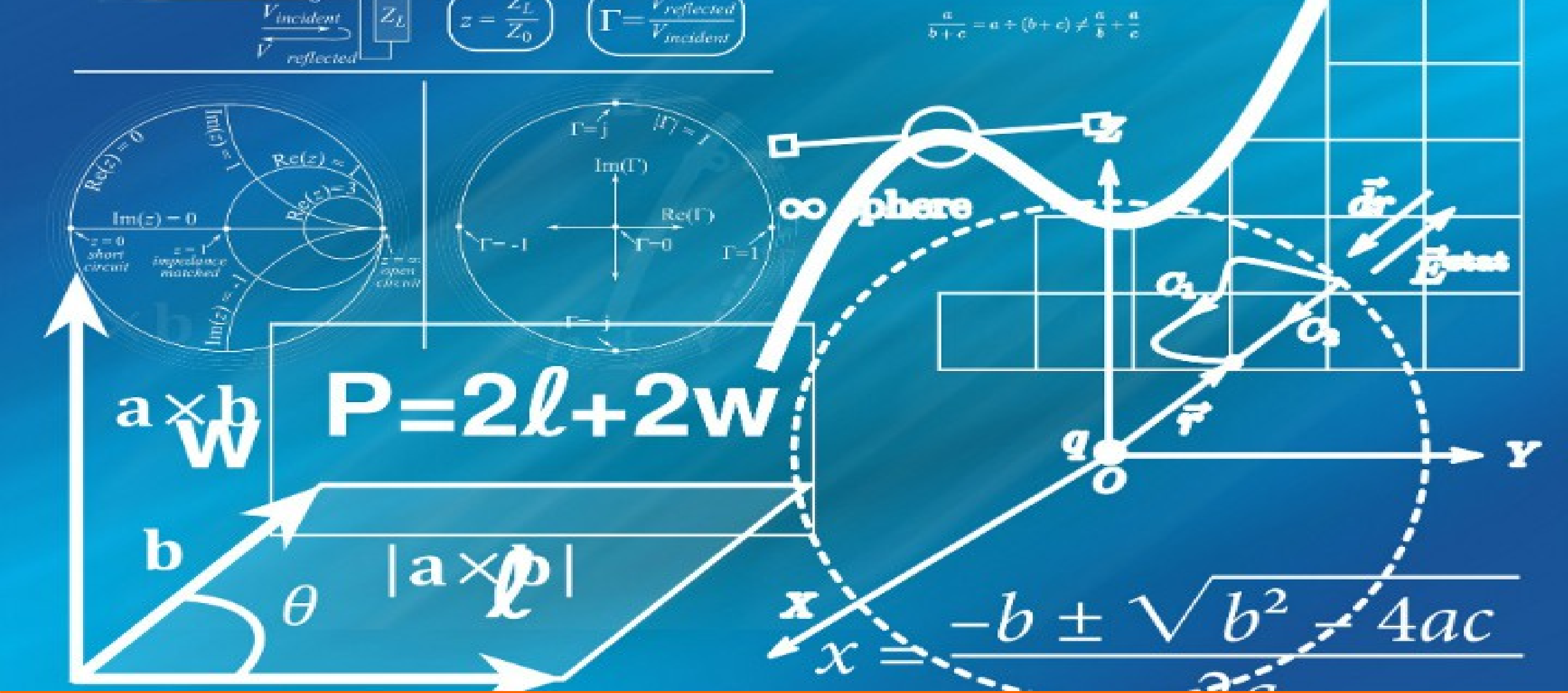


Cours et exercices

Algèbre linéaire pour ingénieurs

Dr. hafidha Sebbagh

Ecole supérieure en sciences appliquées de Tlemcen

2023

République algérienne démocratique et populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

École supérieure en sciences appliquées de Tlemcen

Algèbre linéaire pour ingénieurs

Auteur : Dr. Hafidha SEBBAGH

Année universitaire : 2022/2023

Préface

Ce manuscrit est destiné aux élèves inscrit en troisième année Génie industriel, deuxième cycle, à l'école supérieure en sciences appliquées de Tlemcen. Son contenu, correspond au programme officiel de la matière «Complément mathématique (Algèbre)» du premier semestre.Ce manuscrit correspond aussi aux étudiants de troisième année automatique et électrotechnique. Il a été rédigé dans le but de permettre d'avoir un outil de travail et de référence recouvrant les connaissances qui leur sont demandés durant leur formation.

Cet ouvrage est destiné à être utilisé comme manuel pour un cours d'algèbre linéaire. Il vise à présenter une introduction à l'algèbre linéaire qui sera utile à tous les lecteurs quelle que soit leur spécialisation. Il a été fait d'une manière à ce qu'il soit plus souple dans le but de stimuler l'intérêt porté à cette matière.

Ce manuscrit comprend trois chapitres qui couvrent l'ensemble du programme du module concerné et j'ai jugé utile de rajouter un quatrième chapitre sur les espaces pré-hilbertien, car ils sont très présents dans la formation des ingénieurs où l'intérêt de ces espaces est de calculer une distance voulue. Chaque chapitre comprend des énoncés clairs, des définitions, des principes et des théorèmes. A la fin de chaque chapitre on trouve une série d'exercices corrigés et détaillés.

Table des matières

Introduction

L'histoire de l'algèbre linéaire commence avec René Descartes qui est le premier qui pose des problèmes de géométrie, comme l'intersection de deux droites, sous forme d'équation linéaire. Il établit alors un pont entre deux branches mathématiques jusqu'à présent séparées : l'algèbre et la géométrie. S'il ne définit pas la notion de base de l'algèbre linéaire qui est l'espace vectoriel, il l'utilise déjà avec succès. Après cette découverte les progrès en algèbre linéaire vont se limiter à des études ponctuelles comme la définition et l'analyse des premières propriétés des déterminants par Jean d'Alembert.

Ce n'est qu'au XIXe siècle que l'algèbre linéaire devient une branche des mathématiques à part entière. Carl Friedrich Gauss trouve une méthode générique pour la résolution des systèmes d'équations linéaires, Marie Ennemond Camille Jordan résout définitivement le problème de la réduction d'endomorphisme. En 1843, William Rowan Hamilton (inventeur du terme vector) découvre les quaternions. En 1844, Hermann Grassmann publie un livre Die lineare Ausdehnungslehre.

Le début du XXe siècle voit la naissance de la formalisation moderne des mathématiques. Les espaces vectoriels deviennent alors une structure générale omni-présente dans presque tous les domaines mathématiques.

Depuis quelques années, l'algèbre linéaire est devenue une partie essentielle du bagage mathématique nécessaire aux ingénieurs, physiciens et autres scientifiques. ce besoin reflète l'importance et les applications étendues du sujet.

L'algèbre linéaire est une matière fondamentale dans les principaux domaines des mathématiques. Elle permet de résoudre tout un ensemble d'équations linéaires ou non linéaires (qui peuvent être linéarisés) utilisées non seulement en mathématiques, en mécanique, physique chimique, traitement d'image mais aussi dans de nombreuses autres branches, comme les sciences naturelles ou les sciences sociales (par exemple en économie). C'est une branche qui s'intéresse à l'étude des espaces vectoriels (ou espaces linéaires), de leurs éléments les vecteurs, des transformations linéaires et des systèmes d'équations linéaires (théorie des matrices). Cette branche fournit ainsi un support théorique important en informatique, que ce soit matériel avec des calculateurs ou des processeurs vectoriels ou logiciel.

Les physiciens, par exemple, rencontrent souvent des problèmes linéaires : le principe de superposition exprime justement le fait que les équations de la chaleur, des cordes vibrantes, de l'électricité, etc. sont linéaires. Beaucoup d'autres problèmes sont linéaires en première approximation : l'équation des oscillations du pendule, par exemple, n'est pas linéaire, mais si l'on s'intéresse aux petites oscillations, elle peut être approchée par une équation linéaire. On comprend dès lors l'intérêt qu'il peut y avoir à dégager un cadre mathématique commun à ce type de problèmes, de manière à pouvoir déterminer des méthodes et des algorithmes adaptés.

Ce cadre mathématique commun est la notion d'espace vectoriel.

L'algèbre linéaire moderne a été étendue pour considérer les espaces de dimension arbitraire ou infinie. Un espace vectoriel de dimension n est appelé un n-espace. La plupart des résultats obtenus dans les 2-espaces et 3-espaces peuvent être étendus aux espaces de dimensions supérieures. Bien que beaucoup de personnes ne peuvent appréhender correctement un vecteur dans un n-espace, ils sont utiles pour représenter des données. Les vecteurs étant des listes ordonnées à n composantes, on peut manipuler ces données efficacement dans cet environnement. Par exemple en économie, on peut créer et utiliser des vecteurs à huit dimensions pour représenter le produit national brut de huit pays.

Dans toutes les principales applications d'aujourd'hui, l'algèbre linéaire peut jouer un rôle important, que ce soit en Linked In ou twitter posts (insertion des mots), analyse émotionnelle, ou de X Image radiographique (vision par ordinateur) ou toute voie qui détecte une infection pulmonaire ou Robot texte (NLP). Tous ces types de données sont représentés par les nombres dans un tenseur, des opérations des qualifications pour apprendre des modèles à partir d'eux en utilisant des réseaux neuronaux seront effectués, puis le tenseur traité sera sorti, puis décodé pour générer le raisonnement final du modèle.

L'étude de la réduction soulève de nombreux problèmes d'algorithmique ou d'approximation, dus essentiellement au fait que le calcul des valeurs propres passe, dans un premier temps, par le calcul d'un déterminant à coefficients polynomiaux (le polynôme caractéristique) et dans un second temps par le « calcul » de ses racines. Des résolutions de systèmes linéaires et des inversions de matrices sont également à prendre en considération. C'est la réduction des endomorphismes « effective ».

Dans le cas du minimum de l'énergie, on est conduit à minimiser une fonctionnelle du type $\int |f^2|$, où l'argument est une fonction f, réelle ou complexe, dont l'argument est une variable spatiale ou temporelle, cette fonction décrivant un certain ensemble D défini par les contraintes du problème. En intégrant sur un domaine spatial ou temporel, on définit une quantité qui, lorsque f est décrit, D doit être minimisée. Une telle fonctionnelle dérive en réalité d'un produit scalaire pré-hilbertien réel ou complexe, et l'on constate que chercher le minimum de sur D revient à chercher la distance de 0 à D pour la norme pré-hilbertienne associée, ainsi que les f de D qui réalisent ce minimum.

L'objet de ce manuscrit, est d'introduire quelques notions d'algèbre linéaire qui seront utilisées dans le parcourt d'un ingénieur, pour cela on va donner quelques prérequis nécessaires qui permettront une bonne compréhension du présent document comme les espaces vectoriels, la matrice associée, les valeurs propres et les vecteurs propres, la matrice de passage, etc.. et qui seront représentés dans le premier chapitre.

Le deuxième chapitre est consacré alors à la réduction des endomorphismes, où on va présenter les critères de la diagonalisation et la trigonalisation d'une matrice, pour cela on a besoin de quelques notions qu'on va présenté, comme les polynômes annulateurs, la réduction en bloc, la décomposition de Dunford et la réduction de Jordan et on terminera avec quelques exercices corrigés .

Le troisième chapitre traite les formes bilinéaires et les formes quadratiques dans le cas de dimension finie, on introduira aussi les notions de bases orthogonales, la méthode de Gauss et la méthode des dérivées partielles pour la réduction des formes quadratiques et à la fin on termine avec la classification des formes quadratiques et quelques exercices corrigés.

Le quatrième chapitre est consacré aux espaces pré-hilbertiens, où on va définir la notion générale d'un produit scalaire sur un espace vectoriel, une définition de la norme avec quelques propriétés dont on aura besoin, on introduira la notion d'orthogonalité et on termine avec la projection orthogonale et quelques exercices corrigés.

Chapitre 1

Notions de base

Ce chapitre a pour but de rappeler les notions algébriques élémentaires utilisées dans le deuxième et troisième chapitre.

1.1 Espaces vectoriels

Sous leur forme la plus simple les espaces vectoriels représentent intuitivement les déplacements dans les espaces géométriques élémentaires comme la droite, le plan ou notre espace physique. Les bases de cette théorie remplacent maintenant la représentation construite par Euclide au IIIe siècle av. J.-C.. La construction moderne permet de généraliser la notion d'espace à des dimensions quelconques.

Les espaces vectoriels forment un outil fondamental pour les sciences de l'ingénieur et servent de base à de nombreux domaines dans la recherche opérationnelle.

En mathématiques, plus précisément en algèbre linéaire, un espace vectoriel est un ensemble d'objets, appelés vecteurs qui peuvent être utilisés pour représenter certaines entités physiques comme des déplacements, additionnés ou multipliés par un scalaire. En d'autres termes, c'est un ensemble muni d'une structure permettant d'effectuer des combinaisons linéaires. Les scalaires sont généralement des nombres réels ou des nombres complexes, ou alors pris dans n'importe quel corps.

Définition 1 *Soit $\mathbb{K}$ un corp commutatif. On appelle espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ un ensemble E sur lequel on a défini deux lois de composition :*

1. *Une loi interne (c'est-à-dire $E \times E \to E$) dite addition, notée $+$, et vérifiant :*
   i) $(x + y) + z = x + (y + z), \qquad \forall x, y, z \in E$;
   ii) $x + y = y + x, \qquad \forall x, y \in E$;
   iii) Il existe un élément de E noté 0_E, dit neutre, tel que
   $$\forall x \in E : x + 0_E = x$$
   ;
   vi) Pour tout $x \in E$, il existe un élément $(-x)$ dit opposé de x, tel que
   $$x + (-x) = 0_E$$
2. *Une loi externe de domaine $\mathbb{K}$ (c'est-à-dire une application $\mathbb{K} \times E \to E$; on note λx ou $(\lambda.x)$ l'image dans E du couple $(\lambda, x) \in \mathbb{K} \times E$), qui vérifie :*
   a) $\lambda(\mu x) = \lambda\mu(x), \qquad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \ \forall x \in E$;

b) $(\lambda+\mu)x = \lambda x + \mu x, \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \ \forall x \in E$;
c) $\lambda(x+y) = \lambda x + \lambda y, \quad \forall \lambda \in \mathbb{K}, \ \forall x, y \in E$;
d) $1.x = x, \quad \forall x \in E$ *(1 étant l'élément neutre de la multiplication dans* $\mathbb{K}$*).*

Les éléments de $\mathbb{K}$ *sont dits scalaires et ceux de* E *vecteurs.*

Citons quelques exemples des espaces vectoriels.

Exemple 1 $E = \mathbb{R}^n$ *muni des lois suivantes est un espace vectoriel sur* $\mathbb{R}$ *:*

$$\begin{array}{l} (x_1, \cdots, x_n) + (y_1, \cdots, y_n) = (x_1 + y_1, \cdots, x_n + y_n) \\ \lambda((x_1, \cdots, x_n) = (\lambda x_1, \cdots, \lambda x_n) \end{array} \tag{1.1.1}$$

Ici le $0_{\mathbb{R}^n} = (0, \cdots, 0)$ *; l'opposé* $(-x)$ *de* $x = (x_1, \cdots, x_n)$ *est* $(-x_1, \cdots, -x_n)$*.*
De même $\mathbb{C}^n$ *est muni de structure d'espace vectoriel sur* $\mathbb{C}$ *et plus généralement,* $\mathbb{K}^n$ *est muni de structure d'espace vectoriel sur* $\mathbb{K}$ *avec les lois définies par les formules (1.1.1).*

Exemple 2 *L'ensemble* $\mathbb{R}_n[x]$ *des polynômes à coefficients dans* $\mathbb{R}$ *de degré* $\leq n$*, c'est-à-dire :*

$$\mathbb{R}_n[x] = \{P : \mathbb{R} \to \mathbb{R} | p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n, a_i \in \mathbb{R}\}$$

est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ *pour les lois :*

$$\begin{array}{l} (a_0 + \cdots + a_n x^n) + (b_0 + \cdots + b_n x^n) = (a_0 + b_0) + \cdots + (a_n + b_n) x^n \\ \lambda(a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n) = (\lambda a_0 + \lambda a_1 x + \cdots + \lambda a_n x^n) \end{array} \tag{1.1.2}$$

Exemple 3 *Soit* $M_2(K)$ *l'ensemble des matrices d'ordre 2 à coefficients dans* $\mathbb{K}$*. On définit une structure d'espace vectoriel sur* $\mathbb{K}$*, en posant :*

$$\begin{array}{l} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+a' & b+b' \\ c+c' & d+d' \end{pmatrix} \\ \lambda \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a & \lambda b \\ \lambda c & \lambda d \end{pmatrix} \end{array} \tag{1.1.3}$$

L'élément neutre est évidemment la matrice nulle $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ *est l'opposé de* $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ *est* $\begin{pmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{pmatrix}$

1.2 Sous espaces vectoriels

Définition 2 *Soit* $(E, +, .)$ *un* $\mathbb{K}$*-e.v et* $F \subset E$*. On dit que* F *est un sous espace vectoriel de* E *si* $(F, +, .)$ *est un* $\mathbb{K}$*-e.v.*

Proposition 1 *Soit* E *un espace vectoriel et* $F \subset E$*. Alors* F *est un sous espace vectoriel de* E *si et seulement si :*

1. $F \neq \emptyset$
2. $\forall x, y \in F, x + y \in F$
3. $\forall x \in F, \lambda \in \mathbb{K}, \lambda x \in F$

Exemple 4 *Montrons que* $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 ; x + y + 3z = 0\}$ *est un sous espace vectoriel de* $\mathbb{R}^3$*.*

1. $(0,0,0) \in F$ *car* $0+0+3\times 0=0$
2. *Soient* $X=(x,y,z)$, $X'=(x',y',z')\in F$. *On a* $X+X'=(x+x',y+y',z+z')$, *alors*

$$(x+x')+(y+y')+3(z+z')=(x+y+3z)+(x'+y'+3z')=0 \Rightarrow X+X'\in F$$

,

3. $\forall\lambda\in\mathbb{R}$, *on a* $\lambda X=(\lambda x,\lambda y,\lambda z)$, *alors*

$$\lambda x+\lambda y+3\lambda z=\lambda(x+y+3z)=0\Rightarrow \lambda X\in F$$

Donc F *est un sous espace vectoriel de* $\mathbb{R}^3$.

1.3 Bases (en dimension finie)

Définition 3 *(**Famille génératrice**) Une famille de vecteurs* $\{v_1,\cdots,v_n\}$ *d'un espace vectoriel* E *est dite génératrice si* $E=Vec\{v_1,\cdots,v_n\}$, *ce qui veut dire que*

$$\forall x\in E,\exists\lambda_1,\cdots,\lambda_n\in K \text{ tel que } x=\lambda_1v_1+\cdots+\lambda_nv_n$$

Définition 4 *(**Famille libre**) Une famille finie de vecteurs* $\{v_1,\cdots,v_n\}$ *d'un espace vectoriel* E *est dite libre si*

$$\exists\lambda_1,\cdots,\lambda_n\in\mathbb{K},\lambda_1v_1+\cdots+\lambda_nv_n=0\Rightarrow\lambda_1=\cdots=\lambda_n=0$$

Définition 5 *Une famille génératrice et libre d'un espace vectoriel* E *est appelée une base de* E.

Exemple 5 *Soit* F *le sous espace vectoriel définie par :*

$$F=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3;x+3y+2z=0\right\}$$

Déterminons une base de F. *On a*

$$(x,y,z)\in F\Leftrightarrow x+3y+2z=0\Leftrightarrow x=-3y-2z\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}x=-3y-2z\\ y=y\\ z=z\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow(x,y,z)=(-3y-2z,y,z)=y(-3,1,0)+z(-2,0,1)$$

On pose $v_1=(-3,1,0)$ *et* $v_2=(-2,0,1)$. *Alors* $\{v_1,v_2\}$ *est une famille génératrice de* F. *Vérifions que* $\{v_1,v_2\}$ *est une famille libre.*

$$\text{soient } \lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{R},\lambda v_1+\lambda_2v_2=(0,0,0)\Leftrightarrow(-3\lambda_1-2\lambda_2,\lambda_1,\lambda_2)=(0,0,0)$$

$$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}-3\lambda_1-2\lambda_2=0\\ \lambda_1=0\\ \lambda_2=0\end{array}\right.\quad\Rightarrow\lambda_1=\lambda_2=0$$

Alors $\{v_1,v_2\}$ *est une famille libre.*
Donc $\{v_1,v_2\}$ *est une base de* F.

1.4 Applications linéaires

Définition 6 *Soient E et F deux $\mathbb{K}$e.v et f une application de E dans F . On dit que f est linéaire si :*

1. $f(u+v)=f(u)+f(v), \quad \forall u,v\in E$;
2. $f(\lambda u)=\lambda f(u), \quad \forall u\in E, \forall\lambda\in\mathbb{K}$

L'ensemble des applications linéaires de E dans F est un $\mathbb{K}$e.v noté $\mathcal{L}(E,F)$.

Exemple 6 *Soient $C^0([0,1],\mathbb{R})$ et $C^1([0,1],\mathbb{R})$ les espaces vectoriels des applications $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ respectivement continues et continues à dérivée continue. L'application*

$$\begin{array}{c} D: C^0([0,1],\mathbb{R})\to C^1([0,1],\mathbb{R}) \\ f\longmapsto f' \end{array}$$

est une application linéaire car :

$$D(f+g)=(f+g)'=f'+g'=Df+Dg$$

$$D(\lambda f)=(\lambda f)'=\lambda f'=\lambda Df$$

Si $\lambda\in\mathbb{R}$ et $f,g\in D([0,1],\mathbb{R})$

Définition 7 *On appelle endomorphisme de E une application linéaire de E dans E.*

Définition 8 *Si $f:E\to F$ l'application linéaire. Son noyau noté $ker f$ c'est l'ensemble des vecteurs de E que f annule :*

$$ker f=\{v\in E|f(v)=0\}$$

Proposition 2 *Le noyau d'une application linéaire de $E\to F$ est un sous espace vectoriel de E.*

Définition 9 *Si $f:E\to F$ l'application linéaire. Son image notée $Im f$ c'est l'ensemble des vecteurs de F de la forme $f(v)$ avec $v\in E$:*

$$Im f=\{f(v)|v\in E\}$$

Exemple 7 *Soit $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ l'application linéaire définie par :*

$$f(x,y)=f(x-y,x+y,x-y)$$

Déterminons le noyau et l'image de f :

$$ker f=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2, f(x,y)=(0,0,0)\right\}$$

alors

$$f(x,y)=(0,0,0)\Leftrightarrow(x-y,x+y,x-y)=(0,0,0)\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l} x-y=0 \\ x+y=0 \end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l} x=0 \\ x=0 \end{array}\right.$$

Donc

$$ker f=\{(0,0)\}$$

Maintenant

$$Im f=\left\{f(x,y),(x,y)\in\mathbb{R}^2\right\}$$

alors

$$f(x,y)=(x-y,x+y,x-y)=x(1,1,1)+y(-1,1,-1)$$

Donc

$$Im f=vect\{(1,1,1),(-1,1,-1)\}$$

1.5 Matrices associées aux applications linéaires

Dans cette section, on va d'abord définir c'est quoi une matrices, ensuite donner quelques propriétés qui seront nécessaires dans la suite de ce manuscrit.

Définition 10 *On appelle matrice de type (m, n) à coefficient dans $\mathbb{K} = (\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$ un tableau A de mn éléments de $\mathbb{K}$ rangés sur m lignes et n colonnes.*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

ou en abrégé $A = (a_{ij})_{i=1,\cdots,m,j=1,\cdots,n}$.
L'ensemble des matrices à m lignes et n colonnes est noté $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$. Si $m = n$ est noté $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Définition 11 *Soit E un espace vectoriel de dimension finie.*
Soit $B = \{e_1, \cdots, e_n\}$ une base de E et f un endomorphisme de E.
On pose

$$f(e_j) = a_{1j}e_1 + a_{2j}e_2 + \cdots + a_{nj}e_n = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}e_j$$

Les coordonnées a_{ij} de ces vecteurs dans la base B, rangés en n colonnes, forment la matrice associée à f, relative à la base considérée

$$\mathcal{M}_B(f) \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} f(e_1) & f(e_2) & \cdots & f(e_n) \end{array} \\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{array}$$

Exemple 8 *Soit l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ définie par :*

$$\forall x \in \mathbb{R}^3, f(x) = (x + 2y + z, x - y, y + z)$$

et soit B la base de $\mathbb{R}^3$ définie par :

$$B = \left\{ e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

On veut déterminer la matrice associée à f dans la base B, alors on a

$$f(e_1) = \alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma e_3 \Longrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = 3 \\ \alpha + \gamma = 0 \\ \beta + \gamma = 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = 2 \\ \gamma = -1 \end{cases}$$

Alors

$$f(e_1) = e_1 + 2e_2 - e_3$$

De la même manière on obtient que

$$f(e_2) = e_1 + e_2 \text{ et } f(e_3) = 3e_2 - e_3$$

Donc

$$\mathcal{M}_B(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

1.6 Matrice de passage

Maintenant si on considère une autre base $\{e'_i\}$ du même espace, on peut définir une autre matrice associée au même endomorphisme par rapport à cette nouvelle, les deux matrices qui représentent le même endomorphisme dans deux bases différentes sont liées entre eux par la relation

$$\mathcal{M}_{\{e'_i\}}(f) = P^{-1}\mathcal{M}_{\{e_i\}}(f)P$$

tel que P est une matrice carrée inversible appelée matrice de passage de la base $\{e_i\}$ à la base $\{e'_i\}$ et

$$P^{-1} = \frac{1}{\det P}\,\mathrm{com}^t(P)$$

Pour déterminer la matrice de passage P dans $\mathbb{R}_n[X]$, on doit passer par les étapes suivantes :

1. On décompose les vecteurs e'_i sur les éléments de la base $\{e_i\}$ pour avoir l'expression

$$e'_i = \alpha_{1i}e_1 + \alpha_{2i}e_2 + \cdots + \alpha_{ni}e_n = \sum_{k=1}^{n}\alpha_{ki}e_k$$

2. Les composantes de e'_i dans la base $\{e_1, \cdots, e_n\}$ forment la $i^{\text{ème}}$ colonne de la matrice P

$$P_{e_i \longrightarrow e'_i} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}$$

Exemple 9 *Soit f l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par :*

$$f(x) = (x - z, 2x - 3y + z, y - 2z)$$

Soient

$$B = \left\{ e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

et

$$B' = \left\{ e'_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, e'_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e'_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

on a

$$\mathcal{M}_B(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

et

$$\begin{cases} e'_1 = \alpha_1 e_1 + \beta_1 e_2 + \gamma_1 e_3 \\ e'_2 = \alpha_2 e_1 + \beta_2 e_2 + \gamma_2 e_3 \\ e'_3 = \alpha_3 e_1 + \beta_3 e_2 + \gamma_3 e_3 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \beta_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \gamma_1 \end{pmatrix} \\ \\ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \beta_2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \gamma_2 \end{pmatrix} \\ \\ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \beta_3 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \gamma_3 \end{pmatrix} \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 1 \\ \beta_1 = 0, \beta_2 = \beta_3 = 1 \\ \gamma_1 = \gamma_2 = 0, \gamma_3 = 1 \end{cases}$$

par suite, on a

$$P_{B \longrightarrow B'} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} e'_1 & e'_2 & e'_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{array}$$

et

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

donc

$$\mathcal{M}_{B'}(f) = P^{-1}\mathcal{M}_B(f)P = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Remarque 1 *Si on a deux matrices A et B vérifiant pour certaine matrice inversible P la relation $B = P^{-1}AP$, cela est équivaut à dire que les deux matrices représentent le même endomorphisme dans deux bases différentes et on dit qu'elle sont semblables.*

1.7 Valeurs propres et vecteurs propres

Définition 12 *Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E. λ est une valeur propre de f s'il existe (au moins) un vecteur $v \neq 0$ de E tel que*

$$f(v) = \lambda v$$

Un tel vecteur est appelé vecteur propre associé à λ.

Remarque 2
- *Les valeurs propres peuvent être nulles.*
- *Si v est vecteur propre de f, alors par linéarité de f, αv est aussi vecteur propre de f pour tout $\alpha \neq 0$.*

1.7.1 Détermination des valeurs propres

Définition 13 *(polynôme caractéristique) Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de E de dimension finie. On appel polynôme caractéristique de f le polynôme*

$$P_f(\lambda) = \det(f - \lambda Id) = \det(A - \lambda I)$$

tel que A est la matrice associée à f dans n'importe quelle base de E.

Remarque 3 *Deux matrices semblables ont le même polynôme caractéristique mais la réciproque est fausse.*

Proposition 3 *Les valeurs propres de f sont les racines du polynôme caractéristique $P_f(\lambda)$.*

Définition 14 *L'ensemble des valeurs propres d'un endomorphisme f est appelé le spectre de f et il est noté par $Sp(f)$.*

Définition 15 *(multiplicité) On dit qu'une valeur propre λ_0 de f est de multiplicité α si elle est racine d'ordre α du polynôme caractéristique de f, c'est-à-dire :*

$$P_f(\lambda) = (\lambda_0 - \lambda)^{\alpha} Q(\lambda),\ Q(\lambda_0) \neq 0$$

et on la note par

$$\alpha = mult(\lambda_0)$$

1.7.2 Détermination des vecteurs propres

Une fois les valeurs propres sont déterminées, on détermine l'espace des vecteurs propres associés à chacune de ces valeurs en résolvant le système linéaire

$$(A - \lambda I)(v) = 0$$

où A est la matrice de f dans une certaine base.
Définition 16 *(Sous espaces propres). Soient f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathbb{E}$ et $\lambda \in \mathbb{K}$ une valeur propre de f , on note par $\mathbb{E}_\lambda$ le sous espace vectoriel de $\mathbb{E}$ défini par*

$$\mathbb{E}_\lambda = \{v \in \mathbb{E} : f(v) = \lambda v\}$$

cet ensemble est appelé sous espace propre correspondant à la valeur propre λ, il est formé par les vecteurs propres associés à cette valeur.

Exemple 10 *Soit la matrice*

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 12 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$$

Cherchons les vecteurs propres de B.

Valeurs propres :

$$P_B(\lambda) = \det(B - \lambda I) = \begin{pmatrix} 2-\lambda & 0 & 4 \\ 3 & -4-\lambda & 12 \\ 1 & -2 & 5-\lambda \end{pmatrix}$$

$$= -\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)$$

Les valeurs propres de B sont :

$$\begin{cases} \lambda_1 = 0, \; mult\,(\lambda_1) = 1 \\ \lambda_2 = 1, \; mult\,(\lambda_2) = 1 \\ \lambda_3 = 2, \; mult\,(\lambda_3) = 1 \end{cases}$$

Vecteurs propres :
On va résoudre le système $(B-\lambda I)v = 0$ *et* $v = (x_1\ x_2\ x_3)^t$.
Pour $\lambda_1 = 0$ *:*

$$(B-\lambda_1 I)\,v = 0 \Longleftrightarrow \begin{cases} 2x_1 + 4x_3 = 0 \\ 3x_1 - 4x_2 + 12x_3 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_3 \\ x_2 = \dfrac{3}{2}x_3 \\ x_3 \ quelconque \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} v = x_3 \begin{pmatrix} -2 \\ \frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

On peut prendre $x_3 = 1$, *et on obtient le vecteur propre*

$$v_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ \frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Pour $\lambda_2 = 1$ *:*

$$(B-\lambda_2 I)\,v = 0 \Longleftrightarrow \begin{cases} x_1 + 4x_3 = 0 \\ 3x_1 - 5x_2 + 12x_3 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x_1 = -4x_3 \\ x_2 = 0 \\ x_3 \ quelconque \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} v = x_3 \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

On peut prendre $x_3 = 1$, *et on obtient le vecteur propre*

$$v_2 = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Pour $\lambda_3 = 2$ *:*

$$(B-\lambda_3 I)\,v = 0 \Longleftrightarrow \begin{cases} 4x_3 = 0 \\ 3x_1 - 6x_2 + 12x_3 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 4x_3 = 0 \\ x_1 = 2x_2 \\ x_2 \ quelconque \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} v = x_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{cases}$$

On peut prendre $x_2 = 1$, *et on obtient le vecteur propre*

$$v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Définition 17 ***(Somme directe des sous espaces propres)***. *Soient* $\lambda_1, \cdots, \lambda_p$ *des scalaires deux à deux distincts. Alors les sous espaces* $\mathbb{E}_{\lambda_1}, \cdots, \mathbb{E}_{\lambda_p}$ *sont en somme directe.*

Chapitre 2

Réduction des endomorphismes

En mathématiques, et plus particulièrement en algèbre linéaire, la réduction d'endomorphisme est une technique mathématique qui a pour objectif d'exprimer des matrices et des endomorphismes sous une forme plus simple, notamment pour faciliter les calculs. Cela consiste essentiellement à trouver une base de l'espace vectoriel qui permet d'exprimer plus simplement l'endomorphisme dans cette nouvelle base, et à décomposer l'espace en sous-espace vectoriels stables par l'endomorphisme.

Soit E un espace vectoriel de dimension finie sur un corps $\mathbb{K}$. Les endomorphismes sont des applications linéaires de E dans E . La problématique générale est la suivante :

Soit f un endomorphisme de E. On peut toujours présenter f par une matrice carrée dite matrice associée, sa détermination fait intervenir une base de E. Le but de ce chapitre est de trouver une base telle que cette matrice soit la plus "simple"' possible (pleine de zéros). Les matrices les plus adaptées aux calcul sont les matrices diagonales ou triangulaires supérieures.

2.1 Diagonalisation d'une matrice

Définition 18 ***(Polynôme scindé)*** *On dit qu'un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ est scindé dans $\mathbb{K}$ si il est de degré n et admet n racines dans $\mathbb{K}$. Il s'écrit aussi sous la forme*

$$P(x) = a\prod_{k=1}^{n}(x - x_k)^{\alpha_k}, \sum_{k=1}^{n}\alpha_k = \text{ degré de } P$$

avec : $a \in \mathbb{K}$, x_k les racines de P et α_k est la multiplicité de x_k.

Exemple 11

- *Le polynôme $x^2 + x + 1$ est scindé dans $\mathbb{C}$ mais pas dans $\mathbb{R}$.*
- *Le polynôme x^2 est scindé dans $\mathbb{R}$ et dans $\mathbb{C}$, il admet deux racines égales.*

Théorème 1 *Soient f une endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathbb{E}$ de dimension finie n, alors f est diagonalisable si et seulement si*

1. *P_f est scindé dans $\mathbb{K}$.*
2. *Pour une valeur propre λ de f on a*

$$\dim \mathbb{E}_\lambda = mult(\lambda)$$

Corollaire 1 *Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathbb{E}$ de dimension finie n, si f admet n valeurs propres distinctes (de multiplicité une) alors f est diagonalisable.*

Technique pour calculer la matrice réduite et la matrice de passage :
Pour déterminer la matrice réduite et la matrice de passage d'un endomorphisme, on suit les étapes suivantes :

1. On détermine les valeurs propres de l'endomorphisme f qu'on les notes λ_i et les vecteurs propres v_i . Si
$$\forall\lambda \in Sp(f) : \ \dim \mathbb{E}_\lambda = mult(\lambda)$$
alors f est diagonalisable.
2. La matrice associée à f dans la base $\{v_i\}$ est diagonale de la forme
$$A' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$
3. La matrice de passage correspondante est donnée par
$$P = (v_1\,|v_2|\cdots|v_n\,)$$
de telle sorte que l'ordre des valeurs propres dans la matrice A' correspond à l'ordre de leurs vecteurs propres dans la matrice P.
4. La relation entre A, A' et P n'est autre que
$$A' = P^{-1}AP$$

Exemple 12 *Soit A la matrice associée à f*
$$A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 9 \\ 3 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$
Déterminons les valeurs propres et les vecteurs propres de A. Pour celà on calcul le polynôme caractéristique de A
$$P_A(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 5-\lambda & -1 & 9 \\ 3 & 4-\lambda & 0 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)(2-\lambda)(7-\lambda)$$
On remarque que le polynôme $P_A(\lambda)$ est scindé et admet des racines simples, alors A est diagonalisable. La matrice réduite de A s'écrit alors
$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$
Calculons maintenant les vecteurs propres de A.

Pour** $\lambda = 1$ **:
$$(A-I)v = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 4x - y + 9z = 0 \\ 3x + 3y = 0 \\ x + y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -x \\ z = \dfrac{5}{9}x \end{cases}$$

Alors on a

$$v = \frac{1}{9}y \begin{pmatrix} 9 \\ -9 \\ 5 \end{pmatrix}$$

On pose $y = 9$, *on obtient*

$$v_1 = \begin{pmatrix} 9 \\ -9 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Pour $\lambda = 2$ ***:***

$$(A - 2I)v = 0 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 3x - y + 9z = 0 \\ 3x + 2y = 0 \\ x + y - z = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = -\dfrac{2}{3}y \\ \\ z = \dfrac{1}{3}y \end{array} \right.$$

Alors on a

$$v = \frac{1}{3}y \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

On pose $y = 3$, *on obtient*

$$v_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Pour $\lambda = 7$ ***:***

$$(A - 7I)v = 0 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} -2x - y + 9z = 0 \\ 3x - 3y = 0 \\ x + y - 6z = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = y \\ \\ z = \dfrac{1}{3}y \end{array} \right.$$

Alors on a

$$v = \frac{1}{3}y \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

On pose $y = 3$, *on obtient*

$$v_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

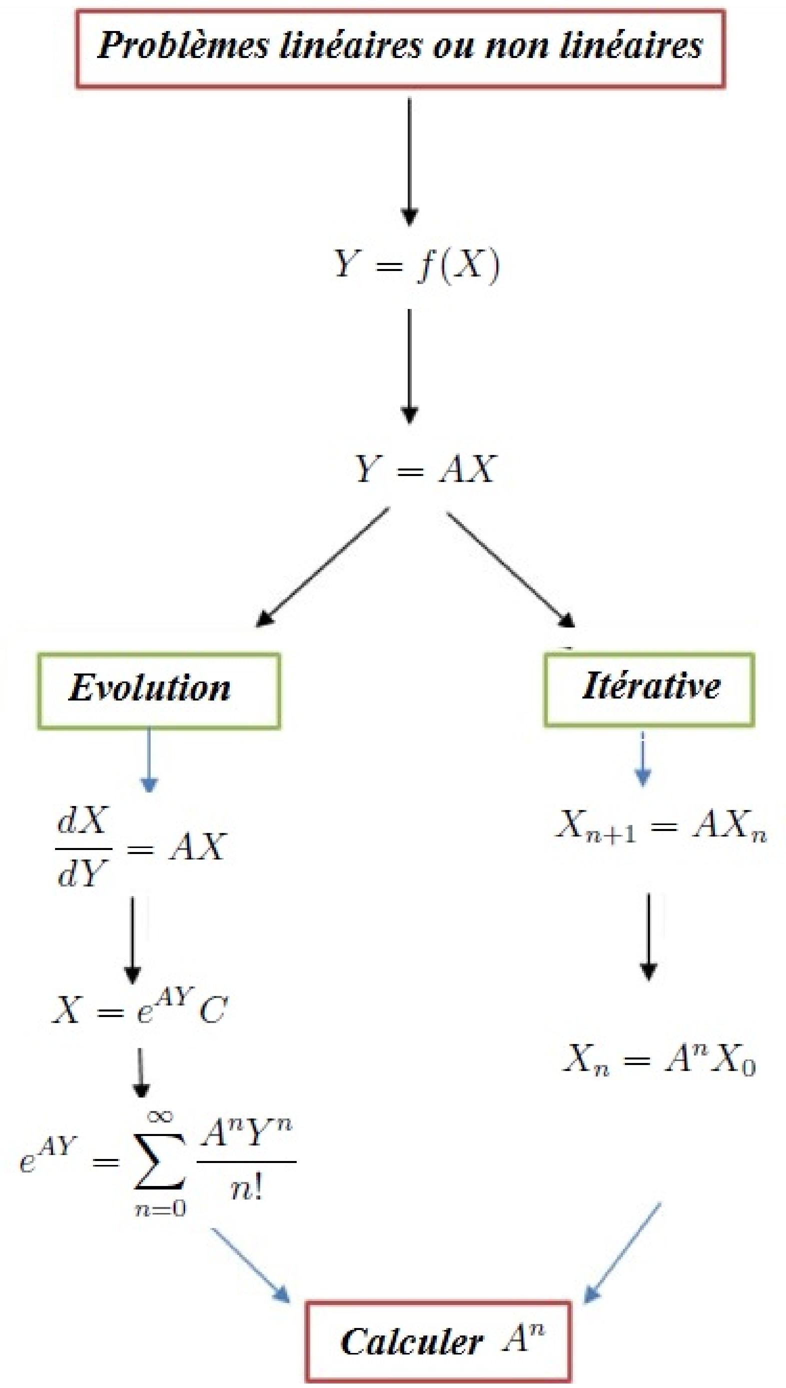
Alors la matrice de passage P *est*

$$P = \begin{pmatrix} 9 & -2 & 3 \\ -9 & 3 & 3 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

2.1.1 Applications à la diagonalisation

En automatique par exemple, l'opération la plus délicate dans la résolution des équations d'état consiste à calculer la matrice de transition, pour cela on utilise la méthode de diagonalisation car le calcul de cette matrice est facile ci cette dernière est diagonale.

Les systèmes sont présentés par le schéma suivant :



2.1.2 Puissance d'une matrice

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Si A est diagonalisable, il existe deux matrices, A' diagonale et P inversible tel que $A' = P^{-1}AP$. On a

$$A^k = \underbrace{\left(PA'P^{-1}\right) \times \left(PA'P^{-1}\right) \times \cdots \times \left(PA'P^{-1}\right)}_{k \textbf{ fois}}$$

De plus, on a $PP^{-1} = I$, alors on obtient

$$A^k = P\left(A'\right)^k P^{-1} = P \begin{pmatrix} \lambda_1^k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n^k \end{pmatrix} P^{-1}$$

Donc A^k se calcule par la formule suivante :

$$A^k = PA'^k P^{-1}$$

2.1.3 Systèmes de suites récurrentes

On suppose qu'on a un système de suites récurrentes dans lequel on cherche à déterminer le terme générale en fonction des premiers termes de chaque suite. Soit

$$\begin{cases} u_{n+1} = f(u_n, v_n) = a_{11}u_n + a_{12}v_n \\ v_{n+1} = g(u_n, v_n) = a_{21}u_n + a_{22}v_n \end{cases}$$

avec u_0 et v_0 donnés.
On pose

$$X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} \text{ et } X_0 = \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}$$

Le système précédent s'écrit $X_{n+1} = AX_n$, avec

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

d'où par récurrence

$$X_n = A^n X_0$$

on est donc ramené au calcul de A^n puis de X_n en fonction de n.
Dans le cas où la matrice est diagonalisable, alors

$$A^n = PA'^n P^{-1}$$

Exemple 13 *Déterminons le terme général des deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que :*

$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n - v_n \\ v_{n+1} = 2u_n + 4v_n \end{cases} \tag{2.1.1}$$

avec $u_0 = 2$ et $v_0 = 1$. On pose $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$.

Le système (2.1.1) s'écrit alors :

$$X_{n+1} = AX_n$$

avec

$$A \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

d'où, par récurrence : $X_n = A^n X_0$ *avec* $X_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

On est ainsi ramené au calcul de A^n *(voir la section 2.2.3). Après calcul on trouve :*

$$\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{n+1} - 3^n & 2^{n+1} - 2.3^n \\ -2^n + 3^n & -2^n + 2.3^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2^{n+2} - 2.3^n + 2^{n+1} - 2.3^n \\ -2^{n+1} + 2.3^n - 2^n + 2.3^n \end{pmatrix}$$

Alors

$$\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3.2^{n+1} - 4.3^n \\ -3.2^n + 4.3^n \end{pmatrix}$$

2.1.4 Systèmes d'équations différentielles

On cherche à résoudre le système d'équations différentielles suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}x_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ \dfrac{d}{dt}x_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n \end{cases} \tag{2.1.2}$$

avec $a_{ij} \in \mathbb{R}$ et $x_i : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivables.
Ce système peut s'écrire sous la forme matricielle suivante :

$$\frac{dX}{dt} = AX$$

,

$$A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$$

et

$$X = (x_1 \; x_2 \cdots x_n)^t$$

Pour résoudre ce système, on passe par les étapes suivantes :

1. On réduit la matrice A sous la forme diagonale et on détermine la matrice de passage P.
2. On résout le système
$$\frac{dY}{dt} = A'Y$$
3. La solution du système (2.1.2) est
$$X = PY$$

Exemple 14 *Soit le système d'équations différentielles suivant :*

$$\begin{cases} x' = 5x - y + 9z \\ y' = 3x + 4y \\ z' = x + y + z \end{cases} \Longleftrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}}_{\dfrac{dX}{dt}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 5 & -1 & 9 \\ 3 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{X}$$

Après calcul on trouve (voir l'exemple 12)

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} \text{ et } P = \begin{pmatrix} 9 & -2 & 3 \\ -9 & 3 & 3 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

On résout maintenant le système

$$\frac{dY}{dt} = A'Y \iff \begin{cases} y_1' = y_1 \\ y_2' = 2y_2 \\ y_3' = 7y_3 \end{cases}$$

avec

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

ce qui donne

$$\begin{cases} y_1 = C_1 e^t \\ y_2 = C_2 e^{2t} \\ y_3 = C_3 e^{7t} \end{cases}$$

avec $C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}$.
La solution de notre système est

$$X = PY \iff X = \begin{pmatrix} 9C_1e^t - 2C_2e^{2t} + 3C_3e^{7t} \\ -9C_1e^t + 3C_2e^{2t} + 3C_3e^{7t} \\ 5C_1e^t + C_2e^{2t} + C_3e^{7t} \end{pmatrix}$$

2.2 Trigonalisation d'une matrice

Soit E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension finie et f un endomorphisme de E.

2.2.1 Définitions et exemples

Définition 19 *On dit que f est triangularisable (ou trigonalisable) s'il existe une base $\{e_i'\}$ de E (resp. une matrice inversible P) telle que $\mathcal{M}_{\{e_i'\}}(f)$ (resp. $P^{-1}AP$) soit triangulaire supérieure.*

Théorème 2 *Une matrice carrée $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ou un endomorphisme f est triangularisable si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé dans $\mathbb{K}$.*

Remarque 4
- *Si la matrice A est triangularisable, les éléments diagonaux de la matrice réduite triangulaire supérieure sont les valeurs propres de A.*
- *La forme réduite triangulaire n'est pas unique.*

Technique :
Soit A une matrice carrée, pour déterminer la matrice réduite triangulaire et la matrice de passage correspondante on a les étapes suivantes :

1. On détermine les valeurs propres et les vecteurs propres. Si

$$\exists \lambda \in \text{ Sp } (A), \dim \mathbb{E}_\lambda \neq \text{mult}(\lambda)$$

alors la matrice n'est pas diagonalisable mais trigonalisable.

2. Dans ce cas, cette matrice dans une base $\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ s'écrit sous la forme

$$A' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

3. On résout le système suivant :

$$\begin{aligned} Av_1 &= \lambda_1 v_1 \\ Av_2 &= a_{12}v_1 + \lambda_2 v_2 \\ &\vdots \\ Av_n &= a_{1n}v_1 + a_{2n}v_2 + \cdots + \lambda_n v_n \end{aligned}$$

dont les inconnus sont v_k et les paramètres a_{ij}, avec la contrainte

$$\det\left(v_1 \,|v_2| \cdots |v_n\right) \neq 0$$

4. Une fois les coefficients a_{ij} et les vecteurs v_k sont déterminés, la matrice réduite triangulaire et la matrice de passage sont données par

$$A' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} \text{ et } P = \left(v_1 \,|v_2| \cdots |v_n\right)$$

Exemple 15 *Soit la matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

Calculons les valeurs et les vecteurs propres de A.

Valeurs propres :

$$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & -1 & -1 \\ 2 & 1-\lambda & -2 \\ 3 & -1 & -2-\lambda \end{pmatrix}$$

$$= (\lambda - 1)^2 (\lambda + 1)$$

$P_A(\lambda)$ *est scindé dans* $\mathbb{R}$.
$\lambda_1 = 1$ *de multiplicité* 2.
$\lambda_2 = -1$ *de multiplicité* 1.
Vecteurs propres :

Pour $\lambda_1 = 1$

$$(A - \lambda_1 I)\, v = 0 \Longleftrightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 - 2x_3 = 0 \\ 3x_1 - x2 - 3x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} x_1 = x_3 \\ x_2 = 0 \end{cases}$$

On obtient

$$v_1 = x_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

avec x_3 quelconque, on prend alors $x_3 = 1$, donc

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$E_1 = vect \left\langle v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \Longrightarrow \ dim\ E_1 \neq \ mult\ (1) = 2$$

Donc la matrice A est trigonalisable.

Pour $\lambda_2 = -1$

$$(A - \lambda_1 I)\, v = 0 \Longleftrightarrow \begin{cases} 3x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 0 \\ 3x_1 - x2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} x_3 = 2x_1 \\ x_1 = x_2 \end{cases}$$

On obtient

$$v_2 = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

avec x_1 quelconque, on prend alors $x_1 = 1$, ce qui donne

$$v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$E_{-1} = vect \left\langle v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle \Longrightarrow dim\ E_{-1} = \ mult\ (-1) = 1$$

Forme réduite et matrice de passage :

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Les composantes des colonnes de A' sont les composantes des images des vecteurs Ae_i dans la base $\{e_1, e_2, e_3\}$, c'est-à-dire :

$$Ae_1 = e_1 \quad (2.2.1)$$

$$Ae_2 = ae_1 + e_2 \quad (2.2.2)$$

$$Ae_3 = be_1 + ce_2 - e_3 \quad (2.2.3)$$

la relation (2.2.1) affirme que le vecteur propre de A qui correspond à la valeur propre $\lambda_1 = 1$, alors on prend

$$e_1 = v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Dans la relation (2.2.2), on ne peut pas prendre $a = 0$ sinon le vecteur e_2 sera un vecteur propre de A correspondant à la valeur propre $\lambda_1 = 1$, ce qui est absurde car cette valeur possède qu'un seul vecteur propre. Alors on prend $a = 1$ et on obtient

$$(A - I)\, e_2 = v_1 \Longleftrightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = 1 \\ 2x_1 - 2x_3 = 0 \\ 3x_1 - x_2 - 3x_3 = 1 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} x_1 = x_3 \\ x_2 = -1 \end{cases}$$

On peut prendre alors

$$e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Dans la relation (2.2.3) , on peut prendre e_3 le vecteur propre de A qui correspond à la valeur propre $\lambda_2 = -1$, ce qui donne

$$e_3 = v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Finalement la matrice réduite et la matrice de passage sont

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } P = (e_1\, | e_2 |\, e_3\ ) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

2.2.2 Décomposition de Dunford

Définition 20 *Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E . On dit que f est nilpotente si et seulement si*

$$\exists p \in \mathbb{N} : f^p \equiv 0$$

Une matrice carrée A est dite nilpotente si et seulement si

$$\exists p \in \mathbb{N} : A^p = 0$$

Si A est de taille n, alors $A^n = 0$.

Théorème 3 *Soit E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension finie et f un endomorphisme de E dont le polynôme caractéristique est scindé. Alors f se décompose d'une manière unique sous la forme*

$$f \equiv D + N$$

avec D un endomorphisme diagonalisable et N un endomorphisme nilpotent, tel que

$$D \circ N = N \circ D$$

Proposition 4 *Soit A une matrice carrée dont le polynôme caractéristique est scindé.*

1. *Si A admet une seule valeur propre λ_0, la décomposition de Dunford est de la forme*

$$A = D + N,\ N = A - D,\ D = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_0 \end{pmatrix}$$

2. *Si A admet au moins deux valeurs propres distinctes, alors la décomposition de Dunford se fait selon les étapes suivantes :*
   — *On détermine la matrice réduite A' et la matrice de passage P.*
   — *On décompose la matrice A' sous la forme*

   $$A' = D' + N'$$

   tels que D' une matrice diagonale dont les éléments diagonaux sont les valeurs propres de A et $N' = A' - D'$ matrice nilpotente.
   — *Alors la décomposition de Dunford de la matrice A vaut*

   $$A = \underbrace{PD'P^{-1}}_{D} + \underbrace{PN'P^{-1}}_{N}$$

Exemple 16 *Si on prend l'exemple 15, on a la matrice A est trigonalisable et sa forme réduite est*

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}}_{D'} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{N'}$$

Alors

$$A = PA'P^{-1} = \underbrace{P\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}P^{-1}}_{D} + \underbrace{P\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}P^{-1}}_{N}$$

avec D diagonalisable et $N = D - A$ nilpotente.

2.2.3 Puissance d'une matrice

Définition 21 *(formule de binôme de Newton) Soit A et B deux matrices qui commutent (c'est-à-dire $AB = BA$) alors*

$$(A+B)^p = \sum_{k=0}^{p} C_p^k A^{p-k} B^k$$

Proposition 5 *Soit A une matrice carrée dont le polynôme caractéristique est scindé. On a*

$$A = D + N$$

donc

$$\begin{aligned} A^k = (D+N)^k &= P\left(D'+N'\right)^k p^{-1} \\ &= p\left(\sum_{k=0}^{n} C_n^k D'^{n-k} N'^k\right) P^{-1} \\ &= p\left(\sum_{k=0}^{n-1} C_n^k D'^{n-k} N'^k\right) P^{-1} (\text{ car } N'^n = 0) \end{aligned}$$

2.2.4 Résolution des équations différentielles

Exponentiel d'une matrice

Définition 22 *On définit l'exponentiel d'une matrice carrée A par la formule*

$$e^A = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!}$$

Remarque 5 *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$*

1. *Si A et B sont deux matrices qui commutent alors $e^{A+B} = e^A e^B$*
2. *Si A est nilpotente alors*
$$e^A = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{A^k}{k!}$$
3. *Si A est diagonale alors*
$$e^A = \begin{pmatrix} e^{a_{11}} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{a_{22}} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & e^{a_{nn}} \end{pmatrix}$$
4. *Si A et A' sont semblables alors*
$$e^A = Pe^{A'}P^{-1}$$

Proposition 6 *La résolution du système*

$$\frac{dX}{dt} = Ax$$

se fait par la méthode suivante :

1. *On détermine la matrice réduite et la matrice de passage de A, et on décompose A sous la forme*
$$A = D + N$$
2. *La solution X vaut*
$$\begin{aligned} X &= e^{At}C = e^D e^N C \\ &= Pe^{D't}\left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{N'^k}{k!} t^k\right) p^{-1}C \\ &= Pe^{D't}\left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{N'^k}{k!} t^k\right) C_1 \end{aligned}$$
avec $C_1 \in \mathbb{R}^n$.

Équations différentielles ordinaires

On veut résoudre l'équation différentielle suivante :

$$y'' + 2y' + y = 0$$

ce qui nous donne le système

$$\begin{cases} y'' = -2y' - y \\ y' = y' \end{cases}$$

Ce système peut s'écrire sous la forme matricielle suivante

$$\underbrace{\begin{pmatrix} y'' \\ y' \end{pmatrix}}_{\frac{dX}{dt}} = \underbrace{\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} y' \\ y \end{pmatrix}}_{X}$$

Donc y est la dernière composante du vecteur X.
On sait que la solution du système

$$\frac{dX}{dt} = AX$$

est

$$X = e^{At}C$$

pour cela on va déterminer la matrice réduite et la matrice de passage de A.
Valeurs et vecteurs propres :

$$\det(A - \lambda I) = (\lambda + 1)^2$$

Les valeurs propres sont : $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$.
Les vecteurs propres sont :

$$E_1 = \text{ vect } \left\langle v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle, \text{ dim } E_1 = 1 \neq \text{ mult } (1) = 2$$

$$v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Donc A est trigonalisable et on a

$$A' = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Alors

$$A' = \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}_{D'} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{N'}$$

par suite

$$X = e^{At} = e^{(D+N)t}$$
$$= Pe^{D't} \left(\sum_{k=0}^{1} \frac{N'^k}{k!} t^k \right) P^{-1}C$$

$$
\begin{aligned}
&= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix} \left[I + \begin{pmatrix} /0 & t \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right] P^{-1}C \\
&= \begin{pmatrix} e^{-t} & -e^{-t} \\ -e^{-t} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} (c_1 + (t-1)c_2)\, e^{-t} \\ -\,(c_1 + c_2 t)\, e^{-t} \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Au final,

$$y = -\,(c_1 + c_2 t)\, e^{-t}$$

Remarque 6 *Lorsqu'on a une seule valeur propre , on a pas besoin de calculer la matrice P car, on a*

$$
\begin{aligned}
A &= PA'P^{-1} \\
&= P \left[\begin{pmatrix} \lambda & & & 0 \\ & \lambda & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & & & * \\ & 0 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix} \right] P^{-1} \\
&= P \left[I\lambda + N' \right] P^{-1}
\end{aligned}
$$

Donc

$$A = [\lambda I + N]$$

avec

$$N = A - \lambda I$$

2.3 Réduction de Jordan

Polynôme annulateur et minimale

Définition 23 ***(Polynôme annulateur)*** *Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$ espace vectoriel E et P un polynôme de $\mathbb{K}[X]$, on dit qu'il est annulateur de f si*

$$P(f) \equiv 0$$

avec

$$P(f) = \sum_{k=1}^{m} a_k f^k, \quad \underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{k \text{ fois}} = f^k, \quad f^0 = Id$$

Dans le cas d'une matrice carrée A on a

$$P(A) = 0$$

avec

$$P(A) = \sum_{k=1}^{m} a_k A^k, \quad A^0 = I$$

Proposition 7 *Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$ espace vectoriel E et P un polynôme annulateur de f. Alors les valeurs propres de f figurent parmi les racines de P. (la réciproque est fausse).*

Théorème 4 *Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$ espace vectoriel E de dimension finie. Alors f est diagonalisable si et seulement si il existe un polynôme scindé qui admet des racines simples et qui annule f.*

Théorème 5 *(Cayley-Hamilton) Soient f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$ espace vectoriel E de dimension finie net P_f son polynôme caractéristique.On a*

$$P_f(f) = 0$$

Définition 24 ***(Polynôme minimal)*** *Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$ espace vectoriel E. On appel un polynôme minimal de f et on le note m_f, le polynôme annulateur de f qui est*

1. *Normalisé dans le sens où le coefficient du monôme du plus haut degré de ce polynôme vaut 1.*
2. *C'est le polynôme de degré le plus petit parmi tous les polynômes annulateurs de f.*

Théorème 6 *Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$ espace vectoriel E de dimension finie. Alors f est diagonalisable si et seulement si son polynôme minimal est scindé dans $\mathbb{K}$ et n'admet que des racines simples.*

Remarque 7
- *Le polynôme minimal d'un endomorphisme f est unique.*
- *Les racines du polynôme minimal m_f sont exactement les racines du polynôme caractéristique mais avec des multiplicités généralement différentes.*

Exemple 17 *Soit l'endomorphisme f dans $\mathbb{R}^3$ définit par*

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x+y+z \\ x-y+z \\ x+y-z \end{pmatrix}$$

Après calcul on trouve

$$P_f(\lambda) = -(\lambda-1)(\lambda+2)^2$$

d'après la remarque 7 on conclut qu'il y a deux possibilités pour le polynôme minimal

$$m_f(\lambda) = \begin{cases} Q_1(\lambda) = (\lambda-1)(\lambda+2)^2 \\ ou \\ Q_2(\lambda) = (\lambda-1)(\lambda+2) \end{cases}$$

On va tester ces deux polynômes en calculant $Q_i(f)$ en commençant par celui du plus petit degré. Pour faciliter les calculs on va calculer $Q_i(A)$ avec A la matrice associée à f dans n'importe qu'elle base. Dans notre cas, on prend la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On a

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Donc

$$Q_2(A) = (A-I)(A+2I) = 0$$

Alors

$$m_f(\lambda) = (\lambda-1)(\lambda+2)$$

qui est le polynôme minimal de f.

Définition 25 *On appelle un bloc de Jordan associé à la valeur propre λ d'ordre n la matrice carrée de taille n de la forme*

$$\mathcal{J}(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

Théorème 7 ***(Le cas d'une seule valeur propre)*** *Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$ espace vectoriel $\mathbb{E}$ de dimension finie n tels que*

1. *Le polynôme caractéristique de f est scindé et admet une seule valeur propre λ*

$$P_f(X) = (-1)^n (X - \lambda)^n$$

2. *Le polynôme minimal de f est de la forme*

$$m_f(X) = (X - \lambda)^\beta$$

3. $$\dim E_\lambda = \gamma$$

Dans ce cas il existe une base B de E tel que la matrice associée à f est de la forme

$$\tilde{\mathcal{J}}(\lambda) = \begin{pmatrix} \mathcal{J}_1(\lambda) & & & 0 \\ & \mathcal{J}_2(\lambda) & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \mathcal{J}_\gamma(\lambda) \end{pmatrix}$$

où

- *$\mathcal{J}_k(\lambda)$ sont les blocs de Jordan.*
- *L'ordre du plus grand bloc est β (la taille du bloc).*
- *Le nombre de bloc est γ.*

Théorème 8 ***(Le cas de plusieurs valeurs propres)*** *Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$ espace vectoriel E de dimension finie n tel que son polynôme caractéristique est scindé et f admet p valeurs propres distinctes λ_k.*

$$P_f(\lambda) = (-1)^n \prod_{k=1}^{p} (x - \lambda_k)^{\alpha_k}$$

Alors il existe une base B de E tel que la matrice associée à f est de la forme

$$\begin{pmatrix} \tilde{\mathcal{J}}_1(\lambda_1) & & 0 \\ & \tilde{\mathcal{J}}_2(\lambda_2) & \\ 0 & & \tilde{\mathcal{J}}\gamma(\lambda) \end{pmatrix}$$

où les blocs $\tilde{\mathcal{J}}$ sont donnés par le théorème 6.

Exemple 18 1. *Le cas de plusieurs valeurs propres :*

si on prend l'exemple 13, on a

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$p_A(\lambda) = (\lambda - 1)^2 (\lambda + 1)$$

$$m_A(\lambda) = (\lambda - 1)^2 (\lambda + 1)$$

et

$$\dim E_1 = 1, \dim E_{-1} = 1$$

Alors

$$\tilde{\mathcal{J}} = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{matrix}} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 0 \end{matrix} & \boxed{-1} \end{pmatrix}$$

2. *Le cas d'une seule valeur propre :*
Soient

$$p_A(\lambda) = (\lambda - 2)^3$$
$$m_A(\lambda) = (\lambda - 2)^2$$

et

$$\dim E_1 = 2$$

Alors

$$\tilde{\mathcal{J}} = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{matrix}} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 0 \end{matrix} & \boxed{2} \end{pmatrix}$$

2.4 Algorithme de Fadeev

Cet algorithme permet de calculer entre autre le polynôme minimal d'une matrice. Écrivons le polynôme caractéristique sous la forme suivante :

$$P(\lambda) = \lambda^n - p_1\lambda^{n-1} - p_2\lambda^{n-2} - \cdots - p_{n-1}\lambda - p_n = \lambda^n - \sum_{j=1}^{n} p_j\lambda^{n-j}$$

et $B(\lambda)$ la transposée de la comatrice de $\lambda I_n - A$ sous la forme

$$B(\lambda) = \lambda^{n-1} + \sum_{j=1}^{n-1} \lambda^{n-1-j} B_j$$

L'algorithme de Fadeev permet de calculer les coefficients p_j et les matrices B_j par le schéma suivant : où $tr(X)$ désigne la trace d'une matrice carrée X, c'est-à-dire la somme de ses éléments diagonaux.

$A_1 = A$	$p_1 = tr(A_1)$	$B_1 = A_1 - p_1 I_n$
$A_2 = AB_1$	$p_2 = \frac{1}{2}tr(A_2)$	$B_2 = A_2 - p_2 I_n$
$A_3 = AB_3$	$p_3 = \frac{1}{3}tr(A_3)$	$B_3 = A_3 - p_3 I_n$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$A_{n-1} = AB_{n-2}$	$p_{n-1} = \frac{1}{n-1}tr(A_{n-1})$	$B_{n-1} = A_{n-1} - p_{n-1} I_n$
$A_n = AB_{n-1}$	$p_n = \frac{1}{n}tr(A_n)$	$B_n = A_n - p_n I_n = 0$

Notons $D(\lambda)$ le PGCD des coefficients de la matrice $B(\lambda)$, alors le polynôme minimal de A est donné par :

$$m_A(\lambda) = \frac{P(\lambda)}{D(\lambda)}$$

Exemple 19 *Soit la matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Calculer A^{2018} et e^A.

Solution :
Appliquons l'algorithme de Fadeev. Pour cela cherchons les coefficients p_j et B_j. Alors

$$P_A(\lambda) = \lambda^3 - \lambda^2 - \lambda + 1$$

$$B_A(\lambda) = \lambda^2 I + \lambda B_1 + B_2 = \begin{pmatrix} \lambda^2 - 1 & \lambda - 1 & \lambda - 1 \\ 0 & \lambda^2 - \lambda & -\lambda + 1 \\ 0 & -\lambda + 1 & \lambda^2 - \lambda \end{pmatrix}$$

$$\text{PGCD}(B_{ij}) = \lambda - 1$$

Alors

$$m_A(\lambda) = \frac{\lambda^3 - \lambda^2 - \lambda + 1}{\lambda - 1} = \lambda^2 - 1 = \underbrace{(\lambda - 1)}_{\varphi_1}\underbrace{(\lambda + 1)}_{\varphi_2}$$

Soit f une fonction quelconque.

$$f(A) = f(1)\varphi_1(A) + f(-1)\varphi_2(A)$$

$A_1 = A$	$p_1 = 1$	$B_1 = A_1 - p_1 I = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$
$A_2 = AB_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$	$p_2 = 1$	$B_2 = A_2 - p_2 I = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
$A_3 = AB_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$	$p_3 = -1$	$B_3 = A_3 - p_3 I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Prenons
$f(x) = x - 1$, alors $f(A) = A - I = -2\varphi_2(A) \Longrightarrow \varphi_2(A) = -\frac{1}{2}(A - I)$
$f(x) = x + 1$, alors $f(A) = A + I = 2\varphi_1(A) \Longrightarrow \varphi_1(A) = \frac{1}{2}(A + I)$
Donc

$$f(A) = \frac{1}{2}f(1)(A+I) - \frac{1}{2}f(-1)(A-I)$$

$$\Longrightarrow f(A) = \left(\frac{f(1) - f(-1)}{2}\right) A + \left(\frac{f(1) + f(-1)}{2}\right) I$$

Par suite

$$A^{2018} = I$$

et

$$e^A = \left(\frac{e - e^{-1}}{2}\right) A + \left(\frac{e + e^{-1}}{2}\right) I$$

2.5 Exercices corrigés

Exercice 1 *Soit la matrice A définie dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ par*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

A est-elle diagonalisable ?

Solution
Commençons d'abord par calculer les valeurs propres de A
Valeurs propres :

$$P_A(\lambda) = det(A - \lambda I) \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 2 \\ 0 & 0 & -1-\lambda \end{pmatrix} = -(1-\lambda)^2(1+\lambda)$$

Alors on a

$$\begin{cases} P_A(\lambda) \text{ scindé} \\ \lambda_1 = \lambda_2 = 1, \text{ mult } (\lambda_{1,2}) = 2 \\ \lambda_3 = -1, \text{ mult } (\lambda_3) = 1 \end{cases}$$

Vecteurs propres :
Pour $\lambda = 1$:

$$(A - I)v = 0 \Longleftrightarrow \begin{cases} 3x + 6y = 0 \\ -3x - 4y = 0 \\ -3x - 6y - 4z = 0 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} x = -2y \\ y \in \mathbb{R} \\ z = 0 \end{cases}$$

donc

$$v = \begin{pmatrix} -2y \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

On prend, $y = 1$ et on obtient

$$E_1 = \left\langle v_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\dim E_1 = 1 \neq \text{ mult } (1)$$

Alors la matrice A n'est pas diagonalisable, elle est donc trigonalisable.

Exercice 2 *Soit la matrice A définie dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ par*

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

1. *A est-elle diagonalisable ?Donner la matrice réduite de A en précisant la matrice de passage.*
2. *Résoudre le système différentiel $\dfrac{dX}{dt} = AX$.*

Solution

1. Commençons d'abord par calculer les valeurs propres de A

   Valeurs propres :

$$P_A(\lambda) = det(A - \lambda I) \begin{pmatrix} 3-\lambda & -1 & 1 \\ 2 & -\lambda & 1 \\ 1 & -1 & 2-\lambda \end{pmatrix} = (\lambda - 2)^2 (\lambda - 1)$$

Alors on a

$$\begin{cases} P_A(\lambda) \text{ scindé} \\ \lambda_1 = \lambda_2 = 2, \ \text{mult } (\lambda_{1,2}) = 2 \\ \lambda_3 = 1, \ \text{mult } (\lambda_3) = 1 \end{cases}$$

Vecteurs propres :

Pour $\lambda = 2$ **:**

$$(A - 2I)v = 0 \Longleftrightarrow \begin{cases} x - y - z = 0 \\ 2x - 2y + z = 0 \\ x - y = 0 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} x = y \\ y \in \mathbb{R} \\ z = 0 \end{cases}$$

donc

$$v = \begin{pmatrix} y \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

On prend, $y = 1$ et on obtient

$$E_1 = \left\langle v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

On remarque que

$$\dim E_1 = 1 \neq \text{ mult } (\lambda_1)$$

Alors la matrice A n'est pas diagonalisable, elle est donc trigonalisable. et

$$A' = \begin{pmatrix} 2 & a & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

En prenant $a \neq 0$, on cherche v_2 tel que $f(v_2) = av_1 + 2v_2$, on prend par exemple $a = 1$, on trouve $v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Pour $\lambda = 1$ **:**

$$(A - I)v = 0 \Longleftrightarrow \begin{cases} 2x - y + z = 0 \\ 2x - y + z = 0 \\ x - y + z = 0 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y \in \mathbb{R} \\ z = y \end{cases}$$

donc

$$v = \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ y \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

On prend, $y = 1$ et on obtient

$$E_2 = \left\langle v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Alors la matrice réduite de A est

$$A' = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et la matrice de passage est

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

2. On va maintenant résoudre le système $\dfrac{dX}{dt} = AX$. On a

$$\frac{dX}{dt} = AX \Rightarrow X = e^{At}C$$

Donc il suffit de calculer e^{At}. On a

$$A = PA'P^{-1} \Rightarrow e^{At} = Pe^{A't}P^{-1}$$

En utilisant la décomposition de dunford de A' on obtient

$$A' = D' + N'$$

avec

$$D' = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } N' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Alors

$$e^{A't} = e^{D't}e^{N't}$$

où

$$e^{D't} = \begin{pmatrix} e^{2t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{t} \end{pmatrix}$$

et

$$e^{N't} = \sum_{k=0}^{2} \frac{N'^k t^k}{k!} = I + N't + \frac{N'^2 t^2}{2}$$

avec

$$N'^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Alors

$$e^{N't} = \begin{pmatrix} 1 & t & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } e^{A't} = \begin{pmatrix} e^{2t} & te^{2t} & 0 \\ 0 & e^{2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{t} \end{pmatrix}$$

Par la suite

$$e^{At} = Pe^{A't}P^{-1} = e^{2t} \begin{pmatrix} 1+t & -t & t \\ t & 1-t & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Donc

$$X = Ce^{At}$$

Exercice 3 *Soit le système différentiel d'ordre 1 à coefficients constants*

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 4x + 6y \\ \\ \dfrac{dy}{dt} = -3x - 5y \\ \\ \dfrac{dz}{dt} = -3x - 6y - 5z \end{cases} \tag{2.5.1}$$

1. *Écrire ce système sous la forme*
$$\frac{dX}{dt} = AX$$
2. *Résoudre le système*
$$\frac{dX}{dt} = AX$$

Solution

1.
$$(3) \Longleftrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} \dfrac{dx}{dt} \\ \\ \dfrac{dy}{dt} \\ \\ \dfrac{dz}{dt} \end{pmatrix}}_{\dfrac{dX}{dt}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 4 & 6 & 0 \\ -3 & -5 & 0 \\ -3 & -6 & -5 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{X}$$

2. Pour écrire la réduction de Jordan de A, il faut trouver la matrice réduite de A, pour cela calculons les valeurs propres et les vecteurs propres de A.
Valeurs propres :
$$\begin{aligned} P_A(\lambda) = det(A - \lambda I) &\begin{pmatrix} 4-\lambda & 6 & 0 \\ -3 & -5-\lambda & 0 \\ -3 & -6 & -5-\lambda \end{pmatrix} \\ &= -(\lambda+5)(\lambda+2)(\lambda-1) \end{aligned}$$
Alors on a : $\lambda_1 = -5$, $\lambda_2 = -2$ et $\lambda_3 = 1$ de multiplicité 1 alors la matrice A est diagonalisable et
$$A' = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
Calculons maintenant la matrice de passage, pour cela on doit calculer les vecteurs propres.
Vecteurs propres :
Pour $\lambda = -5$:
$$(A + 5I)v = 0 \Longleftrightarrow \begin{cases} 9x + 6y = 0 \\ -3x = 0 \\ -x - 6y = 0 \end{cases}$$
$$\Longrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = \in \mathbb{R} \end{cases}$$
donc
$$v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$
On prend, $z = 1$ et on obtient
$$E_1 = \left\langle v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$
Pour $\lambda = -2$:
$$(A + 2I)v = 0 \Longleftrightarrow \begin{cases} 6x + 6y = 0 \\ -3x - 3y = 0 \\ -3x - 6y - 3z = 0 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = -y \\ y = \in \mathbb{R} \\ z = -3y \end{array} \right.$$

donc

$$v = \begin{pmatrix} -y \\ y \\ -3y \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

On prend, $y = 1$ et on obtient

$$E_2 = \left\langle v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Pour $\lambda = 1$ **:**

$$(A - I)v = 0 \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 3x + 6y = 0 \\ -3x - 4y = 0 \\ -3x - 6y - 4z = 0 \end{array} \right.$$

$$\Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = -2y \\ y = \in \mathbb{R} \\ z = 0 \end{array} \right.$$

donc

$$v = \begin{pmatrix} -2y \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

On prend, $y = 1$ et on obtient

$$E_3 = \left\langle v_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

3. On va résoudre le système $\dfrac{dX}{dt} = AX$: On a

$$\frac{dX}{dt} = AX \Rightarrow X = e^{At}C$$

Donc il suffit de calculer e^{At}. On a

$$A = PA'P^{-1} \Rightarrow e^{At} = Pe^{A't}P^{-1}$$

avec

$$P = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \end{pmatrix}, P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -\dfrac{1}{3} & \dfrac{2}{3} & 0 \\ \dfrac{1}{3} & \dfrac{1}{3} & 0 \end{pmatrix} \text{ et } e^{A't} = \begin{pmatrix} e^{-5t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{t} \end{pmatrix}$$

Alors

$$e^{At} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3}e^{-2t} + \frac{2}{3}e^{t} & -\frac{1}{3}e^{-2t} + \frac{2}{3}e^{t} & 0 \\ \frac{2}{3}e^{-2t} + \frac{1}{3}e^{t} & \frac{2}{3}e^{-2t} + \frac{1}{3}e^{t} & 0 \\ -e^{-5t} + e^{-2t} & 2e^{-5t} - 2e^{-2t} & -e^{-5t} \end{pmatrix}$$

et donc

$$X = e^{At}C, C \in \mathbb{R}^3$$

Exercice 4 *Soit* $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$, *trois suites numériques réelles vérifiant :*

$$\begin{cases} U_{n+1} = 3U_n + 2V_n - 2W_n \\ V_{n+1} = -U_n + W_n \\ W_{n+1} = U_n + V_n \end{cases} \tag{2.5.2}$$

Déterminer les termes U_n,V_n *et* W_n *en fonction de* n, *avec* $U_0 = 1$,$V_0 = 0$ *et* $W_0 = 0$..

Solution

Le système 4 peut s'écrire comme suit

$$\begin{pmatrix} U_{n+1} \\ V_{n+1} \\ Z_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_n \\ V_n \\ W_n \end{pmatrix}$$

On sait que

$$X_n = A^n X_0$$

avec

$$X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

donc il faut calculer A^n, pour cela cherchons les valeurs et les vecteurs propres de A.

Les valeurs propres :

$$P_A(\lambda) = det(A - \lambda I) = \begin{pmatrix} 3-\lambda & 2 & -2 \\ -1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)^3$$

On a

$$\begin{cases} P_A(\lambda) \text{ scindé} \\ \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1, \text{ mult } (\lambda) = 3 \end{cases}$$

Les vecteurs propres :

$$(A - I)v = 0 \Longleftrightarrow \begin{cases} 2x + +2y - 2z = 0 \\ 3x - y - z = 0 \\ x + y - z = 0 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} y \in \mathbb{R} \\ y \in \mathbb{R} \\ z = x + y \end{cases}$$

donc

$$v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ x+z \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

On prend, $x = y = 1$ et on obtient

$$E_1 = \left\langle v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\dim E_1 = 2 \neq \text{ mult } (1) = 3$$

Alors A est trigonalisable.

On complète la base en prenant par exemple $v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et on a

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On calcul le a et le b, en imposant que $f(v_3) = av_1 + bv_2 + v_3$. On obtient $a = -2, b = 1$. Alors

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Utilisant la décomposition de Dunford pour calculer A^n.

Puisqu'on a une seule valeur propre alors

$$A = I + N$$

avec

$$N = A - I = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, N^2 = \begin{pmatrix} 0 & -4 & 4 \\ 2 & 0 & 4 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix} \text{ et } N^3 = 0$$

Donc

$$A^n = (I+N)^n = \sum_{k=0}^{3} C_n^k I^{n-k} N^k = I + nN + \frac{n(n-1)}{2} N^2$$

$$= \begin{pmatrix} 1-2n & -2n^2+4n & 2n^2-4n \\ n^2-2n & n^2+1 & 2n^2-n \\ n^2+2n & n & 1+2n^2-n \end{pmatrix}$$

Par suite

$$X_n = A^n X_0 = \begin{pmatrix} 1-2n \\ n^2-2n \\ n^2+2n \end{pmatrix}$$

Exercice 5 *Soit l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ définit par :*

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4x-2y+t \\ 4x-2y-2z \\ 4x-4y+2z+2t \\ 4x-4y+4t \end{pmatrix}$$

1. *Écrire la matrice A de f par rapport à la base canonique.*
2. *f est-elle diagonalisable ou trigonalisable ?*
3. *Calculer A^n, $n \in \mathbb{N}$, puis e^{At}.*
4. *En utilisant l'exponentielle d'une matrice, résoudre le système*

$$\frac{dX}{dt} = AX$$

.

Solution

1.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 & 1 \\ 4 & -2 & -2 & 0 \\ 4 & -4 & 2 & 2 \\ 4 & -4 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

2. Calculons les valeurs propres et les vecteurs propres de A

Valeurs propres :

$$P_A(\lambda) = \det(A-\lambda I) = \det\begin{pmatrix} 4-\lambda & -2 & 0 & 1 \\ 4 & -2-\lambda & -2 & 0 \\ 4 & -4 & 2-\lambda & 2 \\ 4 & -4 & 0 & 4-\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda)^2(6-\lambda)(-2-\lambda)$$

$$(C_1+C_2),(L_2-L1),(L_4-L3)$$

On a

$$\begin{cases} P_A(\lambda) \text{ scindé} \\ \lambda = 2, \ \text{mult } (\lambda) = 2 \\ \lambda = -2, \ \text{mult } (\lambda) = 1 \\ \lambda = 6, \ \text{mult } (\lambda) = 1 \end{cases}$$

Vecteurs propres :

$$(A-2I)v = 0 \Longleftrightarrow \begin{cases} 2x-2y+t=0 \\ 4x-4y-2z=0 \\ 4x-4y+2t=0 \\ 4x-4y+2t=0 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} z=-t \\ x = y - \dfrac{1}{2}t \end{cases}$$

donc

$$v = \begin{pmatrix} y - \frac{1}{2}t \\ y \\ -t \\ t \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

On prend $y = 1$ et $t = 2$, on obtient

$$E_2 = \left\langle v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle$$

On a

$$\dim E_2 = 2 \text{ mult } (2)$$

Alors f est diagonalisable.

$$(A - 6I)v = 0 \Longleftrightarrow \begin{cases} -2x - 2y + t = 0 \\ 4x - 8y - 2z = 0 \\ 4x - 4y - 4z + 2t = 0 \\ 4x - 4y - 2t = 0 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = \frac{1}{2}t \\ z = t \end{cases}$$

donc

$$v = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}t \\ 0 \\ t \\ t \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

On prend, $t = 2$ et on obtient

$$E_6 = \left\langle v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle$$

On a

$$\dim E_6 = 1 \text{ mult } (6)$$

$$(A + 2I)v = 0 \Longleftrightarrow \begin{cases} 6x - 2y + t = 0 \\ 4x - 2z = 0 \\ 4x - 4y + 4z + 2t = 0 \\ 4x - 4y + 6t = 0 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} y = 2z \\ x = \frac{1}{2}z \\ t = z \end{cases}$$

donc

$$v = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}z \\ 2z \\ z \\ z \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

On prend, $z = 2$ et on obtient

$$E_{-2} = \left\langle v_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle$$

On a

$$\dim E_{(-2)} = 1 \text{ mult } (-2)$$

3. Par suite, on a

$$A' = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \text{ et } P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & -2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

donc

$$A^n = PA'^nP^{-1} = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2^{n-1} \times 3^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (-1)^n \times 2^{n-2} \end{pmatrix}$$

avec

$$A'^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (-2)^n \end{pmatrix}$$

et

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{8} \end{pmatrix}$$

et

$$e^{At} = Pe^{A't}P^{-1} = \begin{pmatrix} e^{2t} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{e^{6t}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dfrac{e^{-2t}}{4} \end{pmatrix}$$

avec

$$e^{A't} = \begin{pmatrix} e^{2t} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{2t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{6t} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{-2t} \end{pmatrix}$$

4.

$$\frac{dX}{dt} = Ax \Longrightarrow X = Ce^{At}, C \in \mathbb{R}^4$$

Exercice 6 *Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $A_\alpha \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ la matrice suivante :*

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} -1 & 0 & \alpha+1 \\ 1 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & \alpha \end{pmatrix}$$

-I-

1. *Factoriser le polynôme caractéristique P_{A_α} en produit de facteurs du premier degré.*
2. *Déterminer selon la valeur de α les valeurs propres distinctes de A_α et leur multiplicité.*
3. *Déterminer les valeurs de α pour lesquelles la matrice A_α est diagonalisable.*
4. *Déterminer selon les valeurs de α le polynôme minimal de A_α.*

-II-

On suppose que $\alpha = 0$, on note $A = A_0$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ associé à la matrice A.

1. *Montrer qu'il existe une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de f est*

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

   et trouver une matrice P inversible telle que $A = PBP^{-1}$.
2. *Écrire la décomposition de Dunford de B.*
3. *Pour $t \in \mathbb{R}$, calculer e^{Bt} et exprimer e^{At} à l'aide de P et e^{Bt}.*

Solution

-I-

1.
$$P_{A_\alpha} = \det(A_\alpha - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} -1-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & -2-\lambda & 0 \\ -1 & 1 & \alpha-\lambda \end{pmatrix}$$
$$= -(1+\lambda)^2(\lambda - \alpha + 1)$$

2. **Les valeurs propres de A_α :**
Si $\alpha \neq 0$, on a :
$$\begin{cases} \lambda_1 = \lambda_2 = -1, mult = 2 \\ \lambda_3 = \alpha - 1, mult = 1. \end{cases}$$
Si $\alpha = 0$, on a :
$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = -1, mult = 3$$

3. Pour que la matrice A_α soit diagonalisable il faut que
$$\dim(E_\lambda) = mult(\lambda)$$

Les vecteurs propres :
Si $\alpha \neq 0$:
Pour $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$
$$(A_\alpha + I)v = 0 \Longleftrightarrow \begin{cases} (\alpha+1)z = 0 \\ x - y = 0 \\ -x + y + (\alpha+1)z = 0 \end{cases}$$
$$(\alpha+1)z = 0 \Longleftrightarrow (\alpha+1) = 0 \vee (z = 0)$$
Si $\alpha \neq -1$, alors $z = 0$ et $x = y$, donc
$$E_{-1} = \left\langle v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$
On a
$$\dim E_{-1} = 1 \neq 2$$
Alors A_α n'est pas diagonalisable.
Si $\alpha = -1$, alors $z \in \mathbb{R}$ et $x = y$
$$v = \begin{pmatrix} x \\ x \\ z \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$
Donc
$$E_{-1} = \left\langle v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$
Alors A_α est diagonalisable.

Si $\alpha = 0$:
Pour $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$:

$$(A_\alpha + I)v = 0 \Longleftrightarrow \begin{cases} z = 0 \\ x - y = 0 \\ -x + y + z = 0 \end{cases}$$

$$E_{-1} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

On a

$$\dim E_{-1} = 1 \neq 2$$

Alors A_α n'est pas diagonalisable.
Conclusion : A_α est diagonalisable si et seulement si $\alpha = -1$.

4. On a

$$\alpha = -1 \Longrightarrow \begin{cases} P_{A_{-1}} = -(\lambda+1)^2(\lambda+2) \\ m_{A_{-1}}(\lambda) = (\lambda+1)(\lambda+2) \end{cases}$$

$$\alpha \neq -1 \Longrightarrow \begin{cases} P_{A_\alpha} = -(\lambda+1)^2(\lambda-\alpha+1) \\ m_{A_\alpha}(\lambda) = (\lambda+1)^2(\lambda-\alpha+1) \end{cases}$$

$$\alpha = 0 \Longrightarrow \begin{cases} P_{A_0} = -(\lambda+1)^3 \\ m_{A_0}(\lambda) = (\lambda+1)^3 \end{cases}$$

-II-
On suppose que $\alpha = 0$, et on a

$$A = A_0 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Cherchons une base $B' = \{e_1, e_2, e_3\}$ qui vérifie :

$$\begin{cases} Ae_1 = -e_1 \\ Ae_2 = e_1 - e_2 \\ Ae_3 = e_2 - e_3 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} (A+I)e_1 = 0 \\ (A+I)e_2 = e_1 \\ (A+I)e_3 = e_2 \end{cases}$$

Pour $\lambda = -1$, on prend $e_1 = v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ comme vecteur propre, donc

$$(A+I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{cases} z = 1 \\ x - y = 1 \\ -x + y + z = 0 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$(A+I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{cases} z = 1 \\ x - y = 0 \\ -x + y + z = 1 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Alors

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } p^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

2. On a

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}}_{D'} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{N'}$$

avec $N'^3 = 0$.

3.

$$e^{Bt} = e^{(D'+N')t} = e^{D't} + e^{N't}$$

où

$$e^{D't} = \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-t} \end{pmatrix}$$

et

$$e^{N't} = \sum_{k=0}^{2} \frac{N'^k t^k}{k!} = I + N't + \frac{N'^2 t^2}{2}$$

avec

$$N'^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Alors

$$e^{N't} = \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Par suite

$$e^{Bt} = e^{-t} \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et

$$e^{At} = e^{PBP^{-1}} = Pe^{Bt}P^{-1}$$

$$= e^{-t} \begin{pmatrix} 1 - \frac{t^2}{2} & \frac{t^2}{2} & t + \frac{t^2}{2} \\ t - \frac{t^2}{2} & 1 - t + \frac{t^2}{2} & \frac{t^2}{2} \\ -t & t & t+1 \end{pmatrix}$$

Exercice 7 *Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie et f l'endomorphisme défini dans $\mathbb{R}^3$ par*

$$f(x, y, z) = (13x - 5y - 2z, -2x + 7y - 8z, -5x + 4y + 7z)$$

1. *Écrire la matrice A associée à f par rapport à la base canonique.*
2. *Donner la matrice réduite de A et sa matrice de passage P.*
3. *Calculer A^n.*
4. *Trouver le polynôme minimale $m_A(\lambda)$ de A.*

Solution

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie et f l'endomorphisme défini dans $\mathbb{R}^3$ par

$$f(x, y, z) = (13x - 5y - 2z, -2x + 7y - 8z, -5x + 4y + 7z)$$

1. La matrice A associée à f par rapport à la base canonique.

$$A = \begin{pmatrix} 13 & -5 & -2 \\ -2 & 7 & -8 \\ -5 & 4 & 7 \end{pmatrix}$$

Le polynôme caractéristique de A est donné par :

$$P_A(\lambda) = -\lambda^3 + 27\lambda^2 - 243\lambda + 729$$
$$= (9 - \lambda)^3$$

2. Les valeurs propres et les vecteurs propres de A.

Les valeurs propres :

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 9$$

Les vecteurs propres :

$$(9 - \lambda I)v = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 4x - 5y - 2z = 0 \\ -2x - 2y - 8z = 0 \\ -5x + 4y - 2z = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = y \\ z = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

On a alors

$$v = \begin{pmatrix} y \\ y \\ -\frac{1}{2}y \end{pmatrix}$$

On pose $y = 2$, on obient

$$E_\lambda = \text{vect}\left\langle v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\dim \mathrm{E}_\lambda \neq \text{ mult } (\lambda) = 3$$

Donc la matrice A est trigonalisable.

3. Calculer A^n.
On utilise la décomposition de Dunford. Puisqu'on a une seule valeur propre, alors

$$A = 9I + N$$

avec

$$N = 9I - A = \begin{pmatrix} 4 & -5 & -2 \\ -2 & -2 & -8 \\ -5 & 4 & -2 \end{pmatrix}$$

Donc

$$A^n = (9I + N)^n = \sum_{k=0}^{3} C_n^k (9I)^{n-k} N^k$$

avec N Nilpotente, c.à.d. $N^3 = 0$. Alors

$$A^n = C_3^0 (9I)^3 N^0 + C_3^1 (9I)^2 N + C_3^2 (9I) N^2$$

$$= 729I + 294N + 27N^2$$

$$= \begin{pmatrix} 2877 & -1956 & 384 \\ 384 & -345 & -1380 \\ -1956 & 1419 & -345 \end{pmatrix}$$

avec

$$N^2 = \begin{pmatrix} 36 & -18 & 36 \\ 36 & -18 & 36 \\ -18 & 9 & -18 \end{pmatrix}$$

4. Le polynôme minimale $m_A(\lambda)$ de A.

$$m_A(\lambda) = \begin{cases} (9-\lambda)^3 \\ ou \\ (9-\lambda)^2 \\ ou \\ (9-\lambda) \end{cases}$$

Soit on remplace λ par A dans les sugestions précédentes et on trouve que $m_A(A) = (A - 9I)^3 = 0$, alors on conclut que

$$m_A(\lambda) = (9-\lambda)^3$$

Soit on utilise la réduction de Jordan :

$$\begin{cases} p_A(\lambda) = (9-\lambda)^3 \\ mult(\lambda = 9) = 3 \\ \dim E_\lambda = 1 \end{cases}$$

on a

$$\mathcal{J} = \begin{pmatrix} 9 & 1 & 0 \\ 0 & 9 & 1 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

Donc

$$m_A(\lambda) = (9-\lambda)^3$$

Exercice 8 *Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$ et f un endomorphisme de E.*

$$\forall P \in E, f(P) = 2XP - \left(X^2-1\right)P'$$

1. *Écrire la matrice A de f par rapport à la base $(1, X, X^2)$.*
2. *Trouver les valeurs propres et les vecteurs propres de f.*
3. *Calculer A^n pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$.*
4. *Calculer e^{At}.*

Solution Soit

$$f(P) = (2X+1)P - (X^2-1)P'$$

1. On a

$$\begin{cases} f(1) = 2X \\ f(X) = X^2+1 \\ f(X^2) = 2X \end{cases}$$

Alors

$$\begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} f(1) & f(X) & f(X^2) \end{array} & \\ A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} 1 \\ X \\ X^2 \end{array} \end{array}$$

2. **Valeurs propres :**

$$P_A(\lambda) = \det(A-\lambda I) = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 2 & -\lambda & 2 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} = -\lambda\left(\lambda^2-4\right)$$

Vecteurs propres :
Pour $\lambda = 0$:

$$Av = 0 \Longrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ 2x+2z = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow v = \begin{pmatrix} -z \\ 0 \\ z \end{pmatrix} = z\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

On pose $z = 1$, on obtient
$$E_1 = \left\langle v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Pour $\lambda = 2$:
$$(A - 2I)\, v = 0 \Longrightarrow \begin{cases} -2x + y = 0 \\ 2x - 2y + 2z = 0 \\ y - 2z = 0 \end{cases}$$
$$\Longrightarrow v = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}y \\ \\ y \\ \\ \frac{1}{2}y \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \\ 1 \\ \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$
On pose $y = 1$, on obtient
$$E_2 = \left\langle v_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \\ 1 \\ \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \right\rangle$$

Pour $\lambda = -2$:
$$(A + 2I)\, v = 0 \Longrightarrow \begin{cases} 2x + y = 0 \\ 2x + 2y + 2z = 0 \\ y + 2z = 0 \end{cases}$$
$$\Longrightarrow v = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}y \\ \\ y \\ \\ -\frac{1}{2}y \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \\ 1 \\ \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$
On pose $y = 1$, on obtient
$$E_3 = \left\langle v_3 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \\ 1 \\ \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \right\rangle$$
On a
$$\begin{cases} P_A(\lambda) \text{ scindé} \\ \dim E_1 = \dim E_2 = \dim E_3 = 1 = \ \text{mult}(\lambda_{1,2,3}) = 1 \end{cases}$$
Donc A est diagonalisable et
$$A' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

3. Pour calculer A^n il suffit d'utiliser la formule $A^n = PA'^nP^{-1}$.où

$$A'^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & (-2)^n \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \text{ et } P^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

4. On a $e^{At} = Pe^{A't}P^{-1}$ Avec

$$e^{A't} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-2t} \end{pmatrix}$$

Alors

$$e^{At} = ()$$

Exercice 9 *Soit la matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. *Donner la réduction de Jordan de la matrice A et P.*
2. *Donner la réduction de Dunford de la matrice A et calculer A^n.*

Solution

1. Calculons le polynôme caractéristique de A.

$$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4-\lambda & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 2-\lambda & -1 \\ 1 & 2 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda)^3(\lambda - 1)$$

Les valeurs propres sont : $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$ et $\lambda_3 = 1$.

Les vecteurs propres :

$$(A - 2I)v = 0 \Longleftrightarrow \begin{cases} -x = 0 \\ -x + 2y + z - 2t = 0 \\ 2x + y - t = 0 \\ x + 2y + z - 2t = 0 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = t \\ z = 0 \\ t \in \mathbb{R} \end{cases}$$

alors

$$v = \begin{pmatrix} 0 \\ t \\ 0 \\ t \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

On pose $t = 1$, on obtient

$$E_2 = \left\langle v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

On a

$$\dim E_2 = 1 \neq \text{ mult } (2) = 3$$

Alors A est trigonalisable.

$$(A - I)v = 0 \Longleftrightarrow \begin{cases} -x + 3y + z - 2t = 0 \\ 2x + y + z - t = 0 \\ x + 2y + z - t = 0 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} x = y \\ t = -y \\ z = -4y \end{cases}$$

alors

$$v = \begin{pmatrix} y \\ y \\ -4y \\ -y \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

On pose $y = 1$, on obtient

$$E_1 = \left\langle v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

On a

$$\begin{cases} P_A(\lambda) = (2 - \lambda)^3 (\lambda - 1) \\ m_A(\lambda) = (2 - \lambda)^3 (\lambda - 1) \\ \dim E_1 = 1 \\ \dim E_2 = 1 \end{cases}$$

Par suite

$$\begin{array}{cc} \begin{array}{cccc} Av_1 & Av_2 & Av_3 & Av_4 \end{array} & \\ \tilde{\mathcal{J}} = A' = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{matrix}} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 0 & 0 \end{matrix} & \boxed{1} \end{pmatrix} & \begin{matrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{matrix} \end{array}$$

Cherchons maintenant les deux vecteurs propres v_3 etv_4. On a

$$\begin{cases} Av_1 = 2v_1 \\ Av_2 = v_1 + 2v_2 \\ Av_3 = v_2 + 2v_3 \\ Av_4 = v_4 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} (A - 2I)v_1 = 0 \\ (A - 2I)v_2 = v_1 \\ (A - 2I)v_3 = v_2 \\ (A - I)v_4 = 0 \end{cases}$$

On remarque que v_1 est le vecteur propre de 2 et v_4 le vecteur propre de 1est v_4.

$$(A - 2I)v_2 = v_1 \Longleftrightarrow \begin{cases} -x = 0 \\ -x + 2y + z - 2t = 1 \\ 2x + y - t = 0 \\ x + 2y + z - 2t = 1 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = t \\ z = 1 \end{cases}$$

donc

$$v = \begin{pmatrix} 0 \\ t \\ 1 \\ t \end{pmatrix}$$

On prend $t = 0$, on obtient

$$v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Maintenant

$$(A - 2I)v_3 = v_2 \iff \begin{cases} -x = 0 \\ -x + 2y + z - 2t = 0 \\ 2x + y - t = 1 \\ x + 2y + z - 2t = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0 \\ y = t + 1 \\ z = -2 \end{cases}$$

donc

$$v = \begin{pmatrix} 0 \\ t+1 \\ -2 \\ t \end{pmatrix}$$

On prend $t = 0$, on obtient

$$v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Alors

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -4 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

2. On a

$$A' = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}}_{D'} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{N'}$$

donc

$$A = PA'P^{-1} = \underbrace{PD'P^{-1}}_{D} + \underbrace{PN'P^{-1}}_{N}$$

avec

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

De plus

$$A^n = PA'^nP^{-1}$$

avec

$$A'^n = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{matrix}}^n & \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 0 & 0 \end{matrix} & \boxed{1}^n \end{pmatrix}$$

On pose

$$A'_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Pour calculer $A_1'^n$, on fait la décomposition de Dunford, on obtient

$$A'_1 = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}}_{D'_1} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{N'_1}$$

par suite

$${A_1}'^n = (D'_1 + N'_1)^n = \sum_{k=0}^{2} C_n^k {D_1}'^{n-k} {N_1}'^k$$

avec

$${N_1}'^3 = 0, {D_1}'^2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, {D_1}'^3 = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} \text{ et } {N_1}'^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Alors

$${A_1}'^n = \begin{pmatrix} 2^n & n2^{n-1} & \left(\dfrac{n^2-n}{2}\right)2^{n-2} \\ 0 & 2^n & n2^{n-2} \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$$

Alors

$$A'^n = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 2^n & n2^{n-1} & \left(\dfrac{n^2-n}{2}\right)2^{n-2} \\ 0 & 2^n & n2^{n-2} \\ 0 & 0 & 2^n \end{matrix}} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 0 & 0 \end{matrix} & \boxed{1}^n \end{pmatrix}$$

Donc

$$A^n = PA'^nP^{-1} = \begin{pmatrix} 2^n & n2^{n-1} & \left(\dfrac{n^2-n}{2}\right)2^{n-2} \\ 0 & 2^n & n2^{n-2} \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$$

Chapitre 3

Formes bilinéaires-Formes quadratiques

Dans ce chapitre on va traité les problèmes à caractère bilinéaire, autrement dit les problèmes qui dépendent d'une manière linéaire de deux vecteurs, par exemple, la distance entre deux points (pour calculer l'erreur) et le produit scalaire, il permet de définir la norme (dans certains cas de figure la norme sert à calculer l'énergie d'un système).

3.1 Formes bilinéaires, cas de dimension finie

Définition 26 ***(Forme bilinéaire)*** *Soit E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel. On appelle forme bilinéaire sur E une application*

$$\begin{aligned} b : E \times E &\longrightarrow \mathbb{K} \\ (x, y) &\longmapsto b(x, y) \end{aligned}$$

qui vérifie les conditions suivantes :

1. $\forall x, x', y \in E, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ $b(\alpha x + \beta x', y) = \alpha b(x, y) + \beta b(x', y)$
2. $\forall x, y, y' \in E, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ $b(x, \alpha y + \beta y') = \alpha b(x, y) + \beta b(x, y')$

Exemple 20 $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *et* $b(x, y) = xy$
$\forall x, x', y, y' \in E$ *et* $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, *on a*

$$b(\alpha x + \beta x', y) = (\alpha x + \beta x')y = \alpha xy + \beta x'y = \alpha b(x, y) + \beta(x', y)$$

donc b est linéaire par rapport à la première variable.

$$b(x, \alpha y + \beta y') = x(\alpha y + \beta y') = \alpha xy + \beta xy' = \alpha b(x, y) + \beta(x, y')$$

donc b est linéaire par rapport à la deuxième variable.

Définition 27 ***(Symétrie)*** *Soit b une forme bilinéaire sur un $\mathbb{K}$ espace vectoriel E. On dit que*

1. *b est symétrique si*
$$\forall x, y \in E, \;\; b(x, y) = b(y, x)$$
2. *b est anti-symétrique si*
$$\forall x, y \in E, \;\; b(x, y) = -b(y, x)$$

Exemple 21 *Considérons la forme bilinéaire suivante sur l'espace des polynômes de degré inférieur où égale à 2 noté $\mathbb{R}_2[X]$*

$$\begin{cases} b : \mathbb{R}[X] \times \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R} \\ (P, Q) \longmapsto P(0)Q(0) + P(1)Q(1) + 2P(2)Q(2) \end{cases} \tag{3.1.1}$$

Cette forme bilinéaire est symétrique car on a bien

$$b(P,Q) = P(0)Q(0) + P(1)Q(1) + 2P(2)Q(2) = Q(0)P(0) + Q(1)P(1) + 2Q(2)P(2) = b(Q,P)$$

Définition 28 ***(Définie positive)*** *Soit b une forme bilinéaire sur un $\mathbb{K}$ espace vectoriel E. Alors*

1. *La forme b est positive si*
$$\forall x \in E, \;\; b(x,x) \geq 0$$

   Exemple 22 *Prenant l'exemple 21, on a la forme bilinéaire b est positive car*
$$b(P,P) = P(0)^2 + P(1)^2 + 2P(2)^2 \geq 0$$

2. *la forme b est définie positive si*
$$\forall x \in E, \;\; b(x,x) \geq 0, \;\; b(x,x) = 0 \Longleftrightarrow x = 0$$

   Exemple 23 *On prend toujours le même exemple, alors on a la forme bilinéaire b est définie positive car l'équation*
$$b(P,P) = P(0)^2 + P(1)^2 + 2P(2)^2 = 0$$
   implique que 0, 1, 2 sont racines de P. Cela fait trois racines pour un polynôme de degré inférieur ou égal à 2. La seule possibilité est que le polynôme P soit le polynôme nul $P = 0$.

Définition 29 ***(Transposée d'une forme bilinéaire)*** *Soit b une forme bilinéaire sur un $\mathbb{K}$ espace vectoriel E, on appelle la transposée de b et on la note ${}^t b$ la forme bilinéaire définie par*

$$\forall X, Y \in \mathbb{E} : \quad {}^t b(X,Y) = b(Y,X)$$

Définition 30 ***(Matrice associée à une forme bilinéaire)*** *Soit E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension finie n, b une forme bilinéaire définie sur E et $B = \{e_1, \cdots, e_n\}$ une base de E. On appelle une matrice associée à b dans la base B de E et on la note $\mathcal{M}_B(b)$ la matrice suivante*

$$\mathcal{M}_B(b) = \begin{pmatrix} b(e_1,e_1) & \cdots & b(e_1,e_n) \\ \vdots & & \vdots \\ b(e_n,e_1) & \cdots & b(e_n,e_n) \end{pmatrix}$$

Exemple 24 *Considérons la forme bilinéaire suivante sur l'espace des polynômes de degré inférieur où égale à 2*

$$\begin{cases} b : \mathbb{R}[X] \times \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R} \\ (P,Q) \longmapsto P(0)Q(0) + P(1)Q(1) + 2P(2)Q(2) \end{cases} \tag{3.1.2}$$

Soit $B = \{1, X, X^2\}$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$, l'évaluation de cette forme bilinéaire sur toutes les paires de vecteurs de la base B donne

$$\mathcal{M}_B(b) = \begin{pmatrix} b(1,1) & b(1,X) & b(1,X^2) \\ b(X,1) & b(X,X) & b(X,X^2) \\ b(X^2,1) & b(X^2,X) & b(X^2,X^2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 9 \\ 5 & 9 & 17 \\ 9 & 17 & 33 \end{pmatrix}$$

Lemme 1 *Soit E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension finie n, b une forme bilinéaire définie sur E et $B = \{e_1, \cdots, e_n\}$ une base de E. Si x et y sont deux vecteurs de E et si on note*

$$X = \mathcal{M}_B(x), Y = \mathcal{M}_B(y)$$

alors

$$b(x, y) =^t X\mathcal{M}_B(b)Y$$

Proposition 8 ***(Formules de changement de bases)*** *Soit E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension finie n, b une forme bilinéaire définie sur E et B, B' deux bases de E. Alors*

$$\mathcal{M}_{B'}(b) =^t P\mathcal{M}_B(b)P$$

avec P la matrice de passage de la base B à la base B'.

Exemple 25 *Prenons la forme bilinéaire précédente (3.1.2). Considérons la nouvelle base $B' = \{X, X-2, X(X-2)\}$. Si on écrit la matrice associée à cette nouvelle base en utilisant la définition, on trouve*

$$\mathcal{M}_{B'}(b) = \begin{pmatrix} 9 & -1 & -1 \\ -1 & 5 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

La matrice de passage de la base B à la base B' est donnée par

$$P = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Alors

$${}^tP\mathcal{M}_B(b)P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 5 & 9 \\ 5 & 9 & 17 \\ 9 & 17 & 33 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -1 & -1 \\ -1 & 5 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

On remarque bien que la formule de changement de base redonne bien la matrice précédente $\mathcal{M}_{B'}(b)$.

Définition 31 ***(Rang d'une matrice)*** *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On appelle le rang de la matrice A la dimension de l'image de A.*

$$rg\ A = \dim \{y \in \mathbb{K}^n / \exists x \in \mathbb{K}^n : y = Ax\}$$

ou encore

$$rg\ A = n - \dim \ker A$$

Définition 32 ***(Noyau)*** *Soit b une forme bilinéaire sur un $\mathbb{K}$ espace vectoriel E de dimension finie. Alors le rang de la forme b est le rang de la matrice associée à cette forme dans une base quelconque de E.*

$$rg\ b = \ rg\ \mathcal{M}_B(b)$$

Définition 33 *Soit b une forme bilinéaire sur un $\mathbb{K}$ espace vectoriel E de dimension finie.*

1. *Le noyau de b est donné par*

$$\mathcal{N}(b) = \{Y \in \mathbb{E}/\forall X \in \mathbb{E} : b(X,Y) = 0\}$$

2. *La forme b est non dégénérée si*

$$\mathcal{N}(b) = 0$$

ou en d'autres termes, si

$$b(X,Y) = 0, \forall X \in \mathbb{E} \Rightarrow Y = 0$$

Proposition 9 *Le noyau de b est le noyau de la matrice qui représente b dans une base quelconque de E et on le note $\mathcal{N}(b)$.*

Exemple 26 *Soit $b : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, la forme bilinéaire qui est définie dans la base canonique par*

$$\begin{aligned} b(x,y) &= x_1y_1 - 3x_3y_3 + x_1y_2 + x_2y_1 - x_1y_3 - x_3y_1 - 3x_3y_2 - 3x_2y_3 \\ &= (y_1 + y_2 + y_3)x_1 + (y_1 - 3y_3)x_2 + (-y_1 - 3y_2 - 3y_3)x_3 \end{aligned}$$

donc $y \in \mathcal{N}(b)$ si et seulement si

$$\begin{cases} y_1 + y_2 + y_3 = 0 \\ y_1 - 3y_3 = 0 \\ -y_1 - 3y_2 - 3y_3 = 0 \end{cases}$$

En résolvant ce système, on trouve :$y_1 = 3y_3$, $y_2 = -2y_3$, $y_3 \in \mathbb{R}$, alors $\mathcal{N}(b)$ est engendré par le vecteur $y = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

On aurait pu déterminer directement C à l'aide la matrice de b

$$\mathcal{M}_{e_i}(b) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 1 & -3 & -3 \end{pmatrix}$$

On remarque que $\mathcal{N}(b) \neq 0$, alors b est dégénérée.

Définition 34 *Soit b une forme bilinéaire sur un $\mathbb{K}$ espace vectoriel E de dimension finie n. Alors b est non dégénérée si et seulement si*

$$rg\ b = n = \dim E$$

Théorème 9 ***(Théorème du rang pour les formes bilinéaires)*** *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et soit b une forme bilinéaire sur E, alors*

$$\dim E = rg\ b + \dim \mathcal{N}(b)$$

3.2 Formes quadratiques, cas de dimension finie

Définition 35 *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. On appelle forme quadratique sur E toute application q de la forme*

$$\begin{aligned} q : E &\longrightarrow \mathbb{K} \\ x &\longmapsto s(x,x) \end{aligned}$$

où s est une forme bilinéaire symétrique sur E.

Définition 36 ***(Polynôme homogène)*** *Soit $q \in \mathbb{K}[X_1, \ldots, X_n]$, on dit qu'il est homogène de degré deux si*

$$\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall X \in \mathbb{K}^n : \qquad q(\lambda X) = \lambda^2 q(X)$$

Remarque 8 *Un polynôme q est homogène de degré deux si et seulement si, il s'écrit*

$$q(x) = \sum_{k,l=1}^{n} a_{kl} x_k x_l$$

avec $a_{kl} \in \mathbb{K}$ des coefficients fixés.

Proposition 10 *Soit E un $\mathbb{K}$- espace vectoriel de dimension finie n, et q une application définie sur E à valeurs dans $\mathbb{K}$. Alors q est une forme quadratique sur E si et seulement si elle est un polynôme homogène de degré deux.*

Exemple 27 *Soit l'application $q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par*

$$q(x) = 2x_1^2 - 3x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_1x_2 - 3x_1x_3 + 5x_2x_3$$

où les x_i sont les composantes de x dans la base canonique. On a q est un polynôme de degré 2, alors q est une forme quadratique.

Proposition 11 *Soit q une forme quadratique sur E. Il existe une unique forme bilinéaire symétrique s telle que pour tout $x \in E$, $q(x) = s(x,x)$. La forme bilinéaire s s'appelle la forme polaire de q et on a*

$$\forall (x,y) \in E^2, \;\; s(x,y) = \frac{1}{2}\left[q(x+y) - q(x) - q(y)\right] = \frac{1}{4}\left[q(x+y) - q(x-y)\right]$$

Exemple 28 *Soit la forme quadratique $q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par*

$$q(x) = 2x_1^2 + 5x_2^2 - 4x_1x_2$$

La forme polaire associée à q est la forme bilinéaire symétrique suivante :

$$s(x,y) = 2x_1y_1 + 5x_2y_2 - 2x_1y_2 - 2x_2y_1$$

Définition 37 ***(Matrice d'une forme quadratique)*** *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n et soit q une forme quadratique sur E. On définit la matrice associée à la forme q comme étant la matrice associée à sa forme polaire s et le rang de q est le rang de cette matrice.*

Exemple 29 *Prenons la forme quadratique précédente* $q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *définie par*

$$q(x) = 2x_1^2 + 5x_2^2 - 4x_1x_2$$

La matrice associée à q *dans la base canonique est donnée par*

$$\mathcal{M}_{e_i}(q) = \mathcal{M}_{e_i}(s) = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$$

Définition 38 ***(Rang, noyau d'une forme quadratique)***

1. *Le rang, noyau de la forme quadratique est le rang, noyau de sa forme polaire.*

$$rg\ q := \ rg\ s$$

$$\mathcal{N}(q) := \mathcal{N}(s)$$

2. q *est dite non dégénérée si sa forme polaire* s *est non dégénérée, c'est-à-dire* $\mathcal{N}(s) = 0$*, ce qui signifie :*

$$s(x, y) = 0, \forall y \in E \Rightarrow x = 0$$

3. *Si* q *est une forme quadratique à valeurs réelles,* q *est dites définie positive si sa forme polaire* s *est définie positive, c'est-à-dire si :*

$$q(x) \geq 0, \forall x \in E \ \ et\ q(x) = 0 \Rightarrow x = 0$$

Définition 39 ***(Vecteur isotrope, cône isotrope)*** *Soit* E *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel et* q *une forme quadratique sur* E*, on dit que* v *est un vecteur isotrope si*

$$q(v) = 0$$

L'ensemble des vecteurs isotropes de q *est appelé le cône isotrope et est noté*

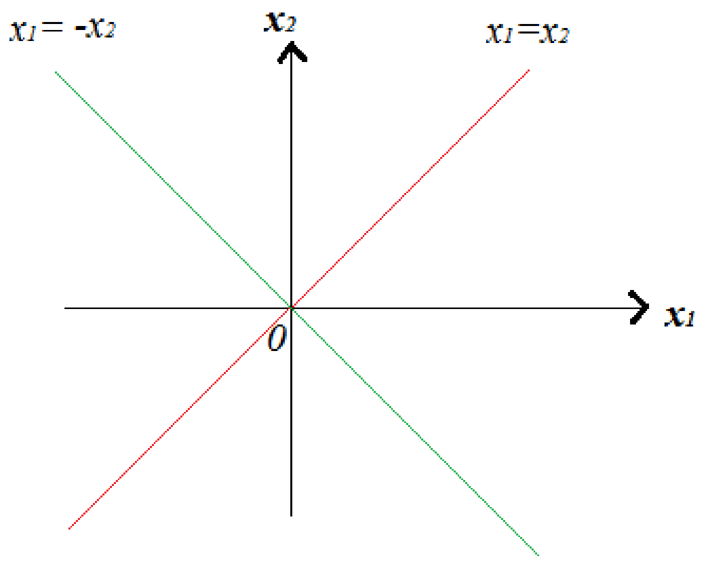
$$\mathcal{I}(q) = \{x \in E, q(x) = 0\}$$

Remarque 9 *Notons que* $\mathcal{I}(q)$ *n'est pas un espace vectoriel.*

Exemple 30 *Soit* $E \in \mathbb{R}^2$ *et* $q = x_1^2 - x_2^2$*. On a*

$$\mathcal{I}(q) = \left\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, x_1 = \pm x_2\right\}$$

voir figure suivante.



3.3 Bases orthogonales

Définition 40 *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n, b une forme bilinéaire symétrique et $B = \{e_1, \cdots, e_n\}$ une base de E. Alors*

1. *On dit que B est une base orthogonale de E si*

$$\forall k, l = 1, \cdots, n, k \neq l : \; b(e_k, e_l) = 0$$

2. *On dit que B est normalisé si*

$$\forall k = 1, \cdots, n : \; b(e_k, e_k) = 1$$

3. *On dit que B est orthonormée si elle est à la fois orthogonale et normalisée*

$$\forall k, l = 1, \cdots, n, k \neq l : \; b(e_k, e_l) = \begin{cases} 1 \; si \; k = l \\ 0 \; si \; k \neq l \end{cases}$$

Proposition 12 *Toute famille orthogonale de vecteurs non nuls est libre.*

Remarque 10 *Soit b une forme bilinéaire symétrique et B une base de E. Alors*

1. *$\mathcal{M}_b(B)$ est diagonale si et seulement si B est orthogonale.*
2. *$\mathcal{M}_b(B)$ admet que des 1 sur sa diagonale si et seulement si B est normalisée.*
3. *$\mathcal{M}_b(B) = I$ si et seulement si B est orthonormée.*

3.4 Réduction des formes quadratiques

Chercher une base orthogonale revient donc à déterminer une base dans laquelle la matrice de q est diagonale, ou aussi, à écrire q sous la forme d'une somme de termes carrées. Pour cela on va présenter deux méthode, la méthode de Gauss et la méthode des dérivée partielle.

Il ne faut pas confondre ce problème avec la diagonalisation des endomorphismes. Si Aest la matrice d'un endomorphisme, la diagonaliser signifie chercher une matrice inversible P telle que $P^{?1}AP$ soit diagonale. Ici il s'agit de chercher une matrice P telle que $t^{P}AP$ soit diagonale.

3.4.1 Méthode de Gauss

Cette méthode s'applique que lorsque la forme quadratique admet dans son expression au moins un terme carré.
Soit $\mathbb{R}^3$ vu comme étant un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et q une forme quadratique définie sur $\mathbb{R}^3$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}^3 : \quad q(x) = x_1^2 + 2x_2^2 + 5x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_2x_3$$

On considère un terme carré quelconque par exemple x_1^2, On va utiliser la formule suivante

$$a^2 + 2ab = (a+b)^2 - b^2$$

1. On ordonne suivant le paramètre x_1

$$q(x) = \underbrace{x_1^2 + 2x_1x_2}_{\text{termes en } x_1} + 2x_2^2 + 5x_3^2 - 4x_2x_3$$

2. On écrit les termes en x_1 comme le début d'un carré

$$q(x) = \underbrace{(x_1 + x_2)^2 - x_2^2}_{\text{termes en } x_1} + 2x_2^2 + 5x_3^2 - 4x_2x_3$$

3. On refait le même travail sur x_2

$$q(x) = (x_1 + x_2)^2 + \underbrace{x_2^2 - 4x_2x_3}_{\text{termes en } x_2} + 5x_3^2 = (x_1 + x_2)^2 + (x_2 - 2x_3)^2 - 4x_3^2 + 5x_3^2$$

4. On continu l'opération jusqu'à la disparition de tout les termes rectangles

$$q(x) = (x_1 + x_2)^2 + (x_2 - 2x_3)^2 + x_3^2$$

3.4.2 Méthode des dérivées partielles

Cette méthode s'applique lorsque la forme quadratique n'admet aucun terme carré dans son expression.
Soit $E = \mathbb{R}^3$ vu comme un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et soit q la forme quadratique définit sur $\mathbb{R}^3$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}^3 : \quad q(x) = 5x_1x_2 + 6x_1x_3 + 3x_2x_3$$

1. On choisit un terme rectangle $\mathcal{K}x_kx_l$ avec $\mathcal{K} \neq 0$. Dans notre cas on prend

$$5x_1x_2$$

2. On calcul les dérivée partielles $\partial_{x_k}q$ et $\partial_{x_l}q$. Dans notre cas on a

$$\partial_{x_1}q(x) = 5x_2 + 6x_3, \quad \partial_{x_2}q(x) = 5x_1 + 3x_3$$

3. On écrit q sous la forme

$$\forall x \in E: \quad q(x) = \frac{1}{\mathcal{K}} \partial_{x_k} q(x) \partial_{x_l} q(x) + \text{ terme correctif}$$

Dans notre cas on a

$$\forall x \in E: \quad q(x) = \frac{1}{5} \underbrace{(5x_2 + 6x_3)}_{\varphi_1} \underbrace{(5x_1 + 3x_3)}_{\varphi_2} - \frac{18}{5} x_3^2$$

4. On écrit alors

$$\varphi_1 \varphi_2 = \frac{1}{4} (\varphi_1 + \varphi_2)^2 - \frac{1}{4} (\varphi_1 - \varphi_2)^2$$

pour avoir la forme finale

$$\forall x \in E: \ \varphi(x) = \frac{1}{4\mathcal{K}} (\varphi_1 + \varphi_2)^2 - \frac{1}{4\mathcal{K}} (\varphi_1 - \varphi_2)^2 + \text{ terme correctif}$$

Dans notre cas on aura

$$\forall x \in E: \ \varphi(x) = \frac{1}{20} (5x_1 + 5x_2 + 9x_3)^2 - \frac{1}{20} (5x_1 - 5x_2 - 3x_3)^2 - \frac{18}{5} x_3^2$$

Remarque 11 *Si dans le terme correctif on a un terme rectangle on refait les mêmes étapes au niveau de ce terme. Si on a un mélange de termes carrés et de termes rectangles on utilise la méthode de gauss au niveau de ce terme.*

3.5 Classification des formes quadratiques

Théorème 10 ***(Sylvester)*** *Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie n et q une forme quadratique sur E. Alors il existe une base e_i de E telle que*

$$x = \sum_{k=1}^{n} x_k e_k$$

et

$$q(x) = \sum_{k=1}^{p} x_k^2 - \sum_{k=p+1}^{r} x_r^2 \tag{3.5.1}$$

c'est-à-dire

$$\mathcal{M}_{e_i}(q) = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{matrix}} & & \\ & \boxed{\begin{matrix} -1 & & \\ & \ddots & \\ & & -1 \end{matrix}} & \\ & & \boxed{\begin{matrix} 0 & & \\ & \ddots & \\ & & 0 \end{matrix}} \end{pmatrix}$$

tel que

$$r = \ rg\ (q)$$

et p un entier qui ne dépend que de la forme de q et non de la base.

Remarque 12 *Pour déterminer la réduction de Sylvester on applique la réduction de Gauss.*

Définition 41 ***(Signature d'une forme quadratique)*** *Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie n et q une forme quadratique sur E telle que la réduction de Sylvester est donnée par l'équation 3.5.1. On appelle la signature de la forme q et on la note sign(q) le couple $(p, r-p)$.*

Lemme 2 *Soit q une forme quadratique sur un $\mathbb{R}$ espace vectoriel E de dimension finie n. Alors on a les assertions suivantes :*

1. *q est définie positive si et seulement si*

$$sign\ q = (n, 0)$$

2. *q est non dégénérée si et seulement si*

$$sign\ q = (p, n-p)$$

Théorème 11 *Soit q une forme quadratique sur un $\mathbb{R}$ espace vectoriel E de dimension finie n et B une base de E, ce qui donne que*

$$q(x) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$$

tel que

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

est le vecteur composante du vecteur x dans la base B.
Lorsqu'on fait la réduction sous la forme de Sylvester n obtient

$$q(x) = \sum_{k=1}^{p} x_k'^2 - \sum_{k=p+1}^{r} x_r'^2$$

tel que x_k' sont une expression linéaire des x_j ce qui donne que pour une certaine matrice A, on a

$$X' = AX, \ \ X' = \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix}$$

Alors X' c'est les composantes du vecteur x dans une nouvelle base de E qu'on la note B'. $P = A^{-1}$ est la matrice de passage de B à B' avec B' est une base orthogonale.

3.6 Exercices corrigés

Exercice 1 *Soit $\mathbb{R}^3$ vu comme un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et soit l'application b de $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$ définie par*

$$\forall U, V \in \mathbb{R}^3 : b(U, V) = 2u_1v_1 + 4u_1v_2 + 4u_2v_1 - u_2v_2 + 3u_3v_3$$

1. *Montrer que b est une forme bilinéaire symétrique et écrire sa matrice associée dans la base canonique.*
2. *Déterminer la matrice associée à b dans la nouvelle base*

$$B' = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

3. *déterminer le noyau de b en utilisant deux méthodes.*
4. *Écrire la forme quadratique q associée à b.*
5. *Déterminer la forme réduite de Sylvester, une base correspondante, la signature, le caractère d'être définie positive et le caractère d'être dégénérée..*

Solution

Soit $\mathbb{R}^3$ vu comme un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et soit l'application b de $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$\forall U, V \in \mathbb{R}^3 : b(U, V) = 2u_1v_1 + 4u_1v_2 + 4u_2v_1 - u_2v_2 + 3u_3v_3$$

1. Montrer que b est une forme bilinéaire symétrique et écrire sa matrice associée dans la base canonique.
   Montrons que b est linéaire par rapport à u ensuite par rapport à v :
   $\forall U, U', V \in \mathbb{R}^3, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} b(\alpha U + \beta U', V) &= 2(\alpha u_1 + \beta u_1')v_1 + 4(\alpha u_1 + \beta u_1')v_2 + 4(\alpha u_2 + \beta u_2')v_1 \\ &\quad -(\alpha u_2 + \beta u_2')v_2 + 3(\alpha u_3 + \beta u_3')v_3 \\ &= \alpha b(U, V) + \beta b(U', V) \end{aligned}$$

   $\forall U, V, V' \in \mathbb{R}^3, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} b(U, \alpha V + \beta V') &= 2u_1(\alpha v_1 + \beta v_1') + 4u_1(\alpha v_2 + \beta v_2') + 4u_2(\alpha v_1 + \beta v_1') \\ &\quad -u_2(\alpha v_2 + \beta v_2') + 3u_3(\alpha v_3 + \beta v_3') \\ &= \alpha b(U, V) + \beta b(U, V') \end{aligned}$$

   Alors b est une forme bilinéaire.
   De plus, on a

$$b(U, V) = b(V, U)$$

Donc elle est symétrique.
La matrice associée à b est

$$M_B(b) = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

2. Déterminer la matrice associée à b dans la nouvelle base

$$B' = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

On a

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Alors

$$\begin{aligned} M'_B(b) &= P^t M_B(b) P \\ &= \begin{pmatrix} 9 & 3 & 6 \\ 3 & -1 & 4 \\ 6 & 4 & 5 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

3. déterminer le noyau de b en utilisant deux méthodes.
1ère méthode :

$$\begin{aligned} b(U,V) = 0 &\Longleftrightarrow (2u_1 + 4u_2)v_1 + (4u_1 - u_2)v_2 + 3u_3v_3 = 0 \\ &\Longrightarrow \begin{cases} 2u_1 + 4u_2 = 0 \\ 4u_1 - u_2 = 0 \\ 3u_3 = 0 \end{cases} \\ &\Longrightarrow \begin{cases} u_1 \in \mathbb{R} \\ u_2 = 4u_1 \\ u_3 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Alors

$$N(b) = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

2ème méthode :

$$M_B(b)V = 0 \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

4. Écrire la forme quadratique q associée à b.

$$q(U) = b(U,U) = 2u_1^2 - u_2^2 + 3u_3^2 + 8u_1u_2$$

5. Déterminer la forme réduite de Sylvester, une base correspondante, la signature, le caractère d'être définie positive et le caractère d'être dégénérée.
Utilisons la méthode de Gauss pour trouver la forme réduite de Sylvester :

$$2u_1^2 + 8u_1u_2 = (\sqrt{2}u_1 + 2\sqrt{2}u_2)^2 - 8u_2^2$$

Alors

$$\begin{aligned} q(U) &= (\sqrt{2}u_1 + 2\sqrt{2}u_2)^2 - 9u_2^2 + 3u_3^2 \\ &= \underbrace{(\sqrt{2}u_1 + 2\sqrt{2}u_2)^2}_{u_1'} - \underbrace{(3u_2)^2}_{u_2'} + \underbrace{(\sqrt{3}u_3)^2}_{u_3'} \end{aligned}$$

Donc

$$A' = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 2\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$$

Base correspondante :

$$\begin{cases} u_1' = \sqrt{2}u_1 + 2\sqrt{2}u_2 \\ u_2' = 3u_2 \\ u_3' = \sqrt{3}u_3 = 0 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} u_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}u_1' - \dfrac{2}{3}u_2' \\ u_2 = \dfrac{1}{3}u_2' \\ u_3 = \dfrac{1}{\sqrt{3}}u_3' = 0 \end{cases}$$

Alors

$$P = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ -\dfrac{2}{3} & \dfrac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

La signature de q :

$$sign(q) = (2, 1)$$

Alors q n'est pas définie positive et elle est non dégénérée.

Exercice 2 *Soit l'application suivante définie sur $\mathbb{R}^3$ vu comme étant un $\mathbb{R}$-espace vectoriel*

$$q(X) = 2x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_2x_3 + 2x_3x_1$$

1. *Montrer qu'elle représente une forme quadratique sur $\mathbb{R}^3$.*
2. *déterminer la matrice et la forme polaire correspondante dans la base canonique.*
3. *Déterminer la forme réduite de Sylvester, une base correspondante, la signature, le caractère d'être définie positive et le caractère d'être dégénérée.*

Solution

1. Montrer que q représente une forme quadratique.

$$q(X) = 2x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_2x_3 + 2x_3x_1$$

Soit

$$\begin{aligned}
S(X,Y) &= \frac{1}{2}\left[q(X+Y) - q(X) - q(Y)\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[4x_1y_1 + 2x_2y_2 + 4x_3y_3 + 2x_1y_2 + 2y_1x_2 + 2x_2y_3 + 2y_2x_3 + 2x_3y_1 + 2y_3x_1\right] \\
S(X,X) &= \frac{1}{2}\left[4x_1^2 + 2x_2^2 + 4x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_2x_3 + 4x_3x_1\right] \\
&= 2x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_2x_3 + 2x_3x_1 \\
&= q(X)
\end{aligned}$$

Alors q est une forme quadratique.

2. La forme polaire de q est la matrice associée à q dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
La forme polaire est

$$S(X,Y) = \frac{1}{2}\left[4x_1y_1 + 2x_2y_2 + 4x_3y_3 + 2x_1y_2 + 2y_1x_2 + 2x_2y_3 + 2y_2x_3 + 2x_3y_1 + 2y_3x_1\right]$$

La matrice associée à q est :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

3. Déterminer la forme réduite de Sylvester, une base correspondante, la signature, le caractère d'être définie positive et le caractère d'être dégénérée.
Utilisons la méthode de Gauss pour trouver la forme réduite de Sylvester :

$$2x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_3x_1 = 2\left(x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3\right)^2 - \frac{1}{2}x_2^2 - \frac{1}{2}x_3^2 - x_2x_3$$

Alors

$$q(X) = 2\left(x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3\right)^2 + \frac{1}{2}x_2^2 + \frac{3}{2}x_3^2 + x_2x_3$$

Maintenant

$$\frac{1}{2}x_2^2 + \frac{3}{2}x_3^2 + x_2x_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}x_2 + \frac{\sqrt{2}}{2}x_3\right)^2 - \frac{1}{2}x_3^2$$

Alors

$$q(X) = \underbrace{\left[\sqrt{2}(x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3)\right]^2}_{x_1'} + \underbrace{\left[\frac{1}{\sqrt{2}}x_2 + \frac{\sqrt{2}}{2}x_3\right]^2}_{x_2'} - \underbrace{\left[\frac{1}{\sqrt{2}}x_3\right]^2}_{x_3'}$$

Donc

$$A' = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

Base correspondante :

$$\begin{cases} x'_1 = \sqrt{2}x_1 + \dfrac{\sqrt{2}}{2}x_2 + \dfrac{\sqrt{2}}{2}x_3 \\ x'_2 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}x_2 + \dfrac{\sqrt{2}}{2}x_3 \\ x'_3 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}x_3 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}x'_1 - \dfrac{\sqrt{2}}{2}x'_2 \\ x_2 = \sqrt{2}x'_2 - \sqrt{x}'_3 \\ x_3 = \sqrt{2}x'_3 \end{cases}$$

Alors

$$P = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ -\dfrac{\sqrt{2}}{2} & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & -\sqrt{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

La signature de q est :

$$sign(q) = (2, 1)$$

Alors
q n'est pas définie positive .
q est non dégénérée.

Exercice 3 *Dans $\mathbb{R}^3$, on considère la forme quadratique*

$$q(x, y, z) = (x - y)^2 + (y - z)^2 - (z - x)^2$$

1. *Cette forme est-elle obtenue par la méthode de Gauss ?*
2. *Dans le cas contraire, réduire la forme quadratique q avec la méthode de Gauss.*

Solution

1. Les trois formes linéaires $l_1, l_2, l_3 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, tels que :

$$l_1(x, y, z) = x - y, \;\; l_2(x, y, z) = y - z \quad \text{et } l_2(x, y, z) = z - x$$

ne sont pas linéairement indépendantes. En effet elles satisfont la combinaison linéaire non triviale suivante

$$l_1 + l_2 + l_3 = 0$$

Cette forme ne saurait être donnée par la méthode de Gauss qui réduit les formes quadratiques car celle ci implique des formes linéaires libre.

2. On commence par développer la forme quadratique q, on obtient

$$q(x,y,z) = 2y^2 - 2xy + 2xz - 2yz$$

Appliquons la méthode de Gauss qui consiste toujours à commencer par les termes carrées. On prend

$$y^2 - xy - yz = \left(y - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}z\right)^2 - \frac{1}{4}(x+z)^2$$

On remplace dans q, on obtient

$$\begin{aligned} q(x,y,z) &= 2\left(y - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}z\right)^2 - \frac{1}{2}(x+z)^2 + 2xz \\ &= 2\left(y - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}z\right)^2 - \frac{1}{2}\left(x^2 + 2xz + z^2\right) + 2xz \\ &= 2\left(y - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}z\right)^2 - \frac{1}{2}x^2 + xz - \frac{1}{2}z^2 \\ &= 2\left(y - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}z\right)^2 - \frac{1}{2}(x-z)^2 \end{aligned}$$

Exercice 4

$$\forall P,Q \in \mathbb{R}_2[X], \phi(P,Q) = P(1)Q(-1) + P(-1)Q(1)$$

1. *Montrer que ϕ est une forme bilinéaire symétrique sur $\mathbb{R}_2[X]$ et déterminer sa matrice associée dans la base canonique.*
2. *Déterminer la forme quadratique q associée.*
3. *Déterminer la forme réduite de Sylvester et une base correspondante.*
4. *Donner la signature de q, le caractère d'être définie positive et le caractère d'être dégénérée.*

Solution

$$\forall P,Q \in \mathbb{R}_2[X], \phi(P,Q) = P(1)Q(-1) + P(-1)Q(1)$$

1. On pose

$$P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$$

et

$$Q(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2$$

On a alors

$$\begin{aligned} \phi(P,Q) = P(1)Q(-1)+P(-1)Q(1) &= (a_0+a_1+a_2)(b_0-b_1+b_2)+(a_0-a_1+a_2)(b_0+b_1+b_2) \\ &= 2a_0b_0 + 2a_0b_2 - 2a_1b_1 + 2a_2b_0 + 2a_2b_2 \end{aligned}$$

De plus

$$\phi(Q,P) = Q(1)P(-1)+Q(-1)P(1) = (b_0+b_1+b_2)(a_0-a_1+a_2)+(b_0-b_1+b_2)(a_0+a_1+a_2)$$

$$= 2a_0b_0 + 2a_2b_0 - 2a_1b_1 + 2a_0b_2 + 2a_2b_2$$

Alors b est une forme bilinéaire symétrique sur $\mathbb{R}_2[X]$.
La matrice associée à b dans la base canonique est donnée par

$$\mathcal{M}_{e_i}(b) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

2. Déterminer la forme quadratique q associée.
   Puisque ϕ est une forme bilinéaire symétrique alors

$$q(P) = \phi(P,P) = 2a_0^2 + 4a_0a_2 - 2a_1^2 + 2a_2^2$$

3. La forme réduite de Sylvester et une base correspondante.
   Puisque la forme quadratique q contient des carrés alors on utilise la méthode de Gauss.

$$q(P) = 2a_0^2 + 4a_0a_2 - 2a_1^2 + 2a_2^2$$

$$2a_0^2 + 4a_0a_2 = (\sqrt{2}a_0 + \sqrt{2}a_1)^2 - 2a_1^2$$

on remplace dans q, on obtient

$$q(P) = (\sqrt{2}a_0 + \sqrt{2}a_1)^2 - 4a_1^2 + 2a_2^2$$

alors

$$q(P) = (\sqrt{2}a_0 + \sqrt{2}a_1)^2 - (2a_1)^2 + (\sqrt{2}a_2)^2$$

Donc

$$A' = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

La base correspondante

$$q(P) = \underbrace{(\sqrt{2}a_0 + \sqrt{2}a_1)^2}_{x_1'} - \underbrace{(2a_1)^2}_{x_2'} + \underbrace{(\sqrt{2}a_2)^2}_{x_3'}$$

on

$$\begin{cases} x_1' = \sqrt{2}x_1 + \sqrt{2}x_2 \\ x_2' = 2x_2 \\ x_3' = \sqrt{2}x_3 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}x_1' - \dfrac{1}{2}x_2' \\ x_2 = \dfrac{1}{2}x_2' \\ x_3 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}x_3' \end{cases}$$

Alors

$$P = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ -\dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

La signature de q :

$$sign(q) = (2,1)$$

Alors q n'est pas définie positive. . Elle est non dégénérée.

Exercice 5 *On définit la fonction suivante sur $\mathbb{R}_2[X]$ à valeur dans $\mathbb{R}$*

$$\forall P \in \mathbb{R}_2[X] :], q(P) = \int_{-1}^{1} P(X)P^{(2)}(X)dX$$

1. *Montrer que q est une forme quadratique q associée.*
2. *Déterminer la forme réduite de Sylvester.*
3. *Donner la signature de q, le caractère d'être définie positive et le caractère d'être dégénérée.*

Solution

1. Soient $P_1, P_2 \in \mathbb{R}_2[X]$,avec

$$P_1(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2, \text{ et } P_2 = b_0 + b_1x + b2x^2$$

$$\begin{aligned} S(P_1, P_2) &= \frac{1}{2}\left[q(P_1 + P_2) - q(P_1) - q(P_2)\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[\int_{-1}^{1} \left(a_0 + a_1x + a_2x^2\right)(2b_2)\, dx + \int_{-1}^{1} \left(b_0 + b_1x + b2x^2\right)(2a_2)\, dx\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[4a_0b_2 + \frac{4}{3}a_2b_2 + 4a_2b_0 + \frac{4}{3}a_2b_2\right] \\ &= 2a_0b_2 + \frac{4}{3}a_2b_2 + 2a_2b_0 \end{aligned}$$

Alors

$$q(P) = S(P, P) = 4a_0a_2 + \frac{4}{3}a_2^2$$

Donc q est une forme quadratique.

2. Utilisant la réduction de Gauss pour déterminer la forme réduite de Sylvester. On a

$$q(P) = 4a_0a_2 + \frac{4}{3}a_2^2 = \frac{4}{3}\left(a_2 + \frac{3}{2}a_0\right)^2 - 3a_0^2$$

$$= \left[\frac{2}{\sqrt{3}}\left(a_2 + \frac{3}{2}a_0\right)\right]^2 - \left[\sqrt{3}a_0\right]^2$$

3. D'après la forme réduite de q, on a

$$sign(q) = (1, 1)$$

Alors q n'est pas définie positive et elle est dégénérée.

Exercice 6 *Soit l'application suivante définie sur* $\mathbb{R}^3$ *vu comme étant un* $\mathbb{R}$*-espace vectoriel*

$$q(X) = 4x_1x_2 + 5x_1x_3 + x_2x_3$$

1. *Montrer qu'elles représentent des formes quadratiques sur* $\mathbb{R}^3$.
2. *déterminer la matrice et la forme polaire correspondante à chaque forme quadratique dans la base canonique.*
3. *Déterminer la forme réduite de Sylvester, une base correspondante, la signature, le caractère d'être définie positive et le caractère d'être dégénérée.*

Solution

1. Montrons que q représente une forme quadratique.

$$q(X) = 4x_1x_2 + 5x_1x_3 + x_2x_3$$

Soit

$$\begin{aligned} S(X,Y) &= \frac{1}{2}\left[q(X+Y) - q(X) - q(Y)\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[4x_1y_2 + 4x_2y_1 + 5x_1y_3 + x_2y_2 + y_3x_3\right] \\ S(X,X) &= \frac{1}{2}\left[4x_1x_2 + 4x_1x_2 + 5x_1x_3 + 5x_1x_3 + x_2x_3\right] \\ &= 4x_1x_2 + 5x_1x_3 + 2x_2x_3 \\ &= q(X) \end{aligned}$$

Alors q est une forme quadratique.

2. La forme polaire de q est la matrice associée à q dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
La forme polaire est

$$S(X,Y) = \frac{1}{2}\left[4x_1y_2 + 4x_2y_1 + 5x_1y_3 + x_2y_2 + y_3x_3\right]$$

La matrice associée à q est :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & \frac{5}{2} \\ 2 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Déterminer la forme réduite de Sylvester, une base correspondante, la signature, le caractère d'être définie positive et le caractère d'être dégénérée.
Utilisons la méthode des dérivées partielles pour trouver la forme réduite de Sylvester :
On choisit le terme $4x_1x_2$. On a

$$\partial_{x_1}q(x) = 4x_2 + 5x_3, \;\; \partial_{x_2}q(x) = 4x_1 + x_3$$

3. On écrit q sous la forme

$$\forall x \in E : \;\; q(x) = \frac{1}{\mathcal{K}}\partial_{x_k}q(x)\partial_{x_l}q(x) + \text{ terme correctif}$$

Dans notre cas on a

$$\forall x \in E: \ q(x) = \frac{1}{4}\underbrace{(4x_2+5x_3)}_{\varphi_1}\underbrace{(4x_1+x_3)}_{\varphi_2} - \frac{5}{4}x_3^2$$

4. On écrit alors

$$\varphi_1\varphi_2 = \frac{1}{4}(\varphi_1+\varphi_2)^2 - \frac{1}{4}(\varphi_1-\varphi_2)^2$$

pour avoir la forme finale

$$\forall x \in E: \ \varphi(x) = \frac{1}{16}(4x_1+4x_2+6x_3)^2 - \frac{1}{16}(-4x_1+4x_2+4x_3)^2 - \frac{5}{4}x_3^2$$

$$q(X) = \underbrace{\left[\frac{1}{4}(4x_1+4x_2+6x_3)\right]^2}_{x_1'} - \underbrace{\left[\frac{1}{4}(-4x_1+4x_2+4x_3)^2\right]^2}_{x_2'} - \underbrace{\left[\frac{\sqrt{5}}{2}x_3^2\right]^2}_{x_3'}$$

Donc

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{3}{2} \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}$$

Base correspondante :

$$\begin{cases} x_1' = x_1 + x_2 + \frac{3}{2}x_3 \\ x_2' = -x_1 + x_2 + x_3 \\ x_3' = \frac{\sqrt{5}}{2}x_3 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{1}{2}x_1' - \frac{1}{2}x_2' + \frac{2}{\sqrt{5}}x_3' \\ x_2 = \frac{1}{2}x_1' + \frac{1}{2}x_2' - \frac{5}{\sqrt{5}}x_3' \\ x_3 = \frac{2}{\sqrt{5}}x_3' \end{cases}$$

Alors

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{5}{\sqrt{5}} \\ 0 & 0 & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

La signature de q est :

$$sign(q) = (1, 2)$$

Alors
q n'est ni définie positive ni définie négative .
q est non dégénérée.

Exercice 7 *1. Déterminer les vecteurs isotropes des formes quadratiques $q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ suivantes :*

$$q_1(x) = x_1^2 + 3x_2^2 - 8x_3^2 - 4x_1x_2 + 2x_1x_3 - 10x_2x_3$$

$$q_2(x) = x_1^2 - 2x_2^2 - 2x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3$$

2. Vérifier que $\mathcal{N}(q) \subset \mathcal{I}(q)$.

Solution

1. Écrivons q_1 en somme des carrées en utilisant la réduction de Gauss, on obtient

$$q_1(x) = (x_1 - 2x_2 + x_3)^2 - (x_2 - 3x_3)^2$$

Alors $\mathcal{I}(q_1)$ est la réunion des deux plans :

$$\pi_1 : x_1 - 2x_2 + x_3 = x_2 + 3x_3$$

et

$$\pi_2 : x_1 - 2x_2 + x_3 = -(x_2 + 3x_3)$$

c'est-à-dire :

$$\pi_1 : x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 0$$

et

$$\pi_2 : x_1 - x_2 + 4x_3 = 0$$

Écrivons ensuite q_2 en somme des carrées en utilisant la réduction de Gauss, on obtient

$$q_2(x) = (x_1 + x_2 + x_3)^2 + (x_2 - x_3)^2 - 4x_3^2$$

On a

$$x_3^2 = \frac{1}{4}\left[(x_1 + x_2 + x_3)^2 + (x_2 - x_3)^2\right]$$

$$\Rightarrow x_3 = \pm\frac{1}{4}\sqrt{(x_1 + x_2 + x_3)^2 + (x_2 - x_3)^2}$$

Donc $\mathcal{I}(q_2)$ est le cône défini par

$$x_3 = \pm\frac{1}{4}\sqrt{(x_1 + x_2 + x_3)^2 + (x_2 - x_3)^2}$$

2. Calculons maintenant le noyaux de q_1 :
$$\left\{\begin{array}{l} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 + 3x_3 = 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x_1 = -7x_3 \\ x_2 = -3x_3 \end{array}\right.$$
Alors
$$\mathcal{N}(q_1) = \left\langle \begin{pmatrix} -7 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$$
Si on remplace $\mathcal{N}(q_1)$ dans π_1 et π_2, on trouve que $\mathcal{N}(q_1) \subset \mathcal{I}(q_1)$.
Calculons maintenant le noyaux de q_2 :
$$\left\{\begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_3 = 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{array}\right.$$
Alors $\mathcal{N}(q_2) = \{0\} \subset \mathcal{I}(q_2)$

Exercice 8 *Soit $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace des polynômes réels de degré inférieur ou égal à n ($n \geq 1$). Pour tout P et $Q \in \mathbb{R}_n[X]$, on pose :*
$$b(P, Q) = \int_0^1 tP(t)Q'(t)dt$$

1. *Montrer que b est une forme bilinéaire. Est-elle symétrique ? Est-elle anti-symétrique ?*
2. *Montrer que q est une forme quadratique. Est-elle définie ? Si ce n'est pas le cas, trouver un vecteur isotrope non nul.*
3. *Calculer la matrice de q dans la base*
$$B_n = \left\{1, X, X^2, \cdots, X^n\right\}$$
4. *Pour $n = 2$, déterminer la signature de q. la forme q est-elle positive ?*

Solution

1. Montrons que b est une forme bilinéaire.
Pour tout $P_1, P_2, Q \in \mathbb{R}_n[X]$ et tout $\alpha \in \mathbb{R}$, on a
$$\begin{aligned} b(P_1 + \alpha P_2, Q) &= \int_0^1 t\left(P_1(t) + \alpha P_2(t)\right) Q'(t)dt \\ &= \int_0^1 tP_1(t)Q'(t)dt + \int_0^1 \alpha P_2(t)Q'(t)dt \\ &= b(P_1, Q) + \alpha b(P_2, Q) \end{aligned}$$
Pour tout $Q_1, Q_2, P \in \mathbb{R}_n[X]$ et tout $\alpha \in \mathbb{R}$, on a
$$b(P, Q_1 + \alpha Q_2) = \int_0^1 tP(t)\left(Q_1 + \alpha Q_2(t)\right)' dt$$

$$\begin{aligned} &= \int_0^1 tP(t)Q_1'(t)dt + \int_0^1 tP(t)\alpha Q_2'(t)dt \\ &= b(P,Q_1) + \alpha b(P,Q_2) \end{aligned}$$

et donc b est une forme bilinéaire.
Remarquons que

$$b(1,X) = \int_0^1 tdt = \frac{1}{2}$$

et

$$b(X,1) = \int_0^1 t^2 \times 0dt = 0$$

Alors b n'est ni symétrique ni antisymétrique.

2. Montrons que q est une forme quadratique.

$$\begin{aligned} S(P_1,P_2) &= \frac{1}{2}\left[q(P_1+P_2) - q(P_1) - q(P_2)\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[\int_0^1 t\left(P_1(t)+P_2(t)\right)(P_1+P_2)'(t)dt \right. \\ &\quad \left. - \int_0^1 tP_1(t)P_1'(t)dt - \int_0^1 tP_2(t)P_2'(t)dt\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[\int_0^1 tP_1(t)P_1'(t)dt + \int_0^1 tP_2(t)P_2'(t)dt\right] \\ S(P,P) &= \int_0^1 tP(t)P'(t)dt \\ &= b(P,P) \end{aligned}$$

Alors q est une forme quadratique.
D'autre part :

$$q(1) = b(1,1) = \int_0^1 t \times 0dt = 0$$

donc 1 est un vecteur isotrope et q n'est pas définie.

3. Calculons la matrice associée à q dans la bas canonique.
Soit la forme polaire de q, pour tout $P, Q \in \mathbb{R}_n[X]$

$$S(P,Q) = \frac{1}{2}\left[b(P,Q) + b(Q,P)\right]$$

Donc la matrice associée à q dans la base B_n est la matrice $M_n = (m_{ij})_{1\le i,j\le n+1}$. Donc

$$\begin{aligned} m_{ij} &= \frac{1}{2}\left[(j-1)\int_0^1 t^{i+j-2}dt + (i-1)\int_0^1 t^{i+j-2}dt\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{j-1}{i+j-1} + \frac{i-1}{i+j-1}\right] \\ &= \frac{i+j-2}{2(i+j-1)} \end{aligned}$$

Finalement

$$M_n = \left(\frac{i+j-2}{2(i+j-1)}\right)_{1\le i,j\le n+1}$$

4. Pour $n = 2$, déterminons la signature de q.
   La matrice de q dans la base B_2 est

$$M_2 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & \frac{3}{8} \\ \frac{1}{3} & \frac{3}{8} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}$$

   On pose $P(x) = a + bx + cx^2$
   et donc

$$q(P) = \frac{1}{3}b + \frac{2}{5}c^2 + \frac{1}{2}ab + \frac{2}{3}ac + \frac{3}{4}bc$$

   Utilisant la réduction de Gauss.

$$\begin{aligned} q(P) &= \frac{1}{3}\left(b^2 + \frac{3}{2}b\left(a + \frac{3}{2}c\right)\right) + \frac{2}{3}ac + \frac{2}{5}c^2 \\ &= \frac{1}{3}\left(b + \frac{3}{4}a + \frac{9}{8}c\right)^2 - \frac{1}{3}\left(\frac{3}{4}a + \frac{9}{8}c\right)^2 + \frac{2}{3}ac + \frac{3}{4}bc \\ &= \frac{1}{3}\left(b + \frac{3}{4}a + \frac{9}{8}c\right)^2 - \frac{3}{16}a^2 - \frac{27}{64}c^2 - \frac{9}{16}ac + \frac{2}{3}ac + \frac{2}{5}c^2 \\ &= \frac{1}{3}\left(b + \frac{3}{4}a + \frac{9}{8}c\right)^2 + \frac{5}{48}ac - \frac{7}{320}c^2 - \frac{3}{16}a^2 \\ &= \frac{1}{3}\left(b + \frac{3}{4}a + \frac{9}{8}c\right)^2 - \frac{3}{16}\left(a - \frac{5}{18}c\right)^2 + \frac{25}{1728}c^2 - \frac{7}{320}c^2 \\ &= \left[\frac{1}{\sqrt{3}}\left(b + \frac{3}{4}a + \frac{9}{8}c\right)\right]^2 - \left[\frac{\sqrt{3}}{4}\left(a - \frac{5}{18}c\right)\right]^2 - \frac{1}{135}c^2 \end{aligned}$$

   De cette expression, q est de signature $(1, 2)$ et non dégénérée. De plus, q n'est ni positive ni négative.

Exercice 9 *Soit l'application*

$$\begin{aligned} \phi : \mathbb{R}_2[X] \times \mathbb{R}_2[X] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (P, Q) &\longmapsto P(0)Q(0) + P(1)Q(1) + P(2)Q(2) \end{aligned}$$

1. *Montrer que l'application ϕ est une forme bilinéaire symétrique, définie positive.*
2. *Déterminer la matrice associée à ϕ dans la base canonique*

$$B = \left\{1, X, X^2\right\}$$

3. *Trouver une base orthonormée pour ϕ.*

Solution

1. Montrons que ϕ est une forme bilinéaire.
   $\forall P_1, P_2, Q \in \mathbb{R}_2[X], \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}\phi(\alpha P_1 + \beta P_2, Q) &= (\alpha P_1(0) + \beta P_2(0))\, Q(0) + (\alpha P_1(1) + \beta P_2(1))\, Q(1) \\ &\quad + (\alpha P_1(2) + \beta P_2(2))\, Q(2) \\ &= \alpha P_1(0)Q(0) + \alpha P_1(1)Q(1) + \alpha P_1(2)Q(2) \\ &\quad + \alpha P_2(0)Q(0) + \alpha P_2(1)Q(1) + \alpha P_2(2)Q(2) \\ &= \alpha\phi(P_1, Q) + \beta\phi(P_2, Q)\end{aligned}$$

   $\forall Q_1, Q_2, P \in \mathbb{R}_2[X], \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}\phi(P, \alpha Q_1 + \beta Q_2) &= P(0)\,(\alpha Q_1(0) + \beta Q_2(0)) + P(1)\,(\alpha Q_1(1) + \beta Q_2(1)) \\ &\quad + P(2)\,(\alpha Q_1(2) + \beta Q_2(2)) \\ &= \alpha P(0)Q_1(0) + \alpha P(1)Q_1(1) + \alpha P(2)Q_1(2) \\ &\quad + \alpha P(0)Q_2(0) + \alpha P(1)Q_2(1) + \alpha P(2)Q_2(2) \\ &= \alpha\phi(P, Q_1) + \beta\phi(P, Q_2)\end{aligned}$$

   Alors ϕ est une forme bilinéaire.
   Symétrie :

$$\begin{aligned}\phi(Q, P) &= Q(0)P(0) + Q(1)P(1) + Q(2)P(2) \\ &= P(0)Q(0) + P(1)Q(1) + P(2)Q(2) \\ &= \phi(P, Q)\end{aligned}$$

   Alors ϕ est symétrique.
   Positive : $\forall P \in \mathbb{R}_2[X]$, on a

$$\phi(P, P) = P(0)^2 + P(1)^2 + P(2)^2 \geq 0$$

   Alors ϕ est positive.
   Définie : Soit $P \in \mathbb{R}_2[X]$ un polynôme vérifiant

$$\phi(P, P) = P(0)^2 + P(1)^2 + P(2)^2 = 0$$

   Ce qui implique que $P(0) = P(1) = p(2) = 0$. Donc P est un polynôme de degré inférieur ou égal à 2 avec 3 racines. la seule possiblité est que le polynôme est le polynôme nul $P = 0$.
2. La matrice associée dans la base canonique est

$$M_B(\phi) = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 9 \\ 5 & 9 & 15 \end{pmatrix}$$

3. Trouvons une base orthonormée pour ϕ.
Comme les valeurs $0, 1$ et 2 jouent un rôle dans la forme bilinéaire, nous allons considérer les polynômes suivants, formés de produits de X, $X-1$ et$X-2$:

$$\{X(X-1), X(X-2), (X-1)(X-2)\}$$

On vérifie facilement que ces trois polynômes sont orthogonaux deux-à-deux :

$$\phi\left(X(X-1), X(X-2)\right) = 0$$

$$\phi\left(X(X-1), (X-1)(X-2)\right) = 0$$

$$\phi\left(X(X-2), (X-1)(X-2)\right) = 0$$

D'après la proposition 12, on sait que cette famille est libre, c'est donc une base orthogonale. Il suffit de normaliser ses vecteurs pour obtenir une base orthonormée. Les normes respectives sont :

$$\|X(X-1)\| = \sqrt{\phi\left(X(X-1), X(X-1)\right)} = \sqrt{4} = 2$$

$$\|X(X-2)\| = \sqrt{\phi\left(X(X-2), X(X-2)\right)} = \sqrt{1} = 1$$

$$\|(X-1)(X-2)\| = \sqrt{\phi\left((X-1)(X-2), (X-1)(X-2)\right)} = \sqrt{4} = 2$$

Au final, la famille

$$\left\{\frac{1}{2}X(X-1), X(X-2), \frac{1}{2}(X-1)(X-2)\right\}$$

est une base orthonormée de $\mathbb{R}_2[X]$.

Chapitre 4

Les espaces pré-hilbertiens

Dans ce chapitre, où on va définir une notion générale d'un produit scalaire sur un espace vectoriel, une définition de la norme avec quelques propriétés, la notion d'orthogonalité et au final la projection orthogonale qui permet de résoudre le problème de de la plus courte distance d'un point à une droite, d'un point à un plan, ou plus généralement d'un point à un sous espace affine d'un espace euclidien.

4.1 Produit scalaire

Définition 42 *Soit E un espace vectoriel réel. On appelle produit scalaire sur E une application $\langle .,. \rangle : E \times E \to \mathbb{R}$ qui est :*

- *Bilinéaire.*
- *Symétrique.*
- *Définie positive.*

On appelle un espace pré-hilbertien réel, un couple $(E, \langle .,. \rangle)$ d'un $\mathbb{R}$ espace vectoriel E et d'un produit scalaire $\langle .,. \rangle$.
Un espace vectoriel réel de dimension finie, muni d'un produit scalaire est dit espace euclidien.

Exemple 31
- *Sur $\mathbb{R}^n$, $\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k$.*
- *Sur $\ell([a,b])$, $\langle f, g \rangle = \int_a^b f(t)g(t)dt$.*
- *Sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, si $X = (x_i)_{1 \leq i \leq n}$ et $Y = (y_i)_{1 \leq i \leq n}$*
  $\langle X, Y \rangle = X^T Y = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ (produit scalaire canonique).

Théorème 12 ***(Inégalité de Cauchy-Schwartz)***
Soit $(E, \langle .,. \rangle)$ un espace pré-hilbertien réel. Alors

$$\forall x, y \in E, \langle x, y \rangle^2 \leq \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle$$

On a l'égalité si et seulement si x et y sont liés.

Théorème 13 ***(Inégalité de Minkowski)***
Soit $(E, \langle .,. \rangle)$ un espace pré-hilbertien réel. Alors

$$\forall x, y \in E, \sqrt{\langle x+y, x+y \rangle} \leq \sqrt{\langle x, x \rangle} + \sqrt{\langle y, y \rangle}$$

$$\sqrt{\langle x+y, x+y \rangle} = \sqrt{\langle x, x \rangle} + \sqrt{\langle y, y \rangle} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \vee \\ \exists \alpha \in \mathbb{R} : y = \alpha x \end{cases}$$

Exemple 32 *Avec les produits scalaires précédemment décrits, l'inégalité de Cauchy Schwartz donne :*

- $\forall \ell([a,b]), \int_a^b |f(t)g(t)dt| \leq \left(\int_a^b f^2(t)dt\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_a^b g^2(t)dt\right)^{\frac{1}{2}}$
- $\forall x, y \in \mathbb{R}^n, \sum_{k=1}^n |x_k y_k| \leq (\sum_{k=1}^n x_k^2)^{\frac{1}{2}} (\sum_{k=1}^n y_k)^{\frac{1}{2}}$

Définition 43 ***(Norme)***
On appelle une norme sur un $\mathbb{R}$ espace vectoriel, toute application de E dans $\mathbb{R}^+$ notée $\|.\|$ définie par

$$\forall x, y \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R} : \begin{cases} \|x\| = 0 \Rightarrow x = 0 \\ \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\| \\ \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \end{cases}$$

Proposition 13 ***(Norme euclidienne-écart angulaire entre deux vecteurs)***

- *Soit $(E, \langle .,. \rangle)$ un espace pré-hilbertien réel. Alors l'application définie par*

$$\forall x, y \in E : \|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

représente une norme sur E appelée norme associée au produit scalaire $\langle .,. \rangle$ ou encore une norme euclidienne.

- *On appelle écart angulaire entre deux vecteurs non nuls x et y de E, l'unique scalaire $\theta \in [0, \pi[$ défini par :*

$$\theta = \frac{\arccos \langle x, y \rangle}{\|x\| \|y\|}$$

D'après l'inégalité de Cauchy Schwartz, $-1 \leq \cos\theta \leq 1$ et donc l'angle θ existe toujours. Observons que x et y sont orthogonaux si et seulement si ils sont perpendiculaires c'est-à-dire $\theta = \dfrac{\pi}{2}$. De plus on a :

1. *Identité de polarisation :*

$$\begin{aligned} \forall x, y \in E, \langle x, y \rangle &= \frac{1}{2}\left(\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\|x\|^2 - \|y\|^2 - \|x-y\|^2\right) \\ &= \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right) \end{aligned}$$

2. *Égalité du parallélogramme :*

$$\forall x, y \in E : \|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 - \|y\|\right)^2$$

Cette égalité se traduit géométriquement par le fait que dans le parallélogramme de sommets 0, x, y et $x + y$, la somme des carrées des diagonales est égale à la somme des carrées des 4 côtés. (voir figure 4.1)

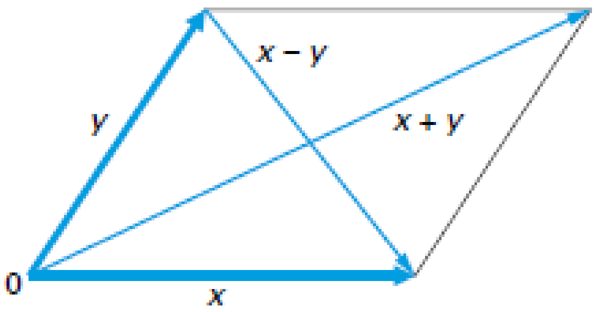


FIGURE 4.1 – Égalité du parallélogramme

3. *Égalité de la médiane :*

$$\forall x, y \in E : \left\|\frac{x+y}{2}\right\|^2 = \frac{1}{2}\left(\|x\|^2 + \|y\|\right)^2 + \frac{1}{4}\|x-y\|^2$$

qui fournit la longueur $\left\|\frac{x+y}{2}\right\|$ *de la médiane issue de* 0, *en fonction des longueurs des* 3 *côtés du triangle de sommets* 0, x *et* y. *(voir figure 4.2).*

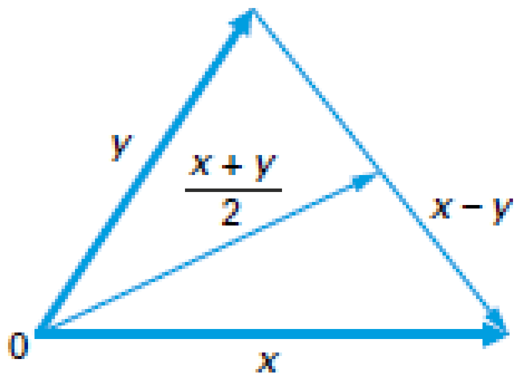


FIGURE 4.2 – Égalité de la médiane

Définition 44 (Distance)
Soit $\mathbb{E}$ *un* $\mathbb{R}$*-espace vectoriel on appelle une distance sur* $\mathbb{E}$ *toute application* d *de* $\mathbb{E} \times \mathbb{E}$ *dans* $\mathbb{R}$ *qui vérifie*

1. $\forall x, y, z \in \mathbb{E}, d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$.
2. $\forall x, y, z \in \mathbb{E}, d(x, y) \leq d(x, z) + d(y, z)$.
3. $d(x, y) = d(y, x)$.

Théorème 14 *Soit* $(\mathbb{E}, \langle ., . \rangle)$ *un espace pré-hilbertien réel et* $\|.\|$ *la norme associée à ce produit scalaire. Alors l'application* d *définie par*

$$\forall x, y \in \mathbb{E}, d(x, y) = \|x - y\|,$$

est une distance sur $\mathbb{E}$ *appelé distance associée au produit scalaire* $\langle ., . \rangle$.

4.2 Orthogonalité

4.2.1 Procédé d'orthogonalité de Gram-Schmidt

Soit $(E, \langle ., . \rangle)$ un espace pré-hilbertien réel et soit $B = \{e_1, \ldots, e_n\}$ une famille libre de E. On veut construire une famille orthogonale $\{v_1, \ldots, v_n\}$ de E à partir de la famille B.

1. **Orthogonalisation :**

$$\begin{cases} v_1 = e_1 \\ v_2 = e_2 + \lambda_1 v_1, \quad \langle v_1, v_2 \rangle = 0 \\ v_3 = e_3 + \mu_1 v_1 + \mu_2 v_2, \quad \langle v_3, v_1 \rangle = 0, \quad \langle v_3, v_2 \rangle = 0 \\ \vdots \\ v_n = e_n + \sum_{k=1}^{n-1} \alpha_k v_k, \quad \forall k = \{1, \ldots n-1, \}, \quad \langle v_n, v_k \rangle = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} v_1 = e_1 \\ v_k = e_k + \sum_{j=1}^{k-1} \lambda_{k,j} v_j, \quad \forall k = \{2, \ldots n, \} \\ \\ \text{avec } \lambda_{k,j} = -\dfrac{\langle v_j, e_k \rangle}{\langle v_j, v_j \rangle}, \quad \forall k = \{2, \ldots n, \}, \quad \forall j = \{1, \ldots k-1, \} \end{cases}$$

Alors $\{v_1, \ldots, v_n\}$ est une famille orthogonale de E.

2. **Normalisation :**

En normalisant les vecteurs v_i, on obtient $\left\{ \dfrac{v_1}{\|v_1\|}, \ldots, \dfrac{v_n}{\|v_n\|} \right\}$ une famille orthonormée de E.

Exemple 33 *Considérons la base suivante de l'espace euclidien* $\mathbb{R}^3$

$$\{v_1 = (1, 1, 1), v_2 = (0, 1, 1), v_3 = (0, 0, 1)\}$$

utilisons le procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt pour transformer $\{v_i\}$*en une base orthonormée* $\{u_i\}$ *Normalisons d'abord* v_i*. Posons :*

$$u_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|} = \frac{(1, 1, 1)}{\sqrt{3}} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right)$$

$$w_1 = v_2 - \langle v_2, u_1 \rangle u_1 = (0, 1, 1) - \frac{2}{\sqrt{3}} \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right) = \left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3} \right)$$

Normalisons w_2 *et calculons* u_2

$$u_2 = \frac{w_1}{\|w_1\|} = \left(-\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}} \right)$$

$$w_2 = v_3 - \langle v_3, u_1 \rangle u_1 - \langle v_3, u_2 \rangle u_2$$

$$= (0, 0, 1) - \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right) - \frac{1}{\sqrt{6}} \left(-\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}} \right)$$

$$= \left(0, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right)$$

Normalisons w_2 et calculons u_2

$$u_3 = \frac{w_2}{\|w_2\|} = \left(0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

et donc la base orthonormée de $\mathbb{R}^3$ est

$$\left\{u_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right), u_2 = \left(-\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right), u_3 = \left(0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right\}$$

Proposition 14 *Soit $(E, \langle ., . \rangle)$ un espace pré-hilbertien réel. Alors toute famille de cardinal fini orthogonale de E qui ne contient pas le vecteur nul est libre.*

Théorème 15 ***(Théorème de Pythagore)***
Soit $(E, \langle ., . \rangle)$ un espace pré-hilbertien réel et $(x_1, \ldots, x_n)$ une famille orthogonale de E. Alors

$$\left\|\sum_{k=1}^{n} x_k\right\|^2 = \sum_{k=1}^{n} \|x_k\|^2$$

Définition 45 ***(Orthogonalité)***
Soit b une forme bilinéaire symétrique sur un $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathbb{E}$, x, y deux vecteurs de $\mathbb{E}$ et F un sous ensemble non vide de $\mathbb{E}$. Alors

1. *On dit que les deux vecteurs x et y sont orthogonaux si*

$$b(x, y) = 0$$

2. *On appelle l'orthogonal de F et on le note $F^\perp$ le sous ensemble de $\mathbb{E}$ définit par*

$$F^\perp = \{y \in \mathbb{E} / \forall x \in F : b(x, y) = 0\}$$

Proposition 15 ***(Somme directe orthogonale)***
Soit $(E, \langle ., . \rangle)$ un espace pré-hilbertien réel et $\{F_k\}_{k=1,\ldots,n}$ une famille de sous espaces de E deux à deux orthogonaux. Alors cette somme est directe.

Exemple 34 *Soit w l'axe de z dans $\mathbb{R}^3$, c'est-à-dire*

$$w = \{(0, 0, c), c \in \mathbb{R}\}$$

alors $w^\perp$ est le plan xy, c'est-à-dire

$$w^\perp = \{(a, b, 0), a, b \in \mathbb{R}\}$$

Donc $\mathbb{R}^3 = w \oplus w^\perp$

Définition 46 ***(Famille orthonormée)***
Une famille $F = (u_1, \ldots, u_k)$ est orthonormée si tous ses vecteurs sont orthogonaux deux à deux de norme 1, c'est-à-dire :

$$\langle u_i, u_j \rangle, \text{ pour } i \neq j \text{ et } \|u_i\| = 1, \text{ pour } 1 \leq i \leq k$$

Définition 47 ***(Base orthonormée)***
Une famille est une base orthonormée s'il s'agit d'une famille orthonormée formant une base.

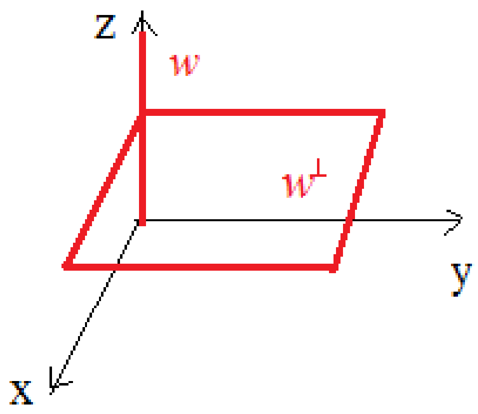


FIGURE 4.3 – Somme directe

4.3 Projection orthogonale

4.3.1 Projection orthogonale sur un sous espace vectoriel de dimension quelconque

Définition 48 ***(Projection)***
Soit E un K espace vectoriel et E_1, E_2 deux sous espaces vectoriels supplémentaires dans E. Pour tout $x \in E$, il existe un unique $(x_1, x_2) \in E_1 \times E_2$ tel que $x = x_1 + x_2$. On appelle x_1 la projection de x sur E_1 dirigée par E_2 et on la note par $\mathcal{P}$ et donc

$$x_1 = \mathcal{P}(x)$$

Proposition 16 *Soient E un K espace vectoriel,E_1, E_2 deux sous espaces vectoriels supplémentaires dans E et $\mathcal{P}$ la projection sur E_1 dirigée par E_2. Alors*

$$\mathcal{P} \in End(E), \;\; Im\mathcal{P} = E_1, \;\; ker\mathcal{P} = E_2, \;\; \mathcal{P} \circ \mathcal{P} = \mathcal{P}$$

Proposition 17 *Soit $\mathcal{P} \in End(E)$ vérifie $\mathcal{P} \circ \mathcal{P} = \mathcal{P}$, on a alors*

$$ker\mathcal{P} \oplus Im\mathcal{P} = E$$

où $\mathcal{P}$ est la projection sur $Im\mathcal{P}$ dirigée par $ker\mathcal{P}$.

Définition 49 *Un endomorphisme $\mathcal{P}$ de E est appelé projecteur si $\mathcal{P} \circ \mathcal{P} = \mathcal{P}$. Cette projection se fait sur l'image de $\mathcal{P}$ dirigée par son noyau.*

Définition 50 ***(Projection orthogonale)***
Soient $(E, \langle ., \rangle)$ un espace pré-hilbertien réel et $\mathcal{P}$ une projection de E. Vu la définition 44, $\mathcal{P}$ est la projection sur $Im\mathcal{P}$ dirigée par $ker\mathcal{P}$. Alors on dit que cette projection est orthogonale si $Im\mathcal{P}$ est orthogonale à $ker\mathcal{P}$.

Proposition 18 *Soit $(E, \langle ., .\rangle)$ un espace pré-hilbertien réel. Alors $\mathcal{P}$ est une projection orthogonale si et seulement si*

$$\mathcal{P} \circ \mathcal{P} = \mathcal{P}, \forall x, y \in E : \langle \mathcal{P}(x), y\rangle = \langle x, \mathcal{P}(y)\rangle$$

Proposition 19 *Soient $(E, \langle ., . \rangle)$ un espace pré-hilbertien réel et F un sous espace vectoriel de dimension quelconque. Alors l'endomorphisme $\mathcal{P}$ de E représente une projection orthogonale sur F si et seulement si*

$$\forall x \in E : \mathcal{P}(x) \in F, \;\; x - \mathcal{P}(x) \in F^{\perp}$$

Proposition 20 *Soient $(E, \langle ., . \rangle)$ un espace pré-hilbertien réel et F un sous espace vectoriel de E supplémentaire avec son orthogonale et soit d la distance associée au produit scalaire $\langle ., . \rangle$. Alors pour tout x dans E, $\exists! y$ dans F tel que*

$$d(x, y) = \inf_{z \in F} d(x, z)$$

De plus y correspond à la projection orthogonale de x sur F.

Théorème 16 ***(Supplémentaire orthogonaux)***
Soient $(E, \langle ., . \rangle)$ un espace pré-hilbertien réel et F un sous espace vectoriel de E de dimension finie. Alors

$$E = F \oplus F^{\perp}$$

On dit que $F^{\perp}$ est le supplémentaire orthogonale de F.

4.3.2 Projection orthogonale sur un sous espace vectoriel de dimension finie

Soient $(E, \langle ., . \rangle)$ un espace pré-hilbertien réel et F un sous espace vectoriel de E de dimension n.
Proposition 21
— *Soit $x \in E$, qui s'écrit uniquement $x + y$ dans la somme directe $F \oplus F^{\perp}$. Alors y s'appelle le projeté orthogonale de x sur F et est noté pat $\mathcal{P}_F(x)$.*
— *si $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base orthonormée de F, alors*

$$\mathcal{P}_F(x) = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle \, e_i$$

Théorème 17 *Pour tout $x \in E$ et $f \in F$, on a*

$$\|x - f\| \geq \|x - \mathcal{P}_F(x)\|$$

avec égalité si et seulement si $f = \mathcal{P}_F(x)$.
La quantité

$$d(x, F) = \|x - \mathcal{P}_F(x)\| = \inf \|x - f\|$$

s'appelle la distance de x à F, et par le théorème de Pythagore, on a

$$d(x, F) = \sqrt{\|x\|^2 - \|\mathcal{P}_F(x)\|^2}$$

Exemple 35 *Dans l'espace euclidien $(\mathbb{R}^3, \langle ., . \rangle)$, on considère le plan horizontal*

$$P = \left\{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3, x, y \in \mathbb{R}\right\}$$

engendré par les deux axes Ox et Oy. Son sous espace orthogonal est la droite verticale

$$P^{\perp} = \left\{(0, 0, z) \in \mathbb{R}^3, z \in \mathbb{R}\right\} = Oz$$

La projection orthogonale sur le plan P est donc la projection sur P parallèlement à la droite verticale

$$\begin{cases} \mathcal{P}_{P^\perp} : \mathbb{R}^3 \to P \\ \quad (x,y,z) \mapsto (x,y,0) \end{cases}$$

Cette projection admet pour base orthonormée les deux premiers vecteurs de la base canonique $\{u_1 = (1,0,0), u_2 = (0,1,0)\}$, avec ces deux vecteurs. la formule donnée par la proposition 21 est bien la formule de la projection orthogonale sur le plan P.

$$\mathcal{P}_{P^\perp}((x,y,z)) = \langle (x,y,z),(1,0,0)\rangle (1,0,0) + \langle (x,y,z),(0,1,0)\rangle (0,1,0) = (x,y,0)$$

4.4 Exercices corrigés

Exercice 1 *Soit V l'espace des polynômes muni du produit scalaire donné par*

$$\langle f,g\rangle = \int_0^1 f(t)g(t)dt$$

Soit

$$f(t) = t+2 \text{ et } g(t) = t^2 - 2t - 3$$

1. *Calculer $\langle f,g\rangle$. Lest fonctions f et g sont elles orthogonales ?*
2. *Calculer $\|f\|$.*

Solution

1.
$$\langle f,g\rangle = \int_0^1 (t+2)(t^2-2t-3)dt$$
$$= \left[\frac{1}{4}t^4 - \frac{7}{2}t^2 - 6t\right]_0^1 = -\frac{37}{4} \neq 0$$

   Alors f et g ne sont pas orthogonaux.

2.
$$\|f\| = \sqrt{\langle f,f\rangle}$$
$$\langle f,f\rangle = \int_0^1 (t+2)(t+2)dt$$
$$= \left[\frac{1}{3}t^3 + 2t^2 + 4t\right]_0^1 = \frac{19}{3}$$

   Alors

$$\|f\| = \sqrt{\langle f,f\rangle} = \sqrt{\frac{19}{3}}$$

Exercice 2 *Soit* $E = C^1([0,1],\mathbb{R})$. *Pour* $f, g \in E$, *on pose*

$$\varphi(f,g) = \int_0^1 f'(t)g'(t)dt + f(1)g(0) + f(0)g(1)$$

Montrer que φ *définit un produit scalaire sur* E.

Solution
L'application φ est bien définie sur $E \times E \to \mathbb{R}$ et clairement bilinéaire symétrique (voir les exercices du chapitre 3).
Soit $f \in E$

$$\varphi(f,f) = \int_0^1 f'(t)^2 dt + 2f(1)f(0)$$

Par l'inégalité de Cauchy Schwartz

$$\left(\int_0^1 f'(t)dt\right)^2 \leq \int_0^1 f'(t)^2 dt$$

et donc

$$\int_0^1 f'(t)^2 dt \geq (f(1) - f(0))^2$$

puis

$$\varphi(f,f) = f(1)^2 + f(0)^2 \geq 0$$

Au plus, si $\varphi(f,f) = 0$, alors $f(0) = f(1) = 0$, mais aussi $\int_0^1 f'(t)^2 dt = 0$. La fonction est donc constante égale à 0. Alors φ est une forme bilinéaire symétrique définie positive et donc elle définit un produit scalaire su E.

Exercice 3 *Soit* a *un vecteur unitaire d'un espace pré-hilbertien réel* E. k *un réel et* $\varphi : E \times E \to \mathbb{R}$ *l'application déterminée par*

$$\varphi(x,y) = \langle x, y\rangle + k\langle x, a\rangle \langle y, a\rangle$$

Donner une condition nécessaire et suffisante pour que φ *soit un produit scalaire.*

Solution

— Montrons que φ est une forme bilinéaire symétrique
$\forall x_1, x_2, y \in E, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}\varphi\left(\alpha(x_1 + x_2), y\right) &= \langle \alpha x_1 + \beta x_2, y\rangle + k\langle \alpha x_1 + \beta x_2, a\rangle \langle y, a\rangle \\ &= \alpha\langle x_1, y\rangle + \alpha k\langle x_1, a\rangle\langle y, a\rangle + \beta\langle x_2, y\rangle + \beta k\langle x_2, a\rangle\langle y, a\rangle \\ &= \alpha\varphi(x_1, y) + \beta\varphi(x_2, y)\end{aligned}$$

$\forall y_1, y_2, x \in E, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}\varphi\left(x, \alpha(y_1 + y_2)\right) &= \langle x, \alpha y_1 + \beta y_2\rangle + k\langle x, a\rangle\langle \alpha y_1 + \beta y_2, a\rangle \\ &= \alpha\langle x, y_1\rangle + \alpha k\langle x, a\rangle\langle y_1, a\rangle + \beta\langle x, y_2\rangle + \beta k\langle x, a\rangle\langle y_2, a\rangle \\ &= \alpha\varphi(x, y_1) + \beta\varphi(x, y_2)\end{aligned}$$

De plus, on a

$$\begin{aligned}\varphi(y, x) &= \langle y, x\rangle + k\langle y, a\rangle\langle x, a\rangle \\ &= \langle x, y\rangle + k\langle x, a\rangle\langle y, a\rangle \\ &= \varphi(x, y)\end{aligned}$$

Alors φ est une forme bilinéaire symétrique.

— On a

$$\varphi(x, x) = \|x\|^2 + k\langle x, a\rangle^2$$

En particulier

$$\varphi(a, a) = \|a\|^2 + k\|a\|^4 = (1 + k)$$

Pour que la forme bilinéaire symétrique φ soit définie positive il est nécessaire que $1+k > 0$. Inversement, supposons que $1 + k > 0$, si $k \geq 0$, alors

$$\varphi(x, x) \geq \|x\|^2$$

et donc

$$\forall x \in E\left\{0_E\right\}, \varphi(x, x) > 0$$

Si $k \in]-1, 0[$, $k = -\alpha$ avec $\alpha \in]0, 1[$ et

$$\varphi(x, x) = \|x\|^2 - \alpha\langle x, a\rangle^2$$

Par l'inégalité de Cauchy Schwartz

$$\langle x, a\rangle^2 \leq \|x\|^2\|a\|^2 = \|x\|^2$$

donc

$$\varphi(x, x) \geq \|x\|^2 - \alpha\|x\|^2 = (1 - \alpha)\|x\|^2$$

de sorte que $\forall x \in E\setminus\left\{0_E\right\}, \varphi(x, x) > 0$. Ainsi φ est une forme bilinéaire symétrique définie positive et donc un produit scalaire.

Exercice 4 *1. Pour quelles valeurs de $\lambda \in \mathbb{R}$, la forme bilinéaire sur $\mathbb{R}^3$ définit-elle un produit scalaire ?.*

$$b(x, y) = x_1y_1 + 6x_2y_2 + 3x_3y_3 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + 3\lambda x_1y_3 + 3\lambda x_3y_1$$

2. On munit $\mathbb{R}_2[X]$ du produit scalaire précédent. déterminée une base orthonormée.

Solution

1. Montrons que b est symétrique définie positive

$$\begin{aligned} b(y,x) &= y_1x_1 + 6y_2x_2 + 3y_3x_3 + 2y_1x_2 + 2y_2x_1 + 3\lambda y_1x_3 + 3\lambda y_3x_1 \\ &= x_1y_1 + 6x_2y_2 + 3x_3y_3 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + 3\lambda x_1y_3 + 3\lambda x_3y_1 \\ &= b(x,y) \end{aligned}$$

Alors b est symétrique. De plus on

$$\begin{aligned} b(x,x) &= x_1^2 + 6x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_2x_1 + 3\lambda x_1x_3 + 3\lambda x_3x_1 \\ &= x_1^2 + 6x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 + 3\lambda x_1x_3 \end{aligned}$$

Pour vérifier si b est définie positive il faut écrire $b(x,x)$ en somme de carrées. Pour cela utilisons la méthode de Gauss vue dans le chapitre précédent. On obtient

$$b(x,x) = (x_1 + 2x_2 + 3\lambda x_3)^2 + 2(x_2 - 3\lambda x_3)^2 + \left(3 - 27\lambda^2\right)x_3^2$$

$$b(x,x) > 0 \Rightarrow 3 - 27\lambda^2 > 0 \Rightarrow -\frac{1}{3} < \lambda < \frac{1}{3}$$

2. Appliquons le procédé de Gram Schmidt à la base canonique $1, x, x^2$

$$\begin{cases} v_1 = 1 \\ v_2 = x + \lambda.1 \text{ avec } \lambda \text{ tel que } \langle x+\lambda, 1\rangle = 0 \end{cases}$$

$I_1 + \lambda I_0 = 0$ or $I_0 = 1$ et $I_1 = 0$, donc $\lambda = 0 \Rightarrow v_2 = x$.
$v_3 = x^2 + \lambda x + \mu.1$. En imposant $\langle v_1, v_3\rangle = 0$, on trouve :
$I_3 + \lambda I_2 + \mu I_1 = 0$. Comme $I_3 = 0$, alors $\lambda = 0 \Rightarrow v_3 = x^2 - 1$ et donc

$$v_1 = 1, v_2 = x \text{ et } v_3 = x^2 - 1$$

En normalisant, on obtient :

$$e_1 = 1, e_2 = x \text{ et } e_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(x^2 - 1\right)$$

Exercice 5 *Soit $E = C^1([0,1],\mathbb{R})$ et*

$$\forall f,g \in E, \langle f,g\rangle = \int_0^1 f(t)g(t)dt + \int_0^1 f'(t)g'(t)dt$$

Montrer que $\langle .,.\rangle$ définit un produit scalaire sur E.

2. *On pose*

$$V = \{f \in E / f(0) = f(1) = 0\} \text{ et } W = \left\{f \in E / f \text{ est } C^2 \text{ et } f'' = f\right\}$$

Montrer que V et W sont supplémentaires orthogonaux.

Solution

1. Montrons que $\langle .,. \rangle$ est une forme bilinéaire symétrique définie positive.
   $\forall f_1, f_2, g \in E, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}\langle \alpha f_1 + \beta f_2, g \rangle &= \int_0^1 (\alpha f_1(t) + \beta f_2(t)) g(t) dt + \int_0^1 (\alpha f_1(t) + \beta f_2(t))' g'(t) dt \\ &= \alpha \langle f_1, g \rangle + \beta \langle f_2, g \rangle\end{aligned}$$

   $\forall g_1, g_2, f \in E, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}\langle f, \alpha g_1 + \beta g_2 \rangle &= \int_0^1 f(t)(\alpha g_1(t) + \beta g_2(t)) dt + \int_0^1 f'(t) (\alpha g_1(t) + \beta g_2(t))' dt \\ &= \alpha \langle f, g_1 \rangle + \beta \langle f, g_2 \rangle\end{aligned}$$

   Alors $\langle .,. \rangle$ est une forme bilinéaire. De plus, on a

$$\begin{aligned}\langle g, f \rangle &= \int_0^1 g(t) f(t) dt + \int_0^1 g'(t) f'(t) dt \\ &= \int_0^1 f(t) g(t) dt + \int_0^1 f'(t) g'(t) dt \\ &= \langle f, g \rangle\end{aligned}$$

   Alors $\langle .,. \rangle$ est symétrique.
   Utilisons l'inégalité de Cauchy Schwartz pour montrer que $\langle .,. \rangle$ est définie positive.

$$\langle f, f \rangle = \int_0^1 f^2(t) dt + \int_0^1 f'^2(t) dt$$

   On a

$$\left(\int_0^1 f'(t) \right)^2 \leq \int_0^1 f'(t)^2 dt$$

   et

$$\left(\int_0^1 f(t) \right)^2 \leq \int_0^1 f(t)^2 dt$$

   Alors

$$\langle f, f \rangle = \int_0^1 f^2(t) dt + \int_0^1 f'^2(t) dt \geq \left(\int_0^1 f(t) \right)^2 + \left(\int_0^1 f'(t) \right)^2 \geq 0$$

   Donc $\langle .,. \rangle$ représente un produit scalaire sur E.

2. Soit $(f, g) \in V \times W$. On a

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t) g''(t) dt + \int_0^1 f'(t) g'(t) dt = [f(t) g'(t)]_0^1 = 0$$

   et les espaces V et W sont donc en somme directe.

Exercice 6 *On considère l'espace euclidien $\mathbb{R}^4$ muni du produit scalaire défini par la forme bilinéaire suivante :*

$$b(x,y) = x_1y_1 + 2x_2y_2 + 4x_3y_3 + 18x_4y_4 + x_1y_3 + x_3y_1 + 2x_2y_4 + 2x_4y_2 + 6x_3y_4 + 6x_4y_3$$

Soit F le sous espace de $\mathbb{R}^4$ défini par

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 \\ x_2 - 2x_4 = 0 \end{cases}$$

Déterminer $F^\perp$.

Solution
On a
$$F^\perp = \left\{x \in \mathbb{R}^4 / b(x,y) = 0, \forall y \in F\right\}$$
C'est-à-dire sous forme matricielle
$$F^\perp = \left\{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) / {}^T XAY = 0, \forall Y \in F\right\}$$

Soit $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}$

$$Y \in F \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 - y_2 + y_3 - y_4 = 0 \\ y_2 - y_4 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow Y = \begin{pmatrix} 2\mu - \lambda \\ 2\mu \\ \lambda \\ \mu \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (\lambda, \mu \in \mathbb{R})$$

Alors

$${}^T XAY = 0, \forall Y \in F \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 4 & 6 \\ 0 & 2 & 6 & 18 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2\mu - \lambda \\ 2\mu \\ \lambda \\ \mu \end{pmatrix}, \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

c'est-à-dire :
$$\lambda(3x_3 + 6x_4) + \mu(3x_1 + 6x_2 + 9x_3 + 22x_4) = 0, \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

D'où
$$F^\perp = \begin{cases} 3x_3 + 2x_4 = 0 \\ 3x_1 + 6x_2 + 9x_3 + 22x_4 = 0 \end{cases}$$

Exercice 7 *Soit l'espace vectoriel ℓ formé des applications continues $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ de l'intervalle $[-\pi, \pi]$ vers $\mathbb{R}$. On le munit du produit scalaire*

$$\begin{cases} \langle .,. \rangle : \ell \times \ell \to \mathbb{R} \\ \qquad \langle f, g\rangle \mapsto \langle f, g\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)g(t)dt \end{cases}$$

Calculer la projection orthogonale de la fonction $f(t) = t^2$ sur le sous espace vectoriel engendré par $\{1, \cos t, \sin t\}$.

Solution

Appliquons la formule de la projection orthogonale donnée à la proposition 21. Pour cela il nous faut d'abord trouver une base orthonormée su sous espace vectoriel $F := vect\,(\{1, \cos t, \sin t\})$. Montrons que les vecteurs de F sont orthogonaux deux à deux.

$$\langle 1, \cos(t)\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(t)dt = [\sin(t)]_{-\pi}^{\pi} = 0$$

$$\langle 1, \sin(t)\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \sin(t)dt = [-\cos(t)]_{-\pi}^{\pi} = 0$$

$$\langle \cos(t), \sin(t)\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(t)\sin(t)dt = 0$$

Alors la famille des trois vecteurs est orthogonale. En normalisant, on trouve

$$B = \left\{ \frac{\sqrt{2\pi}}{2\pi}, \frac{\sqrt{\pi}}{\pi}\cos(t), \frac{\sqrt{\pi}}{\pi}\sin(t) \right\}$$

La projection orthogonale de la fonction t^2 sur F est donnée par

$$\mathcal{P}_{F^\perp}(t^2) = \left\langle t^2, \frac{\sqrt{2\pi}}{2\pi} \right\rangle \frac{\sqrt{2\pi}}{2\pi} + \left\langle t^2, \frac{\sqrt{\pi}}{\pi}\cos t \right\rangle \frac{\sqrt{\pi}}{\pi}\cos t + \left\langle t^2, \frac{\sqrt{\pi}}{\pi}\sin t \right\rangle \frac{\sqrt{\pi}}{\pi}\sin t$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t^2 dt + \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{\pi} t^2\cos(t)dt\right)\cos t + \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{\pi} t^2\sin(t)dt\right)\sin t$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} t^2 dt = \left[\frac{t^3}{3}\right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{2}{3}\pi^3$$

Utilisons l'intégration par partie pour calculer le reste des intégrales

$$\int_{-\pi}^{\pi} t^2\cos(t)dt = \left[t^2\sin t\right]_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} 2t\sin(t)dt$$

$$= -\int_{-\pi}^{\pi} 2t\sin(t)dt = -\left[2(-\cos t)\right]_{-\pi}^{\pi} + \int_{-\pi}^{\pi} 2t(-\cos(t))dt = -4\pi$$

De la même manière, on calcul

$$\int_{-\pi}^{\pi} t^2\sin(t)dt = \left[t^2(-\cos t)\right]_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} 2t(-\cos(t))dt$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} 2t\cos(t)dt = [2t(\sin t)]_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} 2(\sin(t))dt = 0$$

Au final, la projection orthogonale de la fonction t^2 sur le sous espace vectoriel F est

$$\mathcal{P}_{F^\perp}(t^2) = \frac{1}{3}\pi^2 - 4$$

Exercice 8 *Calculer*

$$\inf\left\{\int_0^1 t^2\left(\ln t - at - b\right)^2 dt,\ \ (a,b)\in\mathbb{R}^2\right\}$$

Solution

En introduisant l'espace E des fonctions réelles f continues sur $]0,1]$, telles que $t \mapsto (tf(t))^2$ soit intégrable et en munissant cet espace du produit scalaire, on a

$$\langle f, g\rangle = \int_0^1 t^2 f(t)g(t)dt$$

La quantité cherchée est : $m = d(f,F)^2$, avec $f : t \mapsto \ln t$ et $F = vect(f_0, f_1)$ où $f_0(t) = 1$ et $f_1(t) = t$.

On a $m = \|f - \mathcal{P}_F(f)\|^2$ avec $\mathcal{P}$ la projection orthogonale sur F.

$$\mathcal{P}_F(f(t)) = a + bt \text{ avec } \langle \mathcal{P}_F(f), f_0\rangle = \langle f, f_0\rangle \text{ et } \langle \mathcal{P}_F(f), f_1\rangle = \langle f, f_1\rangle$$

La résolution du système ainsi obtenu donne $a = \frac{5}{3}$ et $b = -\frac{19}{2}$. Alors

$$m = \|f - \mathcal{P}_F(f)\|^2 = \langle f - \mathcal{P}_F(f), f\rangle = \frac{1}{432}$$

Exercice 9 *Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $E = \mathbb{R}_n[X]$ et*

$$\langle .,. \rangle : (P,Q) \in E^2 \mapsto \langle P, Q\rangle = \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t}dt$$

1. *Justifier la définition de $\langle ., \rangle$ et montrer qu'il s'agit d'un produit scalaire.*
   On pose $F = \{P \in E, P(0) = 0\}$. On cherche à déterminer $d(1,F)$. On note $(P_0,\dots,P_n)$ l'orthonormalisée de Schmidt de $\{1, X, \dots, X^n\}$.
2. *Calculer $P_k(0)^2$.*
3. *Déterminer une base $F^\perp$ que l'on exprimera dans la base $(P_0,\dots,P_n)$. En déduire $d(1,F^\perp)$ et $d(1,F)$.*

Solution

1. Pour $P, Q \in E$, la fonction $t \mapsto P(t)Q(t)e^{-t}$ est définie et continue par morceaux sur $[0, +\infty[$ et vérifie :
$$P(t)Q(t)e^{-t} \underbrace{\longrightarrow}_{t \to +\infty} 0$$
On peut donc affirmer que cette fonction est intégrable sur $[0, +\infty[$ ce qui assure la bonne définition de $\langle ., . \rangle$.
On vérifie aisément que $\langle ., . \rangle$ est une forme bilinéaire symétrique positive.
Si $\langle P, P \rangle = 0$, alors par nullité de l'intégrale d'une fonction continue positive,
$$\forall t \in [0, +\infty[, P(t)^2 e^{-t} = 0$$
On en déduit que le polynôme P admet une infinité de racines et donc $P = 0$.
2. Pour $k \geq 1$ ou $k = 0$, on peut affirmer que les polynômes P_k et P'_k sont orthogonaux car
$$P'_k \in vect(P_1, \dots P_{k-1})$$
Par une intégration par parties, on a
$$\int_0^{+\infty} P_k(t)P'_k(t)e^{-t}dt = \frac{1}{2}\left[P_k(t)^2 e^{-t}\right]_0^{+\infty} + \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} P_k(t)^2 e^{-t}dt = 0$$
On en déduit que
$$P_k(0)^2 = \|P_k\|^2 = 1$$
3. F est un hyperplan, son orthogonal est donc une droite vectorielle. Soit Q un vecteur directeur de celle-ci, on peut écrire
$$Q = \sum_{k=0}^{n} \langle P_k, Q \rangle P_k$$
Or
$$\langle P_k, Q \rangle = \langle P_k - P_k(0), Q \rangle + P_k(0) \langle 1, Q \rangle$$
Puisque le polynôme $P_k - P_k(0)$ est un élément de F, il est orthogonal à Q et l'on obtient
$$\langle P_k, Q \rangle = P_k(0) \langle 1, Q \rangle$$
Ce qui permet d'écrire
$$Q = \lambda \sum_{k=0}^{n} P_k(0)P_k, \qquad \text{avec } \lambda = \langle 1, Q \rangle$$
On en déduit
$$d(1, F) = \frac{|\langle 1, Q \rangle|}{\|Q\|} = \frac{1}{\sqrt{\sum_{k=0}^{n} P_k(0)^2}} = \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$
En fin, par pythagore
$$\|1\|^2 = d(1, F)^2 + d(1, F^\perp)^2$$
et l'on obtient
$$d(1, F^\perp) = \sqrt{\frac{n}{n+1}}$$

Bibliographie

[1] Bernard Le Stum, Algèbre linéaire et bilinéaire, polycopié, version du 21 février 2020.

[2] Bernar Rondé, Mathématiques fondamentales : algèbre, Sciences fondamentales, 2 $^{\text{nde}}$ édition.

[3] Bruno Vallete, L'algèbre linéaire pour tous, polycopié, version du 08 octobre, 2015.

[4] Joseph Griphone, Algèbre linéaire, 4^e édition, Cépaduès-édition ,Toulouse, 9 janvier 2011.

[5] Michel Queysanne, algèbre 1 $^{\text{er}}$ cycle scientifique, préparation aux grandes écoles, office des publications universitaires, 1984.

[6] SERGE Lang, Algèbre linéaire 2, Inter Éditions, Paris, 1976.

[7] Xavier Gourdon, les maths en tête Algèbre, édition ellipses, 1994.

[8] https ://www.techno-science.net/definition/5080.html.