions

Exercice 1

1. La densité de charge initiale est $\sigma_i = 6.37\ \mu C/m^2$, dans laquelle on introduit en son centre, une charge $-q = -0.5\ \mu C$, l'influence de cette charge introduite est totale.
   Avant l'introduction de la charge $-q$, la charge totale, répartie en surface externe du conducteur, était :
   $$Q_i = \sigma_i.S_e = \sigma_i.4\pi.r_e^2 = 5.10^{-6}C$$
   En introduisant la charge $-q$ au centre de la sphère, la surface interne de la sphère va se charger de $+q$ pour conserver la neutralité des charges à l'intérieur du conducteur. Cela va induire une polarisation de charges par un déplacement de charges négatives vers la surface externe du conducteur.
   La charge totale correspondante sera :
   $$Q_t = Q_i + (-q) = 5\ \ 10^{-6} - 0,5\ \ 10^{-6} = 4,5\mu C$$
   Et puisque la charge totale ($Q_t = \sigma_t.S_e$) s'écrit comme suite :
   $$Q_t = \sigma_t.4\pi.r_e^2$$
   Donc la densité de charge finale sera :
   $$\sigma_t = \frac{Q_t}{S_e} = 5,73\mu C/m^2$$

2. Le calcul du champ électrique est effectué en se limitant à trois régions, i.e, $r < r_i$, $r_i < r < r_e$ et $r > r_e$. La charge introduite est considérée comme étant une charge ponctuelle.
   À r<r$_i$:
   $$\vec{E} = -\frac{q}{4\pi r^2 \varepsilon_0}\vec{u_r}$$
   À r$_i < r < r_e$: La charge à l'intérieur de la surface fermée de Gauss de rayon r est nulle. Voir schéma.
   Donc le champ électrique est nul.
   À r$_e < r$: Dans ce cas la charge à l'intérieur de la surface fermée de Gauss de rayon r est égale à la charge totale qui est répartie sur la surface du conducteur.
   $$E.4\pi.r^2 = Q_t/\varepsilon_0 \Rightarrow \vec{E} = \frac{\sigma_t.r_e^2}{\varepsilon_0 r^2}\vec{u_r}$$
   À la surface r$_e = r$:
   $$\vec{E} = \frac{\sigma_t}{\varepsilon_0}\vec{u_r}$$



Exercice 2

I. Une sphère métallique est une sphère conductrice, donc la distribution de charges lorsque celle-ci est isolée sera une distribution surfacique.

* Pour calculer le champ électrique à une distance de $0,1$ m de la surface de cette sphère, il faut tout d'abord trouver l'expression du champ électrique E.
La surface fermée de Gauss est celle d'une sphère $S = 4\pi r^2$, le rayon de cette surface sera $r = R + 0,1 = 0,55$ m.

$$E.4\pi r^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0} \Rightarrow E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

En considérant $r = 0,55$ m et $Q = 0.25\ 10^{-9}\ \ C$;

$$E = 7,44\ \ N/C$$

** à $0.35\ m$ du centre de la sphère ($0,35 < R$), cela implique de trouver l'expression du champ électrique à l'intérieur du conducteur, or il n'y a pas de charges à l'intérieur d'un conducteur à l'équilibre, donc si $Q = 0$ alors $E = 0$.

II. Pour calculer le nombre d'électrons, il faut d'abord trouver la charge électrique qui se trouve sur la surface de ce conducteur. Sachant que le champ électrique sur la surface d'un conducteur est :

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \Rightarrow E.S = \frac{\sigma S}{\varepsilon_0}$$

Et

$$Q = \sigma S$$

Donc

$$Q = E.S.\varepsilon_0$$

On veut trouver la charge sur la surface du conducteur sphérique ($S = 4.\pi.R^2$) isolé de 32 cm de diamètre ($R = 32/2\ cm$) pour produire un champ électrique équivalent à $E = 1150\ N/C$.

$$Q = 3,275\ 10^{-9}\ C$$

Et

$$n_e = \frac{Q}{e} = \frac{3,275\ 10^{-9}}{1,6\ 10^{-19}} = 2,04\ 10^{10}\ e^-$$

Exercice 3

Calcul du champ électrique à une distance de 0,6 cm ;

1. du centre d'une sphère conductrice chargée (S_1), le rayon est $R_1 = 0,1$ cm et le champ électrique a pour valeur 480 N/C à une distance de 0,2 cm du centre de la sphère. La surface de Gauss d'une sphère est $4\pi r^2$ et la distribution de charges est surfacique (conducteur), donc l'expression du champ électrique pour $r > R_1$ sera

$$E.4\pi r^2 = \frac{4\pi.R_1^2\sigma}{\varepsilon_0} \Rightarrow E(r) = \frac{\sigma R_1^2}{\varepsilon_0 r^2}$$

Et puisque :

$$E(0,2) = 480\ \ N/C$$

Donc on peut écrire que

$$E(0,2).\left(0,210^{-2}\right)^2 = \frac{\sigma R_1^2}{\varepsilon_0} = 192.\,10^{-5}\ N.m^2/C$$

Connaissant la valeur de $\frac{\sigma R_1^2}{\varepsilon_0}$, on peut trouver $E(0,6)$;

$$E(0,6) = 192.\,10^{-5} \times \frac{1}{(0,610^{-2})^2} = 53,3\ N/C$$

Rappel ; pour $r < R_1$, le champ électrique est nul, car le conducteur à l'équilibre n'a pas de charges en son volume.

2. de l'axe qui passe par le centre d'un cylindre métallique chargé (C_1) de rayon $R_1 = 0,1$ cm et le champ électrique a pour valeur 480 N/C à une distance de 0,2 cm de l'axe qui passe par le centre du cylindre. La surface de Gauss du cylindre qui nous intéresse ici est $S = 2\pi rL$, car le champ électrique est radial et la distribution de charges est surfacique (conducteur).

$$E.2\pi rL = \frac{2\pi.R_1 L\sigma}{\varepsilon_0} \Rightarrow E(r) = \frac{\sigma R_1}{\varepsilon_0 r}$$

De la même manière ;

$$E(0,2).\left(0,210^{-2}\right) = \frac{\sigma R_1}{\varepsilon_0} = 96\,10^{-2}\ N.m/C$$

$$E(0,6) = 96\,10^{-2} \times \frac{1}{(0,6 10^{-2})} = 160 \; N/C$$

Rappel ; pour $r < R_1$, le champ électrique est nul, car le conducteur à l'équilibre n'a pas de charges en son volume.

3. d'un plan infini chargé. L'expression du champ électrique ne dépend pas de r, comme on peut le constater ;

$$2ES = \frac{\sigma S}{2\varepsilon_0} \Rightarrow E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

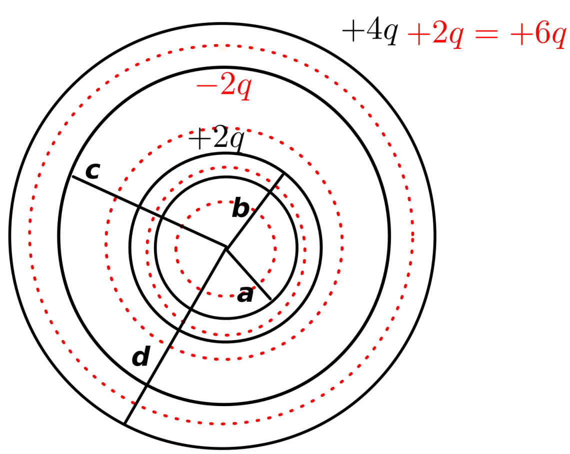
Donc

$$E(0,6) = 480 \; N/C$$

Exercice 4

Les coquilles sphériques conductrices portent chacune d'elles une charge initiale.

1. Quand on les dispose de sorte que l'une enveloppe l'autre sphère conductrice, il y aura une nouvelle répartition de charges, par influence totale, pour assurer une neutralité à l'intérieur de la sphère conductrice externe. La charge totale répartie sur les surfaces internes et externes des deux coquilles est représentée sur la figure ci-dessous.
   Initialement les sphères conductrices étaient chargées $+2q$ sur la sphère (S_1) et $+4q$ sur la sphère (S_2). Sachant que le conducteur à l'équilibre n'a pas d'excès de charges en son volume, donc en introduisant la sphère (S_1) en (S_2), il va y avoir une polarisation de telle sorte que la charge totale à l'intérieur de la sphère (S_2) devra être nulle. On peut voir dans la figure ci-dessous qu'à la surface interne "c" de (S_2) les charges négatives vont s'accumuler pour neutraliser les charges introduites en surface "b" de (S_1), cela va induire un manque de charges négatives sur la surface externe "d" du conducteur (S_2).



2. Le champ électrique, en tout point, est :
   À r<a : Il n'y a pas de charge à l'intérieur de la surface fermée ($Q_i = 0$). Donc $E = 0$

À a<r<b : Il n'y a toujours pas de charge ($Q_i = 0$) et $E = 0$ (la sphère est conductrice donc sa charge est en surface à $r = b$).

À b<r<c : La charge sera $Q_i = +2q$ et donc

$$E.4\pi r^2 = \frac{2q}{\varepsilon_0} \Rightarrow E = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 r^2}$$

À c<r<d : Il n'y a pas de charge à l'intérieur de la surface fermée ($Q_i = +2q - 2q = 0$). Donc $E = 0$

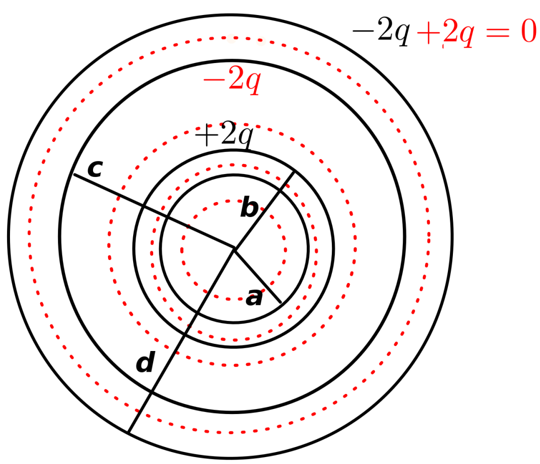
À r>d : La charge est répartie sur la surface de rayon d ;

$$Q_i = +4q + 2q = +6q$$

Et

$$E.4\pi r^2 = \frac{6q}{\varepsilon_0} \Rightarrow E = \frac{3q}{2\pi\varepsilon_0 r^2}$$

3. Si la coquille externe a une charge initiale de $-2q$, la répartition des charges sur les surfaces de chaque coquille sera comme suite



À r<a : Pas de charge ($Q_i = 0$). Donc $E = 0$

À a<r<b : Pas de charge ($Q_i = 0$) et $E = 0$

À b<r<c : La charge sera $Q_i = +2q$ et

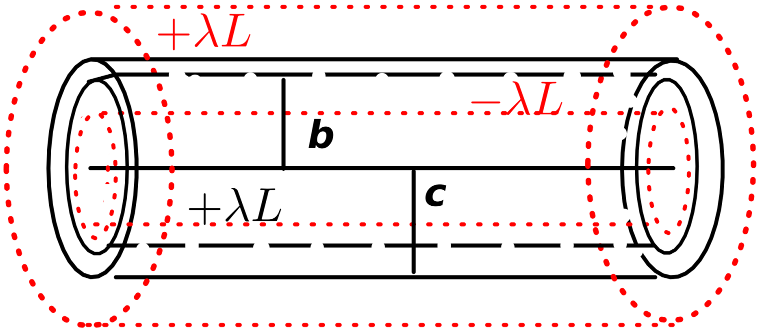
$$E.4\pi r^2 = \frac{2q}{\varepsilon_0} \Rightarrow E = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 r^2}$$

À c<r<d : Pas de charge ($Q_i = +2q - 2q = 0$). Donc $E = 0$

À r>d : La charge est nulle sur la surface de rayon d ; $Q_i = -2q + 2q = 0$ Et $E = 0$

Exercice 5

La distribution de charge sur le câble interne est linéique ($q_1 = \lambda L$) et le câble externe est initialement neutre. Donc en raisonnant de la même manière que l'exercice précédent, la surface interne du câble externe va se charger de $q_2 = -\lambda L$ et la surface externe du câble externe sera chargée par $q_3 = \lambda L$. Le câble interne, ayant une distribution linéique, sera considéré comme étant un fil.



1. À r<b : La charge interne sera

$$q_1 = \lambda L$$

et

$$E.2\pi r L = q_1/\varepsilon_0 \Rightarrow E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$$

À b<r<c : Pas de charge ($Q_i = q_1 + q_2 = 0$)
donc

$$E = 0$$

À r>c : La charge sera

$$Q_i = q_1 + q_2 + q_3 = \lambda L - \lambda L + \lambda L = \lambda L$$

et

$$E.2\pi r L = q_1/\varepsilon_0 \Rightarrow E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$$

2. Les charges sur les différentes surfaces sont :

$$q_2 = -\lambda L$$

Et

$$q_3 = +\lambda L$$

Donc la densité de charge sur la surface interne du câble externe sera :

$$q_2 = \sigma_b S_b = -\lambda L \Rightarrow \sigma_b = -\frac{\lambda L}{S_b} \Rightarrow \sigma_b = -\frac{\lambda}{2\pi.b}$$

Avec $S_b = 2\pi.b.L$
et la densité de charge sur la surface externe du câble externe sera :

$$q_3 = \sigma_c S_c = \lambda L \Rightarrow \sigma_b = \frac{\lambda L}{S_c} \Rightarrow \sigma_b = \frac{\lambda}{2\pi.c}$$

Avec $S_c = 2\pi.c.L$

Exercice 6

I. Le cylindre (Cy_1) a une distribution de charge volumique.

a. On recherche l'expression du champ électrique en tout point de l'espace, c'est à dire à $r < R_1$ et à $r > R_1$.
La surface fermée de Gauss que l'on doit utiliser est celle d'un cylindre (voir l'exercice Gauss cylindre) et sachant que le champ électrique est radial quand $L >> R_1$, alors ;

$$\Phi = \oint \vec{E} d\vec{S} = E.S_L \cos 0° + E.S_D \cos 90° = E.S_L$$

Et

$$\Phi = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$$

Avec $S_L = 2\pi r L$
<u>À $r < R_1$</u> ; on aura

$$Q_{int} = \rho \int_0^r dV = \rho \int_0^r r dr \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^L dz = \rho \pi r^2 L$$

et donc

$$E.2\pi r L = \frac{\rho \pi r^2 L}{\varepsilon_0}$$

On obtiendra

$$E = \frac{\rho}{2\varepsilon_0} r$$

<u>À $r > R_1$</u> ; la charge interne à la surface de Gauss considérée sera

$$Q_{int} = Q_1 = \rho \int_0^{R_1} r dr \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^L dz = \rho \pi R_1^2 L$$

et donc

$$E = \frac{\rho R_1^2}{2\varepsilon_0 r}$$

L'expression du champ électrique en tout point de l'espace sera :

$$E(r) = \begin{cases} \frac{\rho}{2\varepsilon_0} r & \text{à } r < R_1 \\ \\ \frac{\rho R_1^2}{2\varepsilon_0 r} & \text{à } r > R_1 \end{cases}$$

b. La charge électrique contenue dans ce cylindre si $\rho = -0,106\ C/m^3$ est :

$$Q_1 = \rho.V = \rho.\pi R_1^2 L = -0,106.\pi.10^{-4} \times 15.10^{-2} = -5.10^{-6} C = -5\mu C$$

II. On enveloppe, à présent, le cylindre (Cy_1) par un cylindre (Cy_2) creux métallique.

a. Cy_2 est un conducteur puisque métallique. Une des caractéristiques d'un conducteur à l'équilibre est qu'il ne peut avoir de charges en son sein, i.e la charge totale interne du conducteur est nulle. La quantification de la nouvelle distribution de charges du système se fera en prenant en compte cette caractéristique.
Jusqu'à R_1, la distribution de charges est volumique et est égale à
$Q_1 = -5\mu C$, donc pour que notre conducteur ait une charge nulle, les charges négatives (électrons) vont migrer vers la surface externe créant une polarisation entre les deux surfaces du cylindre creux (Cy_2). On aura donc $Q_1 = -5\mu C$, $Q_2 = +5\mu C$ à R_2 et $Q_3 = -5\mu C$ à R_3.

b. L'expression du champ électrique ne changera pas dans les régions suivantes : $r < R_1$ et $R_1 < r < R_2$.
<u>À $R_2 < r < R_3$</u> ; $E = 0$ car $Q_{int} = Q_1 + Q_2 = 0$
<u>À $r > R_3$</u> ; $Q_{int} = Q_1 + Q_2 + Q_3 = Q_3 = \sigma 2\pi R_3 L$
La distribution de charge sur le conducteur ne peut être que surfacique !

$$E.2\pi r L = \frac{\sigma \pi R_3 L}{\varepsilon_0}$$

$$E = \frac{\sigma R_3}{\varepsilon_0 r}$$

L'expression du champ électrique en tout point de l'espace sera :

$$E(r) = \begin{cases} \frac{\rho}{2\varepsilon_0} r & \text{à } r < R_1 \\ \frac{\rho R_1^2}{2\varepsilon_0 r} & \text{à } R_1 < r < R_2 \\ 0 & \text{à } R_2 < r < R_3 \\ \frac{\sigma R_3}{\varepsilon_0 r} & \text{à } r > R_3 \end{cases}$$

c. Le potentiel électrique dans toutes les régions du système est calculé à partir de la loi $V = -\int \vec{E}.d\vec{r}$.

$$V(r) = \begin{cases} -\frac{\rho}{4\varepsilon_0} r^2 + A & \text{à } r < R_1 \\ -\frac{\rho R_1^2}{2\varepsilon_0} \ln r + B & \text{à } R_1 < r < R_2 \\ C & \text{à } R_2 < r < R_3 \\ -\frac{\sigma R_3}{\varepsilon_0} \ln r + D & \text{à } r > R_3 \end{cases}$$

Le potentiel s'annule en $r = 0$, cela implique que $A = 0$. En vérifiant la condition de continuité du potentiel en R_1, on peut écrire que

$$-\frac{\rho}{4\varepsilon_0}R_1^2 = -\frac{\rho R_1^2}{2\varepsilon_0}\ln R_1 + B$$

On peut déduire ;

$$B = \frac{\rho R_1^2}{2\varepsilon_0}\left[\ln R_1 - \frac{1}{2}\right]$$

En procédant de la même manière en R_2 ;

$$-\frac{\rho R_1^2}{2\varepsilon_0}\ln R_2 + \frac{\rho R_1^2}{2\varepsilon_0}\left[\ln R_1 - \frac{1}{2}\right] = C$$

$$C = \frac{\rho R_1^2}{2\varepsilon_0}\left[\ln\frac{R_1}{R_2} - \frac{1}{2}\right]$$

Pour trouver la constante D, on vérifie la continuité du potentiel en R_3 ;

$$C = -\frac{\sigma R_3}{\varepsilon_0}\ln R_3 + D$$

Donc

$$\frac{\rho R_1^2}{2\varepsilon_0}\left[\ln\frac{R_1}{R_2} - \frac{1}{2}\right] = -\frac{\sigma R_3}{\varepsilon_0}\ln R_3 + D$$

$$D = \frac{\rho R_1^2}{2\varepsilon_0}\left[\ln\frac{R_1}{R_2} - \frac{1}{2}\right] + \frac{\sigma R_3}{\varepsilon_0}\ln R_3$$

L'expression du potentiel électrique en tout point de l'espace sera :

$$V(r) = \begin{cases} -\frac{\rho}{4\varepsilon_0}r^2 & \text{à } r < R_1 \\ \frac{\rho R_1^2}{2\varepsilon_0}\left[\ln\frac{R_1}{r} - \frac{1}{2}\right] & \text{à } R_1 < r < R_2 \\ \frac{\rho R_1^2}{2\varepsilon_0}\left[\ln\frac{R_1}{R_2} - \frac{1}{2}\right] & \text{à } R_2 < r < R_3 \\ \frac{\rho R_1^2}{2\varepsilon_0}\left[\ln\frac{R_1}{R_2} - \frac{1}{2}\right] + \frac{\sigma R_3}{\varepsilon_0}\ln\frac{R_3}{r} & \text{à } r > R_3 \end{cases}$$

d. La densité de charge sur la surface externe du cylindre (Cy_2) est ;

$$\sigma_3 = \frac{Q_3}{S_3} = \frac{Q_3}{2\pi.R_3 L} = \frac{-5.10^{-6}}{2\pi.1,5.10^{-2} \times 15.10^{-2}} = -3,53.10^{-4}C/m^2$$

6. Les condensateurs

6.1 Exercices

Exercice 1

Un condensateur dont la capacité est $C = 5\ pF$, est composé de deux armatures planes et circulaires. Ce condensateur est utilisé dans un circuit qui est soumis à une ddp de 100 V (différence de potentiels entre les armatures). Le champ électrique entre ses armatures ne dépasse pas $10^4\ N/C$. En tant qu'ingénieur en électricité, votre tâche sera de ;

1. trouver la dimension physique de ce condensateur,
2. et de calculer la charge maximale que peut emmagasiner ce condensateur.

Exercice 2

Un condensateur sphérique, branché à un générateur de courant continu avec une ddp de 220 V, contient une charge de 3.30 nC. Si les armatures sont séparées par le vide et que le rayon de l'armature externe est de $r_e = 4\ cm$.

1. Calculez la capacité.
2. En déduire le rayon de l'armature interne r_i.
3. Donnez l'expression du champ électrique sur la surface de la sphère interne.

Exercice 3

Soit un condensateur cylindrique composé de deux conducteurs de forme cylindrique et dont le cylindre interne a pour rayon, $r_1 = 0.25\ cm$, recouvert d'un autre cylindre dont le rayon, r_2 est à déterminer. La capacité de ce condensateur est de 36.7 pF et la longueur du condensateur cylindrique est 12 cm.

Exercice 4

Soit un condensateur formé d'une coque sphérique conductrice S_2 placée autour d'une sphère pleine métallique S_1 plus petite et chargée de Q_A. S_1 a pour rayon, $R_1 = 0.20\ m$, et S_2 a pour rayons interne $R_2 = 0.25\ m$ et externe $R_3 = 0.30\ m$.

1. Trouver l'expression du champ électrique, en tout point, qui a pour origine le point O centre commun des deux sphères.

2. Déterminer les potentiels qui en découlent.
3. Calculer la capacité du condensateur.

Exercice 5

I. Soit une sphère pleine métallique (S_1) de rayon $R_1 = 3$ cm, chargée d'une distribution uniforme.

   1. Donner l'expression du champ électrique à l'intérieure, à l'extérieure et sur la surface de la sphère.
   2. Déterminer le potentiel électrique à l'intérieure, à l'extérieure de la sphère, si le potentiel à $r = 0$ est égal à $\sigma R_1/\varepsilon_0$.

II. On enveloppe à présent la sphère (S_1), qui porte une charge initiale équivalente à $+5q$, par une sphère conductrice creuse (S_2) de rayons interne R_2 et externe $R_3 = 5$ cm, portant une charge électrique initiale de $-5q$.

   1. Trouver la nouvelle distribution de charges des deux sphères.
   2. L'expression du champ électrique va-t-il changer dans les régions $0 < r < R_1$ et $R_1 < r < R_2$? Justifier.
   3. Calculer le rayon interne R_2 si la capacité de ce condensateur est $C = 10$ pF.
   4. Calculer les densités de charges des deux sphères (S_1) et (S_2) si on donne $q = 8$ nC et $\varepsilon_0 = 8,85\ 10^{-12}$ C/(V.m).

6.2 Solutions

Exercice 1

1. Rechercher la dimension physique du condensateur revient à calculer la distance entre les armatures "d", la surface et le rayon de ses armatures planes et circulaires. La différence de potentiel entre deux armatures **planes** est obtenue par la relation suivante :

$$V_{ab} = E.d \tag{6.1}$$

On peut donc déduire la valeur de la distance entre les armatures :

$$d = \frac{V_{ab}}{E} = \frac{100}{10^4} = 0,01\ m = 1\ cm \tag{6.2}$$

La surface des armatures est celle du disque ($S = \pi r^2$), puisque les armatures sont planes et **circulaires**. Et on sait que pour un condensateur **plan** (vu en cours) dont les armatures ont la même surface, la capacité sera égale à :

$$C = \frac{\varepsilon_0 S}{d} \implies S = \frac{Cd}{\varepsilon_0} = \frac{5 \times 10^{-12} \times 10^{-2}}{8,854 \times 10^{-12}} = 5,65\ 10^{-3}\ m^2 \tag{6.3}$$

Et puisque $S = \pi r^2$ alors :

$$r = \sqrt{S/\pi} = 4,24\ 10^{-2}\ m = 4,24\ cm \tag{6.4}$$

2. La charge que peut emmagasiner ce condensateur est estimée à partir de la loi suivante :

$$Q = CV_{ab} = 5 \times 10^{-12} \times 100 = 0,5\,10^{-9}\ C = 0,5\ nC \tag{6.5}$$

Exercice 2

1. Calcul de la capacité :

$$C = \frac{Q}{V_{ab}} = \frac{3,3\ 10^{-9}}{220} = 15\ 10^{-12} F = 15\ pF \tag{6.6}$$

2. Pour trouver le rayon, il faut tout d'abord trouver l'expression de la capacité (C). Sachant que celle-ci dépend des potentiels (V_{max} et V_{min}) sur les surfaces des conducteurs constituant le condensateur, on doit procéder au calcul du champ électrique dans la région limitant le condensateur :

$$\int E.dS = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$$

La surface de Gauss qui convient, à cette distribution continue de charge, est la surface d'une sphère, à savoir, $S = 4\pi r^2$

On peut constater que sous ces conditions, le champ électrique à $r < r_i$ et $r > r_e$ est nul car la charge électrique à l'intérieur de la surface de Gauss choisie sera nulle (r est le rayon de la surface de Gauss). Entre les armatures conductrices (à $r_i < r < r_e$), le champ électrique est non nul et sera sous la forme suivante ;

$$E = KQ/r^2$$

et la différence de potentiel

$$V_{ab} = -\int_{r_i}^{r_e} E dr = KQ(\frac{1}{r_i} - \frac{1}{r_e}) \tag{6.7}$$

À partir de cette dernière équation, on peut déduire la valeur du rayon interne r_i :

$$\frac{1}{r_i} = \frac{1}{r_e} + \frac{V_{ab}}{KQ} \tag{6.8}$$

On obtient $r_i = 3,08$ cm

3. Le champ électrique à la surface de l'armature interne est $E = \sigma_i/\varepsilon_0$, et $\sigma_i = Q_i/(4\pi r_i^2)$, donc

$$E = \frac{Q_i}{4\pi\varepsilon_0 r_i^2} = \frac{9.10^9 \times 3,3.10^{-9}}{(3,08.10^{-2})^2} = 3,12\ 10^4\ \ V/m \tag{6.9}$$

Exercice 3

Le champ électrique qui se trouve entre les deux armatures est obtenu, à partir du théorème de Gauss, sous la forme suivante :

$$E = \frac{Q}{2\pi L\varepsilon_0 r}$$

Sachant que le champ électrique est le gradiant du potentiel, on peut à partir de $V = -\int E(r)dr$, écrire que

$$V_1 = -\frac{Q}{2\pi L\varepsilon_0}\ln r_1$$

Et

$$V_2 = -\frac{Q}{2\pi L\varepsilon_0}\ln r_2$$

$$V_1 - V_2 = \frac{Q}{2\pi L\varepsilon_0}\ln r_2/r_1 > 0$$

La capacité étant

$$C = \frac{Q}{V_1 - V_2}$$

Alors

$$C = \frac{2\pi L\varepsilon_0}{\ln r_2/r_1}$$

Exercice 4

Un condensateur formé d'une coque sphérique conductrice S_2 placée autour d'une sphère pleine métallique S_1 plus petite et chargée de distribution surfacique Q_B. Cette distribution de charges aura une influence totale sur les surfaces interne et externe de la coque sphérique S_2. Toutes les distributions de charges seront surfaciques, car les deux sphères sont conductrices et on aura sur la surface interne de S_2 la charge $q = -Q_B$ pour neutraliser les charges internes du conducteur externe S_2 et la surface externe de S_2 n'étant pas chargée initialement, elle se chargera de $Q_A = Q_B$.

1. Expression du champ électrique, en tout point, ayant pour origine le point O centre commun des deux sphères.
   À r<R$_1$: Il n'y a pas de charge à l'intérieur de la surface fermée ($Q_i = 0$). Donc $E = 0$
   À R$_1 < r < R_2$: La charge sera $Q_i = Q_B$ et donc

$$E.4\pi r^2 = \frac{Q_B}{\varepsilon_0} \Rightarrow E = \frac{Q_B}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

   À R$_2 < r < R_3$: Il n'y a pas de charge ($Q_i = Q_B + q = 0$) et $E = 0$ (la sphère est conductrice donc sa charge est en surface à $r = R_3$).
   À R$_3 < r$: La charge sera $Q_i = Q_B + q + Q_A = Q_A$ et donc

$$E.4\pi r^2 = \frac{Q_A}{\varepsilon_0} \Rightarrow E = \frac{Q_A}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

2. Détermination des potentiels qui en découlent.
   À r<R$_1$: Le potentiel est constant $V_I = A$
   À R$_1 < r < R_2$: Après intégration, le potentiel est

$$V_{II} = \frac{Q_B}{4\pi\varepsilon_0 r} + B$$

   À R$_2 < r < R_3$: $V_{III} = C$ (la sphère est conductrice donc le potentiel en son sein est constant).
   À R$_3 < r$: Le potentiel devient

$$V_{IV} = \frac{Q_A}{4\pi\varepsilon_0 r} + D$$

   À $r \to \infty$; le potentiel s'annule donc $V_{IV}(\infty) = 0$
   Cela implique que $D = 0$.
   En utilisant les conditions de continuité ; $V_{IV}(R_3^+) = V_{III}(R_3^-)$
   d'où

$$\frac{Q_A}{4\pi\varepsilon_0 R_3} = C$$

   En utilisant, toujours, les conditions de continuité, on peut écrire que $V_{III}(R_2^+) = V_{II}(R_2^-)$
   d'où

$$\frac{Q_A}{4\pi\varepsilon_0 R_3} = \frac{Q_B}{4\pi\varepsilon_0 R_2} + B$$

donc

$$B = \left[\frac{Q_A}{R_3} - \frac{Q_B}{R_2}\right]\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$$

Et enfin le calcul de la constante A, à partir des conditions de continuité ; $V_{II}(R_1^+) = V_I(R_1^-)$
d'où

$$\left[\frac{Q_B}{R_1} + \frac{Q_A}{R_3} - \frac{Q_B}{R_2}\right]\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = A$$

Les potentiels seront

$$V(r) = \begin{cases} V_I = \left[\frac{Q_B}{R_1} + \frac{Q_A}{R_3} - \frac{Q_B}{R_2}\right]\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} & \text{à } r < R_1 \\ V_{II} = \frac{Q_B}{4\pi\varepsilon_0 r} + \left[\frac{Q_A}{R_3} - \frac{Q_B}{R_2}\right]\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} & \text{à } R_1 < r < R_2 \\ V_{III} = \frac{Q_A}{4\pi\varepsilon_0 R_3} & \text{à } R_2 < r < R_3 \\ V_{IV} = \frac{Q_A}{4\pi\varepsilon_0 r} & \text{à } r > R_3 \end{cases}$$

3. Pour calculer la capacité du condensateur, on doit savoir quels sont les potentiels à utiliser. On peut voir que sur les deux surfaces conductrices qui forment le condensateur et qui sont l'un opposé à l'autre, les potentiels sont ; V_I pour le conducteur interne et V_{III} pour le conducteur externe. Donc

$$V_I - V_{III} = Q/C$$

Attention, il faut toujours confirmé que la différence de potentiel est positive !

$$V_I - V_{III} = \left[\frac{Q_B}{R_1} + \frac{Q_A}{R_3} - \frac{Q_B}{R_2}\right]\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} - \frac{Q_A}{4\pi\varepsilon_0 R_3}$$

En simplifiant certains termes ;

$$V_I - V_{III} = \left[\frac{Q_B}{R_1} - \frac{Q_B}{R_2}\right]\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$$

Et on sait que $Q_A = Q_B = Q$ donc

$$V_I - V_{III} = \left[\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right]\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}$$

$$V_I - V_{III} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{R_2 - R_1}{R_1 R_2}\right)$$

$$C = \frac{Q}{V_I - V_{III}} = 4\pi\varepsilon_0\frac{R_2 R_1}{R_2 - R_1}$$

$$C = 111,26\ pF$$

Exercice 5

I. La sphère (S_1) est pleine et métallique de rayon $R_1 = 3$ cm, la distribution de charge ne peut être que surfacique puisque la sphère est métallique donc conductrice.

1. Le champ électrique, en tout point, est :
   À r<R$_1$: Il n'y a pas de charge à l'intérieur d'un conducteur ($Q_i = 0$). Donc $E = 0$
   À r>R$_1$: Le champ électrique sera obtenu à partir de
   $$E.4\pi r^2 = \frac{\sigma 4\pi R_1^2}{\varepsilon_0} \Rightarrow E = \frac{\sigma R_1^2}{\varepsilon_0 r^2}$$
   À r=R$_1$: Le champ élecrique sera
   $$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$
2. Le potentiel est égal à $\sigma R_1/\varepsilon_0$ à $r = 0$.
   À r<R$_1$: Le potentiel est constant et donc $V_I = \sigma R_1/\varepsilon_0$.
   À r>R$_1$: Le potentiel sera obtenu à partir de
   $$V_{II} = -\int E.dr = \frac{\sigma R_1^2}{\varepsilon_0 r} + A$$
   À $r \approx R_1$, la condition de continuité nous permet d'écrire :
   $$V_I(r \approx R_1^-) = V_{II}(r \approx R_1^+)$$
   $$\Rightarrow \sigma R_1/\varepsilon_0 = \frac{\sigma R_1^2}{\varepsilon_0 R_1} + A$$
   Donc
   $$A = 0$$
   Et le potentiel sera
   À r<R$_1$: $V_I = \sigma R_1/\varepsilon_0$.
   À r>R$_1$: $V_{II} = \sigma R_1^2/(\varepsilon_0 r)$

II. 1. La sphère conductrice interne S_1 est chargée initialement de $Q = +5q$, en enveloppant celle-ci par une autre sphère conductrice, la surface interne de la sphère S_2 se chargera de $Q_i = -Q = -5q$ pour neutraliser les charges et la surface externe de S_2 étant chargée initialement par $Q_{ei} = -5q$ sera chargée par $Q_e = Q_{ei} + Q = -5q + 5q = 0$.

2. L'expression du champ électrique ne va pas changer dans les régions $0 < r < R_1$ et $R_1 < r < R_2$ car le flux dépend des charges à l'intérieur des surfaces fermées, et ces charges ne changent pas dans ces régions.
3. pour calculer le rayon interne R_2, on doit tout d'abord trouver la différence de potentiel entre les armatures.
   À $R_1 < r < R_2$: le champ électrique est sous la forme
   $$E = \frac{\sigma R_1^2}{\varepsilon_0 r^2}$$

Donc

$$V_{R_1} = \frac{\sigma R_1}{\varepsilon_0} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R_1}$$

Et

$$V_{R_2} = \frac{\sigma R_1^2}{\varepsilon_0 R_2} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R_2}$$

Sachant que la charge qui se trouve sur la surface de rayon R_1 est égale à

$$Q = \sigma 4\pi R_1^2$$

d'où

$$V_{ab} = V_{R_1} - V_{R_2} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) > 0$$

La capacité est

$$C = Q/V_{ab} = 4\pi\varepsilon_0\left(\frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}\right)$$

On donne $C = 10pF$, on obtient alors

$$R_2 = 0,045\ m$$

4. Les densités de charges de la surface de (S_1) et de la surface interne et externe de (S_2) seront

$$\sigma_1 = Q/S_1$$

Et

$$\sigma_2 = -Q/S_2$$

Avec $S_1 = 4\pi R_1^2$, $S_2 = 4\pi R_2^2$ et $Q = 40\ 10^{-9}\ C$, on trouvera alors

$$\sigma_1 = 3,53\ 10^{-6}\ C/m^2$$

Et

$$\sigma_2 = -1,57\ 10^{-6}\ C/m^2$$

$\sigma_3 = 0$ car il n'y a pas de charges sur la surface externe de S_2.