Table des matières

Préface

Ce polycopié présente un résumé du cours et des exercices corrigés du programme de la matière d'algébre 2 de la première année de la formation préparatoire à l'école supérieure des sciences appliquées Tlemcen (E.S.S.A.T). Il vise précisément les étudiants de la première année (MI, ST et SM). Le contenu de ce document est inspiré des enseignements donnés à l'école E.S.S.A.T durant la période $2009-2022$.

Cet ouvrage contient cinq chapitres dont :
Le premier chapitre concerne les espaces vectoriels, les sous espaces vectoriels, somme et somme directe des sous espaces vectoriels, la dimension des sous espaces vectoriels et les sous espaces vectoriels supplémentaires.

Le deuxième chapitre traite les matrices, les opérations sur les matrices, transposée d'une matrice, matrices carrées et déterminants, matrices inversibles et changement de base et matrice de passage.

Le troisième chapitre comporte les applications linéaires, les opérations sur les applications linéaires, la méthode appliquée pour déterminer le noyau, l'image et le rang d'une application linéaire.
De plus la caractérisation de l'injectivité, la surjectivité et la bijectivité.

Le quatrième chapitre englobe la résolution des systémes d'équations linéaires en appliquant la régle de Cramer, l'inverse d'une matrice et la méthode de Gauss.

Le cinquième chapitre considère la réduction des matrices, en se basant sur la méthode de calculer les valeurs propres, les vecteurs propres associes à chaque valeur propre, le polynôme caractéristique, caractérisation des matrices diagonalisables, des matrices trigonalisables et les applications de la réduction.
Chaque chapitre est suivi d'une série d'exercices proposés avec corrigés.
Ce manuscrit aide les étudiants à comprendre et à savoir faire divers problèmes.

Chapitre 1

Espaces vectoriels

1.1 Espaces vectoriels

Définition 1. *Soit E un ensemble non vide muni d'une loi de composition interne $(+)$ et une loi de composition extérieure $(.)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ si*

1. *$(E, +)$ est un groupe commutatif.*
   (a) $\forall u, v \in E$, *on a* $u + v = v + u$.
   (b) $\forall u, v, w \in E$, *on a* $(u + v) + w = u + (v + w)$.
   (c) $\exists! e \in E, \forall v \in E$, *on a* $e + v = v + e = v$.
   (d) $\forall v \in E, \exists! v' \in E$, *on a* $v + v' = v' + v = e$.
2. $\forall \alpha,\ \beta \in \mathbb{K},\ \forall u,\ v \in E$:
   (a) $1_{\mathbb{K}} v = v$, *avec* $1_{\mathbb{K}}$ *est l'élément neutre pour la multiplication dans* $\mathbb{K}$.
   (b) $\alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v$.
   (c) $(\alpha + \beta)v = \alpha v + \beta v$.
   (d) $\alpha(\beta.v) = (\alpha.\beta)v$.

Exemple 1.

1. *L'ensemble des fonctions continues est un sous espace vectoriel de l'espace des fonctions* $F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
2. $\mathbb{R}_2[X]$ *est un sous espace vectoriel de l'espace des polynômes* $\mathbb{R}[X]$.

1.2 Sous espaces vectoriels

Définition 2. *Soit $(E, +, .)$ est l'espace vectoriel muni, de la loi de composition interne $(+)$ et la loi de composition externe $(.)sur\mathbb{K}$, et G une partie non vide de E.*
On appelle G sous espace vectoriel de E si $(G, +, .)$ est un espace vectoriel.

Définition 3. *Soit* $(E, +, .)$ *un espace vectoriel sur* $\mathbb{K}$ *et* G *un ensemble non vide de* E, *i.e* $0 \in G$.
G *est un sous espace vectoriel de* E *si et seulement si*

1. $\forall u,\ v \in G$, *on a* $(u + v) \in G$
2. $\forall \alpha \in \mathbb{K},\ \forall u \in G$, *on a* $\alpha u \in G$.

Autrement dit

Définition 4. G *est un sous espace vectoriel de* E *si et seulement si*

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K},\ \forall u,\ v \in G; \alpha u + \beta v \in G.$$

Exemple 2.

1. *L'ensemble des fonctions continues est un sous espace vectoriel de l'espace des fonctions* $F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
2. $\mathbb{R}_2[X]$ *est un sous espace vectoriel de l'espace des polynômes* $\mathbb{R}[X]$.

1.3 Somme de sous espaces vectoriels

Définition 5. *Soit* E *un espace vectoriel de dimension finie et* $G_1,\ G_2$ *deux sous espaces vectoriels de* E.
La somme de G_1 *et* G_2 *est le sous espace vectoriel de* E *défini par*

$$G_1 + G_2 = \{u_1 + u_2,\ \textit{avec}\ u_1 \in G_1\ \textit{et}\ u_2 \in G_2\}.$$

Remarque 1. $G_1 + G_2$ *est le plus petit sous espace vectoriel de* E *qui contient* G_1 *et* G_2.

1.3.1 Somme directe de sous espaces vectoriels

Définition 6. *On dit que* G_1 *et* G_2 *sont en somme directe et on la note* $G_1 \oplus G_2$ *si tout vecteur se décompose d'une manière unique en somme des d'un vecteur de* G_1 *et un vecteur de* G_2,*i.e*

$$G_1 \oplus G_2 \Longleftrightarrow \forall u \in G_1 + G_2,\ \exists! u_1 \in G_1,\ \exists! u_2 \in G_2,\ \textit{tel que}\ u = u_1 + u_2.$$

Proposition 1. G_1 *et* G_2 *sont en somme directe si et seulement si* $G_1 \cap G_2 = \{0_E\}$.
On note 0_E *l'élément neutre de* E.

1.3.2 Sous espaces supplémentaires

Définition 7. *On dit que les sous espaces vectoriels* G_1 *et* G_2 *sont supplémentaires dans* E *si ils sont en somme directe et si* $G = G_1 + G_2$, *c'est à dire*

$$E = G_1 \oplus G_2 \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{ccc} E & = & G_1 + G_2 \\ G_1 & \cap & G_2 = \{0_E\}. \end{array} \right.$$

Remarque 2. *Soit* E *un espace vectoriel de dimension finie, alors*
Il existe toujours un supplémentaire G_2 *de* G_1, *tandis que le supplémentaire n'est pas unique, mais tous les supplémentaires de* G_1 *ont la même dimension.*

1.3.3 Famille libre, famille liée, bases

Définition 8. *Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ et $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ une famille de vecteurs de E.*
Un vecteur u de E est combinaison linéaire de $u_1, u_2, \ldots, v_n$ si il existe une famille de scalaires $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ tels que

$$u = \mu_1 u_1 + \mu_2 u_2 + \ldots + \mu_n u_n.$$

De plus

Définition 9. *On dit que E est engendré par la famille $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$, telle que la famille $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ est une famille génératrice de E et on note : $E = vect\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$.*
Autrement dit $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ est une famille génératrice de E si et seulement si :

$$\forall u \in E, \exists\ \mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n \in \mathbb{K};\ u = \sum_{i=1}^{n} \mu_i u_i.$$

Famille libre

Définition 10. *On dit que la famille $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ est libre ou linéairement indépendante si $\forall \mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n \in \mathbb{K}; \sum_{i=1}^{n} \mu_i u_i = 0 \Longrightarrow \mu_1 = \mu_2 = \ldots = \mu_n = 0.$*

Famille liée

Définition 11. *On dit que la famille $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ est liée ou linéairement dépendante si $\forall \mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n \in \mathbb{K}; \sum_{i=1}^{n} \mu_i u_i = 0 \Longrightarrow \exists ! \mu_i \neq 0,$ avec $i = 1, \ldots, n.$*

Base

Définition 12. *On dit que la famille $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ est une base si elle est libre et génératrice en même temps, c'est à dire :*

$$\forall u \in E, \exists !\ \mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n \in \mathbb{K}; u = \sum_{i=1}^{n} \mu_i u_i.$$

De plus , on note la base par $B = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$, et u par $u = (\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n)_B$.

Dimension d'un espace vectoriel

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$, on appelle dimension de E est le nombre des éléments de la base et il est noté par $dim(E)$, c'est à dire $dim(E) = card\{u_1, u_2, \ldots, u_n\} = n$.

Théorème 1. *(Théorème de la base incomplète)*
Soit E un espace vectoriel de dimension n, alors :

1. *De toute famille génératrice, on peut extraire une base de F.*
2. *On peut compléter toute famille libre de telle sorte qu'elle soit une base de F.*

Remarque 3. *Soit F un espace vectoriel de dsimension finie et B une famille de vecteurs.*

1. *Si $cardB > dimF$, alors B est liée.*
2. *Si $cardB < dimF$, alors B n'est pas une famille génératrice.*
3. *Si B est une famille libre et $cardB = dimF$, alors B est une base.*
4. *Si B est une famille génératrice et $cardB = dimF$, alors B est une base.*

Exemple 3. *Déterminer la dimension de $\mathbb{R}^3$.*
Soit $u \in \mathbb{R}^3$, alors $u = (x, y, z)$, avec $x, y, z \in \mathbb{R}$ ce qui implique que

$$\begin{aligned} (x, y, z) &= (x, 0, 0) + (0, y, 0) + (0, 0, z) \\ &= x(1, 0, 0) + y(0, 1, 0) + z(0, 0, 1) \\ &= xe_1 + ye_2 + ze_3. \end{aligned}$$

Par suite la famille $\{e_1, e_2, e_3\}$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}^3$.
Montrons que la famille $\{e_1, e_2, e_3\}$ est libre.
Soient $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3 \in \mathbb{R}^3$, telles que $\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3 = 0$.
Ce qui donne

$$\alpha_1(1, 0, 0) + \alpha_2(0, 1, 0) + \alpha_3(0, 0, 1) = (0, 0, 0).$$

Ce qui implique que

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (0, 0, 0) \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_1 = 0.$$

Ce qui entraine que la famille $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ est libre.
Par conséquent la famille $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ est une base canonique de $\mathbb{R}^3$, ainsi

$$card = dim\mathbb{R}^3 = 3.$$

On note par $u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_B$ avec x, y et z les compsantes de u dans la base B.

Théorème 2. *Soit $B = \{(1, 0, \ldots, 0), (0, 1, \ldots, 0), \ldots, (0, 0, \ldots, 1)\}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^n$, alors $u \in \mathbb{R}^n \Rightarrow u = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_B$.*

Exemple 4. *Déterminer la dimension de $\mathbb{R}_3[X]$.*
Soit $P \in \mathbb{R}_3[X] \Rightarrow P(X) = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + a_3 X^3$ avec $a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$, alors $P(X) = a_0(1) + a_1(X) + a_2(X^2) + a_3(X^3)$.
Ce qui donne $B = \{1, X, X^2, X^3\}$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}_3[X]$.

Montrons que la famille $\{1, X, X^2, X^3\}$ est libre.
Soient $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \in \mathbb{R}$, tels que $\alpha_1(1) + \alpha_2(X) + \alpha_3(X^2) + \alpha_4(X^4) = 0$,
implique que $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0$.
Ce qui implique que la famille $\{1, X, X^2, X^3\}$ est libre.

Par suite, on remarque que la famille $\{1, X, X^2, X^3\}$ *est la base canonique de* $\mathbb{R}_3[X]$, *avec* $dim\mathbb{R}_3[X] = 4$ *et* $u = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}_B$.

Théorème 3. *Soit* $B = \{e_1, e_2, \ldots, e_n, e_{n+1}\}$ *une base de* $\mathbb{R}_n[X]$, *alors* $B = \{1, X, X^2, \ldots, X^n\}$ *et* $u \in \mathbb{R}_n[X] \Rightarrow u = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}_B$.

Exemple 5. *Soit* $B = \{u_1, u_2, u_3\}$ *tels que* $u_1 = (1, 0, 1)$, $u_2 = (0, 1, 1)$, $u_3 = (1, 1, -1)$, *montrer que* B *est une base de* $\mathbb{R}^3$.

Soient $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ *tels que*
$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3 = 0 \Rightarrow \alpha_1(1, 0, 1) + \alpha_2(0, 1, 1) + \alpha_3(1, 1, -1) = (0, 0, 0)$.

Ce qui donne
$(\alpha_1, 0, \alpha_1) + (0, \alpha_2, \alpha_2) + (\alpha_3, \alpha_3, -\alpha_3) = (0, 0, 0) \Rightarrow (\alpha_1 + \alpha_3, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3) = (0, 0, 0)$.

Ce qui implique
$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_3 & = & 0 \\ \alpha_2 + \alpha_3 & = & 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 & = & 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 & = & 0 \\ \alpha_2 & = & 0 \\ \alpha_3 & = & 0. \end{cases}$$
Donc la famille $B = \{u_1, u_2, u_3\}$ *est libre et puisque* $cardB = dim\mathbb{R}^3$, *ce qui entraine que* B *est une base de* $\mathbb{R}$.

Proposition 1. *Soient* G *et* S *deux sous espaces vectoriels d'un espace vectoriel* F *de dimension finie, alors* $dimG \leq dimF$ *et* $dimS \leq dimF$.
De plus $F = G \oplus S \Longleftrightarrow \begin{cases} dimG + dimS & = & dimF \\ G \cap S & = & \{0\}. \end{cases}$

1.4 Séries d'exercices

Exercice 1 :
On considère les ensembles E et F de $\mathbb{R}^2$ définis par :
$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ y = 2x\}$ et $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ y = -2x\}$.
1) Montrer que E et F sont des sous espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$.
2) Soit $u \in E$ et $v \in F$, vérifier si $(u + v) \in E \cup F$?
Que peut on déduire ?

Exercice 2 :
Dans $\mathbb{R}^3$, soit $F = vect\{u_1, u_2, u_3\}$ tels que
$u_1 = (1, -1, 1),\ u_2 = (0, 1, 1),\ u_3 = (3, 1, 7)$.
1) La famille $\{u_1, u_2, u_3\}$ est elle libre ?
2) Déterminer une base de F et sa dimension.
3) Trouver un supplémentaire de F dans $\mathbb{R}^3$.

Exercice 3 :
Soient F et G deux sous espaces vectoriels Dans $\mathbb{R}^3$, tels que
$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ 2x - y + z = 0\}$.
$G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x - 2y + 3z = 0\}$.
1) Déterminer une base de F et sa dimension.
2) Déterminer une base de G et sa dimension.
3) F et G sont ils en somme directe ?

Exercice 4 :
On considère dans $\mathbb{R}^3$, le polynôme $P(X) = 2X^3 + 2X^2 - 3X - 1$.
1) Déterminer les racines du polynôme $P(X)$.
2) Factoriser $P(X)$ dans $\mathbb{R}_3[X]$.
3) Soit $B = \{(X - 1)^3, (X - 1)^2, (X - 1), 1\}$, vérifier si B est une base de $\mathbb{R}_3[X]$.
4) Trouver les composantes de $P(X)$ dans la base B.

Exercice 5 :
Dans $\mathbb{R}^3$, on considère le sous espace vectoriel F tel que
$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ 2x - 3y + z = 0\}$.
1) Déterminer une base et un supplémentaire de F.
2) Soit un sous espace vectoriel $G = vect\{v\}$ avec $v = (0, -1, 1)$,
déterminer un supplémentaire de G.

Exercice 6 : On considère $G = \{P \in \mathbb{R}_2[X],\ P(0) = P(2)\}$.
1) Vérifier que G est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}_2[X]$.
2) Déterminer une base de G et sa dimension.
3) Trouver un supplémentaire de G.

Exercice 7 :
Soit E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}$, F et G deux sous espaces vectoriels de E.
Montrer que $dimF + dimG > n \Longrightarrow F + G$ contient un vecteur non nul.

1.5 Corrigé de la série d'exercices

<u>**Exercice 1 :**</u>
On considère les ensembles E et F de $\mathbb{R}^2$ définis par :
$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ y = 2x\}$ et $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ y = -2x\}$.
1) Montrons que E et F sont des sous espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$.

Montrons que E est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.
a) L'élement neutre
$(0, 0) \in E$, car $0 = 2 \times 0$.

b) La stabilité
Soient $u_1,\ u_2 \in E$, tels que $u_1 = (x_1, y_1)$ et $u_2 = (x_2, y_2)$, ce qui implique que
$u_1 + u_2 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$, àn a
$u_1 \in E \Longrightarrow y_1 = 2x_1$ et $u_2 \in E \Longrightarrow y_2 = 2x_2$.
Ce qui implique que $(y_1 + y_2) = 2(x_1 + x_2)$.
Ce qui donne $(u_1 + u_2) \in E$.

c) Multiplication par un scalaire
Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $u = (x, y) \in E$, on a
$u \in E \Longrightarrow y = 2x \Longrightarrow \lambda y = \lambda 2x = 2(\lambda x)$, donc $\lambda u \in E$.
Ce qui entraine que E est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.

Montrons que F est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.
a) L'élement neutre
$(0, 0) \in E$, car $0 = -2 \times 0$.

b) La stabilité
Soient $v_1,\ v_2 \in E$, tels que $v_1 = (x_1, y_1)$ et $v_2 = (x_2, y_2)$, ce qui implique que
$v_1 + v_2 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$, àn a
$v_1 \in F \Longrightarrow y_1 = -2x_1$ et $v_2 \in F \Longrightarrow y_2 = -2x_2$.
Ce qui implique que $(y_1 + y_2) = -2(x_1 + x_2)$.
Ce qui donne $(v_1 + v_2) \in F$.

c) Multiplication par un scalaire
Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $v = (x, y) \in F$, on a
$v \in F \Longrightarrow y = -2x \Longrightarrow \lambda y = \lambda(-2x) = -2(\lambda x)$, donc $\lambda v \in F$.
Ce qui entraine que F est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.

2) Soit $u \in E$ et $v \in F$, vérifier si $(u + v) \in E \cup F$?
Prenons par exemple $u = (1, 2)$ et $v_(1, -2)$, alors $u + v = (2, 0) \neq E$ et $(2, 0) \neq F$.
Ce qui prouve que $u + v \neq E \cup F$.
On déduit que $E \cup F$ n'est pas un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.

<u>**Exercice 2 :**</u>
Dans $\mathbb{R}^3$, soit $F = vect\{u_1, u_2, u_3\}$ tels que
$u_1 = (1, -1, 1),\ u_2 = (0, 1, 1),\ u_3 = (3, 1, 7)$.
1) La famille $\{u_1, u_2, u_3\}$ est elle libre ?

Soient $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$, telle que

$$\begin{array}{rcl} \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 & = & 0 \\ \lambda_1(1,-1,1) + \lambda_2(0,1,1) + \lambda_3(3,1,7) & = & (0,0,0) \\ (\lambda_1, -\lambda_1, \lambda_1) + (0, \lambda_2, \lambda_2) + (3\lambda_3, \lambda_3, 7\lambda_3) & = & (0,0,0) \\ (\lambda_1 + 3\lambda_3, -\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3, \lambda_1 + \lambda_2 + 7\lambda_3) & = & (0,0,0). \end{array}$$

Ce qui donne
$$\left\{ \begin{array}{lcl} \lambda_1 + 3\lambda_1 & = & 0 \\ -\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 & = & 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 + 7\lambda_3 & = & 0 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} \lambda_1 & = & -\lambda_3 \\ \lambda_2 & = & -4\lambda_3 \\ \lambda_3 & \in & \mathbb{R}. \end{array} \right.$$
Ce qui implique que la famille $\{u_1, u_2, u_3\}$ n'est pas libre, elle est liée.

2) Déterminons une base de F et sa dimension.
D'après la question précédente, on a $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 = 0$.
Si on prend $\lambda_3 = -1$, on obtient $u_3 = 3u_1 + 4u_2$.
Soient $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, telle que

$$\begin{array}{rcl} \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 & = & 0 \\ \lambda_1(1,-1,1) + \lambda_2(0,1,1) & = & (0,0,0) \\ (\lambda_1, -\lambda_1, \lambda_1) + (0, \lambda_2, \lambda_2) + (3\lambda_3) & = & (0,0,0) \\ (\lambda_1, -\lambda_1 + \lambda_2, \lambda_1 + \lambda_2) & = & (0,0,0). \end{array}$$

Ce qui donne
$$\left\{ \begin{array}{lcl} \lambda_1 & = & 0 \\ -\lambda_1 + \lambda_2 & = & 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 & = & 0 \end{array} \right. \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0.$$
Ce qui implique que la famille $\{u_1, u_2\}$ est libre et $dimF = 2$.
3) Trouvons un supplémentaire de F dans $\mathbb{R}^3$.
Soit G un supplémentaire de F, par suite

$$\begin{array}{rcl} dim\mathbb{R}^3 & = & dimF + dimG \\ dimG & = & dim\mathbb{R}^3 - dimF \\ dimG & = & 1. \end{array}$$

Ce qui implique que $G = vect\{v\}$ avec $F \cap G = \{0\}$.
On a $v \notin F$, car $dimG = 1$ donc on choisit par exemple $v = (0,0,1)$.

<u>**Exercice 3 :**</u>
Soient F et G deux sous espaces vectoriels Dans $\mathbb{R}^3$, tels que
$F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ 2x - y + z = 0\}$.
$G = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ x - 2y + 3z = 0\}$.

1) Déterminons une base de F et sa dimension.
Soit $u = (x,y,z) \in F \Longrightarrow 2x - y + z = 0 \Longrightarrow y = 2x + z$.
Ce qui donne $y = x(2,0,0) + z(0,0,1)$.
Ce qui entraine que $\{(2,0,0),(0,0,1)\}$ est une base de F et $dimF = 2$.

2) Déterminons une base de G et sa dimension.
Soit $v = (x, y, z) \in G \Longrightarrow x - 2y + 3z = 0 \Longrightarrow x = 2y - 3z$.
Ce qui donne $x = y(0, 2, 0) + z(0, 0, -3)$.
Ce qui entraine que $\{(0, 2, 0), (0, 0, -3)\}$ est une base de G et $dimG = 2$.

3) F et G sont ils en somme directe ?
Soit $w \in F \cap G$, cequi implique que
$\left\{\begin{array}{lll} w & \in & F \\ w & \in & G \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{lll} 2x - y + z & = & 0 \\ x - 2y + 3z & = & 0. \end{array}\right.$
Ce qui donne $z = 2x$ et $y \in \mathbb{R}$, par suite
$F \cap G \neq \{(0, 0, 0)\}$, donc F et G ne sont pas en somme directe.

<u>Exercice 4 :</u>
On considère dans $\mathbb{R}^3$, le polynôme $P(X) = 2X^3 + 2X^2 - 3X - 1$.

1) Déterminons les racines du polynôme $P(X)$.
On remarque que $P(1) = 0$, donc 1 est une racine dupolynôme $P(X)$, ce qui implique que $(X - 1)$ divise $P(X)$.
En appliquant la division euclidienne, on obtient
$P(X) = (X - 1)(2X^2 + 4X + 1)$, on calcule les racines du polynômes $2X^2 + 4X + 1$
$\Delta = 8 \Longrightarrow \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$, alors $X_1 = -1 - \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et $X_2 = -1 + \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

2) Factorisons $P(X)$ dans $\mathbb{R}_3[X]$.
$P(X) = (X - 1)\Big(X - \Big(-1 - \dfrac{\sqrt{2}}{2}\Big)\Big)\Big(X - \Big(-1 + \dfrac{\sqrt{2}}{2}\Big)\Big)$
$P(X) = (X - 1)\Big(X + \Big(1 + \dfrac{\sqrt{2}}{2}\Big)\Big)\Big(X + \Big(1 - \dfrac{\sqrt{2}}{2}\Big)\Big)$.

3) Soit $B = \{(X - 1)^3, (X - 1)^2, (X - 1), 1\}$, vérifier si B est une base de $\mathbb{R}_3[X]$.
Soient $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \in \mathbb{R}$, telle que

$$\begin{array}{rcl} \lambda_1(1) + \lambda_2(X - 1) + \lambda_3(X - 1)^2 + \lambda_4(X - 1)^3 & = & 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 X - \lambda_2 + \lambda_3(X^2 - 2X + 1) + \lambda_4(X^3 - 3X^2 + 3X - 1) & = & 0 \end{array}$$

Par suite
$(\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 - \lambda_4) + (\lambda_2 - 2\lambda_3 + 3\lambda_4)X + (\lambda_3 - 3\lambda_4)X^2 + \lambda_4 X^3 = 0$.
Par identification , on obtient
$\left\{\begin{array}{lll} \lambda_4 & = & 0 \\ \lambda_3 - 3\lambda_4 & = & 0 \\ \lambda_2 - 2\lambda_3 + 3\lambda_4 & = & 0 \\ \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 - \lambda_4 & = & 0 \end{array}\right. \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0.$
Ce qui implique que B est une famille libre, de plus $cardB = dim\mathbb{R}^3[X]$.
Dond d'après le théorème de la base incomplète B est une base de $\mathbb{R}^3[X]$.

4) Trouvons les composantes de $P(X)$ dans la base B.

$$\begin{array}{rcl} P(X) & = & \alpha_1(1) + \alpha_2(X - 1) + \alpha_3(X - 1)^2 + \alpha_4(X - 1)^3 \\ P(X) & = & \alpha_1 + \alpha_2 X - \alpha_2 + \alpha_3(X^2 - 2X + 1) + \alpha_4(X^3 - 3X^2 + 3X - 1). \end{array}$$

Par suite
$2X^3+2X^2-3X-1=(\alpha_1-\alpha_2+\alpha_3-\alpha_4)+(\alpha_2-2\alpha_3+3\alpha_4)X+(\alpha_3-3\alpha_4)X^2+\alpha_4X^3$.
Par identification , on obtient

$$\left\{\begin{array}{lcl}\alpha_4 & = & 2\\ \alpha_3-3\alpha_4 & = & 2\\ \alpha_2-2\alpha_3+3\alpha_4 & = & -3\\ \alpha_1-\alpha_2+\alpha_3-\alpha_4 & = & -1\end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{lcl}\alpha_4 & = & 2\\ \alpha_3 & = & 8\\ \alpha_2 & = & 7\\ \alpha_1 & = & 0.\end{array}\right.$$

Ainsi $P(X)=7(X-1)+8(X-1)^2+2(X-1)^3$.

<u>Exercice 5 :</u>
Dans $\mathbb{R}^3$, on considère le sous espace vectoriel F tel que
$F=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3,\ 2x-3y+z=0\}$.

1) Déterminons une base et un supplémentaire de F.
Soit $v=(x,y,z)\in F\Longrightarrow 2x-3y+z=0\Longrightarrow z=-2x+3y$.
Ce qui donne $z=x(-2,0,0)+y(0,3,0)$.
Ce qui entraine que $\{(-2,0,0),(0,3,0)\}$ est une base de F et $dimF=2$.

De plus, soit E un supplémentaire de F, on sait que

$$\begin{array}{rcl} dim\mathbb{R}^3 & = & dimF+dimE\\ dimE & = & dim\mathbb{R}^3-dimF\\ dimE & = & 1.\end{array}$$

Ce qui implique que $E=vect\{v\}$ avec $F\cap E=\{0\}$.
On a $v\notin F$, car $dimE=1$ donc on peut choisir $v=(1,0,1)$, par suite $E=vect\{(1,0,1)\}$.

2) Soit un sous espace vectoriel $G=vect\{v\}$ avec $v=(0,-1,1)$,
déterminons un supplémentaire de G.
soit S un supplémentaire de G, on sait que

$$\begin{array}{rcl} dim\mathbb{R}^3 & = & dimG+dimS\\ dimS & = & dim\mathbb{R}^3-dimG\\ dimS & = & 2.\end{array}$$

Ce qui implique que $S=vect\{w_1,w_2\}$ avec $G\cap S=\{0\}$.
On a $w_1\notin G$, et $w_2\notin G$, car $dimS=2$ donc on peut choisir deux vecteurs indépendant de v par exemple $w_1=(0,1,0),\ w_2=(0,0,1)$, par suite $S=vect\{(0,1,0),\ (0,0,1)\}$.

<u>Exercice 6 :</u>
On considère $G=\{P\in\mathbb{R}_2[X],\ P(0)=P(2)\}$.
1) Vérifions que G est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}_2[X]$.
a) L'élement neutre
$0\in G$, car $0(0)=0(2)=0$, (polynôme nul)

b) La stabilité
Soient $P_1,\ P_2\in G$, alors

$$\begin{cases} P_1 & \in & G \\ P_2 & \in & G \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P_1(0) & = & P_1(2) \\ P_2(0) & = & P_2(2). \end{cases}$$

Ce qui implique que $P_1(0) + P_2(0) = P_1(2) + P_2(2) \Rightarrow (P_1 + P_2)(0) = (P_1 + P_2)(2)$.
Cequi donne $(P_1 + P_2) \in G$.

c) Multiplication par un scalaire
Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $P \in G$, alors
$P \in G \Rightarrow P(0) = P(2) \Rightarrow \lambda P(0) = \lambda P(2) \Rightarrow (\lambda P)(0) = (\lambda P)(2)$.
Ce qui implique $(\lambda P) \in G$.

Donc G est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}_2[X]$.

2) Déterminons une base de G et sa dimension
Soit $P(X) \in \mathbb{R}_2[X] \Rightarrow P(X) = a_0 + a_1X + a_2X^2$.

On a $P \in G \Rightarrow P(0) = P(2) \Rightarrow a_0 + a_1(0) + a_2(0)^2 = a_0 + a_1(2) + a_2(2)^2$.
Ce qui donne
$a_0 = a_0 + 2a_1 + 4a_2 \Rightarrow a_1 = -2a_2$.
Ce qui implique que
$P(X) = a_0 + a_2(-2X + X^2) \Rightarrow G = vect < 1,\ X^2 - 2X > \Rightarrow \dim G = 2$.

3) Trouvons un supplémentaire de G
Soit F un supplémentaire de G, alors $F = vect\{Q\}$, tel que

$$\dim \mathbb{R}_2[X] = \dim\, G + \dim\, F$$

$$\dim\, F = \dim\, \mathbb{R}_2[X] - \dim\, G$$

$$\dim\, F = 3 - 2 = 1.$$

De plus, $F \cap G = \{0\} \Rightarrow Q \notin G$ car $\dim\, F = 1$, par suite $Q \neq 0$.
On peut choisir $Q(X) = X+1$, on conclut que $F = vect < X+1 >$ est un supplémentaire de G dans $\mathbb{R}_2[X]$.

Exercice 7 :
On a $Dim(F + G) = dimF + dimG - dim(F \cap G)$.
D'après l'ennoncé de l'exercice $dimF + dimG > n$.
Ce qui implique que $dim(F+G) > n - dim(F \cap G)$, or $dim(F \cap G) \leq n$, car $F \cap G \subset E$.
Ce qui donne $dim(F + G) > 0 \Longrightarrow F + G \neq \emptyset$.
Ce qui prouve que $F + G$ contient un vecteur non nul.

Chapitre 2

Matrices et déterminants

Définition 13. *Une matrice de type (n, p) avec $n,\ p \in \mathbb{N}^*$ sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ est un tableau rectangulaire de $n \times p$ éléments de $\mathbb{K}$, ordonnées en n lignes et p colonnes :*

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{np} \end{pmatrix},$$

telle que la composante a_{ij}, signifie la $i^{\text{ème}}$ ligne et la $j^{\text{ème}}$ colonne.

L'ensemble des matrices de n lignes et p colonnes à coefficients dans $\mathbb{K}$ est noré par $M_{n,p}(\mathbb{K})$.

Exemple 6. $B = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 1 & -2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$, *avec* $B \in M_{3,2}(\mathbb{R})$.

Matrices particulières

1) Soit $A \in M_{n,p}(\mathbb{K})$ Si $n = p$, alors A est appelée matrice carrée d'ordre n et notéé par $M_n(\mathbb{K})$.

Exemple 7. $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$.

2) La matrice nulle est la matrice où toutes ces composantes sont nulles et elle est notée par $0_{n,p}$.

3) La matrice identité d'ordre n est la matrice dont les composantes de la diagonale sont égale à 1, alors que toutes les autres composantes sont nulles.

Elle est notée I_n avec n est le nombre de ligne et de colonne.

$$\mathbf{I_1} = 1,\ \ \mathbf{I_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ \ \mathbf{I_3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2.1 Opérations sur les matrices

2.1.1 Addition des matrices

Définition 14. *Soit (a_{ij}) les composantes de la matrice A et (b_{ij}) les composantes de la matrice B. Afin d'additionner les deux matrices A et B, il suffit qu'elles soient de même* *type c'est à dire $A,\ B \in M_{n,p}(\mathbb{K})$, définie par*

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij}).$$

Exemple 8.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -6 & 1 \\ 2 & 0 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -2 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}.$$

Propriétés
Soient $A, B \in M_{n,p}(\mathbb{K})$, on a
a) $A + B = B + A$, (commutative).
b) $A + (B + C) = (A + B) + C$, (associative).
c) $A + 0_{n,p} = 0_{n,p} + A = A$.
d) $A + (-A) = (-A) + A = 0_{n,p}$.

2.1.2 Multiplication d'une matrice par un scalaire

Soient $A \in M_{n,p}(\mathbb{K})$ et $\mu \in \mathbb{K}$, avec ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), et a_{ij} sont les composantes de A.

Définition 15. *Les composantes de la matrice μB sont de la forme $d_{ij} = \mu b_{ij}$.*

Exemple 9.

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mu = -2 \Rightarrow \mu\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -10 & 0 \end{pmatrix}.$$

Propriétés
Soient $A, B \in M_{n,p}(\mathbb{K})$, et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, on a
a) $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$.
b) $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$.
c) $(\lambda\mu)A = \lambda(\mu A) = \mu(\lambda A)$.

2.1.3 Produit matriciel

Soient $B \in M_{n,p}(\mathbb{K})$ et $G \in M_{p,s}(\mathbb{K})$.
Afin de multiplier les deux matrices B et G il suffit que le nombre de colonnes de la première matrice est égale au nombre de lignes de la deuxième matrice c'est à dire

$$\mathbf{BG} = \begin{pmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{i1} & b_{i2} & \dots & b_{ip} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dots & g_{1j} & \dots & \dots \\ \dots & g_{2j} & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \dots & g_{pj} & \dots & \dots \end{pmatrix}.$$

Alors $d_{ij} = b_{i1}g_{1j} + b_{i2}g_{2j} + \ldots + b_{ip}g_{pj} = \displaystyle\sum_{s=1}^{p} b_{is}g_{sj}$.
Propriétés
Soient $A, B, C \in M_{n,p}(\mathbb{K})$, et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, on a
a) Le produit des matrices n'est pas commutative.

Exemple 10.

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 5 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 0 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Alors

$$\mathbf{BC} = \begin{pmatrix} -2 & 8 & 0 \\ 6 & -14 & 15 \\ -2 & 10 & 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{CB} = \begin{pmatrix} -6 & 20 \\ 13 & -7 \end{pmatrix}.$$

On remarque que $BC \neq CB$.

b) $A(BC) = (AB)C$.
c) $A(B + C) = AB + AC$.
d) $AI = IA = A$.
e) $A0 = 0A = 0$, (0 est la matrice nulle).

2.1.4 Transposée d'une matrice

Définition 16. *Soit* a_{ij} *les composantes de la matrice* A *avec* $A \in M_{n,p}(\mathbb{K})$, *alors les composantes de la transposée de* A *sont* a_{ji} *et elle est notée par* ${}^tA$.

Exemple 11.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 6 & 2 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow {}^{\mathbf{t}}\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Propriétés
Soient $A, B \in M_{n,p}(\mathbb{K})$, on a
a) ${}^t(A + B) = {}^tA + {}^tB$.
b) ${}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA$.
c) ${}^t({}^tB) = B$.
d) Si $B = {}^tB$, alors B est une matrice symétrique.
e) Si $B = -{}^tB$, alors B est une matrice antisymétrique.

2.2 Matrices carrées et déterminants

Définition 17. *(Rappel)*
A est dite matrice carrée si le nombre de lignes est égale au nombre de colonnes c'est à dire $A \in M_{n,n}(\mathbb{K})$ *on note* $A \in M_n(\mathbb{K})$.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

La diagonale de A sont les composantes qui se trovent dans la diagonale i.e $(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn})$.

Exemple 12. *Soit $A \in M_3(\mathbb{R})$, telle que*

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & -5 & 9 \\ 1 & 2 & 7 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Alors les composantes de la diagonale sont $-1,\ 2,\ 4$.

Théorème 4. *Soient $A,\ B,\ C \in M_n(\mathbb{K})$.*

1. *$\forall A \in M_n(\mathbb{K})$, alors ${}^tA \in M_n(\mathbb{K})$.*
2. *$\forall B,\ C \in M_n(\mathbb{K})$, alors $BC \in M_n(\mathbb{K})$.*

Exemple 13. *Soit $B,\ C \in M_2(\mathbb{R})$, telle que*

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow {}^{\mathbf{t}}\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{BC} = \begin{pmatrix} 7 & -4 \\ -4 & 8 \end{pmatrix}.$$

2.2.1 Déterminant d'une matrice carrée

Définition 18. *Le déterminant d'une matrice est une application de $M_n(\mathbb{K})$ vers $\mathbb{K}$.*

1. *Par rapport à chaque colonne, le déterminant est linéaire.*
2. *Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$, si A a deux colonnes identiques, alors le déterminant est nul.*
3. *Pour la matrice identité I_n, $\det I_n = 1$.*

Calcul du déterminant

Exemple 14. *Soit $A \in M_2(\mathbb{R})$, telle que $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$.*

Alors $\det A = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = -14.$

Définition 19. *Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$.*

1. *Le cofacteur de la matrice A correspondant à la composante a_{ij} le nombre $S_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ij}$ avec A_{ij} la matrice A dans laquelle on a enlevé la $i^{\text{ème}}$ ligne et la $j^{\text{ème}}$ colonne.*
2. *Le mineur d'ordre $n-1$ est le nombre $\det A_{ij}$.*

Théorème 5. *Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$,* $\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} S_{ij}$, $\forall i \in \{1, ..., n\}$,

$\det A = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} S_{ij}$, $\forall j \in \{1, ..., n\}$.

Exemple 15. *Calculer le déterminant de la matrice suivante*

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Pour calculer le déterminant, on peut choisir n'importe qu'elle ligne et n'importe qu'elle colonne.
On choisit $i = 1$, ce qui donne

$$\det A = \sum_{j=1}^{3} a_{1j} S_{1j} = a_{11}S_{11} + a_{12}S_{12} + a_{13}S_{13},$$

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} - (-1) \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = 17.$$

Théorème 6. *Soient B, $C \in M_n(\mathbb{K})$.*

1. $\det {}^tB = \det B$.
2. $\det BC = \det B \times \det C$.

Exemple 16.

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow {}^t\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$\det {}^tB = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + (-2) \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 17 = \det B.$$

Définition 20. *Soit $B \in M_n(\mathbb{K})$.*

1. *Si toutes les composantes non diagonales sont nulles, alors B est dite matrice diagonale.*
2. *Si toutes les composantes situées sous la diagonale sont nulles, alors B est dite matrice triangulaire supérieure.*
3. *Si toutes les composantes situées au dessus de la diagonale sont nulles, alors B est dite matrice triangulaire inférieure.*

Théorème 7. *Soit $B \in M_n(\mathbb{K})$.*
Le déterminant de B est égale au produit des composantes diagonales si B est une matrice diagonale, triangulaire inférieure ou triangulaire supérieure.

Exemple 17.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow \det A = (-1) \times 2 \times 5 = -10.$$

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \det B = 1 \times 3 \times (-3) = -9.$$

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 1 & -5 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow \det C = (-2) \times 4 \times (-3) = +24.$$

Théorème 8. *Soit $B \in M_n(\mathbb{K})$, avec $B = (A_1, A_2, \dots, A_i, \dots, A_s, \dots, A_n)$ telle que la $i^{\text{ème}}$ colonne de B, alors*

1. $\det(A_1, A_2, \dots, A_i + \alpha A_s, \dots, A_s, \dots, A_n) = \det(A_1, A_2, \dots, A_s, \dots, A_i, \dots, A_n) = \det B$.
2. $\det(A_1, A_2, \dots, A_s, \dots, A_i, \dots, A_n) = -\det(A_1, A_2, \dots, A_i, \dots, A_s, \dots, A_n) = -\det B$.
3. $\det(A_1, A_2, \dots, \gamma A_i, \dots, A_s, \dots, A_n) = \gamma \det(A_1, A_2, \dots, A_i, \dots, A_s, \dots, A_n) = \gamma \det B$.

Exemple 18. *Calculer le déterminant de la matrice suivante*

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & -2 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix},$$

On va rendre ctee matrice triangulaire supérieure.

$$\det G = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & -2 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{matrix} \leftarrow L_1 \\ \leftarrow L_2 \\ \leftarrow L_3 \end{matrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & \frac{-3}{2} & \frac{9}{2} \\ 0 & \frac{7}{2} & \frac{3}{2} \end{bmatrix} \begin{matrix} \leftarrow L'_1 = L_1 \\ \leftarrow L'_2 = L_2 + \frac{1}{2}L_1 \\ \leftarrow L'_3 = L_3 - \frac{1}{2}L_1 \end{matrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & \frac{-3}{2} & \frac{9}{2} \\ 0 & 0 & 12 \end{bmatrix} \begin{matrix} \leftarrow L''_1 = L'_1 \\ \leftarrow L''_2 = L'_2 \\ \leftarrow L''_3 = L'_3 + \frac{7}{3}L'_2 \end{matrix} = 2 \times \left(\frac{-3}{2}\right) \times 12 = -36.$$

Telle que L_1, L_2 et L_3 désigne la première, la deuxième et la troisième ligne respectivement.
L'_1 est la première ligne, L'_2 est la somme entre la deuxième ligne et la multiplication de $\frac{1}{2}$ avec la première ligne.
L'_3 est la soustraction entre la troisième ligne et la multiplication de $\frac{1}{2}$ avec la première ligne.
L''_1 est la première ligne, L''_2 est la même L'_2, tandis que L''_3 est la somme entre L'_3 et la multiplication de $\frac{7}{3}$ avec L'_2.

2.2.2 Matrices inversibles

Définition 21. *On dit qu'une matrice carrée B d'ordre n est inversible s'il existe une matrice carrée C de même type, telle que $BC = CB = I_n$.*
La matrice C est appelée l'inverse de B, et elle est notée B^{-1}.

Théorème 9. *$\forall B \in M_n(\mathbb{K})$, B^{-1} est l'inverse de B si l'équivalente suivante est vérifiée.*
$\exists! B^{-1} \in M_n(\mathbb{K})$, avec $BB^{-1} = B^{-1}B = I_n \iff \det B \neq 0$.

Définition 22. *Soit $B \in M_n(\mathbb{K})$.*
La comatrice de B contient des composantes de la forme com $B = (S_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ telle que $S_{ij} = (-1)^{i+j} \det B_{ij}$.

Exemple 19. *Calculer la comatrice de B, avec*

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 4 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{ComB} = \begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 2 & 11 \\ -4 & 2 & 8 \\ 3 & -2 & -7 \end{pmatrix}.$$

Théorème 10. *Soit $B \in M_n(\mathbb{K})$, avec $\det B \neq 0$, alors*

$$B^{-1} = \frac{1}{\det B}\ {}^t ComB.$$

Exemple 20.

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} -5 & 2 & 11 \\ -4 & 2 & 8 \\ 3 & -2 & -7 \end{pmatrix} \Rightarrow B^{-1} = \frac{1}{\det B}\ {}^t ComB.$$

$$\det B = +(-1)\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + (-1)\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -2.$$

$$\mathbf{B^{-1}} = \frac{1}{-2}\begin{pmatrix} -5 & -4 & 3 \\ 2 & 2 & -2 \\ 11 & 8 & -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} & 2 & \frac{-3}{2} \\ -1 & -1 & 1 \\ \frac{-11}{2} & -4 & \frac{7}{2} \end{pmatrix}.$$

Propriétés

1. $(BC)^{-1} = C^{-1}B^{-1}$.
2. $({}^tB)^{-1} = {}^t(B^{-1})$.
3. $(B^{-1})^{-1} = B$.

2.2.3 Changement de base et matrice de passage

Soit $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

Ecrire le vecteur $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_B$ dans la base B' telle que $\left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{u_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}}_{u_2} \right\}$ une base de $\mathbb{R}^2$.

On a $u = au_1 + bu_2 \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x &= a + 2b \\ y &= a - b \end{cases}$

Ce qui donne

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \Rightarrow u_B = Pu_{B'} \Rightarrow u_{B'} = P^{-1}u_B.$

Ce qui entraine que

$$\begin{pmatrix} a \\ \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \\ \frac{1}{3} & \frac{-1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \\ y \end{pmatrix}.$$

Définition 23. *Soient F un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension finie et B, B' deux bases de F, alors la matrice de passage de la base B à la base B' est la matrice carrée dont les colonnes sont les vecteurs de B' écris dans la base B et on la note $P_{B\longrightarrow B'}$.*

Théorème 11. *On a $u_{B'} = P^{-1}u_B$ et $P_{B'\longrightarrow B} = P^{-1}_{B\longrightarrow B'}$.*

2.3 Séries d'exercices

Exercice 1 :

On considère la matrice $A \in M_2(\mathbb{R})$, avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

1) Déterminer l'inverse de A.

2) Soit $\alpha \neq 0$, vérifier que $(\alpha A)^{-1} = \dfrac{1}{\alpha} A^{-1}$.

3) Montrer que $({}^t A)^{-1} = {}^t(A)^{-1}$.

Exercice 2 :

Soient $A,\ B \in M_2(\mathbb{R})$, avec $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$.

1) Calculer $AB,\ BA,\ tr(AB),\ tr(BA)$, que peut on déduire ?

2) Calculer de deux méthodes différentes le déterminant de la matricce suivante

$$C = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 5 & -4 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

3) La matrice C est elle inversible ?

Exercice 3 :

On considère les deux matrices suivantes $F,\ G \in M_2(\mathbb{R})$, avec

$$F = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -5 \end{pmatrix},\ G = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}.$$

1) Calculer $FG,\ (FG)^{-1},\ F^{-1}G^{-1},\ G^{-1}F^{-1},\ (F^{-1})^{-1}$.

2) Que peuton déduire ?

Exercice 4 :

Soit $A \in M_3(\mathbb{R})$, avec $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

1) Montrer que A vérifie l'éqoation suivante $\dfrac{1}{2}A^2 - A - 4I = 0$.

2) Déduire que A est inversible et déterminer son inverse.

Exercice 5 :

Soit l'endomorphisme g défini sur $\mathbb{R}_2[X]$ par $\forall P \in \mathbb{R}_2[X],\ g(P) = P + (2X-1)P'$.

1) Déterminer la matrice A associée à g dans la base canonique $B = \{1, X, X^2\}$ de $\mathbb{R}_2[X]$.

2) Soit $B' = \{2, X-1, 2X^2-1\}$ une base de $\mathbb{R}_2[X]$, déterminer la matrice de passage P de B à B'.

3) Déterminer la matrice A' associe à g dans la nouvelle base B'.

Exercice 6 :

Soient $A,\ B \in M_3(\mathbb{R})$.

1) Montrons que si $\det B \neq 0$, alors $\det B^{-1} = \dfrac{1}{\det B}$.

2) Montrer que si B est inversible et symétrique alors B^{-1} est symétrique.

3) Montrons que si B et B' sont semblables, alors $\det B = \det B'$.

Exercice 7 :

Soit $A_\lambda \in M_3(\mathbb{R})$, avec $\lambda \in \mathbb{R}$, telle que $A_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda-1 & -2 & 1 \\ -2 & \lambda & -2 \\ -2\lambda & \lambda+1 & \lambda+1 \end{pmatrix}$.

1) Calculer $det(A_\lambda)$.
2) Pour quelle valeurs du parametre λ, la matrice A_λ est inversible.

Exercice 8 :

Soient $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & 2 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$, $A' = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

1) Déterminer$P \in M_3(\mathbb{R})$ tel que $A' = P^{-1}AP$.
2) Montrer que $B_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

On note par B_1 la base canonique de $\mathbb{R}^3$, ecrire le vecteur $v_{B_1} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ dans la nouvelle base B_2.
3) Déterminer la matrice C, telle que $A' = D + C$.
4) Que peut on déduire ?

Exercice 9 : En utilisant le déterminant vérifier si chaque famille suivante forme une base :
1) $E_1 = \{u_1 = (1,0,1); u_2 = (1,2,-1); u_3 = (-1,1,0)\}$.
2) $E_2 = \{P_1 = 2; P_2 = -1+3X; P_3 = 1 - X + 4X^2\}$.
3) $E_3 = \left\{ A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}, A_4 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \right\}$.

Exercice 10 :

Soient $P_1(X) = \frac{1}{2}(X-1)(X-2)$, $P_2(X) = -X(X-2)$, $P_3(X) = \frac{1}{2}(X-1)X$.
1) Montrer que $\{P_1, P_2, P_3\}$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
2) Soit $Q(X) \in \mathbb{R}_2[X]$, exprimer Q dans la base $\{P_1, P_2, P_3\}$.
3) Soit $G(X) = \alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2 + \alpha_3 P_3$, écrire $G(X)$ dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.

2.4 Corrigé de la série d'exercices

Exercice 1 :

On considère la matrice $A \in M_2(\mathbb{R})$, avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

1) Déterminons l'inverse de A.

$\det\ A = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -2 \neq 0.$

On a $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}\ {}^tComA$, alors $ComA = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$.

Ce qui donne ${}^tComA = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow A^{-1} = \dfrac{1}{-2}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \dfrac{3}{2} & \dfrac{-1}{2} \end{pmatrix}$.

2) Soit $\alpha \neq 0$, vérifions que $(\alpha A)^{-1} = \dfrac{1}{\alpha}A^{-1}$.

$\alpha A = \begin{pmatrix} \alpha & 2\alpha \\ 3\alpha & 4\alpha \end{pmatrix} \Longrightarrow \det(\alpha A) = 4\alpha^2 - 6\alpha^2 = -2\alpha^2 \neq 0.$

Par suite $Com(\alpha A) = \begin{pmatrix} 4\alpha & -3\alpha \\ -2\alpha & \alpha \end{pmatrix}$, ce qui donne ${}^tComA = \begin{pmatrix} 4\alpha & -2\alpha \\ -3\alpha & \alpha \end{pmatrix}$.

Ce qui implique que

$$(\alpha A)^{-1} = \frac{1}{\det(\alpha A)}\begin{pmatrix} 4\alpha & -2\alpha \\ -3\alpha & \alpha \end{pmatrix} = \frac{1}{-2\alpha^2}\begin{pmatrix} 4\alpha & -2\alpha \\ -3\alpha & \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{-2}{\alpha} & \dfrac{1}{\alpha} \\ \dfrac{3}{2\alpha} & \dfrac{1}{-2\alpha} \end{pmatrix}.$$

Par conséquent $(\alpha A)^{-1} = \dfrac{1}{\alpha}\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \dfrac{3}{2} & \dfrac{-1}{2} \end{pmatrix} = \dfrac{1}{\alpha}A^{-1}$.

3) Montrons que $({}^tA)^{-1} = {}^t(A)^{-1}$.

On a ${}^tA = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \Longrightarrow ({}^tA)^{-1} = \dfrac{1}{\det({}^tA)}\ {}^tCom({}^tA)$

$\det\ ({}^tA) = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$ et $Com({}^tA) = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$.

$$\text{Ce qui donne } {}^tCom({}^tA) = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow ({}^tA)^{-1} = \frac{1}{-2}\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & \dfrac{3}{2} \\ 1 & \dfrac{-1}{2} \end{pmatrix}.$$

$$\text{De plus } A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \dfrac{3}{2} & \dfrac{-1}{2} \end{pmatrix} \Longrightarrow {}^t(A^{-1}) = \begin{pmatrix} -2 & \dfrac{3}{2} \\ 1 & \dfrac{-1}{2} \end{pmatrix} = ({}^tA)^{-1}.$$

Exercice 2 :

Soient $A,\ B \in M_2(\mathbb{R})$, avec $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$.

1) Calculons $AB,\ BA,\ tr(AB),\ tr(BA)$, que peut on déduire ?

$AB = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$.

$BA = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 20 \\ -3 & 11 \end{pmatrix}.$
On remarque que $AB \neq BA$.
D'autre part $tr(AB) = -1 + 6 = 5$ et $tr(BA) = -6 + 11 = 5$.
On remarque que $tr(AB) = tr(BA)$.

2) Calculons de deux méthodes différentes le déterminant de la matricce suivante

$$C = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 5 & -4 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) La méthode des cofacteurs
$\det C = \begin{vmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 5 & -4 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = +(-2) \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -4 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = -11.$

b) La méthode de Gauss
$\det C = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 5 & -4 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \leftarrow L_1 \\ \leftarrow L_2 \\ \leftarrow L_3 \end{matrix} = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 0 & 11 & 11 \\ 0 & -5 & -4 \end{bmatrix} \begin{matrix} \leftarrow L'_1 = L_1 \\ \leftarrow L'_2 = L_2 + 5L_1 \\ \leftarrow L'_3 = L_3 - 2L_1 \end{matrix}$

$= \begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 0 & 11 & 11 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \leftarrow L''_1 = L'_1 \\ \leftarrow L''_2 = L'_2 \\ \leftarrow L''_3 = L'_3 + \frac{5}{11} L'_2 \end{matrix} = (-1) \times 11 \times 1 = -11.$

2) La matrice C est elle inversible ?
Comme $\det C = -11 \neq 0$, alors la matrice C est inversilble ce qui implique que C^{-1} existe.

<u>Exercice 3 :</u>
On considère les deux matrices suivantes $F,\ G \in M_2(\mathbb{R})$, avec

$$F = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -5 \end{pmatrix},\ G = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}.$$

1) Calculons $FG,\ (FG)^{-1},\ F^{-1}G^{-1},\ G^{-1}F^{-1},\ (F^{-1})^{-1}$.
$FG = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & 4 \\ -20 & 11 \end{pmatrix}.$
Par suite $(FG)^{-1} = \dfrac{1}{\det(FG)}\ {}^tCom(FG)$, alors
$\det\ (FG) = \begin{vmatrix} -8 & 4 \\ -20 & 11 \end{vmatrix} = -8 \neq 0.$
De plus $Com(FG) = \begin{pmatrix} 11 & 20 \\ -4 & -8 \end{pmatrix}.$
Ce qui implique que ${}^tCom(FG) = \begin{pmatrix} 11 & -4 \\ 20 & -8 \end{pmatrix}.$

Par conséquent $(FG)^{-1} = \dfrac{1}{-8} \begin{pmatrix} 11 & -4 \\ 20 & -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{-11}{8} & \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{-5}{2} & 1 \end{pmatrix}.$

Calculons $F^{-1}G^{-1}$, on a

$F^{-1} = \dfrac{1}{\det F}\, {}^tComF$, alors det $F = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$.

De plus $ComF = \begin{pmatrix} -5 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, ce qui implique que ${}^tComF = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$.

Par conséquent $F^{-1} = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$.

De même $G^{-1} = \dfrac{1}{\det G}\, {}^tComG$, alors det $G = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = -8 \neq 0$.

Ainsi $ComG = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$, ce qui implique que ${}^tComG = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$.

Donc $G^{-1} = \dfrac{1}{-8}\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{8} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$.

Ce qui donne $F^{-1}G^{-1} = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{8} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{8} & \frac{-5}{4} \\ \frac{1}{8} & \frac{-3}{4} \end{pmatrix}$.

Tandis que $G^{-1}F^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{8} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -5 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-11}{8} & \frac{1}{2} \\ \frac{-5}{2} & 1 \end{pmatrix}$.

2) Que peuton déduire ?

On déduit que $(FG)^{-1} = G^{-1}F^{-1}$ et $(F^{-1})^{-1} = F$.

Exercice 4 :

Soit $A \in M_3(\mathbb{R})$, avec $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

1) Montrons que A vérifie l'éqoation suivante $\frac{1}{2}A^2 - A - 4I = 0$.

$A^2 = A \times A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 4 & 4 \\ 4 & 8 & 4 \\ 4 & 4 & 8 \end{pmatrix}$.

Ce quiimplique que

$\frac{1}{2}A^2 - A - 4I = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

2) Déduire que A est inversible et déterminer son inverse.

D'après la question précedente, on a prouvé que

$$\frac{1}{2}A^2 - A - 4I = 0 \Longrightarrow \frac{1}{2}A^2 - A = 4I \Longrightarrow A\Big(\frac{1}{8}A - \frac{1}{4}I\Big) = I.$$

Ce qui donne $A^{-1} = \frac{1}{8}A - \frac{1}{4}I$.

Exercice 5 :
Soit l'endomorphisme g défini sur $\mathbb{R}_2[X]$ par $\forall P \in \mathbb{R}_2[X],\ g(P) = P + (2X-1)P'$.
1) Déterminons la matrice A associée à g dans la base canonique $B = \{1, X, X^2\}$ de $\mathbb{R}_2[X]$.

On a $P(1) = 1 + (X-1)0 = 1 + 0.X + 0.X^2$,
$P(X) = X + (X-1)1 = -1 + 2.X + 0.X^2$,
$P(X^2) = X^2 + (X-1)2X = 0 - 2.X + 3.X^2$.
Ce qui donne $A = M(g)_B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

2) Soit $B' = \{2, X-1, 2X^2-1\}$ une base de $\mathbb{R}_2[X]$, déterminons la matrice de passage P de B à B'.

$$P = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

3) Déterminons la matrice A' associe à g dans la nouvelle base B'.
On a $A' = P^{-1}AP$, par suite
$P^{-1} = \dfrac{1}{\det P}\ {}^t ComP$, alors $\det\ P = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 \neq 0$.
De plus $ComP = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, ce qui implique que ${}^t ComP = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.
Par conséquent $P^{-1} = \dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.
Donc $A' = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Exercice 6 :
Soient $A,\ B \in M_3(\mathbb{R})$.
1) Montrons que si $\det B \neq 0$, alors $\det B^{-1} = \dfrac{1}{\det B}$.
Comme $\det B \neq 0$, alors B^{-1} existe, ce qui implique que

$$\begin{aligned} B^{-1}B &= Id \\ \det(B^{-1}B) &= \det(Id) \\ \det B^{-1}.\det B &= 1 \\ \det B^{-1} &= \frac{1}{\det B}. \end{aligned}$$

2) Montrons que si B est inversible et symétrique, alors B^{-1} est symétrique.
On a B est inversible implique que B^{-1} existe, et B est symétrique implique que

$B \circ B = Id$, alors

$$\begin{aligned} B^{-1} \circ B \circ B &= B^{-1} \circ Id \\ Id \circ B &= B^{-1} \\ B &= B^{-1} \\ B^{-1} \circ B &= B^{-1} \circ B^{-1} \\ Id &= B^{-1} \circ B^{-1}. \end{aligned}$$

Ce qui implique que B^{-1} est symétrique.

3) Montrons que si B et B' sont semblables, alors $\det B = \det B'$.
On a B et B' sont semblables $\Rightarrow B' = P^{-1}BP$, implique que

$$\begin{aligned} \det B' &= \det(P^{-1}BP) \\ \det B' &= \det P^{-1}. \det B. \det P \\ \det B' &= \frac{1}{\det P}. \det B. \det P \\ \det B' &= \det B. \end{aligned}$$

Exercice 7 :

Soit $A_\lambda \in M_3(\mathbb{R})$, avec $\lambda \in \mathbb{R}$, telle que $A_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda-1 & -2 & 1 \\ -2 & \lambda & -2 \\ -2\lambda & \lambda+1 & \lambda+1 \end{pmatrix}$.

1) Calculons $det(A_\lambda)$.

$\det A_\lambda = \begin{vmatrix} \lambda-1 & -2 & 1 \\ -2 & 0 & -2 \\ -2\lambda & \lambda+1 & \lambda+1 \end{vmatrix} = +(\lambda-1) \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ \lambda+1 & \lambda+1 \end{vmatrix} - (-2) \begin{vmatrix} -2 & -2 \\ -2\lambda & \lambda+1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ -2\lambda & \lambda+1 \end{vmatrix}$

$\det A_\lambda = 2\lambda^2 - 14\lambda - 8$.

2) Pour quelle valeurs du parametre λ, la matrice A_λ est inversible.
Pour que la matrice A_λ soit inversible il suffit que $\det A_\lambda \neq 0$.
Ce qui implique que $2\lambda^2 - 14\lambda - 8 \neq 0$, pour cela

on cherche les racines du polynôme $2\lambda^2 - 14\lambda - 8 = 0$.
$\Delta = 260 \Longrightarrow \sqrt{260} = 2\sqrt{65}$, par suite on obtient
$\lambda_1 = \dfrac{7-\sqrt{65}}{2}$ et $\lambda_2 = \dfrac{7+\sqrt{65}}{2}$.
Alors A_λ est inversible si $\lambda \in \mathbb{R} - \left\{\dfrac{7-\sqrt{65}}{2}, \dfrac{7+\sqrt{65}}{2}\right\}$.

Exercice 8 :

Soient $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & 2 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$, $A' = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

1) Déterminons $P \in M_3(\mathbb{R})$ tel que $A' = P^{-1}AP$.

On a $A' = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow Sp(A) = 4$.

$E_4 = \{v \in \mathbb{R}^3/(A-4I)=0\}$, on a

$$v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_4 \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ -2 & -2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ce qui implique que

$$\begin{cases} 2x+2y+2z & = & 0 \\ -2x-2y-2z & = & 0 \end{cases} \Rightarrow x+y+z=0 \Rightarrow \begin{cases} z & = & -x-y \\ x & \in & \mathbb{R} \\ y & \in & \mathbb{R}. \end{cases}$$

Donc $v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ -x-y \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow E_4 = vect < v_1, v_2 >,$ avec

$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Cherchons le vecteur v_3.
On a $Av_3 = v_2 + 4v_3 \Rightarrow (A-4I)v_3 = v_2$.

Par suite

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ -2 & -2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Ce qui implique que

$$\begin{cases} 2x+2y+2z & = & 1 \\ -2x-2y-2z & = & -1 \end{cases} \Rightarrow x+y+z=1 \Rightarrow \begin{cases} z & = & 1-x-y \\ x & \in & \mathbb{R} \\ y & \in & \mathbb{R}. \end{cases}$$

On choisit $x = y = 0 \Rightarrow z = 1 \Rightarrow v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Donc $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

2) Montrons que $B_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

On note par B_1 la base canonique de $\mathbb{R}^3$, ecrire le vecteur $v_{B_1} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ dans la nouvelle base B_2.

Il suffit de montrer que $\det P \neq 0$, alors

$$\det P = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -1 \neq 0.$$

On note par B_1 la base canonique de $\mathbb{R}^3$, ecrire le vecteur $v_{B_1} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ dans la base B_2.
On doit chercher B_2^{-1}.

$$B_2^{-1} = \frac{1}{\det B_2} {}^t ComB_2.$$

$$\mathbf{ComB_2} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow {}^{\mathbf{t}}\mathbf{ComB_2} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{B_2^{-1}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Alors $v_{B_2} = B_2^{-1}.v_{B_1} == \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ -4 \\ 7 \end{pmatrix}$.

3) Déterminons la matrice C, telle que $A' = D + C$.

$C = A' - D = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

4) Que peut on déduire ?

On remarque que $C^2 = C \times C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Ce qui implique que C est nilpotente.

Exercice 9 : En utilisant le déterminant vérifier si chaque famille suivante forme une base :

1) $E_1 = \{u_1 = (1, 0, 1); u_2 = (1, 2, -1); u_3 = (-1, 1, 0)\}$.

$\det E_1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = +2 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 4 \neq 0.$

Donc la famille $\{u_1, u_2, u_3\}$ est libre.

2) $E_2 = \{P_1 = 2; P_2 = -1 + 3X; P_3 = 1 - X + 4X^2\}$.

$\det E_2 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 2 \times 3 \times 4 = 24 \neq 0.$

Donc la famille $\{P_1, P_2, P_3\}$ est libre.

3) $E_3 = \left\{ A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}, A_4 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \right\}$.

$\det E_3 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0.$

Donc la famille $\{A_1, A_2, A_3, A_4\}$ n'est pas libre.

Exercice 10 :

Soient $P_1(X) = \dfrac{1}{2}(X-1)(X-2),\ P_2(X) = -X(X-2),\ P_3(X) = \dfrac{1}{2}(X-1)X.$

1) Montrons que $B' = \{P_1, P_2, P_3\}$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

On sait que $\dim\mathbb{R}_2[X] = 3$ et $\mathrm{card}B = 3$, ce qui implique que $\mathrm{card}B = \dim\mathbb{R}_2[X] = 3$.

Donc d'après le théorème de la base incomplète il suffit de vérifier si la famille B' est libre.

On a

$$P_1(X) = \frac{1}{2}(X-1)(X-2) = \frac{1}{2}X^2 - \frac{3}{2}X + 1,$$

$$P_2(X) = -X(X-2) = -X^2 + 2X,$$

$$P_3(X) = \frac{1}{2}(X-1)X = \frac{1}{2}X^2 - \frac{1}{2}X.$$

Ce qui donne $B' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{-3}{2} & 2 & \frac{-1}{2} \\ \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{-3}{2} & 2 & \frac{-1}{2} \\ \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = +1 \begin{vmatrix} 2 & \frac{-1}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \neq 0.$

Ce qui implique que $B' = \{P_1, P_2, P_3\}$ est libre.

Donc la famille $B' = \{P_1, P_2, P_3\}$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

2) Soit $Q(X) \in \mathbb{R}_2[X]$, exprimons Q dans la base $\{P_1, P_2, P_3\}$

On a $Q_{B'} = P^{-1}Q_B$.

$Q(X) \in \mathbb{R}_2[X] \Rightarrow Q(X) = a_0 + a_1X + a_2X^2$, avec la matrice de passage est

$P = B' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{-3}{2} & 2 & \frac{-1}{2} \\ \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \Rightarrow P^{-1} = \dfrac{1}{\det P}\ {}^t comP.$

On a $\det P = \dfrac{1}{2} \neq 0.$

$$\mathbf{comP} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow {}^{\mathbf{t}}\mathbf{comP} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{P^{-1}} = 2\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

$Q_{B'} = P^{-1}Q_B$, ce qui implique

$$\mathbf{Q_{B'}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \Rightarrow Q_{B'} = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_0 + a_1 + a_2 \\ a_0 + 2a_1 + 4a_2 \end{pmatrix}_{B'}.$$

3) Soit $G(X) = \alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2 + \alpha_3 P_3$, écrire $G(X)$ dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$

$$G(X) = \alpha_1(\frac{1}{2}X^2 - \frac{3}{2}X + 1) + \alpha_2(-X^2 + 2X) + \alpha_3(\frac{1}{2}X^2 - \frac{1}{2}X)$$

$$G(X) = \alpha_1 + \Big(\frac{-3}{2}\alpha_1 + 2\alpha_2 - \frac{1}{2}\alpha_3\Big)X + \Big(\frac{1}{2}\alpha_1 - \alpha_2 + \frac{1}{2}\alpha_3\Big)X^2.$$

Donc

$$G(X)_B = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \frac{-3}{2}\alpha_1 + 2\alpha_2 - \frac{1}{2}\alpha_3 \\ \frac{1}{2}\alpha_1 - \alpha_2 + \frac{1}{2}\alpha_3 \end{pmatrix}_B.$$

Chapitre 3

Applications linéaires

3.1 Les opérations sur les applications linéaires

Définition 24. *Soit une application $f : E \longrightarrow F$ avec E et F sont deux $\mathbb{K}$ espaces vectoriels , alors f est linéaire si*
1) $\forall u_1,\ u_2 \in E,\ f(u_1 + u_2) = f(u_1) + f(u_2)$.
2) $\forall \lambda \in \mathbb{K},\ \forall u \in E,\ f(\lambda u) = \lambda f(u)$.

Remarque 4.

1. *Si $E = F$, alors f est un endomorphisme.*
2. *Si f est bijective, alors f est un isomorphisme.*
3. *Si $E = F$ et f est bijective, alors f est un automorphisme.*

Exemple 21. *Soit*

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$(x, y, z) \mapsto (x - 1, y - 2, z - 3),$$

f est elle une application linéaire ?
a) Soient $u_1, u_2 \in \mathbb{R}^3$, tels que $u_1 = (x_1, y_1, z_1)$ et $u_2 = (x_2, y_2, z_2)$.

$$\begin{aligned} f(u_1 + u_2) &= f((x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2)) \\ &= f(x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2) \\ &= (x_1 + x_2 - 1, y_1 + y_2 - 2, z_1 + z_2 - 3). \end{aligned}$$

D'autre part

$$\begin{aligned} f(u_1) + f(u_2) &= f((x_1, y_1, z_1)) + f((x_2, y_2, z_2)) \\ &= (x_1 - 1, y_1 - 2, z_1 - 3) + (x_2 - 1, y_2 - 2, z_2 - 3) \\ &= (x_1 + x_2 - 2, y_1 + y_2 - 4, z_1 + z_2 - 6) \\ &\neq f(u_1 + u_2). \end{aligned}$$

Ce qui implique que f n'est pas une application linéaire.

3.1.1 Addition

Soient E et F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$, f et g deux applications linéaires de E dans F notée $L(E,F)$, et $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, alors : $\alpha f + \beta g \in L(E,F)$.

3.1.2 Compsition des applications linéaires

Soient $E,\ F$ et g trois espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$, $f \in L(E,F),\ g \in L(F,G)$, alors : $g \circ f \in L(E,G)$.

3.2 Noyau et image d'une application linéaire

Définition 25. *Soit $f \in L(E,F)$ avec E et F sont deux $\mathbb{K}$ espaces vectoriels, alors : On appelle noyau de f notée $kerf$ le sous espace vectoriel de E définit par*

$$kerf = f^{-1}(\{0\}) = \{u \in E \ / \ f(u) = 0_F\}.$$

On appelle image de f notée Imf le sous espace vectoriel de F définit par

$$Imf = f(E) = \{v \in F \ / \ v = f(u) \ avec \, u \in E\}.$$

Exemple 22. *Soit*

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$(x,y,z) \mapsto (2x - y + z, y - z, x + 2z).$$

1) Déterminer le noyau de f
$Kerf = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ f(x,y,z) = 0_{\mathbb{R}^3}\}$, *on a*

$$f(x,y,z) = (0,0,0) \Rightarrow \begin{cases} 2x - y + z &= 0 \\ y - z &= 0 \\ x + 2z &= 0 \end{cases} \Rightarrow x = y = z = 0.$$

Donc $Kerf = \{(0,0,0)\}$.

2) Trouver l'image de f
On a $Kerf = \{(0,0,0)\} \Longleftrightarrow Imf = F = \mathbb{R}^3$.

3.3 Rang d'une application linéaire

La dimension de l'espace de départ est la somme des dimensions de $kerf$ et Imf, en dimension finie.

Théorème 12. *(théorème du rang)*
Soient E et F deux $\mathbb{K}$ espaces vectoriels, $f \in L(E,F)$, si la dimension de E est finie, alors :
Le rang de f est la dimension de l'image de f, notée par $rg(f)$, c'est à dire

$$rg(f) = dim(Imf).$$

De plus $dimE = dim(kerf) + dim(Imf)$.

3.4 Caractérisation de l'injection

Théorème 13. *Soient E et F deux $\mathbb{K}$ espaces vectoriels, $f \in L(E,F)$, alors*

$$f \text{ est injective} \iff kerf = \{0_E\}.$$

Preuve 1. *Montrons que f injective $\iff Kerf = \{0\}$*
$\Rightarrow$
Supposons que f est injective et montrons que $Kerf = \{0\}$.
Soit $u \in Kerf \Rightarrow f(u) = 0_F = f(0_E)$, car f est une application linéaire.
Ce qui implique que $u = 0_E$, car f est injective.
Ce qui donne $Kerf = \{0_E\}$.

$\Leftarrow$
Supposons que $Kerf = \{0_E\}$ et montrons que f est injective.
Soient $u_1, u_2 \in E$ tel que $f(u_1) = f(u_2) \Rightarrow f(u_1) - f(u_2) = 0_F \Rightarrow f(u_1 - u_2) = 0_F$, car f est linéaire.
Ce qui implique que $(u_1 - u_2) \in Kerf$, or $Kerf = \{0_E\} \Rightarrow (u_1 - u_2) \in \{0_E\} \Rightarrow u_1 - u_2 = 0$, ce qui donne $u_1 = u_2$, donc f est injective.

Proposition 2. *Si f est une application linéaire injective de E dans F, alors l'image d'une famille libre de E est une famille libre de F.*

3.5 Caractérisation de la surjection

Théorème 14. *Soient E et F deux $\mathbb{K}$ espaces vectoriels, $f \in L(E,F)$, alors*

$$f \text{ est surjective} \iff Imf = F.$$

Preuve 2. *Montrons que f surjective $\iff Imf = F$*

$\Rightarrow$
Supposons que f est surjective et montrons que $Imf = F$.
a) On a $Imf \subset F$ (évident)

b) Montrons que $F \subset Imf$
Soit $y \in F \Rightarrow \exists x \in E \;/\; y = f(x)$, car f est surjective.

On a $f(x) \in Imf \Rightarrow y \in Imf \Rightarrow F \subset Imf$.
Donc $Imf = F$.

$\Leftarrow$
Supposons que $Imf = F$ et montrons que f est surjective.

Soit $y \in F \Rightarrow y \in Imf$, car $Imf = F$, d'après la définition de l'image de f.
$Imf = \{y \in F \;/\; y = f(x)$ avec $x \in E.\}$
Alors $y \in Imf \Rightarrow y = f(x)$ avec $x \in E$, c'est à dire $\exists x \in E \;/\; y = f(x)$.

Ce qui donne
$\forall y \in E,\ \exists x \in E \;/\; y = f(x) \Rightarrow f$ est surjective.

Proposition 3. *Si f est une application linéaire surjective de E dans F, alors l'image d'une famille génératrice de E est une famille génératrice de F.*

3.6 Caractérisation de la bijection

Corollaire 1. *Soit une application $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire, avec E et F sont deux $\mathbb{K}$ espaces vectoriels de dimension finie, alors les propositions suivantes sont équivalentes.*

1) f est injective.
2) f est surjective.
3) f est bijective.
4) $Kerf = \{0\}$.
5) $Imf = F$.

3.7 Ecriture matricielle d'une application linéaire

Définition 26. *Soit $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire et A une base de E, B une base de F, i.e $A = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ et $B = \{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_p\}$, alors*

$$\mathbf{M(f)_{A,B}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \dots & a_{pn} \end{pmatrix}.$$

Avec

$$\begin{aligned} f(e_1) &= a_{11}\varepsilon_1 + a_{21}\varepsilon_2 + \dots + a_{p1}\varepsilon_p, \\ f(e_2) &= a_{12}\varepsilon_1 + a_{22}\varepsilon_2 + \dots + a_{p2}\varepsilon_p, \dots, \\ f(e_n) &= a_{1n}\varepsilon_1 + a_{2n}\varepsilon_2 + \dots + a_{pn}\varepsilon_p. \end{aligned}$$

Théorème 15. $\forall w \in E,\ f(w)_B = M(f)_{A,B} w_A$.

Exemple 23. *Soit*

$$Id : E \longrightarrow E$$

$$w \mapsto Id(w) = w$$

alors

$$\mathbf{M(Id)_A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} = I_n.$$

Théorème 16. *Le rang d'une application est égale au rang de sa matrice associée.*

Preuve 3. *On sait que* $\{f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_n)\}$ *est une famille génératrice de* Imf*, d'après le théorème précedent*
$rg(f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_n) = dim\ vect\{f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_n)\} = rgf.$

Corollaire 2. *On considère* $f : E \longrightarrow F$ *une application linéaire,* A *une base de* E *et* B *une base de* F*, alors*
1) $rg(M(f)) = dimF \Longleftrightarrow f$ *surjective.*
2) $rg(M(f)) = dimE \Longleftrightarrow f$ *injective.*

Exemple 24. *Soit*

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$(x, y, z) \mapsto (x - y + 2z, z - 2y).$$

On pose $A = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ *la base canonique de* $\mathbb{R}^3$ *et* $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ *la base canonique de* $\mathbb{R}^2$.
$\forall w = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3,\ f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$
De plus $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \Rightarrow rg(M(f)) = 2 = dimF \Rightarrow f$ *est surjective.*

Théorème 17. *Soient* F *et* g *deux applications linéaires telles que* $f : E \longrightarrow F$ *et* $g : F \longrightarrow G$*, avec* B_1 *base de* E*,* B_2 *base de* F*, et* B_3 *base de* G*, alors*
$M(g \circ f)_{B_1,B_3} = M(g)_{B_2,B_3} M(f)_{B_1,B_2}.$

Théorème 18. *Soit* $f : E \longrightarrow F$ *une application linéaire et* B_1 *une base de* E*,* B_2 *une base de* F*, telle que* $dimE = dimF = n$*,*
f *est bijective si et seulement si* $M(f)_{B_1,B_2}$ *est inversible, avec* $M(f)^{-1}_{B_2,B_1} = [M(f)_{B_1,B_2}]^{-1}$.

Exemple 25. *Soit* $u = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ *et* $f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x - 3y \\ x + 4y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$
Alors $M(f)_{B_1,B_2} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow M(f^{-1})_{B_2,B_1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}.$
Ce qui implique que $f^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x + y \\ -3x + 4y \end{pmatrix}.$

3.8 Séries d'exercices

Exercice 1 :
Soient les applications suivantes de E vers F sont elles linéaires ?
1) $E = F = \mathbb{R}^2$ et $f(x,y) = (2x-y, -x+y)$.
2) $E = F = \mathbb{R}^3$ et $g(x,y,z) = (x+y+z, x-y, z^2)$.
3) $E = M_2(\mathbb{R}),\ F = \mathbb{R}$ et $f(A) = trace(A)$.
4) $E = F = \mathbb{R}_2[X]$ et $f(P) = 2XP - P'$.

Exercice 2 :
Soit f une application dans $\mathbb{R}^3$, définie par $f(x,y,z) = (2x+y, y-2z, -z)$.
1) Montrer que f est une application linéaire.
2) Déterminer le noyau et l'image de f.
3) L'application f est elle bijective ?

Exercice 3 :
On considère une application h définie par

$$\begin{array}{rcl} h : \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \mapsto & (x+3y+3z, -3x-5y-3z, 3x+3y+z). \end{array}$$

1) Déterminer la matrice A associée à h dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
2) On pose $B' = \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}}_{u_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}}_{u_2}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{u_3} \right\}$ une famille de vecteurs de $\mathbb{R}^3$.
Vérifier que $B' = \{u_1, u_2, u_3\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
3) Calculer A' la matrice associée à h dans la base B'.
4) Déduire A^n.

Exercice 4 :
Soit $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ un endomorphisme et $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$, telle que $f(e_1) = e_1 - e_2 + e_3,\ f(e_2) = 2e_1 - e_3,\ f(e_3) = -e_3$.

1) Déterminer $Kerf$ et Imf.
2) f est elle injective ? surjective ?
3) Montrer que $\mathbb{R}^3 = Kerf \oplus Imf$.

Exercice 5 :
Soit g une application définie par

$$\begin{array}{rcl} g : \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_2[X] \\ P & \mapsto & g(P) = P - (2X+1)P' \end{array}$$

1) Vérifier que g est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.
2) Déterminer la matrice associée à g dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.
3) g est elle bijective ? déduire le rang de g.
4) Déterminer $Kerg$ et Img.

Exercice 6 :
Soit

$$\begin{array}{rcl} h : \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \mapsto & (ax+y+bz, x-z, x+y-z). \end{array}$$

1) Ecrire la matrice associée à h relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
2) Quelle condition doivent vérifier a, b pour que h soit bijective.
3) Déterminer l'application réciproque h^{-1}.

Exercice 7 :
Soit l'endomorphisme de $M_2(\mathbb{R})$, défini par $f(A) = AB - BA$,
telle que $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ et $A \in M_2(\mathbb{R})$.
1) Déterminer la matrice associe à f dans la base canonique de $M_2(\mathbb{R})$.
2) Trouver le noyau de f.
3) Qu'elle est le rang de f ?

Exercice 8 :
On considère l'application g de $\mathbb{R}^3$ vers $\mathbb{R}^3$, définie par $g(x,y,z) = (x-y, x+y, y^2+z)$.
Telle que $u = (1,2,1)$ et $v = (1,-1,1)$.
1) Calculer $g(u)$, $g(v)$ et $g(u+v)$.
2) Calculer $g(3v)$ et $3g(v)$.
3) Que peut on déduire ?

3.9 Corrigé de la série d'exercices

Exercice 1 :
Soient les applications suivantes de E vers F sont elles linéaires ?
1) $E = F = \mathbb{R}^2$ et $f(x, y) = (2x - y, -x + y)$.
a) Soient $u_1, u_2 \in \mathbb{R}^2$, tels que $u_1 = (x_1, y_1)$ et $u_2 = (x_2, y_2)$.

$$\begin{aligned} f(u_1 + u_2) &= f(x_1 + x_2, y_1 + y_2) \\ &= (2(x_1 + x_2) - (y_1 + y_2), -(x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)) \\ &= (2x_1 - y_1, -x_1 + y_1) + (2x_2 - y_2, -x_2 + y_2) \\ &= f(x_1, y_1) + f(x_2, y_2) \\ &= f(u_1) + f(u_2). \end{aligned}$$

b) Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $u_(x, y) \in \mathbb{R}^2$, telle que

$$\begin{aligned} f(\lambda u) &= f(\lambda(x, y)) \\ &= f(\lambda x, \lambda y) \\ &= (2(\lambda x) - (\lambda y), -(\lambda x) + (\lambda y)) \\ &= \lambda(2x - y, -x + y) \\ &= \lambda f(x, y) \\ &= \lambda f(u). \end{aligned}$$

Donc f est une application linéaire dans $\mathbb{R}^2$.

2) $E = F = \mathbb{R}^3$ et $g(x, y, z) = (x + y + z, x - y, z^2)$.
Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $v_(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, telle que

$$\begin{aligned} g(\lambda u) &= g(\lambda(x, y, z)) \\ &= g(\lambda x, \lambda y, \lambda z) \\ &= (\lambda x + \lambda y + \lambda z, \lambda x - \lambda y, \lambda^2 z^2) \\ &= (\lambda(x + y + z), \lambda(x - y), \lambda^2 z^2) \\ &\neq \lambda(x + y + z, x - y, z^2). \end{aligned}$$

Donc $g(\lambda v) \neq \lambda g(v)$ ce qui prouve que g n'est pas une application linéaire dans $\mathbb{R}^3$.

3) $E = M_2(\mathbb{R}),\ F = \mathbb{R}$ et $f(A) = trace(A)$.
a) Soient $A_1, A_2 \in M_2(\mathbb{R})$, tels que

$$\begin{aligned} f(A_1 + A_2) &= trace(A_1 + A_2) \\ &= trace(A_1) + trace(A_2) \\ &= f(A_1) + f(A_2). \end{aligned}$$

b) Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $A \in M_2(\mathbb{R})$, telle que

$$\begin{aligned} f(\lambda A) &= trace(\lambda A) \\ &= \lambda trace(A) \\ &= \lambda f(A). \end{aligned}$$

Donc f est une application linéaire dans $M_2(\mathbb{R})$.

4) $E = F = \mathbb{R}_2[X]$ et $f(P) = 2XP - P'$.
a) Soient $P_1, P_2 \in \mathbb{R}_2[X]$, tels que

$$\begin{aligned} f(P_1 + P_2) &= 2X(P_1 + P_2) - (P_1 + P_2)' \\ &= 2X(P_1 + P_2) - (P_1' + P_2') \\ &= (2XP_1 - P_1') + (2XP_2 - P_2') \\ &= f(P_1) + f(P_2). \end{aligned}$$

b) Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $P \in \mathbb{R}_2[X]$, telle que

$$\begin{aligned} f(\lambda P) &= 2X(\lambda P) - (\lambda P)' \\ &= 2X\lambda P - \lambda P' \\ &= \lambda(2XP - P') \\ &= \lambda f(P). \end{aligned}$$

Donc f est une application linéaire dans $\mathbb{R}_2[X]$.

<u>Exercice 2 :</u>
Soit f une application dans $\mathbb{R}^3$, définie par $f(x, y, z) = (2x + y, y - 2z, -z)$.

1) Montrer que f est une application linéaire.
a) Soient $u_1, u_2 \in \mathbb{R}^3$, tels que $u_1 = (x_1, y_1, z_1)$ et $u_2 = (x_2, y_2, z_2)$.

$$\begin{aligned} f(u_1 + u_2) &= f(x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2) \\ &= (2(x_1 + x_2) + (y_1 + y_2), (y_1 + y_2) - 2(z_1 + z_2), -(z_1 + z_2)) \\ &= (2x_1 + y_1, y_1 - 2z_1, -z_1) + (2x_2 + y_2, y_2 - 2z_2, -z_2) \\ &= f(x_1, y_1, z_1) + f(x_2, y_2, z_2) \\ &= f(u_1) + f(u_2). \end{aligned}$$

b) Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $u_(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, telle que

$$\begin{aligned} f(\lambda u) &= f(\lambda(x, y, z)) \\ &= f(\lambda x, \lambda y, \lambda z) \\ &= (2(\lambda x) + (\lambda y), (\lambda y) - 2(\lambda z), -(\lambda z)) \\ &= \lambda(2x + y, y - 2z, -z) \\ &= \lambda f(x, y, z) \\ &= \lambda f(u). \end{aligned}$$

Donc f est une application linéaire dans $\mathbb{R}^3$.

2) Déterminons le noyau et l'image de f.
a) Le noyau de f
$Kerf = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / f(x, y, z) = (0, 0, 0)\}$.
Par suite

$$f(x, y, z) = (0, 0, 0) \Rightarrow (2x + y, y - 2z, -z) = (0, 0, 0) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} 2x + y &=& 0 \\ y - 2z &=& 0 \\ -z &=& 0 \end{array} \right.$$

$\Rightarrow x = y = z = 0 \Rightarrow Kerf = \{(0,0,0)\}$.

b) L'image de f
$Imf = \{f(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3\}$.
On prend la base canonique de $\mathbb{R}^3$, i.e $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.
$f(1,0,0) = (2,0,0)$, $f(0,1,0) = (1,1,0)$ et $f(0,0,1) = (0,-2,-1)$.
Ce qui implique que $Imf = vect < (2,0,0), (1,1,0), (0,-2,-1) >$.
Ce qui donne $dim\ Imf = 3$ et on sait que $Imf \subset \mathbb{R}^3 \Rightarrow Imf = \mathbb{R}^3$.

3) L'application f est elle bijective ?
Comme f est une application linéaire de $\mathbb{R}^3$ vers $\mathbb{R}^3$, alors f est un endomorphisme dans $\mathbb{R}^3$ et puisque $Kerf = \{0_{\mathbb{R}^3}\} \Rightarrow f$ est injective $\Rightarrow f$ est surjective $\Rightarrow f$ est bijective.

<u>Exercice 3 :</u>
On considère une application h définie par

$$\begin{array}{rcl} h : \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \mapsto & (x+3y+3z, -3x-5y-3z, 3x+3y+z). \end{array}$$

1) Déterminons la matrice A associée à h dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
$M(f)_B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ -3 & -5 & -3 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

2) On pose $B' = \Big\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}}_{u_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}}_{u_2} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{u_3} \Big\}$ une famille de vecteurs de $\mathbb{R}^3$.
Vérifions que $B = \{u_1, u_2, u_3\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$
On a $\text{card}B' = \dim\mathbb{R}^3 = 3$.

D'après le théorème de la base incompléte il suffit de montrer que la famille B' est libre.
$\det B' = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \Rightarrow B'$ est libre $\Rightarrow B'$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
3) Calculons A' la matrice associée à h dans la base B'
$A' = P^{-1}AP$, de plus $P^{-1} = \dfrac{1}{\det P}{}^t comP$.
On a $P = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$.

$$\mathbf{comP} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow {}^{\mathbf{t}}\mathbf{comP} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{P^{-1}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$A' = P^{-1}AP$, ce qui implique

$$\mathbf{A'} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ -3 & -5 & -3 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{A'} = \begin{pmatrix} -2 & -4 & -2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

4) Déduire A^n
On a $A' = P^{-1}AP \Rightarrow PA' = PP^{-1}AP \Rightarrow PA' = AP \Rightarrow PA'P^{-1} = APP^{-1}$
$\Rightarrow A = PA'P^{-1}$.
Par suite

$$\mathbf{A'} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow (\mathbf{A'})^{\mathbf{n}} = \begin{pmatrix} (-2)^n & 0 & 0 \\ 0 & (-2)^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

D'autre part
$A = PA'P^{-1} \Rightarrow A^n = (PA'P^{-1})(PA'P^{-1}), \ldots, (PA'P^{-1}) = P(A')^n P^{-1}$.
Par conséquent

$$\mathbf{A^n} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-2)^n & 0 & 0 \\ 0 & (-2)^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{A^n} = \begin{pmatrix} 0 & (-2)^n & 1 \\ (-2)^n & 0 & -1 \\ -(-2)^n & -(-2)^n & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A^n} = \begin{pmatrix} 1 & 1-(-2)^n & 1-(-2)^n \\ (-2)^n - 1 & 2(-2)^n - 1 & (-2)^n - 1 \\ -(-2)^n + 1 & (-2)^{n+1} + (-2)^n + 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 4 :
Soit $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ un endomorphisme et $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$, telle que $f(e_1) = e_1 - e_2 + e_3$, $f(e_2) = 2e_1 - e_3$, $f(e_3) = -e_3$.

1) Déterminer $Kerf$ et Imf.
a) Le noyau de f
Cherchons la matrice associée à f, on a

$$\mathbf{M(f)} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Ce qui implique que

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \mapsto & (x+2y, -x, x-y-z). \end{array}$$

Par suite
$Kerf = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / f(x,y,z) = (0,0,0)\}$.
On a $f(x,y,z) = (0,0,0) \Rightarrow (x+2y, -x, x-y-z) = (0,0,0)$.
Ce qui donne

$$\left\{\begin{array}{lcl} x+2y & = & 0 \\ -x & = & 0 \\ x-y--z & = & 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{lcl} x & = & O \\ y & = & 0 \\ z & = & 0. \end{array}\right.$$

Ce qui implique que $Kerf = \{(0,0,0)\}$.

b) L'image de f
$Imf = \{f(x,y,z)/(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\}$, on a
On a $dim\mathbb{R}^3 = dimKerf + dimImf \Rightarrow dimImf = dim\mathbb{R}^3 = 3$.
De plus, on sait que $Imf \subset \mathbb{R}^3 \Rightarrow Imf = \mathbb{R}^3$.

2) f est elle injective ? surjective ?
Comme f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$, et $Kerf = \{(0,0,0)\} \Rightarrow f$ est injective $\Rightarrow f$ est surjective.

3) Montrons que $\mathbb{R}^3 = Kerf \oplus Imf$
Ona
a) $dim\mathbb{R}^3 = dimKerf + dimImf$
b) $Kerf \cap Imf = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$.
Alors d'après le théorème du rang $\mathbb{R}^3 = Kerf \oplus Imf$.

Exercice 5 :
Soit g une application définie par

$$\begin{array}{rcl} g : \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_2[X] \\ P & \mapsto & g(P) = P - (2X+1)P' \end{array}$$

1) Vérifions que g est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.

a) Soient $P_1, P_2 \in \mathbb{R}_2[X]$, telle que

$$\begin{array}{rcl} g(P_1+P_2) & = & (P_1+P_2) - (2X+1)(P_1+P_2)' \\ & = & (P_1+P_2) - (2X+1)(P_1'+P_2') \\ & = & P_1+P_2 - (2X+1)P_1' - (2X+1)P_2' \\ & = & (P_1 - (2X+1)P_1') + (P_2 - (2X+1)P_2') \\ & = & g(P_1) + g(P_2). \end{array}$$

b) Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $P \in \mathbb{R}_2[X]$, telle que

$$\begin{array}{rcl} g(\lambda P) & = & (\lambda P) - (2X+1)(\lambda P)' \\ & = & (\lambda P) - (2X+1)(\lambda P') \\ & = & \lambda(P - (2X+1)P') \\ & = & \lambda g(P). \end{array}$$

Donc g est une application linéaire de $\mathbb{R}_2[X]$, et comme g est une application linéaire de $\mathbb{R}_2[X]$ vers $\mathbb{R}_2[X]$, alors g est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.

2) Déterminons la matrice associée à g dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.
On sait que la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ est $\{1, X, X^2\}$, alors

$g(1) = 1 - (2X+1)(0) = 1 = 1 \times 1 + 0 \times X + 0 \times X^2$,
$g(X) = X - (2X+1)(1) = 1 - X = -1 \times 1 + 1 \times X + 0 \times X^2$,
$g(X^2) = X^2 - (2X+1)(2X) = X^2 - 4X^2 - 2X = -2X - 3X^2 = 0 \times 1 - 2 \times X - 3 \times X^2$.

Ce qui donne

$$\mathbf{M(f)_B} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

3) g est elle bijective ? déduire le rang de g

$\det M(f)_B = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 3 \neq 0 \Rightarrow g$ est bijective $\Rightarrow rg(g) = 3$.

4) Déterminons $Kerg$ et Img

a) Le noyau de g

$Kerg = \{P \in \mathbb{R}_2[X] / g(P) = 0\}$.
Par suite
$g(P) = 0 \Rightarrow P - (2X+1)P' = 0 \Rightarrow P = (2X+1)P'$.
On a $P \in \mathbb{R}_2[X] \Rightarrow P(X) = a_0 + a_1X + a_2X^2 \Rightarrow P'(X) = a_1 + 2a_2X$, alors

$P(X) = (2X+1)P'(X)$.
Ce qui implique que

$a_0 + a_1X + a_2X^2 = (2X+1)(a_1 + 2a_2X) = a_1 + (2a_1 + 2a_2)X + 4a_2X^2$.

Par identification, on obtient $\begin{cases} a_0 &= a_1 \\ a_1 &= 2a_1 + 2a_2 \\ a_2 &= 4a_2 \end{cases} \Rightarrow a_0 = a_1 = a_2 = 0.$

Donc $Kerg = \{0\}$, avec (0 est le polynôme nul).

b) L'image de g

$Img = \{g(P) \ / \ P \in \mathbb{R}_2[X]\}$.
Comme g est bijective $\Rightarrow g$ est surjective $\Rightarrow Img = \mathbb{R}_2[X]$.

<u>**Exercice 6 :**</u>

Soit

$$\begin{array}{rcl} h : \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) & \mapsto & (ax + y + bz, x - z, x + y - z). \end{array}$$

1) Ecrire la matrice associée à h relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

$$\mathbf{M(h)_B} = \begin{pmatrix} a & 1 & b \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

2) Quelle condition doivent vérifier a, b pour que h soit bijective.

Il suffit de calculer le déterminant de $M(h)_B$, alors

$\det M(h)_B = \begin{vmatrix} a & 1 & b \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + b \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = a + b.$

Pour que h soit bijective, il faut que $a + b \neq 0 \Rightarrow a \neq -b$.

3) Déterminons l'application réciproque h^{-1}

$$(M(f))_B^{-1} = \frac{1}{\det M(f)} {}^t comM(f).$$

On a

$$\mathbf{com\ M(f)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1+b & -a-b & 1-a \\ -1 & a+b & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow {}^{\mathbf{t}}\mathbf{com\ M(f)} = \begin{pmatrix} 1 & 1+b & -1 \\ 0 & -a-b & a+b \\ 1 & 1-a & -1 \end{pmatrix}$$

$$(\mathbf{M(f)})^{-\mathbf{1}} = \frac{1}{a+b} \begin{pmatrix} 1 & 1+b & -1 \\ 0 & -a-b & a+b \\ 1 & 1-a & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a+b} & \frac{1+b}{a+b} & \frac{-1}{a+b} \\ 0 & -1 & 1 \\ \frac{1}{a+b} & \frac{1-a}{a+b} & \frac{-1}{a+b} \end{pmatrix}.$$

Ce qui donne

$$\begin{array}{rcl} h^{-1} : \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) & \mapsto & \left(\frac{1}{a+b}x + \frac{1+b}{a+b}y - \frac{1}{a+b}z, -y + z, \frac{1}{a+b}x + \frac{1-a}{a+b}y - \frac{1}{a+b}z\right). \end{array}$$

<u>Exercice 7 :</u>

Soit l'endomorphisme de $M_2(\mathbb{R})$, défini par $f(A) = AB - BA$,
telle que $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ et $A \in M_2(\mathbb{R})$.

1) Déterminons la matrice associe à f dans la base canonique de $M_2(\mathbb{R})$.
0n sait que la base canonique de $M_2(\mathbb{R})$ est $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.
Ce qui implique que

$f(A_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$

$f(A_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$

$f(A_3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$

$f(A_4) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$

2) Trouvons le noyau de f.

a) Le noyau de f

$Kerf = \{A \in M_2(\mathbb{R})/f(A) = 0\}$.

Par suite $f(A) = 0 \Rightarrow AB - BA = 0$, alors

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ce qui implique que

$\begin{pmatrix} -b-c & a-3b-d \\ 3c-d+a & c+b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$

Par identification, on obtient $\begin{cases} -b-c & = & 0 \\ a-3b-d & = & 0 \\ 3c-d+a & = & 0 \\ c+b & = & 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c & = & -b \\ a & = & 3b+d \end{cases}$

Ce qui donne $A = \begin{pmatrix} 3b+d & b \\ -b & d \end{pmatrix} = b\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Donc $Kerf = vect\left\{\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}.$

3) Qu'elle est le rang de f ?

D'après le théorème du rang,on a

$$\begin{aligned} dimM_2(\mathbb{R}) &= dimkerf + dimImf \\ dimImf &= dimM_2(\mathbb{R}) - dimkerf \\ dimImf &= 2 \Longrightarrow rg(f) = 2. \end{aligned}$$

<u>Exercice 8 :</u>

On considère l'application g de $\mathbb{R}^3$ vers $\mathbb{R}^3$, définie par $g(x, y, z) = (x - y, x + y, y^2 + z)$.
Telle que $u = (1, 2, 1)$ et $v = (1, -1, 1)$.

1) Calculons $g(u)$, $g(v)$ et $g(u + v)$.

$g(u) = g(1, 2, 1) = (-1, 3, 5)$, $g(v) = g(1, -1, 1) = (2, 0, 2)$.

Par suite $g(u + v) = g((1, 2, 1) + (1, -1, 1)) = g(2, 1, 2) = (1, 3, 3)$.

2) Calculons $g(3v)$ et $3g(v)$.

$g(3v) = g(3(1, -1, 1)) = g(3, -3, 3) = (6, 0, 12)$ et $3g(v) = 3g(1, -1, 1) = 3(2, 0, 2) = (6, 0, 6)$.

3) Que peut on déduire ?

On déduit que g n'est pas une application linéaire.

Chapitre 4

Systèmes d'équations linéaires

Définition 27. *On appelle équation linéaire toute équation de la forme :*

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n = B,$$

tels que $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ *sont des constantes et* $x_1, x_2, \ldots + x_n$ *sont des variables.*
Tout système de la forme

$$\begin{cases} \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \ldots + \alpha_{1n}x_n & = & B_1 \\ \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \ldots + \alpha_{2n}x_n & = & B_2 \\ \vdots & = & \vdots \\ \alpha_{n1}x_1 + \alpha_{n2}x_2 + \ldots + \alpha_{nn}x_n & = & B_n \end{cases}$$

est un système linéaire de dimension n *et il peut être écrit sous forme matricielle*

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12}\ldots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22}\ldots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2}\ldots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \vdots \\ B_n \end{pmatrix}}_{B}$$

Définition 28. *Toute équation de la forme* $AX = B$ *telle que* $A \in M_n(\mathbb{R})$ *et* $X,\ B \in M_{n,1}(\mathbb{R})$ *est dit système linéaire.*

Théorème 19. *Tout système linéaire de la forme* $AX = B$ *admet une solution unique si et seulement si* $\det A \neq 0$, *avec* $X = A^{-1}B$.

4.0.1 Résolution par l'inverse d'une matrice

On a $AX = B \Longleftrightarrow X = A^{-1}B$.

Exemple 26. *Résoudre le système linéaire suivant*

$$(I) \begin{cases} 2x - y + 3z & = & 1 \\ x + y - z & = & 0 \\ 3x - 2y + z & = & -1 \end{cases}$$

Le système (I) *s'écrit sous forme matricielle :*

$$(I) \Leftrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = +2 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} - (-1) \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -13.$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\, {}^{t}ComA..$$

$$\mathbf{ComA} = \begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -4 & -5 \\ -5 & -7 & 1 \\ -2 & 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{{}^{t}ComA} = \begin{pmatrix} -1 & -5 & -2 \\ -4 & -7 & 5 \\ -5 & 1 & 3 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{A^{-1}} = \frac{1}{-13} \begin{pmatrix} -1 & -5 & -2 \\ -4 & -7 & 5 \\ -5 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{13} & \frac{5}{13} & \frac{2}{13} \\ \frac{4}{13} & \frac{7}{13} & \frac{-5}{13} \\ \frac{5}{13} & \frac{-1}{13} & \frac{-3}{13} \end{pmatrix}.$$

Par suite

$$X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} \frac{1}{13} & \frac{5}{13} & \frac{2}{13} \\ \frac{4}{13} & \frac{7}{13} & \frac{-5}{13} \\ \frac{5}{13} & \frac{-1}{13} & \frac{-3}{13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{13} \\ \frac{9}{13} \\ \frac{8}{13} \end{pmatrix}.$$

4.0.2 Résolution par la régle de cramer

Théorème 20. *Soit $AX = B$ est un syrtème linéaire tel que $A \in M_n(\mathbb{R})$ et $X,\ B \in M_{n,1}(\mathbb{R})$, avec A_i est la matrice A dont la $i^{\text{ème}}$ colonne remplacée par le second membre B.*
Donc la seule solution $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ est donnée par

$$x_i = \frac{\det A_i}{\det A},\quad \forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}.$$

Exemple 27. *Résoudre le système linéaire suivant*

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 &= 1 \\ x_1 + x_2 - x_3 &= 0 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 &= -1 \end{cases} \Leftrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$x_1 = \frac{\det A_1}{\det A} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \end{vmatrix}}{-13} = \frac{-1}{13},$$

$$x_2 = \frac{\det A_2}{\det A} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix}}{-13} = \frac{9}{13},$$

$$x_3 = \frac{\det A_3}{\det A} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & -1 \end{vmatrix}}{-13} = \frac{8}{13}.$$

Donc

$$X = \begin{pmatrix} \frac{-1}{13} \\ \frac{9}{13} \\ \frac{8}{13} \end{pmatrix}.$$

4.0.3 Résolution par la méthode de Gauss

L'idée est de transformer le système linéaire $AX = B$ à un autre système $A_1X = B_1$ telle que A_1 est une matrice triangulaire supérieure.

Exemple 28. *Résoudre le système linéaire suivant*

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 &= 1 \\ x_1 + x_2 - x_3 &= 0 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 &= -1 \end{cases} \Leftrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 & -1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \leftarrow L_1 \\ \leftarrow L_2 \\ \leftarrow L_3 \end{array} = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & \frac{3}{2} & \frac{-5}{2} & \frac{-1}{2} \\ 0 & \frac{-1}{2} & \frac{-7}{2} & \frac{-5}{2} \end{array}\right] \begin{array}{l} \leftarrow L_1' = L_1 \\ \leftarrow L_2' = L_2 - \frac{1}{2}L_1 \\ \leftarrow L_3' = L_3 - \frac{3}{2}L_1 \end{array}$$

$$= \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & \frac{3}{2} & \frac{-5}{2} & \frac{-1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{-26}{6} & \frac{-16}{6} \end{array}\right] \begin{array}{l} \leftarrow L_1'' = L_1' \\ \leftarrow L_2'' = L_2' \\ \leftarrow L_3'' = L_3' + \frac{1}{3}L_2'. \end{array}$$

Ce qui donne

$$\left\{\begin{array}{lcl} 2x_1 - x_2 + 3x_3 & = & 1 \\ \\ \dfrac{3}{2}x_2 - \dfrac{5}{2}x_3 & = & \dfrac{-1}{2} \\ \\ \dfrac{-26}{6}x_3 & = & \dfrac{-16}{6} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} x_1 & = & \dfrac{-1}{13} \\ \\ x_2 & = & \dfrac{9}{13} \\ \\ x_3 & = & \dfrac{8}{13}. \end{array}\right.$$

4.1 Séries d'exercices

Exercice 1 :
Soit le système suvant

$$\begin{cases} x - 3y + 2z & = & -1 \\ 2x - 2y - z & = & 2 \\ -x + y + 4z & = & 3 \end{cases}$$

1) Ecrire le système sous forme matricielle.
2) Résoudre le système par la méthode de Cramer puis par la méthode de Gauss.

Exercice 2 :
On cosidère le système suivant

$$\begin{cases} \alpha x + 2y - z & = & 0 \\ x - \alpha y + 2z & = & 1 \\ 3x + y + \alpha z & = & -2 \end{cases}$$

avec $\alpha \in E = \mathbb{R}^* \setminus \{1,\ -1\}$ et $X = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.
1) Pour qu'elle valeur de α, le système $BX = C$ est un système de Cramer.
2) Résoudre ce système par la méthode de Gauss.

Exercice 3 :
Résoudre le système (I) suivant les valeurs de a et b

$$(I) \begin{cases} -2x - y + z & = & b \\ ay + z & = & 3b \\ 4x - z & = & 2b. \end{cases}$$

Exercice 4 :
Soient $B \in M_3(\mathbb{R})$ et $C \in \mathbb{R}^3$, avec

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ -1 & -3 & -2 \end{pmatrix}, \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Résoudre le système $BX = C$ par
1) La méthode de Cramer.
2) La méthode de l'inverse.

Exercice 5 :
On considère $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -2 & 3 & -6 \\ 1 & -3 & 5 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.
1) Pour qu'elles valeurs de $a, b, c \in \mathbb{R}$, le système $AX = B$ admet il une solution unique.
2) Résoudre le système $AX = B$ par la méthode de Cramer.
3) Déduire A^{-1}.

Exercice 6 :

Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ les systèmes suivants :

$$(I)\left\{\begin{array}{lcl} 2e^y+\ln x & = & 1\\ 3\ln x-e^y & = & +2, \end{array}\right. \quad (II)\left\{\begin{array}{lcl} x-cos^2\theta y & = & 0\\ sin^2\theta y+x & = & 0, \end{array}\right. \quad (III)\left\{\begin{array}{lcl} x-2y & = & 3\\ 3x+y & = & -1\\ -x+2y & = & -3. \end{array}\right.$$

Exercice 7 :

Soient $A,\ B \in M_3(\mathbb{R})$ et $C \in \mathbb{R}^3$, avec

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0\\ 3 & -2 & 0\\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix},\ \mathbf{B}=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1\\ 0 & 4 & 1\\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix},\ \mathbf{C}=\begin{pmatrix} 1\\ 2\\ -1 \end{pmatrix}.$$

1) Calculer la matrice F tel que $AB=F$.
2) Vérifier que le système $FX=C$ est un système de Cramer.
3) Résoudre le système linéaire $FX=C$.

Exercice 8 :

Une usine fabrique trois types de draps chaque jour.
Modèle M_1, M_2 et M_3 est les draps en soie, en coton et en laine respectivement.
Si l'usine produit le premier jour 1 drap en soie, 4 draps en coton et 3 draps en laine.
Le deuxième jour 5 draps en soie, 3 draps en coton et 2 draps en laine.
Le troisième jour 2 draps en soie, 4 draps en coton et 2 draps en laine.
On note par x, y et z les modèles M_1, M_2 et M_3 respectivement.

1) Déterminer la matrice correspondante aux données.
2) Si la commande du premier, deuxième, troisième jour est $20, 20, 20$ draps respectivement.
Trouver le système qui convient.
3) Résoudre ce système.

4.2 Corrigé de la série d'exercices

<u>Exercice 1 :</u>
Soit le système suvant

$$\begin{cases} x-3y+2z &= -1 \\ 2x-2y-z &= 2 \\ -x+y+4z &= 3 \end{cases}$$

1) Ecrire le système sous forme matricielle.

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}}_{B}$$

2) Résoudre le système par la méthode de Cramer puis par la méthode de Gauss.
a) Méthode de Cramer

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = +1\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} - (-3)\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 14.$$

Comme $\det A = 14 \neq 0$, alors le système $AX = B$ est un système de Cramer et il admet une solution unique.
a) Méthode de Cramer

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -1 & -3 & 2 \\ 2 & -2 & -1 \\ 3 & 1 & 4 \end{vmatrix}}{14} = \frac{(-1)\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} - (-3)\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}}{14} = \frac{56}{14} = 4,$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & 4 \end{vmatrix}}{14} = \frac{+1\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} - (-1)\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}}{14} = \frac{34}{14} = \frac{17}{7},$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 2 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \end{vmatrix}}{14} = \frac{+1\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} - (-3)\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} + (-1)\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}}{14} = \frac{16}{14} = \frac{8}{7}.$$

Donc

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ \frac{17}{7} \\ \frac{8}{7} \end{pmatrix}.$$

b) Méthode de Gauss

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 4 & 3 \end{array}\right] \begin{array}{l} \leftarrow L_1 \\ \leftarrow L_2 \\ \leftarrow L_3 \end{array} = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & -5 & 4 \\ 0 & -2 & 6 & 2 \end{array}\right] \begin{array}{l} \leftarrow L_1' = L_1 \\ \leftarrow L_2' = L_2 - 2L_1 \\ \leftarrow L_3' = L_3 + L_1 \end{array}$$

$$= \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & -5 & 4 \\ 0 & 0 & \frac{7}{2} & 4 \end{array}\right] \begin{array}{l} \leftarrow L_1'' = L_1' \\ \leftarrow L_2'' = L_2' \\ \leftarrow L_3'' = L_3' + \frac{1}{2}L_2'. \end{array}$$

On obtient le système suivant

$$\left\{\begin{array}{lcl} x - 3y + 2z & = & -1 \\ 4y - 5z & = & 4 \\ \frac{7}{2}z & = & 4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} x & = & 4 \\ y & = & \frac{17}{7} \\ z & = & \frac{8}{7}. \end{array}\right.$$

Donc

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ \frac{17}{7} \\ \frac{8}{7} \end{pmatrix}.$$

Exercice 2 :

On cosidère le système suivant

$$\left\{\begin{array}{lcl} \alpha x + 2y - z & = & 0 \\ x - \alpha y + 2z & = & 1 \\ 3x + y + \alpha z & = & -2 \end{array}\right.$$

avec $\alpha \in E = \mathbb{R}^* \setminus \{1,\ -1\}$ et $X = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

1) Pour qu'elle valeur de α, le système $BX = C$ est un système de Cramer.
On écrit d'abord le système sous forme matricielle.

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \alpha & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & 2 \\ 1 & 2 & \alpha \end{pmatrix}}_{B} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}}_{C}$$

Calculons $\det B$

$$\det B = \begin{vmatrix} \alpha & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & 2 \\ 1 & 2 & \alpha \end{vmatrix} = \alpha \begin{vmatrix} \alpha & 2 \\ 2 & \alpha \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & \alpha \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & \alpha \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = (\alpha - 2)(\alpha^2 + 2\alpha - 2).$$

Calculons les racines de l'équation $\alpha^2 + 2\alpha - 2 = 0$.
$\Delta = 12 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 2\sqrt{3}$.
Ce qui donne

$$\alpha_1 = 2,\ \ \alpha_2 = -1 - \sqrt{3},\ \ \alpha_3 = -1 + \sqrt{3}.$$

Donc le système $BX = C$ est un système de Cramer si et seulement si
$\alpha \in E = \mathbb{R}^* \setminus \{1,\ -1,\ 2,\ -1 - \sqrt{3},\ -1 + \sqrt{3}\}$.

2) Résoudre ce système par la méthode de Gauss

$$\left[\begin{array}{ccc|c} \alpha & 1 & 1 & 0 \\ 1 & \alpha & 2 & 1 \\ 1 & 2 & \alpha & 2 \end{array}\right] \begin{array}{l} \leftarrow L_1 \\ \leftarrow L_2 \\ \leftarrow L_3 \end{array} = \left[\begin{array}{ccc|c} \alpha & 1 & 1 & 0 \\ 0 & \dfrac{\alpha^2-1}{\alpha} & \dfrac{2\alpha-1}{\alpha} & 1 \\ 0 & \dfrac{2\alpha-1}{\alpha} & \dfrac{\alpha^2-1}{\alpha} & 2 \end{array}\right] \begin{array}{l} \leftarrow L_1' = L_1 \\ \leftarrow L_2' = L_2 - \dfrac{1}{\alpha}L_1 \\ \leftarrow L_3' = L_3 - \dfrac{1}{\alpha}L_1 \end{array}$$

$$= \left[\begin{array}{ccc|c} \alpha & 1 & 1 & 0 \\ 0 & \dfrac{\alpha^2-1}{\alpha} & \dfrac{2\alpha-1}{\alpha} & 1 \\ 0 & 0 & \dfrac{(\alpha^2-1)^2-(2\alpha-1)^2}{\alpha(\alpha^2-1)} & \dfrac{2\alpha^2-2\alpha-1}{\alpha^2-1} \end{array}\right] \begin{array}{l} \leftarrow L_1'' = L_1' \\ \leftarrow L_2'' = L_2' \\ \leftarrow L_3'' = L_3' + \dfrac{-2\alpha+1}{\alpha^2-1}L_2'. \end{array}$$

On obtient le système suivant

$$\begin{cases} \alpha x + y + z & = 0 \\ \dfrac{\alpha^2-1}{\alpha}y + \dfrac{2\alpha-1}{\alpha}z & = 1 \\ \dfrac{(\alpha^2-1)^2-(2\alpha-1)^2}{\alpha(\alpha^2-1)}z & = \dfrac{2\alpha^2-2\alpha-1}{\alpha^2-1} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{[-2(-2\alpha+1)(\alpha^2-1)-1]}{[(\alpha^2-1)-(2\alpha-1)^2](\alpha^2-1)} - \dfrac{2(\alpha^2-1)}{(\alpha^2-1)-(2\alpha-1)^2} \\[2ex] y = \Big[\dfrac{2(-2\alpha+1)(\alpha^2-1)}{(\alpha^2-1)-(2\alpha-1)^2} + 1\Big]\Big(\dfrac{\alpha}{\alpha^2-1}\Big) \\[2ex] z = \dfrac{2\alpha(\alpha^2-1)}{(\alpha^2-1)-(2\alpha-1)^2} \end{cases}$$

Donc

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{[-2(-2\alpha+1)(\alpha^2-1)-1]}{[(\alpha^2-1)-(2\alpha-1)^2](\alpha^2-1)} - \dfrac{2(\alpha^2-1)}{(\alpha^2-1)-(2\alpha-1)^2} \\[2ex] \Big[\dfrac{2(-2\alpha+1)(\alpha^2-1)}{(\alpha^2-1)-(2\alpha-1)^2} + 1\Big]\Big(\dfrac{\alpha}{\alpha^2-1}\Big) \\[2ex] \dfrac{2\alpha(\alpha^2-1)}{(\alpha^2-1)-(2\alpha-1)^2} \end{pmatrix}.$$

Exercice 3 :

Résoudre le système (I) suivant les valeurs de a et b

$$(I) \begin{cases} -2x - y + z & = b \\ ay + z & = 3b \\ 4x - z & = 2b \end{cases}$$

Le système (I) s'écrit sous forme matricielle : $(I) \Leftrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 0 & a & 1 \\ 4 & 0 & -1 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ 3b \\ 2b \end{pmatrix}$

$\det(A) = -2a - 4$.

(I) est un système de Cramer ssi $\det(A) \neq 0$, i.e : $a \neq -2$.

Dans ce cas on peut résoudre le système (I) par la méthode de Cramer :

$$x = \frac{\det A_1}{\det A} = \frac{\begin{vmatrix} b & -1 & 1 \\ 3b & a & 1 \\ 2b & 0 & -1 \end{vmatrix}}{\det A} = \frac{-5b-3ab}{-2a-4}$$

Si $a = -2$, alors $\det(A) = 0$.
Pour savoir si le système (I) est compatible, on doit extraire une sous-matrice inversible de A, par exemple :

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 4 & 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 4 \neq 0.$$

Le système (I) est compatible ssi $\Delta = 0$.
$\Delta = \begin{vmatrix} -2 & -1 & b \\ 0 & -2 & 3b \\ 4 & 0 & 2b \end{vmatrix} = 4b$
Donc si $b \neq 0$, le système (I) n'est pas compatible et n'admet pas de solutions.
Si $b = 0$, le système (I) devient :
$(I) \Leftrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 4 & 0 & -1 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
On pose $z = u$ et on obtient le système de Cramer suivant :

$$\begin{cases} -2x - y + u = 0 \\ -2y + u = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2x = y - u \\ y = \frac{1}{2}u \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{4}u \\ y = \frac{1}{2}u \\ z = u \end{cases}$$

Dans ce cas, le système (I) admet une infinité de solutions $(x, y, z) = (\frac{1}{4}u, \frac{1}{2}u, u)$ avec $u \in \mathbb{R}$.

Exercice 4 :
Soient $B \in M_3(\mathbb{R})$ et $C \in \mathbb{R}^3$, avec

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ -1 & -3 & -2 \end{pmatrix}, \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Résoudre le système $BX = C$ par la méthode de Cramer.
Calculons le déterminant de la matrice B

$$\det B = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ -1 & -3 & -2 \end{vmatrix} = +1 \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -3 & -2 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} = 4.$$

Comme $\det B = 4 \neq 0$, alors le système $BX = C$ est un système de Cramer et il admet une solution unique.

$BX = C \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ -1 & -3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 2 & -3 & -2 \end{vmatrix}}{4} = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -3 & -2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix}}{4} = \frac{13}{4},$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & -2 \end{vmatrix}}{4} = \frac{(-2)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}}{4} = \frac{-1}{4},$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ -1 & -3 & 2 \end{vmatrix}}{4} = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & -3 \end{vmatrix}}{4} = \frac{-9}{4}.$$

Donc

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{13}{4} \\ \frac{-1}{4} \\ \frac{-9}{4} \end{pmatrix}.$$

b) Méthode de la matrice inverse

Comme $\det B = 4 \neq 0$, alors B est inversible, ce qui implique que B^{-1} existe.

On a $BX = C \Longleftrightarrow X = B^{-1}C$.

Calculons B^{-1}

$$B^{-1} = \frac{1}{\det B}\,{}^t ComB.$$

$$\mathbf{ComB} = \begin{pmatrix} 11 & 1 & -7 \\ -3 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow {}^{\mathbf{t}}\mathbf{ComB} = \begin{pmatrix} 11 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -7 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{B^{-1}} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 11 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -7 & 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{11}{4} & \frac{-3}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{-1}{4} & \frac{-1}{4} \\ \frac{-7}{4} & \frac{3}{4} & \frac{-1}{4} \end{pmatrix}$$

$$X = B^{-1}C = \begin{pmatrix} \frac{11}{4} & \frac{-3}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{-1}{4} & \frac{-1}{4} \\ \frac{-7}{4} & \frac{3}{4} & \frac{-1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{13}{4} \\ \frac{-1}{4} \\ \frac{-9}{4} \end{pmatrix}.$$

Exercice 5 :

On considère $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -2 & 3 & -6 \\ 1 & -3 & 5 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

1) Pour qu'elles valeurs de $a, b, c \in \mathbb{R}$, le système $AX = B$ admet il une solution unique.
Le système $AX = B$ admet une solution unique si et seulement si $\det A \neq 0$, c'est à dire

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -2 & 3 & -6 \\ 1 & -3 & 5 \end{vmatrix} = +1 \begin{vmatrix} 3 & -6 \\ -3 & 5 \end{vmatrix} - (-1) \begin{vmatrix} -2 & -6 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = 2 \neq 0.$$

Comme le resultat du $\det A$ est une constante indépendante de $a, b, c \in \mathbb{R}$, alors le système $AX = B$ admet une solution unique pour toutes les valeurs $a, b, c \in \mathbb{R}$.

2) Résoudre le système $AX = B$ par la méthode de Cramer.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} a & -1 & -1 \\ b & 3 & -6 \\ c & -3 & 5 \end{vmatrix}}{2} = \frac{a \begin{vmatrix} 3 & -6 \\ -3 & 5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b & -6 \\ c & 5 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} b & 3 \\ c & -3 \end{vmatrix}}{2} = \frac{-3a + 8b + 9c}{2},$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & a & -1 \\ -2 & b & -6 \\ 1 & c & 5 \end{vmatrix}}{2} = \frac{\begin{vmatrix} b & -6 \\ c & 5 \end{vmatrix} - a \begin{vmatrix} -2 & -6 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -2 & b \\ 1 & c \end{vmatrix}}{2} = \frac{4a + 6b + 8c}{2},$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & a \\ -2 & 3 & b \\ 1 & -3 & c \end{vmatrix}}{2} = \frac{\begin{vmatrix} 3 & b \\ -3 & c \end{vmatrix} - (-1) \begin{vmatrix} -2 & b \\ 1 & c \end{vmatrix} + a \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}}{2} = \frac{3a + 2b + c}{2}.$$

Donc

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-3a + 8b + 9c}{2} \\ \frac{4a + 6b + 8c}{2} \\ \frac{3a + 2b + c}{2} \end{pmatrix}.$$

3) Déduire A^{-1}.

$AX = B \Longrightarrow A^{-1}AX = A^{-1}B \Longrightarrow X = A^{-1}B.$

Ce qui donne $X = \begin{pmatrix} \dfrac{-3a}{2} + \dfrac{8b}{2} + \dfrac{9c}{2} \\ \\ \dfrac{4a}{2} + \dfrac{6b}{2} + \dfrac{8c}{2} \\ \\ \dfrac{3a}{2} + \dfrac{2b}{2} + \dfrac{c}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{-3}{2} & 4 & \dfrac{9}{2} \\ \\ 2 & 3 & 4 \\ \\ \dfrac{3}{2} & 1 & \dfrac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ \\ b \\ \\ c \end{pmatrix}$.

Donc $A^{-1} = \begin{pmatrix} \dfrac{-3}{2} & 4 & \dfrac{9}{2} \\ \\ 2 & 3 & 4 \\ \\ \dfrac{3}{2} & 1 & \dfrac{1}{2} \end{pmatrix}$.

Exercice 6 :

Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ les systèmes suivants : $(I) \begin{cases} 2e^y + \ln x &= 1 \\ 3\ln x - e^y &= +2, \end{cases}$

En multipliant la deuxième équation par (2) et l'additionné par la première équation, on obtient

$7\ln x = 5 \Longrightarrow \ln x = \dfrac{5}{7} \Longrightarrow x = e^{\frac{5}{7}}$.

En remplaçant x dans l'équation suivante $2e^y + \ln e^{\frac{5}{7}} = 1 \Longrightarrow e^y = \dfrac{1}{7}$

Ce qui implique que $y = \ln \dfrac{1}{7} = -\ln 7$.

Donc $(x, y) = (e^{\frac{5}{7}}, -\ln 7)$.

$$(II) \begin{cases} x - cos^2\theta y &= 0 \\ sin^2\theta y + x &= 0, \end{cases}$$

On a $x - cos^2\theta y = 0 \Longrightarrow x = cos^2\theta y$.

En remplaçant x dans l'équation suivante $sin^2\theta y + x = 0$, on obtient

$cos^2\theta y + sin^2\theta y = 0 \Longrightarrow (cos^2\theta + sin^2\theta)y = 0 \Longrightarrow y = 0$.

Donc $(x, y) = (0, 0)$.

$$(III) \begin{cases} x - 2y &= 3 \\ 3x + y &= -1 \\ -x + 2y &= -3. \end{cases}$$

On a $x - 2y = 3 \Longrightarrow x = 3 + 2y$, en remplaçant x dans l'équation suivante

$3x + y = -1 \Longrightarrow 7y = -10 \Longrightarrow y = \dfrac{-10}{7}$.

De plus $x = 3 + 2y = 3 + 2\Big(\dfrac{-10}{7}\Big) \Longrightarrow x = \dfrac{1}{7}$.

Donc $(x, y) = \Big(\dfrac{1}{7}, \dfrac{-10}{7}\Big)$.

Exercice 7 :

Soient $A,\ B \in M_3(\mathbb{R})$ et $C \in \mathbb{R}^3$, avec

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix},\ \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix},\ \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

1) Calculons la matrice F tel que $AB = F$.

$$\mathbf{F} = \mathbf{AB} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & -6 & -10 \end{pmatrix}.$$

2) Vérifions que le système $FX = C$ est un système de Cramer

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -4 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & -6 & -10 \end{pmatrix}}_{F} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}}_{C}$$

$$\det F = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & -6 & -10 \end{vmatrix} = +2 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -6 & -10 \end{vmatrix} - (-4) \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -10 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -6 \end{vmatrix} = -192.$$

Comme $\det F = -192 \neq 0$, alors le système $FX = C$ est un système de Cramer et il admet une solution unique.

3) Résoudre le système linéaire $FX = C$
On a $F = AB$, alors $FX = C \Rightarrow ABX = C$.

On pose $BX = Y$
Résoudre le système $FX = C$ revient à résoudre le système $\begin{cases} AY & = & C \\ BX & = Y \end{cases}$ Cherchons d'abord Y

$$AY = C \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Ce qui donne

$$\begin{cases} 2y_1 & = 1 \\ 3y_1 - 2y_2 & = 2 \\ y_1 + y_2 + 4y_3 & = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1 & = \frac{1}{2} \\ 2y_2 & = 3y_1 - 2 \\ 4y_3 & = -1 - y_1 - y_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1 & = \frac{1}{2} \\ y_2 & = \frac{1}{2}(3y_1 - 2) \\ y_3 & = \frac{1}{4}(-1 - y_1 - y_2) \end{cases}$$

Ce qui implique

$$\begin{cases} y_1 & = \frac{1}{2} \\ y_2 & = \frac{-1}{4} \\ y_3 & = \frac{-5}{16} \end{cases}$$

Donc $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \\ y_2 \\ \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \\ \frac{-1}{4} \\ \\ \frac{-5}{16} \end{pmatrix}$.

D'autre part

$BX = Y \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$.

Par conséquent

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 & = & \frac{1}{2} \\ \\ -4x_2 + x_3 & = & \frac{-1}{4} \\ \\ 3x_3 & = & \frac{-5}{16} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 & = & \frac{1}{2} + 2x_2 - x_3 \\ \\ 4x_2 & = & \frac{1}{4} + x_3 \\ \\ x_3 & = & \frac{-5}{48} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 & = & \frac{65}{96} \\ \\ x_2 & = & \frac{7}{192} \\ \\ x_3 & = & \frac{-5}{48} \end{cases}$$

Donc

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \\ x_2 \\ \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{65}{96} \\ \\ \frac{7}{192} \\ \\ \frac{-5}{48} \end{pmatrix}.$$

Exercice 8 :

Une usine fabrique trois types de draps chaque jour.
Modèle M_1, M_2 et M_3 est les draps en soie, en coton et en laine respectivement.
Si l'usine produit le premier jour 1 drap en soie, 4 draps en coton et 3 draps en laine.
Le deuxième jour 5 draps en soie, 3 draps en coton et 2 draps en laine.
Le troisième jour 2 draps en soie, 4 draps en coton et 2 draps en laine.
On note par x, y et z les modèles M_1, M_2 et M_3 respectivement.

1) Déterminons la matrice correspondante aux données.

$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 5 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$.

2) Si la commande du premier, deuxième, troisième jour est $20, 20, 20$ draps respectivement, trouvons le système qui convient

$$\begin{cases} x + 4y + 3z & = & 20 \\ \\ 5x + 3y + 2z & = & 20 \\ \\ 2x + 4y + 2z & = & 20 \end{cases}$$

3) Résoudre ce système.

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 5 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} - 4 \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 16 \neq 0.$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 20 & 4 & 3 \\ 20 & 3 & 2 \\ 20 & 4 & 2 \end{vmatrix}}{16} = \frac{20 \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} - 4 \begin{vmatrix} 20 & 2 \\ 20 & 2 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 20 & 3 \\ 20 & 4 \end{vmatrix}}{16} = \frac{20}{16},$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 20 & 3 \\ 5 & 20 & 2 \\ 2 & 20 & 2 \end{vmatrix}}{16} = \frac{\begin{vmatrix} 20 & 2 \\ 20 & 2 \end{vmatrix} - 20 \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 5 & 20 \\ 2 & 20 \end{vmatrix}}{16} = \frac{60}{16},$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 4 & 20 \\ 5 & 3 & 20 \\ 2 & 4 & 20 \end{vmatrix}}{16} = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 20 \\ 4 & 20 \end{vmatrix} - 4 \begin{vmatrix} 5 & 20 \\ 2 & 20 \end{vmatrix} + 20 \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}}{16} = \frac{20}{16}.$$

Donc

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{20}{16} \\ \frac{60}{16} \\ \frac{20}{16} \end{pmatrix}.$$

Chapitre 5

Réduction des matrices

5.1 Valeurs propres et vecteurs propres

Définition 29. *Soit $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire et un vecteur non nul $u \in E$, tel que $\exists \mu \in \mathbb{K}$ avec $f(u) = \mu u$, on dit que μ est une valeur propre et u est le vecteur propre correspondant à la valur propre μ.*

Remarque 5.

1. *L'ensemble des valeurs propres de A (matrice associée à l'application f) s'appelle spectre de A est notée $Sp(A)$.*
2. *Les valeurs propres peuvent être nulles tandis que les vecteurs propres sont non nuls.*

Définition 30. *Soit f un endomorphisme de E, on dit sous espace propre de f associé la valeur propre μ le sous espace vectoriel E_μ, défini par :*

$$E_\mu = ker(f - \mu Id_E) = \{u \in E : f(u) = \mu u\}.$$

5.1.1 Polynôme caractéristique

Définition 31. *Le polynôme caractéristique de A (matrice associée à l'application f) est le polynôme P_A de degré n défini par :*

$$P_A(\mu) = det(A - \mu I_n).$$

Théorème 21. *(Cayley-Hamiltan) Le polynôme caractéristique d'une matrice A est un polynôme annulateur de A, c'est à dire $P_A(A) = 0_n$.*

Propriétés

1. Deux matrices semblabes ont le même polynôme caractéristique.
2. A et ${}^tA$ ont le même polynôme caractéristique.
3. Toute matrice carrée $n \times n$ admet au plus n racines.

5.1.2 Caractérisation des matrices diagonalisables

Définition 32. *Une matrice A est dite diagonalisable si et seulement si elle est semblable à une matrice diagonale.*

Théorème 22. *On dit que f est diagonalisable si il existe B une base de vecteurs propres de E avec $B = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$, tel que*

$$f(u_1) = \mu_1 u_1 = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}_B, \; f(u_2) = \mu_2 u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}_B, \; \dots, \; f(u_n) = \mu_n u_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \mu_n \end{pmatrix}_B.$$

De plus

$$\mathbf{M(f)_B} = \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mu_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \mu_n \end{pmatrix}.$$

Définition 33. *Soit E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel tel que $B = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ une base de E et A est la matrice associée à f dans la base B, on note $A = M(f)_B$, avec $P_f(X) = \det(A - XI)$ est dit polynôme caractéristique de f.*

Théorème 23. *Les racines du polynôme P_f sont les valeurs propresde f.*

Exemple 29. *Soit*

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$(x, y, z) \mapsto (x - 2y + z, 2x - 2y - z, 2x + 3y + 2z).$$
$$\mathbf{M(f)_B} = A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & -2 & -1 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$P_f(X) = \det(A - XI) = \begin{vmatrix} 1-X & -2 & 1 \\ -2 & -2-X & -1 \\ 2 & 3 & 2-X \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-X & -2 & 1 \\ -2 & -2-X & -1 \\ 0 & 1-X & 1-X \end{vmatrix}$$
$$= (1-X)\begin{vmatrix} 2-X & -1 \\ 1-X & 1-X \end{vmatrix} - (-2)\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1-X & 1-X \end{vmatrix} = (1-X)(X^2 - 4X - 3).$$

On a $\Delta = 28 = 2\sqrt{7} \Rightarrow x_1 = 2 - \sqrt{7}$ *et* $x_2 = 2 + \sqrt{7}$.

$$P_f = (1-X)(X - (2+\sqrt{7}))(X - (2-\sqrt{7})) \Rightarrow Sp(f) = \{1, 2+\sqrt{7}, 2-\sqrt{7}\}.$$

Remarque 6. *On a* $u \in E_\mu \iff f(u) = \mu u \iff f(u) = \mu Id(u)$
$\iff (f - \mu Id)(u) = 0 \iff (A - \mu I)u = 0$, *alors*
$E_\mu = \{u \in E/(A - \mu I)u = 0\}$.

Preuve 4. *On a*
1) $f(0) = \mu 0 = 0 \Rightarrow 0 \in E\mu$.
2) Soient $u_1, u_2 \in E_\mu \Rightarrow \begin{cases} f(u_1) & = & \mu u_1 \\ f(u_2) & = & \mu u_2 \end{cases}$
Ce qui implique que
$f(u_1) + f(u_2) = \mu u_1 + \mu u_2 = \mu(u_1 + u_2) = f(u_1 + u_2)$.
3) Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ *et* $u \in E_\mu \Rightarrow f(u) = \mu u \Rightarrow \lambda f(u) = \lambda \mu u = \mu(\lambda u) = f(\lambda u) \Rightarrow \lambda u \in E_\mu$.

Théorème 24. *Un endomorphisme g est diagonalisable si et seulement si*
1) Le polynôme caractéristique est scindé.

2) La dimension de l'espace propre associe à chaque valeur propre est égale à la multiplicité de la valeur propre, c'est à dire $\forall \mu \in Sp(g),\ dim E_\mu = mult(\mu)$.

Exemple 30. *Soit*

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$(x, y, z) \mapsto (-2x + \frac{3}{2}y + 3z, 3x - \frac{1}{2}y - 3z, -3x + \frac{3}{2}y + 4z).$$

$$\mathbf{M(f)_B} = A = \begin{pmatrix} -2 & \frac{3}{2} & 3 \\ 3 & -\frac{1}{2} & -3 \\ -3 & \frac{3}{2} & 4 \end{pmatrix}.$$

$$P_f(\mu) = \det(A - \mu I) = \begin{vmatrix} -2-\mu & \frac{3}{2} & 3 \\ 3 & -\frac{1}{2}-\mu & -3 \\ -3 & \frac{3}{2} & 4-\mu \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-\mu & 1-\mu & 0 \\ 3 & -\frac{1}{2}-\mu & -3 \\ 0 & 1-\mu & 1-\mu \end{vmatrix}$$

$$= (1-\mu) \begin{vmatrix} -\frac{1}{2}-\mu & -3 \\ 1-\mu & 1-\mu \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 1-\mu & 0 \\ 1-\mu & 1-\mu \end{vmatrix} = -(\frac{1}{2}+\mu)(1-\mu)^2.$$

Donc $Sp(A) = \left\{\frac{-1}{2},\ 1\right\}$.

Ce qui donne
$E_{\frac{-1}{2}} = \{u \in E/(A + \frac{1}{2}I)u = 0\}$, *on a*

$$\begin{pmatrix} \frac{-3}{2} & \frac{3}{2} & 3 \\ 3 & 0 & -3 \\ -3 & \frac{3}{2} & \frac{9}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \frac{-3}{2} & \frac{3}{2} & 3 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & \frac{-3}{2} & \frac{-3}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ce qui implique que

$$\begin{cases} \frac{-3}{2}x + \frac{3}{2}y + 3z & = 0 \\ 3y + 3z & = 0 \\ \frac{-3}{2}y - \frac{3}{2}z & = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = z \\ y = -z \\ z \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Donc $u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z \\ -z \\ z \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow E_{\frac{-1}{2}} = vect < u_1 >,$

avec $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

On calcule E_1

$E_1 = \{u \in E/(A - I)u = 0\}$, *on a*

$$\begin{pmatrix} -3 & \frac{3}{2} & 3 \\ 3 & \frac{-3}{2} & -3 \\ -3 & \frac{3}{2} & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow -3x + \frac{3}{2}y + 3z = 0 \Rightarrow y = 2x - 2z, \text{ avec } x, z \in \mathbb{R}.$$

Donc $u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 2x - 2z \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 2x \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -2z \\ z \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Ce qui implique que $E_1 = vect < u_2, u_3 >$, *avec* $u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, *et* $u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Conclusion

$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A' = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

5.1.3 Caractérisation des matrices trigonalisables

Définition 34. *Une matrice A est dite trigonalisable si et seulement si elle est semblable à une matrice triangulaire.*

Théorème 25. *Un endomorphisme g est diagonalisable si et seulement si le polynôme caractéristique est scindé.*

Exemple 31. *Soit*

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \frac{9}{2} & \frac{-3}{2} \\ \frac{3}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix},$$

$$P_f(\mu) = \det(A - \mu I) = \begin{vmatrix} \frac{9}{2} - \mu & \frac{-3}{2} \\ \frac{3}{2} & \frac{3}{2} - \mu \end{vmatrix} = \mu^2 - 6\mu + 9 = (\mu - 3)^2.$$

Donc $Sp(A) = \{3\} \Rightarrow mult(3) = 2$.

Ce qui donne

$E_3 = \{u \in E/(A - 3I) = 0\}$, *on a*

$$u = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in E_3 \Rightarrow \begin{pmatrix} \frac{9}{2} - 3 & \frac{-3}{2} \\ \frac{3}{2} & \frac{3}{2} - 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ce qui implique que

$$\begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{-3}{2} \\ \frac{3}{2} & \frac{-3}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \frac{3}{2}x - \frac{3}{2}y = 0 \Rightarrow x = y.$$

Donc $u = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow E_3 = vect < u_1 >,$ *avec* $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

De plus
$P = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 1 & \beta \end{pmatrix}$, $A' = \begin{pmatrix} 3 & a \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, *avec* $a \neq 0$.
On peut choisir $a = 1 \Rightarrow A' = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.
Par conséquent
$f(u_2) = u_1 + 3u_2 \Rightarrow f(u_2) - 3u_2 = u_1 \Rightarrow (A - 3I)u_2 = u_1$.

Par suite

$$\begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{-3}{2} \\ \frac{3}{2} & \frac{-3}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \frac{3}{2}x - \frac{3}{2}y = 1 \Rightarrow y = x - \frac{2}{3}.$$

On choisit $x = 1 \Rightarrow y = \frac{1}{3} \Rightarrow u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$.

Conclusion
$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$, $A' = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

5.1.4 Applications de la réduction

Calcul de la puissance d'une matrice

Si A est une matrice diagnalisable, alors $D = P^{-1}.A.P \Longrightarrow A = P.D.P^{-1}$.
Pae suite $A^n = (P.D.P^{-1})^n = (P.D.P^{-1}).(P.D.P^{-1}) \ldots (P.D.P^{-1}) = P.D^n.P^{-1}$.
Donc $A^n = P.D^n.P^{-1}$.

Etude des suites récurrentes

Soient deux suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ définies par :

$$\begin{cases} u_{n+1} &= 2u_n + v_n \\ v_{n+1} &= 3u_n + v_n \end{cases}$$

Le système est équivalent à l'écriture matricielle suivante : $X_{n+1} = AX_n$, telle que :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}.$$

Ce résultat entraine que $X_n = A^n X_0$.

Résolution d'un système differentiel

Résoudre le système differentiel $X' = AX$, où A est une matrice diagonalisable avec les valeurs propres réelles.
L'objectif est de ramener le système $X' = AX$ à un système $Y' = D.Y$, où D est une matrice diagonale.

En posant $Y = P^{-1}X \Longrightarrow Y' = P^{-1}X'$, car P^{-1} est une matrice cunstante.
Ce qui facilite la résolution car $P^{-1}X' = D.P^{-1}X \Longrightarrow Y' = D.Y$.

5.2 Séries d'exercices

Exercice 1 :
On consdère le système suivant

$$\begin{cases} x_{n+1} &= 3x_n - y_n + 2z_n \\ y_{n+1} &= x_n + 2y_n - 3z_n \\ z_{n+1} &= 2x_n - 3y_n + z_n \end{cases} \quad \text{avec } w_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

1) Ecrire le système suivant sous forme matricielle.
2) Déterminer le premier terme w_1.
3) Montrer par récurrence que $\forall n \geq 0,\ w_n = A^n w_0$.

Exercice 2 :
Soit

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(x, y, z) \mapsto (x - 2z, -y + 3z, x - z).$$

1) Déterminer la matrice A associe à f dans la base de $\mathbb{R}^3$.
2) Si f est bijective, déterminer sa réciproque.
3) Déterminer les valeurs propres de A.
4) Que peut on déduire ?

Exercice 3 :
Soit g une application linéaire dans $\mathbb{R}^3$ définie par

$$g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(x, y, z) \mapsto (6x + 2y + 4z, 2x + 2y, -2x + 2y + 4z).$$

1) déterminer la matrice A associe à g relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
2) Calculer le polynôme caractéristique de A.
3) Vérifier que A est trigonalisable.
4) Trouver les vecteurs propres associe à chaque valeur propre.

Exercice 4 :
Considérons l'endomorphisme f de $M_2(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées réelles d'ordre 2 défini par $\forall A \in M_2(\mathbb{R}),\ f(A) = EA,$ avec $E = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$.
1) Qu'elle est la base de $M_2(\mathbb{R})$.
2) Déterminer la matrice N associée à f relativement à la base de $M_2(\mathbb{R})$.
3) Calculer le spectre de N.

Exercice 5 :
Soit la matrice suivante

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} -4 & 6 & -6 \\ 6 & -4 & 6 \\ 6 & -6 & 8 \end{pmatrix}.$$

1) Diagonaliser la matrice B.
2) Déterminer les vecteurs propres.

Exercice 6 :
On considère un endomorphisme f dans $M_2(\mathbb{R})$, telle que $f(A) = 2A - {}^tA$.
1) Déterminer la matrice M associée à f dans la base canonique de $M_2(\mathbb{R})$.
2) Calculer le polynôme caractéristique de M.
3) déterminer les valeurs propres.

Exercice 7 :
Soit h l'endomorphisme dans $\mathbb{R}^3$ défini par

$$h(x, y, z) = (3x, \alpha y + (\alpha - 1)z, z), \text{ avec } \alpha \in \mathbb{R}.$$

1) Déterminer la matrice A associée à h.
2) Qu'elles sont les valeurs propres de A.
3) Pour q'elle valeur de α la matrice A est diagonalisable.
4) Donner une matrice semblable.

Exercice 8 :
Soit f un endomorphisme défini par

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_2[X] \\ P & \mapsto & f(P) = P + (X-1)^2 P'' \end{array}$$

1) Déterminer la matrice A associe à f dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.
2) Calculer le polynôme caractéristique de A.
3) Trouver les valeurs propres de A.
4) Que peut on déduire ?

5.3 Corrigé de la série d'exercices

Exercice 1 :
On consdère le système suivant

$$\begin{cases} x_{n+1} &= 3x_n - y_n + 2z_n \\ y_{n+1} &= x_n + 2y_n - 3z_n \\ z_{n+1} &= 2x_n - 3y_n + z_n \end{cases} \quad \text{avec } \ w_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

1) Ecrivons le système suivant sous forme matricielle.

$$\underbrace{\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \\ z_{n+1} \end{pmatrix}}_{w_{n+1}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}}_{w_n}.$$

2) Déterminons le premier terme w_1

$$w_1 = Aw_0 \Rightarrow w_1 = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

3) Montrons par récurrence que $\forall n \geq 0, \ w_n = A^n w_0$.
a) Pour $n = 0$, on a $w_1 = A^0 w_0 = I w_0 = w_0$ est vraie.
b) Supposons que $w_n = A^n w_0$ est vraie jusqu'à un certain n fixé et montrons qu'elle est vraie pour $n + 1$.

On a $w_{n+1} = Aw_n = A(A^n)w_0$, d'après l'hypothèse de récurrence ce qui implique que $w_{n+1} = A^{n+1} w_0$.
Donc $\forall n \geq 0, \ w_n = A^n w_0$.

Exercice 2 :
Soit

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$(x, y, z) \mapsto (x - 2z, -y + 3z, x - z).$$

1) Déterminons la matrice A associe à f dans la base de $\mathbb{R}^3$.

$$A = M(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

2) Si f est bijective, déterminons sa réciproque.

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0.$$

Ce qui implique f est bijective. De plus

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} {}^t ComA.$$

$$\mathbf{ComA} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & -3 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow {}^{\mathbf{t}}\mathbf{ComA} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A^{-1}} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -3 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On conclut que

$$f^{-1} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$(x, y, z) \mapsto (-x + 2z, -3x - y + 3z, -x + z).$$

3) Déterminons les valeurs propres de A.
$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & -2 \\ 0 & -1-\lambda & 3 \\ 1 & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda) \begin{vmatrix} -1-\lambda & 3 \\ 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 0 & -1-\lambda \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$
$\det(A - \lambda I) = -(1+\lambda)(1+\lambda^2)$.
Par suite $\det(A - \lambda I) = 0 \Longrightarrow -(1+\lambda)(1+\lambda^2) = 0$.
On a trois valeurs propres $\lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = i$ et $\lambda_3 = -i$.

4) Que peut on déduire ?
On a trois valeurs propres distincts ce qui implique que A est diagonalisable.

Exercice 3 :
Soit g une application linéaire dans $\mathbb{R}^3$ définie par

$$g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$(x, y, z) \mapsto (6x + 2y + 4z, 2x + 2y, -2x + 2y + 4z).$$

1) déterminons la matrice A associe à g relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

$$A = M(g) = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

2) Calculons le polynôme caractéristique de A.
$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 6-\lambda & 2 & 4 \\ 2 & 2-\lambda & 0 \\ -2 & 2 & 4-\lambda \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 4-\lambda \end{vmatrix} + (2-\lambda) \begin{vmatrix} 6-\lambda & 4 \\ -2 & 4-\lambda \end{vmatrix}$
$\det(A - \lambda I) = (4-\lambda)(\lambda^2 - 8\lambda + 16)$.

3) Vérifions que A est trigonalisable.
Par suite $\det(A - \lambda I) = 0 \Longrightarrow (4-\lambda)(\lambda^2 - 8\lambda + 16) = 0$.
Ce qui donne $\lambda = 3$ de multiplicité 3, donc A est trigonalisable.

Exercice 4 :
Considérons l'endomorphisme f de $M_2(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées réelles d'ordre 2 défini par $\forall A \in M_2(\mathbb{R}),\ f(A) = EA,$ avec $E = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$.
1) Qu'elle est la base de $M_2(\mathbb{R})$.
Soit $A \in M_2(\mathbb{R})$, telle que $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

On a
$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}.$
Ce qui implique que
$A = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$
Donc la base de canonique de $M_2(\mathbb{R})$ est $B = \Big\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{B_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{B_2}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{B_3}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{B_4} \Big\}.$

2) Déterminons la matrice N associée à f relativement à la base de $M_2(\mathbb{R})$.

$f(B_1) = E.B_1 = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}.$

$f(B_2) = E.B_2 = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$

$f(B_3) = E.B_3 = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}.$

$f(B_4) = E.B_4 = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$

Par conséquent

$$\mathbf{M(f)} = N = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

3) Calculons le spectre de N.

$$P_N(\mu) = \det(N - \mu I) = \begin{vmatrix} -1-\mu & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1-\mu & 0 & 2 \\ -2 & 0 & 3-\mu & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 3-\mu \end{vmatrix}$$

$$P_A(\mu) = (-1-\mu) \begin{vmatrix} -1-\mu & 0 & 2 \\ 0 & 3-\mu & 0 \\ -2 & 0 & 3-\mu \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 0 & -1-\mu & 2 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 3-\mu \end{vmatrix} = (\mu-1)^4.$$

$\det(N - \mu I) = 0 \Rightarrow \mu = 1$ de multiplicité 4.
Donc $Sp(N) = \{1\}$.

Exercice 5 :
Soit la matrice suivante

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} -4 & 6 & -6 \\ 6 & -4 & 6 \\ 6 & -6 & 8 \end{pmatrix}.$$

1) Diagonalisons la matrice B.

$$P_B(\mu) = \det(B - \mu I) = \begin{vmatrix} -4-\mu & 6 & -6 \\ 6 & -4-\mu & 6 \\ 6 & -6 & 8-\mu \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -4-\mu & 6 & -6 \\ 2-\mu & 2-\mu & 0 \\ 2-\mu & 0 & 2-\mu \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow P_B(\mu) = \begin{vmatrix} 2-\mu & 6 & -6 \\ 2-\mu & 2-\mu & 0 \\ 0 & 0 & 2-\mu \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -4-\mu & 6 & -6 \\ 0 & 2-\mu & 0 \\ 0 & 0 & 2-\mu \end{vmatrix} = -(4+\mu)(2-\mu)^2.$$

Ce qui donne
$\det(B-\mu I)=0 \Rightarrow -(4+\mu)(2-\mu)^2=0 \Rightarrow Sp(B)=\{-4,2\}$.

2) Déterminons les vecteurs propres.
a) $E_{-4}=\{v\in E/(A+4I)=0\}$, on a

$$v=\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix}\in E_{-4}\Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 6 & -6\\ 6 & 0 & 6\\ 6 & -6 & 12\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}.$$

Ce qui implique que

$$\begin{cases} 6y-6z &= 0\\ 6x+6z &= 0\\ 6x-6y+12z &= 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases} y &= z\\ x &= -z\\ z &\in \mathbb{R}\end{cases}$$

Donc $v=\begin{pmatrix} -z\\ z\\ z\end{pmatrix}=z\begin{pmatrix} -1\\ 1\\ 1\end{pmatrix}\Rightarrow E_{-4}=vect<v_1>$, avec $v_1=\begin{pmatrix} -1\\ 1\\ 1\end{pmatrix}$.

b) $E_2=\{v\in E/(A-2I)=0\}$, on a

$$v=\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix}\in E_{2}\Rightarrow \begin{pmatrix} -6 & 6 & -6\\ 6 & -6 & 6\\ 6 & -6 & 6\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}.$$

Ce qui implique que

$$\begin{cases} -6x+6y-6z &= 0\\ 6x-6y+6z &= 0\\ 6x-6y+6z &= 0\end{cases}\Rightarrow x=y-z.$$

Donc $v=\begin{pmatrix} y-z\\ y\\ z\end{pmatrix}=y\begin{pmatrix} 1\\ 1\\ 0\end{pmatrix}+z\begin{pmatrix} -1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}\Rightarrow E_2=vect<v_2,v_3>$, avec

$v_2=\begin{pmatrix} 1\\ 1\\ 0\end{pmatrix}$, $v_3=\begin{pmatrix} -1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$.

Par conséquent
$\dim E_{-4}=mult(-4)=1$ et $\dim E_2=mult(2)=2$, ce qui implique que A est diagonalisable.

Conclusion

$$P=\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1\\ 1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix},\ A'=\begin{pmatrix} -4 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}.$$

<u>Exercice 6 :</u>

On considère un endomorphisme f dans $M_2(\mathbb{R})$, telle que $f(A)=2A-{}^tA$.
1) Déterminons la matrice M associée à f dans la base canonique de $M_2(\mathbb{R})$.
On a la base de canonique de $M_2(\mathbb{R})$ est $B=\Big\{\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}}_{B_1},\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}}_{B_2},\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}}_{B_3},\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}}_{B_4}\Big\}$.

Par suite

$f(B_1)=2\begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$,

$f(B_2) = 2\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$,
$f(B_3) = 2\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$,
$f(B_4) = 2\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
Par conséquent

$$\mathbf{M} = \mathbf{M(f)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2) Calculons le polynôme caractéristique de M, puis déterminons les valeurs propres.
$\det(M - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & 0 \\ -1 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix}$
$\det(M - \lambda I) = (1-\lambda)(1-\lambda)\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(2-\lambda)(1-\lambda)^2.$
3) Déterminons les valeurs propres.
$\det(M - \lambda I) = 0 \Longrightarrow -\lambda(2-\lambda)(1-\lambda)^2 = 0.$
Ce qui donne $\lambda_1 = 0$ de multiplicité 1, $\lambda_2 = 2$ de multiplicité 1, $\lambda_3 = 1$ de multiplicité 2.

Exercice 7 :
Soit h l'endomorphisme dans $\mathbb{R}^3$ défini par

$$h(x, y, z) = (3x, \alpha y + (\alpha - 1)z, z), \text{ avec } \alpha \in \mathbb{R}.$$

1) Déterminons la matrice A associée à h.

$$\mathbf{A} = \mathbf{M(h)} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & \alpha - 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2) Qu'elles sont les valeurs propres de A.
$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & \alpha-\lambda & \alpha-1 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)(\alpha-\lambda)(1-\lambda).$
Les valeurs propres de A sont
$\lambda_1 = 3,\ \lambda_2 = \alpha,\ \lambda_3 = 1.$

3) Pour q'elle valeur de α la matrice A est diagonalisable.
Pour que A soit diagonalisable, il suffit que $\alpha \in \mathbb{R} - \{1, 3\}$.

4) Donnons une matrice semblable.
On prend par exemple $\alpha = 2$, on obtient
$A' = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

<u>Exercice 8 :</u>
Soit f un endomorphisme défini par

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_2[X] \\ P & \mapsto & f(P) = P + (X-1)^2 P'' \end{array}$$

1) Déterminons la matrice A associe à f dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.
On a la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ est $\{1, X, X^2\}$, alors

$f(1) = 1 + (X-1)^2(0) = 1 = 1 \times 1 + 0 \times X + 0 \times X^2$,
$f(X) = X + (X-1)^2(0) = X = 0 \times 1 + 1 \times X + 0 \times X^2$,
$f(X^2) = X^2 + (X-1)^2(2) = 3X^2 - 4X + 2 = 2 \times 1 - 4 \times X + 3 \times X^2$.

Ce qui donne

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

2) Calculons le polynôme caractéristique de A.

$$\det(A - \mu I) = \begin{vmatrix} 1-\mu & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1-\mu & -4 & \\ 0 & 0 & 3-\mu & \end{vmatrix} = (3-\mu)(1-\mu)^2.$$

3) Trouvons les valeurs propres de A.
$\det(A - \mu I) = 0 \Rightarrow (3-\mu)(1-\mu)^2 = 0$.

Ce qui donne
$\mu_1 = 3$ de $mult(1)$ et $\mu_2 = 1$ de $mult(2)$.

4) Que peut on déduire ?
On déduit que le polynôme caractéristique est scindé ce qui implique que A est trigonalisable.

Bibliographie

[1] Jean M. Arnaudiès, Henri Fraysse : Cours de mathématiques-1 : Algèbre, Dunod Université (1992), 680 pages.

[2] E. Azoulay and J. Avignant, Mathématiques 4. Algèbre. Cours et exercices, Mcgraw-Hill (1984).

[3] S. Balac and F .Sturm, Algèbre et analyse, Cours de mathématiques de première année avec exercices corrigés, deuxième édition, Presses polytechniqueset universitaires Romandes (2014).

[4] Y. Bensid Cours et exercices, E.S.S.A.T (2018).

[5] J. Dieudonné, Abrégé d'histoire des mathématiques : 1700-1900,Tome I et Tome II, Hermann, Paris (1978).

[6] Daniel. Fredon : Mathématiques : résumé du cours en fiches MPSI.MP, Dunod (2010), 268 pages.

[7] Hervé. Gianella, Franck. Taieb : Maths MPSI : tests de cours, Dunod (2011), 313 pages.

[8] G. Lefort, Exercices d'algèbre et analyse, tome 1, Dunod Paris (1970).

[9] Jean M. Monier : les méthodes et exercices de mathématiques MPSI, Dunod (2008), 423 pages.