



Mémoire de fin d'étude

Pour l'obtention du diplôme de Master

Filière: Automatique
Spécialité: Automatique

Présenté par : -ASNOUNE Nour El Houda
-HADJ HENNI Hamza

Thème

Estimation d'état pour le contrôle
d'un pendule inversé rotatif

Soutenu publiquement, le juin 2023 , devant le jury composé de:

M.Lotfi MERAD	Professeur	ESSAT	Président
M.Fayssal ARRICHI	Maitre de conférence	ESSAT	Directeur de mémoire
M.M.Rida MOKHTARI	Maitre de conférence	ESSAT	Co-Directeur de mémoire
M.Ahmed TAHOUR	Professeur	ESSAT	Examineur 1
Mme.Zineb KHEDIM	Maitre de Conférence	ESSAT	Examineur 2

Année universitaire : 2022 /2023

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

REMERCIEMENTS

Nous remercions Allah de nous avoir donné la patience et le courage pour accomplir ce travail

Nous exprimons également notre profonde gratitude à notre encadrant, Monsieur Fayssal ARICHI, ainsi qu'à notre co-encadrant, Monsieur Mohammed Rida MOKHTARI. Leur soutien constant, leur patience, leur disponibilité et leurs conseils éclairés ont nourri notre réflexion tout au long de cette année académique et nous ont permis d'apporter des améliorations substantielles à ce mémoire.

Notre reconnaissance s'adresse également aux membres du jury, à savoir Monsieur Lotfi MERAD, Madame Zineb KHEDIM et Monsieur Ahmed TAHOUR, pour l'attention soutenue qu'ils ont portée à ce travail.

Nous témoignons aussi toute notre gratitude envers tout le personnel de l'Ecole Supérieur en Science Appliqué de Tlemcen qui veille à assurer une formation de qualité aux étudiants.

Pour terminer, nous tenons à remercier toute personne ayant contribué de près ou de loin à la réalisation de ce travail.

Dédicace

Je dédie humblement ce travail à mes très chers parents, dont j'ai eu l'immense honneur de suivre ce parcours extraordinaire, dont vous avez pleinement connu les défis. Je vous remercie sincèrement pour votre soutien moral inestimable et les innombrables encouragements dont vous m'avez constamment gratifié.

Également, je dédie ce travail à mon cher frère Amine ainsi qu'à mes chères sœurs Zheira, Habiba, Hakima et Amina, qui ont toujours été présents à mes côtés. Votre soutien et votre affection m'ont donné la force de persévérer.

Enfin, j'adresse une dédicace toute particulière à mes chères amies, en particulier Karima, Souad, Manal et Fedoua. Votre amitié précieuse et votre soutien indéfectible ont été une source de réconfort et de motivation tout au long de ce parcours.

Nour El Houda

Dédicace

A mes chers parents, qui avez été les phares dans l'obscurité de mon parcours, qui m'ont soutenus tout au long de ma vie, qui m'a encouragé, qui a cru en moi et a prié pour moi. grâce à vous, j'ai pu trouver la force de surmonter les défis et d'atteindre ce jalon important dans ma vie.

A mes chers frère aimants Mohamed et Bilal qui m'ont toujours taquinée mais m'ont constamment encouragés.

A ma sœur Khadidja, qui a partagé avec moi les longues nuits. Nous avons étudié ensemble, nous avons ri ensemble et nous avons eu des moment formidable ensemble.

Aussi, je remercie ma binôme pour le travail qu'elle a fait et les efforts inlassables qu'elle a fourni tout au long ce projet de fin d'études.

Hamza

TABLE DES MATIÈRES

Introduction générale	11
1 Principe d'observation et la synthèse d'observateur	13
1.1 Introduction	14
1.2 Définition d'un observateur	14
1.3 Utilité des observateurs	15
1.4 Types d'observateurs	15
1.4.1 Observateur de Lunberger	16
1.4.2 Observateur à entrée inconnue	17
1.4.3 Observateur à mode glissant	18
1.4.4 Observateur à Grand gain	19
1.4.5 Observateur de Thau	20
1.5 Présentation du pendule inversé rotatif (PIR)	21
1.6 Modélisation mathématique du PIR	22
1.6.1 L'équation d'Euler-Lagrange	23
1.6.2 Représentation d'état du PIR	28
1.7 Conclusion	29
2 Synthèse d'un observateur de Luenberger pour le PIR	30
2.1 Introduction	31
2.2 Systèmes linéaires	31
2.3 Linéarisation du système	32
2.3.1 Les points d'équilibre	33
2.3.2 Linéarisation du système autour d'un point d'équilibre	33
2.4 Observabilité des systèmes linéaires	34
2.5 Observateur linéaire	35
2.5.1 Observateur de Lunberger	36
2.5.2 Commande appliquée :	40
2.5.3 Résultats de simulation 3D :	41
2.6 Conclusion	47

3 Synthèse d'un observateur non linéaire pour le PIR	48
3.1 Introduction	49
3.2 Systèmes non linéaires	49
3.3 Observabilité des systèmes non linéaires	50
3.3.1 Quelques définitions [2]	50
3.4 Observateurs non linéaires	52
3.5 Observateur à mode glissant d'ordre 2 (Super-twisting)	52
3.5.1 Observateur à mode glissant d'ordre 1	52
3.5.2 Observateur super-twisting	54
3.5.3 Application au PIR	56
3.5.4 Analyse de convergence	56
3.5.5 La commande appliqué :	58
3.5.6 Résultats expérimentaux	59
3.6 Conclusion	65
Conclusion générale	66
Références	67

TABLE DES FIGURES

1.1	Observateur d'état	15
1.2	Schéma bloc de l'observateur Lunberger [24]	17
1.3	Schéma bloc d'un observateur à entrée inconnue [8]	18
1.4	Synthèse d'observateur à mode glissant [9]	19
1.5	Composants du QUBE-SERVO 2 [1]	22
1.6	Schéma du pendule inversé rotatif [23]	24
2.1	Schéma fonctionnel	32
2.2	Synthèse de l'observateur de Lunberger [12]	37
2.3	L'interface de la simulation 3D de Quanser QUBE Servo 2	41
2.4	L'évolution de l'angle réel et estimé du bras du PIR	42
2.5	L'évolution de l'angle réel et estimé du pendule du PIR	42
2.6	L'évolution de la vitesse angulaire réel et estimé du bras du PIR	43
2.7	L'évolution de la vitesse angulaire réel et estimé du pendule du PIR	43
2.8	L'évolution de l'angle réel et estimé du bras du PIR	44
2.9	L'évolution de l'angle réel et estimé du pendule du PIR	44
2.10	L'évolution de la vitesse angulaire réel et estimé du bras du PIR	45
2.11	L'évolution de la vitesse angulaire réel et estimé du pendule du PIR	45
2.12	L'erreur entre l'état estimé et l'état réel du pendule du PIR	46
2.13	zoom de l'erreur entre l'état estimé et l'état réel du pendule du PIR	46
2.14	L'erreur entre l'état estimé et l'état réel du bras du PIR	47
2.15	zoom de l'erreur entre l'état estimé et l'état réel du bras du PIR	47
3.1	Structure du différentiateur d'ordre deux	55
3.2	L'évolution de l'angle réel du bras et de son estimation par l'observateur	60
3.3	L'évolution de l'angle réel du pendule et de son estimation par l'observateur	60
3.4	L'évolution de la vitesse angulaire du bras et de son estimation par l'observateur	61
3.5	L'évolution de la vitesse angulaire du pendule et de son estimation par l'observateur	61
3.6	L'évolution de l'angle du bras du PIR appliquons la commande basée sur les estimations de l'observateur	62

3.7	L'évolution de l'angle du pendule du PIR appliquons la commande basée sur les estimations de l'observateur	63
3.8	L'évolution de la vitesse angulaire du bras du PIR appliquons la commande basée sur les estimations de l'observateur	64
3.9	L'évolution de la vitesse angulaire du pendule du PIR appliquons la commande basée sur les estimations de l'observateur	64
3.10	L'erreur entre l'état estimé et l'état réel du bras du PIR	65
3.11	L'erreur entre l'état estimé et l'état réel du pendule du PIR	65

LISTE DES TABLEAUX

1.1	Composants du QUBE-SERVO 2 [1]	22
1.2	Paramètres du PIR [1]	24

INTRODUCTION GÉNÉRALE

Dans le domaine de l'automatique, l'interaction entre la théorie et l'application pratique est plus forte que jamais. Un des éléments clés de cette symbiose est l'observateur, qui est devenu une composante essentielle des systèmes de commande modernes, en particulier dans l'industrie. Le rôle de l'observateur est de fournir une estimation précise de l'état interne d'un système dynamique basée sur les entrées et les sorties mesurées. En fait, en raison de la complexité et de l'imprévisibilité des systèmes industriels, il est souvent impossible ou impraticable de mesurer directement toutes les variables d'état. Dans ce contexte, l'observateur se pose comme une solution permettant une surveillance efficace du système.

Dans cette mémoire, nous nous concentrerons sur les observateurs pour le pendule inversé rotatif, un système non linéaire largement utilisé pour illustrer des concepts clés en automatique. Ce système pose un défi en raison de sa non-linéarité et de sa nature instable.

État de l'art des observateurs appliqués sur le pendule inversé rotatif :

Observateur de Luenberger : Les observateurs de Luenberger ont été appliqués avec succès sur le pendule inversé rotatif pour estimer les états internes du système, tels que l'angle du pendule, la vitesse angulaire et la position du chariot. Ces observateurs utilisent le modèle mathématique du système et les mesures disponibles, généralement l'angle du pendule et la position du chariot, pour générer des estimations en temps réel des états internes.

Observateur de Kalman : L'observateur de Kalman, ou filtre de Kalman, est une méthode d'estimation d'état couramment utilisée pour les systèmes dynamiques linéaires et non linéaires. Il a été appliqué sur le pendule inversé rotatif pour estimer les états internes en utilisant le modèle mathématique du système et les mesures de sortie. L'observateur de Kalman utilise des techniques d'optimisation bayésienne pour estimer les états internes de manière précise et robuste, même en présence de bruit et d'incertitudes. Cette approche permet d'améliorer le contrôle et la stabilité du pendule inversé rotatif.

Observateur adaptatif : Les observateurs adaptatifs sont utilisés pour estimer les états internes des systèmes dynamiques en présence d'incertitudes et de variations de paramètres. Ils ont été appliqués sur le pendule inversé rotatif pour compenser les incer-

titudes du modèle et s'adapter aux variations du système en temps réel. Les observateurs adaptatifs utilisent des techniques d'adaptation des gains ou des modèles pour ajuster les estimations en fonction des variations du système. Cette approche permet d'obtenir des estimations précises des états internes, même dans des conditions changeantes, ce qui améliore les performances de commande du pendule inversé rotatif.

Observateur à modèle réduit : Les observateurs à modèle réduit sont une approche spécifique appliquée sur le pendule inversé rotatif où un modèle simplifié du système est utilisé pour estimer les états internes. Ces observateurs exploitent la structure particulière du système et utilisent des techniques de réduction de modèle pour obtenir des estimations précises des états internes à partir de mesures de sortie limitées. Cette approche permet d'économiser des ressources de calcul et de capteurs tout en maintenant des performances de commande acceptables.

Notre travail est divisé en trois chapitres.

Le premier chapitre de cette étude a pour objectif d'introduire la notions des observateurs. Nous aborderons leur définition, leur utilité, ainsi que les différents types d'observateurs que l'on peut rencontrer. Ensuite, nous présenterons notre système, le pendule inversé rotatif sur la maquette du QUANSER QUBE Servo 2 disponible à notre établissement ESSAT. Nous procéderons ensuite à une modélisation mathématique du système.

Le deuxième chapitre sera consacré à l'application d'un observateur linéaire sur le système du pendule inversé rotatif (PIR), plus précisément l'observateur de Luenberger. Dans un premier temps, nous effectuerons la linéarisation du système autour du point d'équilibre instable afin d'obtenir un modèle linéaire. Cette étape est essentielle, car l'observateur linéaire est spécifiquement conçu pour fonctionner de manière optimale dans la plage de linéarité du système. Ensuite, nous présenterons les résultats des simulations 3D basées sur ce modèle et nous les interpréterons en détail pour évaluer les performances de l'observateur linéaire appliqué au PIR.

Le troisième chapitre est dédié à l'application d'un observateur non linéaire spécifique au PIR, à savoir l'observateur de super-twisting. Nous utiliserons le modèle mathématique non linéaire du système pour cette application. En outre, nous aborderons la commande non linéaire qui sera utilisée pour stabiliser le pendule dans la position désirée. Ensuite, nous présenterons les résultats expérimentaux obtenus lors de l'application en temps réel de l'observateur sur la maquette réelle du QUANSER QUBE Servo2.

L'objectif de cette étude est d'évaluer l'efficacité de ces deux approches, de comprendre leurs avantages et leurs limites, et de fournir des recommandations pour le choix d'une approche en fonction des spécificités du système à contrôler. Cette étude vise non seulement à approfondir notre compréhension des observateurs en théorie, mais aussi à fournir des conseils pratiques pour leur mise en œuvre dans l'industrie.

CHAPITRE 1

PRINCIPE D'OBSERVATION ET LA SYNTHÈSE D'OBSERVATEUR

Sommaire

1.1	Introduction	14
1.2	Définition d'un observateur	14
1.3	Utilité des observateurs	15
1.4	Types d'observateurs	15
1.4.1	Observateur de Lunberger	16
1.4.2	Observateur à entrée inconnue	17
1.4.3	Observateur à mode glissant	18
1.4.4	Observateur à Grand gain	19
1.4.5	Observateur de Thau	20
1.5	Présentation du pendule inversé rotatif (PIR)	21
1.6	Modélisation mathématique du PIR	22
1.6.1	L'équation d'Euler-Lagrange	23
1.6.2	Représentation d'état du PIR	28
1.7	Conclusion	29

1.1 Introduction

La plupart des systèmes que nous rencontrons dans divers domaines, notamment techniques, sont caractérisés par leur nature non linéaire. De plus, il n'est souvent pas possible d'obtenir une connaissance exhaustive de tous les états du système, en raison du coût élevé associé à l'intégration de capteurs pour mesurer chaque variable. Dans ce contexte, les observateurs ont été développés pour pallier cette limitation.

La notion d'observabilité d'un système dynamique linéaire ou non linéaire concerne la possibilité de trouver l'état $x(t)$ à partir de la connaissance de la sortie mesurée $y(t)$, de l'entrée $u(t)$, et éventuellement, un nombre fini de leurs dérivées temporelles $y^{(k)}(t)$, $k \geq 0$, et $u^{(l)}(t)$, $l \geq 0$ [4].

Ce chapitre vise à introduire les concepts fondamentaux des observateurs, en mettant en évidence différents types existants. Nous commencerons par présenter une vue d'ensemble des observateurs, en explorant leurs objectifs et leurs applications. Ensuite, nous détaillerons certains types d'observateurs couramment utilisés, en mettant l'accent sur leurs principes de fonctionnement et leurs performances respectives. Dans la continuité de notre étude, nous aborderons la modélisation d'un système spécifique, à savoir le pendule inversé rotatif. Cette modélisation nous permettra d'illustrer concrètement l'application des observateurs sur ce système.

1.2 Définition d'un observateur

Un observateur, dans son sens le plus général, est un individu, un appareil, ou un système qui recueille et enregistre des données sur un phénomène ou un processus. Cela peut se faire par l'observation directe, comme dans le cas d'un naturaliste qui observe des animaux dans leur environnement naturel, ou par le biais de capteurs ou d'instruments qui mesurent des paramètres spécifiques.

Dans le domaine de l'automatique et du contrôle des systèmes, cependant, un observateur prend un sens plus spécifique. Un observateur dans ce contexte est un système mathématique ou algorithmique conçu pour estimer, à partir des mesures disponibles, les états internes d'un système qui ne sont pas directement mesurables. Dans le cas déterministe, ce modèle est appelé observateur d'état et dans le cas d'un système stochastique ce modèle est appelé filtre.

En d'autres termes, dans le cadre d'un système dynamique où tous les états ne sont pas directement accessibles pour la mesure, un observateur utilise les entrées du système, les sorties mesurables et un modèle du système pour estimer les états non mesurables lorsqu'un système est complètement observable figure(1.1). Cela est crucial dans la conception des systèmes de contrôle, car une connaissance précise de l'état du système est souvent nécessaire pour obtenir une performance de contrôle optimale.

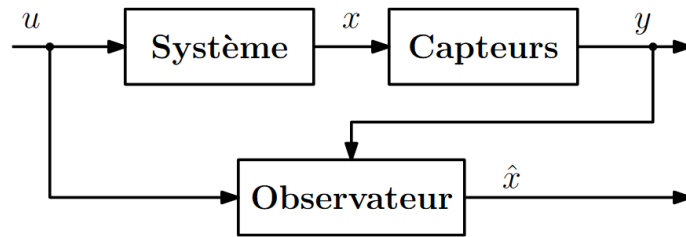


FIGURE 1.1 – Observateur d'état

1.3 Utilité des observateurs

La principale raison pour laquelle les observateurs sont utilisés en automatique et en contrôle des systèmes est qu'il est souvent nécessaire de connaître l'état complet d'un système pour le contrôler efficacement, mais certains variables d'état ne sont pas directement mesurables. Par exemple, dans un véhicule, il peut être facile de mesurer la vitesse et la position, mais il peut être difficile ou coûteux de mesurer directement d'autres variables d'état importantes, comme le glissement des pneus ou l'angle d'inclinaison.

En outre, les observateurs peuvent également être utilisés pour estimer les états lorsqu'il y a du bruit dans les mesures, pour détecter et isoler les défauts dans un système, ou pour estimer les paramètres inconnus d'un système.

En guise de synthèse, les fonctions attribuées à un observateur se caractérisent principalement par les aspects suivants :

Estimation des états non mesurables : Les observateurs fournissent une estimation des variables d'état d'un système qui ne sont pas directement accessibles à la mesure.

Amélioration de la performance de contrôle : En fournissant une estimation précise des états du système, les observateurs permettent d'améliorer la performance des systèmes de contrôle.

Robustesse face au bruit et aux erreurs de mesure : Ils peuvent être conçus pour tolérer le bruit et les erreurs de mesure, améliorant ainsi la fiabilité des systèmes de contrôle.

Détection et isolation des défauts : Ils peuvent être utilisés pour détecter et isoler les défauts dans un système, contribuant ainsi à sa maintenance et à sa sécurité.

Estimation des paramètres inconnus : Dans certains cas, les observateurs peuvent également être utilisés pour estimer les paramètres inconnus d'un système.

1.4 Types d'observateurs

Différents types d'observateurs ont été développés pour répondre à une variété de scénarios et de défis. Ces observateurs varient en complexité et en capacité, allant des observateurs de Luenberger pour les systèmes linéaires aux observateurs de Kalman pour les systèmes bruités, en passant par les observateurs de Kalman étendus et les filtres de particules pour les systèmes non linéaires, entre autres. Chaque type d'observateur a ses propres avantages et limites, et est conçu pour fonctionner de manière optimale dans des conditions spécifiques.

Ces divers types d'observateurs peuvent être regroupés en quatre catégories principales [21] :

- **Observateurs déterministes** : Ce type d'observateur ne tient pas compte des bruits de mesure et des fluctuations aléatoires des variables d'état. Dans cette catégorie, plusieurs observateurs sont disponibles, tels que l'observateur de Kubota et l'observateur adaptatif.
- **Observateurs stochastiques** : Ces observateurs fournissent une estimation optimale des états en utilisant des critères stochastiques. Ils tiennent compte de la présence du bruit d'état et de sortie dans le système. Un exemple courant dans cette catégorie est le filtre de Kalman.
- **Observateurs linéaires** : Ces observateurs sont basés sur des modèles linéaires et s'appuient sur la propriété d'invariance dans le temps de la matrice d'état du système pour obtenir des estimations précises des états du système, on distingue l'observateur de Lunberger.
- **Observateurs non linéaires** : Ces observateurs sont spécifiquement conçus pour observer des systèmes non linéaires. Il existe deux approches couramment utilisées pour développer ces observateurs :
 1. La linéarisation autour du point d'équilibres.
 2. La construction du gain d'observation sur la base de la non-linéarité du système.

Nous allons illustrer ces concepts en nous concentrant sur les deux dernières catégories d'observateurs : les observateurs linéaires et les observateurs non linéaires. Pour mieux comprendre ces approches, examinons quelques exemples concrets.

1.4.1 Observateur de Lunberger

L'observateur de Luenberger, également connu sous le nom d'observateur d'état, est un concept utilisé en contrôle des systèmes pour estimer l'état d'un système à partir de la mesure de ses entrées et de ses sorties.

Conçu par David Luenberger, l'observateur de Luenberger est principalement utilisé pour les systèmes linéaires temps invariant (LTI). Il utilise un modèle du système et les mesures disponibles pour estimer les états non mesurables.

La structure de l'observateur de Luenberger est très similaire à celle du système lui-même. Il est constitué d'un modèle dynamique du système (c'est-à-dire une copie du système lui-même) et d'un correcteur qui utilise l'erreur entre la sortie réelle du système et la sortie estimée par le modèle pour ajuster l'estimation de l'état.

L'avantage principal de l'observateur de Luenberger est sa simplicité. Cependant, sa performance peut être limitée pour les systèmes non linéaires ou en présence de bruit significatif.

L'observateur de Luenberger est une méthode d'estimation des états d'un système linéaire. Pour un système linéaire décrit par les équations d'état :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases} \quad (1.1)$$

Où $x(t)$ est le vecteur d'état, $u(t)$ est le vecteur d'entrée, et $y(t)$ est le vecteur de sortie.

A, B, C , et D sont les matrices d'état du système.

L'observateur de Luenberger est alors donné par les équations suivantes [24] :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + Bu(t) + L(y(t) - \hat{y}(t)) \\ \hat{y}(t) = C\hat{x}(t) + Du(t) \end{cases} \quad (1.2)$$

Où $\hat{x}(t)$ est l'estimation de l'état, $\hat{y}(t)$ est l'estimation de la sortie, et L est la matrice de gain de l'observateur.

La différence $(y(t) - \hat{y}(t))$ est l'erreur d'estimation de la sortie, et le but de l'observateur est de rendre cette erreur aussi petite que possible. La matrice de gain L est généralement choisie pour assurer la stabilité de l'erreur d'estimation.

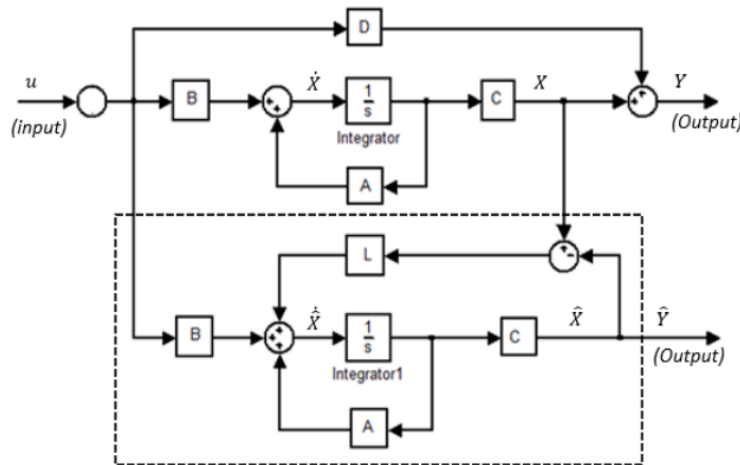


FIGURE 1.2 – Schéma bloc de l'observateur Lunberger [24]

1.4.2 Observateur à entrée inconnue

Un observateur à entrée inconnue est un type particulier d'observateur conçu pour estimer les états d'un système lorsque certaines entrées du système sont inconnues ou non mesurables. Ces observateurs sont particulièrement utiles lorsque le système à contrôler comporte des perturbations inconnues ou des défauts qui ne peuvent pas être directement mesurés.

Il est à noter que la conception d'un observateur à entrée inconnue peut être plus complexe que celle d'un observateur standard, car elle doit tenir compte de l'incertitude supplémentaire introduite par les entrées inconnues.

Les observateurs à entrée inconnue peuvent être utilisés pour les systèmes linéaires ainsi que pour les systèmes non linéaires.

La synthèse d'observateur à entrée inconnue pour les systèmes linéaires peut donner comme suit : Soit un système linéaire décrit par

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + Fd(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases} \quad (1.3)$$

Où $x(t)$ est l'état du système, $u(t)$ est l'entrée connue, $d(t)$ est l'entrée inconnue (perturbation ou défaut), et $y(t)$ est la sortie mesurée.

A, B, C et F sont des matrices connues.

La structure de l'observateur à entrées inconnues s'écrit [8] :

$$\begin{cases} \dot{\xi}(t) = N\xi(t) + Hu(t) + Jy(t) \\ \hat{x}(t) = \xi(t) - Ey(t) \end{cases} \quad (1.4)$$

Ici, $\xi(t)$ est l'état de l'observateur, N est une matrice appropriée, H est la matrice de gain de l'observateur pour l'entrée connue $u(t)$, J est le gain de l'observateur pour la sortie mesurée $y(t)$, et E est la matrice de gain pour l'effet de la sortie mesurée sur l'estimation de l'état. L'estimation de l'état du système est donnée par $\hat{x}(t)$.

Cette structure d'observateur peut être utilisée pour estimer les états d'un système lorsque certaines entrées sont inconnues ou non mesurables. Notez que la conception de l'observateur nécessite la connaissance du modèle du système et le choix approprié des matrices de gain N , H , J et E .

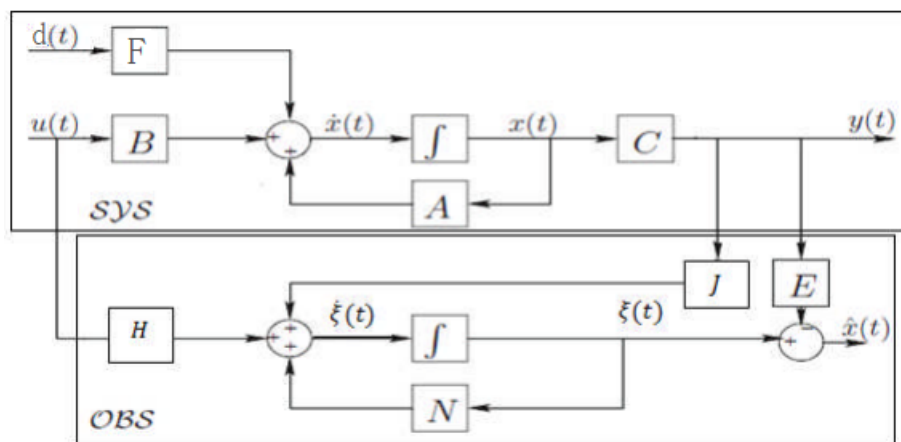


FIGURE 1.3 – Schéma bloc d'un observateur à entrée inconnue [8]

1.4.3 Observateur à mode glissant

Dans la but d'augmenter la robustesse contre les erreurs de modélisation et les incertitudes, des observateurs basées sur la théorie des systèmes à structure variable ont vus le jour.

La synthèse d'un observateur par modes glissants constitue une approche visant à contrôler les dynamiques des erreurs d'estimation dans un système non linéaire d'ordre n , avec p sorties, en imposant des contraintes discontinues pour les faire converger vers une variété de dimension réduite appelée surface de glissement, d'ordre $(n - p)$. Cette surface de glissement joue un rôle crucial en assurant à la fois l'attractivité et l'invariance du système. Les conditions spécifiques, connues sous le nom de conditions de glissement, sont employées pour garantir ces propriétés [10] [9].

Les observateurs par modes glissants sont couramment utilisés dans le contexte des systèmes dynamiques incertains et non linéaires. Leur utilisation permet de pallier les défauts de modélisation et de traiter les sources d'incertitudes inhérentes aux systèmes. En fournissant une estimation plus précise de l'état du système, ces observateurs contribuent à améliorer la performance globale du contrôle et de l'estimation dans de telles situations.

Synthèse d'observateur à mode glissant :

Considérons le système dynamique non linéaire décrit par le modèle d'état suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, u) \\ y = h(x) \end{cases} \quad (1.5)$$

Où x représente le vecteur d'état, u est l'entrée. f est une fonction supposée suffisamment différentiable. y est le vecteur des sorties mesurées.

Ce système est supposé observable.

La formule de l'observateur glissant est comme suit [9] :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = f(\hat{x}, u) + \lambda \operatorname{sgn}(y - \hat{y}) \\ \hat{y} = h(\hat{x}) \end{cases} \quad (1.6)$$

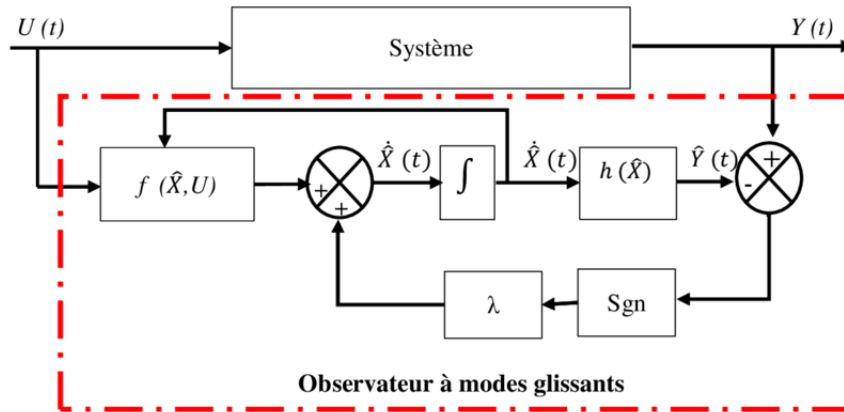


FIGURE 1.4 – Synthèse d'observateur à mode glissant [9]

Avec \hat{x} représente le vecteur d'état estimé, $f(\hat{x}, u)$ est la fonction estimée, λ est une matrice de dimension $(n \times p)$ contenant les gains correctifs de l'observateur, \hat{y} est le vecteur des sorties estimées, de dimension $(p \times 1)$.

Le terme $\lambda \operatorname{sign}(y - \hat{y})$ assure la convergence de l'état estimé \hat{x} vers l'état réel x .

Il est à noter que le terme de correction utilisé est proportionnel à la fonction discontinue sign appliquée à l'erreur de sortie. La fonction sign est définie par :

$$\operatorname{sign}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } S > 0 \\ 0 & \text{si } S = 0 \\ -1 & \text{si } S < 0 \end{cases} \quad (1.7)$$

Avec S est la surface de glissement qui assure la convergence de l'erreur $e = x - \hat{x}$ vers zéro.

1.4.4 Observateur à Grand gain

L'observateur à grand gain, développé par J.P. Gauthier, H. Hammouri et S. Othman, est synthétisé pour une classe de systèmes non-linéaires multi-sorties uniformément observables. Cette catégorie se caractérise par une architecture en cascade de sous-systèmes,

où chaque sous-système est intrinsèquement lié à un sous-ensemble spécifique des sorties. Cette innovation s'inscrit dans le contexte d'une recherche avancée visant à améliorer la synthèse d'observateurs pour des systèmes complexes et non linéaires [7].

L'observateur à grand gain est conçu pour estimer l'état interne d'un système en utilisant un gain élevé, ce qui permet d'amplifier les différences entre les mesures de sortie réelles et les estimations de l'état. Cette approche se base sur le modèle non linéaire du système, ce qui lui permet de prendre en compte les non-linéarités de manière plus précise. La convergence de l'observateur à grand gain est démontrée théoriquement, ce qui garantit sa performance et sa fiabilité.

On considère le système non linéaire suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + \varphi(u, x) \\ y = h(x) \end{cases} \quad (1.8)$$

$$\text{Où : } A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{bmatrix}, \varphi = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ L_f^{n-1}h(x) \end{bmatrix}$$

Un observateur à grand gain peut être synthétisé ayant le système des equation suivants [3] :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = A\hat{x} + \varphi(u, x) - \gamma\Delta_\gamma^{-1}S^{-1}C^T(C\hat{x} - y) \\ \hat{y} = C\hat{x} \end{cases} \quad (1.9)$$

Avec :

- $\gamma \geq 1$ est le paramètre de réglage de l'observateur
- S est l'unique solution de l'équation algébrique de Lyapunov :

$$S + A^T S + SA - C^T C = 0$$

- Δ_γ est la matrice diagonale suivante :

$$\Delta_\gamma = \text{diag} \left[1 \quad \frac{1}{\gamma} \quad \cdots \quad \frac{1}{\gamma^{n-1}} \right]$$

1.4.5 Observateur de Thau

L'observateur de Thau, communément appelé "observateur de Lipschitz", est une technique d'estimation proposée par Kou, Al et Banks. Il ne s'agit pas d'une approche systématique pour la synthèse d'un observateur, mais plutôt d'une condition suffisante permettant d'assurer la stabilité exponentielle de l'erreur d'estimation. La méthode de synthèse de l'observateur de Thau repose sur l'idée de négliger la partie non linéaire du système et de la traiter comme une perturbation [10][22].

Soit le système non-linéaire donné par l'équation suivante :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) + g(x)u \\ y = h(x) \end{cases} \quad (1.10)$$

Il existe un difféomorphisme $\phi(x)$ permettant de transformer le système(1.13) en la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{z} = Az + Bu + p(x) \\ y = Cz \end{cases} \quad (1.11)$$

(**N.P** : Un difféomorphisme est une application différentiable bijective entre deux variétés différentiables qui possède une inverse différentiable).

avec A, B, C et $p(\cdot)$ sont connues et (y, u) sont aussi connues.

Supposons (A, C) est observable.

$p(x)$: La partie non-linéaire du système évolue selon un régime libre.

La structure de l'observateur est donnée par la forme suivante. :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x} + Bu + p(\hat{x}) + L(y - \hat{y}) \\ \hat{y} = C\hat{x} \end{cases} \quad (1.12)$$

Tel que :

L : Gain de l'observateur à déterminer. On aura alors :

$$\dot{\tilde{x}} = (A - LC)\tilde{x} + p(x) - p(\tilde{x}) \quad (1.13)$$

Avec

$$\tilde{x} = x - \hat{x} \quad (1.14)$$

Cependant, il est nécessaire de s'assurer que la condition suivante est satisfaite afin de synthétiser un observateur avec une dynamique d'erreur stable :

— La fonction non linéaire $p(x)$ doit être de Lipschitzienne, c'est-à-dire :

$$\|p(x_1) - p(x_2)\| < k\|x_1 - x_2\| \quad (1.15)$$

k : constante de Lipschitz, positive.

Par conséquent, la dynamique du terme non linéaire sera stable mais restera non-négligeable. Il est donc nécessaire de calculer un gain L pour compenser cette dynamique.

1.5 Présentation du pendule inversé rotatif (PIR)

Le Pendule Inversé Rotatif (PIR) sert de système de référence couramment utilisé pour l'enseignement de la modélisation et de la régulation dans les domaines de la physique et de l'ingénierie. Le système du PIR comprend un bras rotatif, relié d'une part à un moteur pivot. La position de ce bras est caractérisée par l'angle θ . D'autre part, un pendule est fixé à l'extrémité opposée du bras, dont la position est également définie par un angle α .

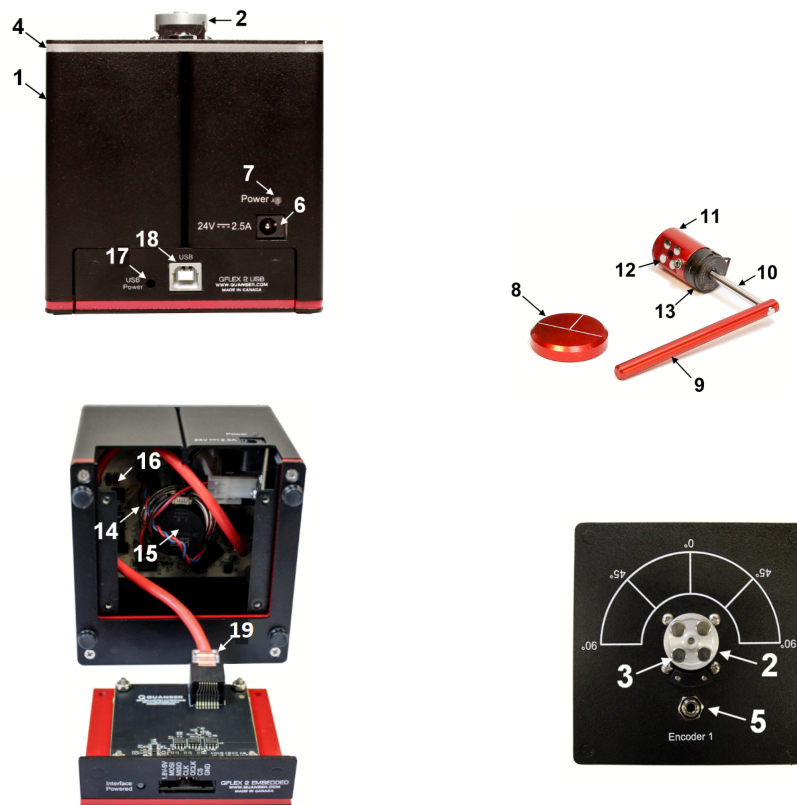


FIGURE 1.5 – Composants du QUBE-SERVO 2 [1]

N°	Composants	N°	Composants
1	Châssis	11	Moyeu de bras rotatif
2	Connecteur de module	12	Aimants de pendule rotatif
3	Aimants de connecteur de module	13	Encodeur de pendule
4	bandeau de LED d'état	14	Moteur DC
5	Connecteur de module encodeur	15	encodeur de moteur
6	Connecteur d'alimentation	16	QUBE-SERVO 2 carte DAQ/amplificateur
7	LED d'alimentation du système	17	"LED d'alimentation de l'interface
8	Disque d'inertie	18	Connecteur USB
9	Liaison de pendule	19	Bus de données interne
10	Tige de bras rotatif		

TABLE 1.1 – Composants du QUBE-SERVO 2 [1]

1.6 Modélisation mathématique du PIR

La formalisation mathématique du Pendule Inversé Rotatif (PIR) vise à représenter ce système au moyen d'équations mathématiques pour anticiper son fonctionnement. Cette démarche revêt une importance cruciale car elle favorise une compréhension approfondie

de la réaction du système face à diverses conditions, tout en permettant la conception de contrôleurs pour stabiliser le pendule.

Afin de comprendre son comportement, plusieurs méthodes de modélisation mathématique ont été développées, parmi lesquelles l'équation d'Euler-Lagrange.

1.6.1 L'équation d'Euler-Lagrange

L'équation d'Euler-Lagrange est une équation différentielle du second ordre qui dépeint les dynamiques d'un système physique en utilisant la fonction de Lagrange L . Cette fonction représente une quantification de l'énergie cinétique et potentielle du système, en plus des forces qui influencent ce dernier.

La fonction de Lagrange L est une fonction de deux variables, elle dépend des coordonnées généralisées q et de leur dérivée \dot{q} . Cette fonction L illustre l'écart entre l'énergie cinétique et l'énergie potentielle du système, et est fréquemment représentée sous la forme $L(q, \dot{q})$. Les coordonnées généralisées sont des variables décrivant l'état du système et permettent d'exposer toutes les positions et orientations envisageables.

Le principe de moindre action repose sur l'idée selon laquelle le trajet véritable d'un système physique est sélectionné parmi l'ensemble des trajets potentiels reliant les mêmes points de départ et d'arrivée, de manière à minimiser l'action. L'action est déterminée comme l'intégrale de la différence entre l'énergie cinétique et l'énergie potentielle du système, suivant le parcours emprunté par le système.[17] Le principe de moindre action facilite l'établissement de l'équation de mouvement du système en ajustant la trajectoire du système afin de minimiser l'action. En d'autres termes, la trajectoire effective du système est celle pour laquelle la variation de l'action est nulle. L'action est une entité qui décrit le mouvement d'un système physique et est donnée par :

$$S = \int L \, dt$$

Où L représente la fonction de Lagrange, t symbolise le temps, et l'intégrale est calculée sur l'ensemble de la durée du mouvement.

L'équation d'Euler-Lagrange est obtenue en modifiant la trajectoire du système de telle manière que la variation de l'action soit nulle. Autrement dit, la trajectoire authentique du système doit être celle qui minimise l'action. On obtient ainsi l'équation de mouvement du système, qui connecte la fonction de Lagrange L aux coordonnées généralisées q et à leurs dérivées $\frac{dq}{dt}$, ainsi qu'aux forces en jeu sur le système.

Pour modifier la trajectoire du système, le principe de variation est appliqué. On introduit une petite perturbation $\delta q(t)$ autour de la trajectoire authentique $q(t)$ du système. On demande ensuite que la variation de l'action S soit nulle, ce qui donne :

$$\delta S = 0$$

On peut alors développer cette expression en utilisant la définition de l'action et en faisant une intégration par parties. Après quelques manipulations, on obtient finalement l'équation de Lagrange-Euler :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} = F$$

Avec F est la force extérieure et q est une coordonnée généralisée.

Il convient de souligner que l'équation d'Euler-Lagrange est une équation de mouvement universelle applicable à une large gamme de systèmes physiques, allant des particules isolées aux systèmes complexes tels que les fluides et les champs. Elle trouve également son utilité dans d'autres branches de la physique, notamment en optique, en électromagnétisme, en mécanique quantique et en relativité restreinte.

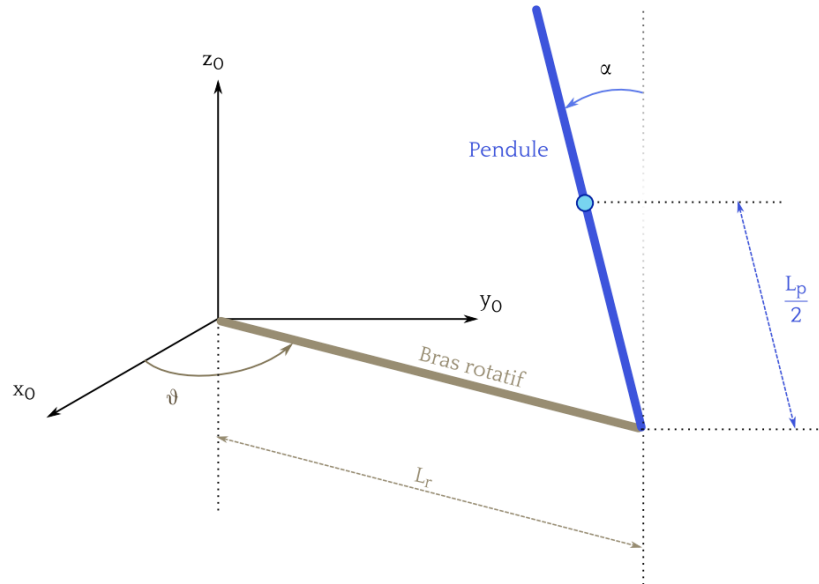


FIGURE 1.6 – Schéma du pendule inversé rotatif [23]

La figure 1.6 représente le schéma du PIR, le bras est lié au moteur, ce qui provoque la rotation du bras. En conséquence, le pendule tourne également. Tous les calculs de la modélisation se feront en prenant pour origine, la position haute du pendule.

Les paramètres et leurs valeurs sont résumés dans le tableau suivant :

Symbole	Description	Valeur	Unité
k_m	Constante de la f.e.m	0.0076777	V.s/rad
R_m	Résistance d'induit du moteur	2.6	ohm
m_p	Masse du pendule	0.127	Kg
L_r	Langueur de bras	0.2159	m
L_p	Langueur de pendule	0.33655	m
J_r	Moment d'inertie du bras de son centre de masse	0.0009983	Kg.m ²
J_p	Moment d'inertie du pendule de son centre de masse	0.0012	Kg.m ²
β_r	Coefficient de viscosité d'amortissement du bras	0.0024	N.m.s/rad
β_p	Coefficient de viscosité d'amortissement du pendule	0.0024	N.m.s/rad
g	Gravité	9.81	Kg.m ²

TABLE 1.2 – Paramètres du PIR [1]

Nous allons commencer par le calcul de l'énergie potentielle E_p et l'énergie cinétique E_c du système

$$Ec = Ec_{pendule} + Ec_{bras} \quad (1.16)$$

$$Ep = Ep_{pendule} + Ep_{bras} \quad (1.17)$$

— Le bras :

$$\begin{cases} Ec_{bras} = \frac{1}{2}J_r\dot{\theta}^2 \\ Ep_{bras} = 0 \end{cases}$$

— Le pendule :

$$\begin{cases} Ec_{pendule} = \frac{1}{2}m_p\dot{P}^2 + \frac{1}{2}\dot{\alpha}^2 \\ Ep_{pendule} = \frac{1}{2}m_pgL_p\cos\alpha \end{cases}$$

— L'énergie cinétique totale :

$$\begin{aligned} E &= Ec_{bras} + Ec_{pendule} \\ Ec &= \frac{1}{2}J_r\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m_p\dot{P}^2 + \frac{1}{2}\dot{\alpha}^2 \end{aligned} \quad (1.18)$$

— L'énergie potentielle totale :

$$\begin{aligned} Ep &= Ep_{bras} + Ep_{pendule} \\ Ep &= \frac{1}{2}m_pgL_p\cos\alpha \end{aligned} \quad (1.19)$$

Avec P est le vecteur position du centre de gravité du pendule donnée par les equations suivantes :

$$\begin{cases} P_x = L_r\cos\theta + \frac{1}{2}L_p\sin\alpha \sin\theta \\ P_y = L_r\sin\theta - \frac{1}{2}L_p\sin\alpha \cos\theta \\ P_z = L_p\cos\alpha \end{cases} \quad (1.20)$$

On la dérive :

$$\begin{cases} \dot{P}_x = -L_r\dot{\theta}\sin\theta + \frac{1}{2}L_p(\dot{\alpha}\cos\alpha \sin\theta + \dot{\theta}\cos\theta \sin\alpha) \\ \dot{P}_y = L_r\dot{\theta}\cos\theta - \frac{1}{2}L_p(\dot{\alpha}\cos\alpha \cos\theta + \dot{\theta}\sin\theta \sin\alpha) \\ \dot{P}_z = -\frac{1}{2}L_p\dot{\alpha}\sin\alpha \end{cases} \quad (1.21)$$

On a :

$$\dot{P}^2 = \dot{P}_x^2 + \dot{P}_y^2 + \dot{P}_z^2 \quad (1.22)$$

En remplaçant dans (1.18) on trouve :

$$Ec = \frac{1}{2} \left(J_r + m_p L_r^2 + \frac{1}{2} m_p L_p^2 \sin^2 \alpha \right) \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} \left(J_p + \frac{1}{4} m_p L_p^2 \right) \dot{\alpha}^2 - \frac{1}{2} m_p L_r \cos \alpha \dot{\theta} \dot{\alpha} \quad (1.23)$$

Alors L devient :

$$L = \frac{1}{2} \left(J_r + m_p L_r^2 + \frac{1}{2} m_p L_p^2 \sin^2 \alpha \right) \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} \left(J_p + \frac{1}{4} m_p L_p^2 \right) \dot{\alpha}^2 - \frac{1}{2} m_p L_r \cos \alpha \dot{\theta} \dot{\alpha} - \frac{1}{2} m_p g L_p \cos \alpha \quad (1.24)$$

On utilise la formule de Lagrange pour tirer les équation différentielle :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{dL}{d\dot{x}} \right) - \frac{dL}{dx} = F \quad (1.25)$$

Pour le cas du PIR on a deux degré de liberté (θ, α) :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \left(\frac{dL}{d\dot{\theta}} \right) - \frac{dL}{d\theta} = Q_1 \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{dL}{d\dot{\alpha}} \right) - \frac{dL}{d\alpha} = Q_2 \end{cases} \quad (1.26)$$

Dans ce système, deux forces extérieures interviennent : Q_1 est en corrélation avec θ et est donc appliquée à la tige (engendrant un couple moteur et frottement), tandis que Q_2 est associée à α et représente une force de frottement.

$$\begin{cases} Q_1 = \tau - B_r \dot{\theta} \\ Q_2 = -B_p \dot{\alpha} \end{cases} \quad (1.27)$$

B_r et B_p sont les coefficients des frottement visqueux du bras et du pendule respectivement et τ représente le moment du couple appliqué à la tige rotative généré par le servomoteur [1]

$$\tau = \frac{k_m}{R_m} (V_m - K_m \dot{\theta}) \quad (1.28)$$

Donc on aura les équations différentielles qui décrivent la dynamique du système :

$$\ddot{\theta} \left(J_r + m_p L_r^2 + \frac{1}{4} m_p L_p^2 \sin \alpha \right) - \left(\frac{1}{2} m_p L_p L_r \cos \alpha \right) \ddot{\alpha} + \dot{\alpha} \dot{\theta} \left(\frac{1}{2} m_p L_p \sin \alpha \cos \alpha \right) + \dot{\alpha}^2 \left(\frac{1}{2} m_p L_r L_p \sin \alpha \right) = Q_1 \quad (1.29)$$

$$\ddot{\theta} \left(-\frac{1}{2} m_p L_p L_r \cos \alpha \right) + \ddot{\alpha} \left(J_p + \frac{1}{4} m_p L_p^2 \right) + \dot{\theta}^2 \left(-\frac{1}{4} m_p L_p^2 \sin \alpha \cos \alpha \right) - \frac{1}{2} m_p g L_p \sin \alpha = Q_2 \quad (1.30)$$

Le modèle est écrit sous forme d'un système simple de deux équations à deux inconnues :

$$\begin{cases} a\ddot{\theta} + b\ddot{\alpha} = c \\ a_1\ddot{\theta} + b_1\ddot{\alpha} = c_1 \end{cases} \quad (1.31)$$

Tel que :

- $a = J_r + m_p L_r^2 + \frac{1}{4} m_p L_p^2 \sin^2 \alpha$
- $a_1 = \left(-\frac{1}{2} m_p L_r L_p \cos \alpha \right)$
- $b = \left(-\frac{1}{2} m_p L_r L_p \cos \alpha \right)$
- $b_1 = J_p + \frac{1}{4} m_p L_p^2$
- $c = \tau - \beta_r \dot{\theta} - \left[\dot{\alpha} \dot{\theta} \left(\frac{1}{2} m_p L_p^2 \sin \alpha \cos \alpha \right) + \dot{\alpha}^2 \left(\frac{1}{2} m_p L_r L_p \sin \alpha \right) \right]$
- $c_1 = -\beta_p \dot{\alpha} - \left[\dot{\alpha}^2 \left(-\frac{1}{4} m_p L_p^2 \sin \alpha \cos \alpha \right) - \frac{1}{2} m_p g L_p \sin \alpha \right]$

On utilise la méthode de résolution de Cramer afin d'obtenir les deux inconnues $\ddot{\alpha}, \ddot{\theta}$:

$$\ddot{\theta} = \frac{\begin{vmatrix} c & b \\ c_1 & b_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}} = \frac{cb_1 - c_1b}{ab_1 - a_1b} = \frac{det_1}{det} \quad (1.32)$$

$$\ddot{\alpha} = \frac{\begin{vmatrix} a & c \\ a_1 & c_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}} = \frac{ac_1 - a_1c}{ab_1 - a_1b} = \frac{det_2}{det} \quad (1.33)$$

$$det = (J_r + m_p L_r^2) \left(J_p + \frac{1}{4} m_p L_p^2 \right) + \frac{1}{4} m_p L_p^2 \sin^2 \alpha \left(J_p + \frac{1}{4} m_p L_p^2 \right) - \frac{1}{4} (m_p L_p L_r \cos \alpha)^2 \quad (1.34)$$

$$\begin{aligned} det_1 = & \left[\tau - \beta_r \dot{\theta} - \left(\frac{1}{2} m_p L_p^2 \sin \alpha \cos \alpha \right) \dot{\alpha} \dot{\theta} - \left(\frac{1}{2} m_p L_r \sin \alpha \right) \dot{\alpha}^2 \right] \left(J_p + \frac{1}{4} m_p L_p^2 \right) \\ & - \left[-\beta_p \dot{\alpha} + \left(\frac{1}{4} m_p L_p^2 \sin \alpha \cos \alpha \right) \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m_p g L_p \sin \alpha \right] \left(-\frac{1}{2} m_p L_r L_p \cos \alpha \right) \end{aligned} \quad (1.35)$$

$$\begin{aligned} det_2 = & \left[-\beta_p \dot{\alpha} + \left(\frac{1}{4} m_p L_p^2 \sin \alpha \cos \alpha \right) \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m_p g L_p \sin \alpha \right] \left(J_r + m_p L_p^2 + \frac{1}{4} m_p L_p^2 \sin \alpha^2 \right) \\ & - \left[\tau - \beta_r \dot{\theta} - \left(\frac{1}{2} m_p L_p^2 \sin \alpha \cos \alpha \right) \dot{\alpha} \dot{\theta} - \left(\frac{1}{2} m_p L_r \sin \alpha \right) \dot{\alpha}^2 \right] \left(-\frac{1}{2} m_p L_r L_p \cos \alpha \right) \end{aligned} \quad (1.36)$$

Donc :

$$\ddot{\theta} = \left[\tau - \beta_r \dot{\theta} - \left(\frac{1}{2} m_p L_p^2 \sin \alpha \cos \alpha \right) \dot{\alpha} \dot{\theta} - \left(\frac{1}{2} m_p L_r \sin \alpha \right) \dot{\alpha}^2 \right] \frac{J_p + \frac{1}{4} m_p L_p^2}{det} - \left[-\beta_p \dot{\alpha} + \left(\frac{1}{4} m_p L_p^2 \sin \alpha \cos \alpha \right) \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m_p g L_p \sin \alpha \right] \frac{\left(-\frac{1}{2} m_p L_r L_p \cos \alpha \right)}{det} \quad (1.37)$$

$$\ddot{\alpha} = \left[-\beta_p \dot{\alpha} + \left(\frac{1}{4} m_p L_p^2 \sin \alpha \cos \alpha \right) \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m_p g L_p \sin \alpha \right] \frac{\left(J_r + m_p L_p^2 + \frac{1}{4} m_p L_p^2 \sin \alpha^2 \right)}{det} - \left[\tau - \beta_r \dot{\theta} - \left(\frac{1}{2} m_p L_p^2 \sin \alpha \cos \alpha \right) \dot{\alpha} \dot{\theta} - \left(\frac{1}{2} m_p L_r \sin \alpha \right) \dot{\alpha}^2 \right] \frac{\left(-\frac{1}{2} m_p L_r L_p \cos \alpha \right)}{det} \quad (1.38)$$

Le modèle dynamique du système est résulté en équations (1.14), (1.15) et (1.16). Le couple appliqué sur le bras rotatif est généré par un servomoteur, alors l'entrée est la tension délivrée au moteur .

1.6.2 Représentation d'état du PIR

La représentation d'état en contrôle automatique renvoie à la manière dont on décrit le comportement d'un système via une description formelle de ses divers états. Cela permet d'acquérir une vision intégrale de la dynamique du système, y compris sa variation temporelle. Il s'agit d'un outil fondamental pour la modélisation, l'analyse, la conception et l'implémentation de systèmes. Cela peut contribuer à l'amélioration de la stabilité, des performances et de la fiabilité des systèmes.

Dnas notre cas, le PIR est un système non linéaire, sa représentation d'état s'écrit comme suite :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_3 \\ \dot{x}_2 = x_4 \\ \dot{x}_3 = f_1(x) + g_1(x)u \\ \dot{x}_4 = f_2(x) + g_2(x)u \end{cases} \quad (1.39)$$

Avec le vecteur d'état est donné comme suite :

$$x = (x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4)^T = (\theta \ \alpha \ \dot{\theta} \ \dot{\alpha})^T$$

Et les fonctions $f_1(x), f_2(x), g_1(x)$ et de $g_2(x)$ sont données ci-dessous :

$$f_1(x) = \left[-\frac{K_m^2}{R_m} x_3 - B_r x_3 - \left(\frac{1}{2} m_p L_p^2 \sin x_2 \cos x_2 \right) x_4 x_3 - \left(\frac{1}{2} m_p L_r \sin x_2 \right) x_4^2 \right] \frac{\left(J_p + \frac{1}{4} m_p L_p^2 \right)}{det} - \left[-B_p x_4 + \left(\frac{1}{4} m_p L_p^2 \sin x_2 \cos x_2 \right) x_3^2 + \frac{1}{2} m_p g L_p \sin x_2 \right] \frac{\left(-\frac{1}{2} m_p L_r L_p \cos x_2 \right)}{det} \quad (1.40)$$

$$g_1(x) = \frac{J_p + \frac{1}{4}m_p L_p^2}{det} \quad (1.41)$$

$$f_2(x) = \left[-B_p x_4 + \left(\frac{1}{4}m_p L_p^2 \sin x_2 \cos x_2 \right) x_3^2 + \frac{1}{2}m_p g L_p \sin x_2 \right] \frac{\left(J_r + m_p L_p^2 + \frac{1}{4}m_p L_p^2 \sin^2 x_2 \right)}{det} - \left[-\frac{K_m^2}{R_m} x_3 - B_r x_3 - \left(\frac{1}{2}m_p L_p^2 \sin x_2 \cos x_2 \right) x_4 x_3 - \left(\frac{1}{2}m_p L_r \sin x_2 \right) x_4^2 \right] \frac{\left(-\frac{1}{2}m_p L_r L_p \cos x_2 \right)}{det} \quad (1.42)$$

$$g_2(x) = \frac{-\frac{1}{2}m_p L_r L_p \cos x_2}{det} \quad (1.43)$$

Avec

$$det = (J_r + m_p L_r^2) \left(J_p + \frac{1}{4}m_p L_p^2 \right) + \frac{1}{4}m_p L_p^2 \sin^2 x_2 \left(J_p + \frac{1}{4}m_p L_p^2 \right) - \frac{1}{4}(m_p L_p L_r \cos x_2)^2 \quad (1.44)$$

1.7 Conclusion

En conclusion, les étapes abordées dans ce chapitre revêtent une importance capitale dans l'application des observateurs sur le pendule inversé rotatif. Il est essentiel de saisir la nature des observateurs et de disposer d'un modèle d'état précis du système pour pouvoir les appliquer de manière adéquate.

CHAPITRE 2

SYNTHÈSE D'UN OBSERVATEUR DE LUENBERGER POUR LE PIR

Sommaire

2.1	Introduction	31
2.2	Systèmes linéaires	31
2.3	Linéarisation du système	32
2.3.1	Les points d'équilibre	33
2.3.2	Linéarisation du système autour d'un point d'équilibre	33
2.4	Observabilité des systèmes linéaires	34
2.5	Observateur linéaire	35
2.5.1	Observateur de Lunberger	36
2.5.2	Commande appliquée :	40
2.5.3	Résultats de simulation 3D :	41
2.6	Conclusion	47

2.1 Introduction

Après avoir acquis une compréhension approfondie du fonctionnement des observateurs et avec la disponibilité du modèle d'état du pendule inversé rotatif, nous sommes maintenant prêts à appliquer un observateur linéaire bien connu, à savoir l'observateur de Luenberger. Dans cette partie du chapitre, nous commencerons par effectuer une linéarisation du système autour du point d'équilibre instable. Ensuite, nous aborderons la synthèse de l'observateur de Luenberger, en détaillant ses étapes de conception. Enfin, nous présenterons les résultats obtenus grâce à l'application de cet observateur sur le pendule inversé rotatif.

2.2 Systèmes linéaires

Un système linéaire est un objet physique ou mathématique qui peut être décrit par des équations linéaires, telles que des équations linéaires différentielles. Il obéit également au principe de superposition, défini par les propriétés d'additivité et d'homogénéité [21].

Additivité :

Si les signaux d'entrée $u_1(t)$, $u_2(t)$,, $u_n(t)$ ont pour réponses $y_1(t)$, $y_2(t)$,, $y_n(t)$ respectivement,. Alors le signal d'entrée $u(t)$ donné par la somme de ces signaux, c'est-à-dire $u(t) = u_1(t) + u_2(t) + \dots + u_n(t)$ a pour réponse $y(t) = y_1(t) + y_2(t) + \dots + y_n(t)$.

Homogénéité :

Si le signal d'entrée $u(t)$ engendre la réponse $y(t)$, alors la multiplication du signal d'entrée par une constante α donne comme résultat la multiplication de la réponse par cette même constante, c'est-à-dire $\alpha y(t)$.

Ainsi, les systèmes linéaires sont généralement plus faciles à étudier que les systèmes non linéaires. Cependant, il est possible, dans certains cas, de linéariser un système non linéaire autour d'un point d'équilibre ou d'une trajectoire spécifique. Cette linéarisation consiste à approximer le système non linéaire par un système linéaire qui représente correctement le comportement du système non linéaire à proximité de ce point d'équilibre ou de cette trajectoire. Il convient de noter que la linéarisation d'un système non linéaire autour d'une trajectoire non réduite à un point d'équilibre entraîne un système linéaire à coefficients variables dans le temps.

C'est pourquoi la linéarisation des systèmes non linéaires est un sujet important et a fait l'objet d'études approfondies récemment. Cela permet de simplifier l'analyse et la conception des systèmes en utilisant des techniques et des outils bien établis pour les systèmes linéaires, tout en fournissant une approximation valide du comportement du système non linéaire à proximité de certaines conditions de fonctionnement spécifiques.

Le pendule inversé rotatif, notre système d'étude, présente une nature intrinsèquement non linéaire. Cependant, afin d'appliquer des observateurs linéaires spécifiques, nous optons pour une linéarisation du système autour d'un point d'équilibre instable.

2.3 Linéarisation du système

Le modèle du système est un modèle non linéaire et sous-actionné : il a moins d'actionneurs que de degrés de liberté (il ne possède qu'une seule entrée u pour contrôler deux sorties, la stabilisation de la tige et du pendule). Par conséquent, une linéarisation du système autour de ses points d'équilibre peut être employée pour examiner le comportement local du système.

En générale, la représentation d'un système linéaire s'écrit comme suite :

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases} \quad (2.1)$$

Le schéma fonctionnel associé à ce système est comme suite :

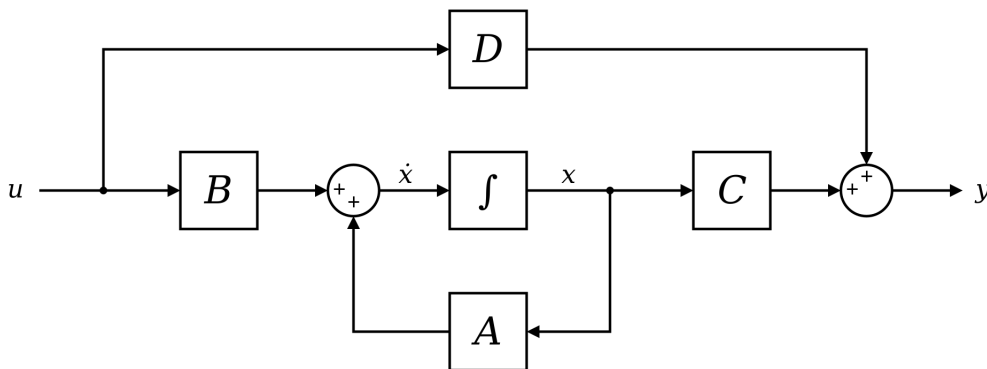


FIGURE 2.1 – Schéma fonctionnel

Avec :

x : Le vecteur d'état.

u : La commande (l'entrée).

y : La sortie du système.

A : La matrice d'état.

B : La matrice de commande.

C : La matrice d'observation.

D : La matrice de couplage (pour la majorité des systèmes $D = 0$).

La linéarisation d'un système non linéaire autour d'un point d'équilibre consiste à estimer le comportement du système à proximité de ce point en recourant à un modèle linéaire. Cela peut être réalisé en utilisant la jacobienne du système non linéaire au point d'équilibre, qui exprime les taux de variation des variables du système à ce point précis. Le système linéarisé simplifie l'analyse des performances, telles que la stabilité.

Néanmoins, cette méthode ne peut être appliquée que dans un voisinage restreint autour du point d'équilibre et ne peut pas fournir une représentation exhaustive du comportement du système non linéaire.

2.3.1 Les points d'équilibre

Les points d'équilibre d'un système correspondent à des configurations ou états spécifiques où les variables du système demeurent invariables dans le temps, et ce, même en l'absence d'entrées externes ou de perturbations. Dans le cadre des systèmes dynamiques et du contrôle, ces points d'équilibre revêtent une importance majeure car ils offrent des renseignements précieux sur le comportement à long terme du système et sur sa réponse face aux perturbations et aux interventions de contrôle.

Un point d'équilibre est déterminé en examinant les équations qui caractérisent le comportement d'un système dynamique. Pour un système linéaire, les points d'équilibre coïncident avec les solutions des équations d'état lorsque les dérivées des variables d'état sont nulles.

Les points d'équilibre du PIR sont trouvés à partir de : $\dot{x}_i = 0$ avec $i = 1, \dots, 4$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 0 \\ \dot{x}_2 = 0 \\ \dot{x}_3 = 0 \\ \dot{x}_4 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \\ f_1(x) = 0 \\ f_2(x) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \dot{\theta} = 0 \\ \dot{\alpha} = 0 \\ f_1(x) = 0 \\ f_2(x) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{\theta} = 0 \\ \dot{\alpha} = 0 \\ \frac{1}{2}m_g L_p \sin \alpha \left(\frac{1}{2}m_p L_r L_p^2 \cos \alpha \right) = 0 \\ \sin \alpha (J_r + m_p L_p^2 \sin^2 \alpha) = 0 \end{cases} \quad (2.2)$$

La résolution du système donne la solution suivante :

$$\begin{cases} \alpha = k\pi \text{ avec } k \in \mathbb{Z} \\ \theta \in \mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \text{ et } \alpha = \pi \text{ (physiquement il n'existe que ce deux cas)} \\ \theta \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Donc l'ensemble des points d'équilibre de ce système est donné par :

$$\tilde{X} = \{\tilde{x}_1 = (0, \pi, 0, 0), \tilde{x}_2 = (0, 0, 0, 0)\}$$

Le premier point d'équilibre \tilde{x}_1 est instable (représente la position verticale haute), le second \tilde{x}_2 est stable (représente la position verticale basse).

2.3.2 Linéarisation du système autour d'un point d'équilibre

La forme du modèle linéarisé est donnée comme suite :

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \left. \frac{\partial F}{\partial x} \right|_{x=\tilde{x}} \\ B = \left. \frac{\partial G}{\partial x} \right|_{x=\tilde{x}, u=0} \end{cases} \quad (2.3)$$

$$\text{Avec : } F = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \\ f_1(x) \\ f_2(x) \end{pmatrix} \quad G = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ g_1(x) \\ g_2(x) \end{pmatrix}$$

Après calcul, nous trouvons les résultats suivants :

$$A = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_1}{\partial x_3} & \frac{\partial f_1}{\partial x_4} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_3} & \frac{\partial f_2}{\partial x_4} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{\frac{1}{4}m_p^2gL_p^2L_r}{d} & \frac{(-B_r-K_gK_mZ)(J_p+\frac{1}{4}m_pL_p^2)}{d} & \frac{-B_p(\frac{1}{2}m_pL_pL_r)}{d} \\ 0 & \frac{(\frac{1}{2}m_pL_p)(J_r+m_pL_p^2)}{d} & \frac{(-B_r-K_gK_mZ)(-\frac{1}{2}m_pL_rL_p)}{d} & \frac{-B_p(J_r+m_pL_r^2)}{d} \end{vmatrix}$$

$$B = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\partial g_1}{\partial u} \\ \frac{\partial g_2}{\partial u} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{Z(J_p+\frac{1}{4}m_pL_p^2)}{d} \\ \frac{(\frac{1}{2}m_pL_rL_p)Z}{d} \end{vmatrix}$$

$$\text{Avec : } \quad d = J_pJ_r + J_pm_pL_r^2 + \frac{1}{4}J_r m_pL_p^2 \quad , \quad Z = \frac{\eta_g\eta_mK_gK_t}{R_m}$$

On prend les positions (θ, α) comme sorties, après le remplacement du valeurs des paramètres, le système s'écrit :

$$A = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 149.2751 & -0.0104 & 0 \\ 0 & 261.6091 & -0.0103 & 0 \end{vmatrix} \quad B = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 49.7275 \\ 49.1493 \end{vmatrix} \quad C = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad D = 0 \quad (2.4)$$

2.4 Observabilité des systèmes linéaires

L'observabilité des systèmes linéaires fait référence à la capacité de déterminer l'état interne d'un système uniquement à partir des signaux d'entrée et de sortie disponibles. Cela signifie qu'un système linéaire est dit observable s'il est possible de reconstruire l'état interne complet du système en analysant les signaux d'entrée et de sortie correspondants.

En d'autres termes, l'observabilité d'un système linéaire permet de déterminer si toutes les informations nécessaires pour estimer l'état du système sont contenues dans les signaux observables, c'est-à-dire les signaux d'entrée et de sortie. Si un système linéaire est observable, il est possible de trouver une combinaison linéaire appropriée des signaux d'entrée et de sortie pour estimer l'état du système à tout moment.

Dans le contexte de l'estimation de l'état, la connaissance de l'observabilité est cruciale. Si un système linéaire n'est pas observable, cela signifie qu'il existe des états internes qui ne peuvent pas être reconstruits à partir des signaux d'entrée et de sortie, rendant l'estimation de l'état impossible ou imprécise. En revanche, si un système linéaire est observable, il est théoriquement possible d'estimer l'état du système avec précision.

Considérons le système linéaire d'équations :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad (2.5)$$

Où $x(t)$ est le vecteur d'état, $u(t)$ est le vecteur d'entrée, et $y(t)$ est le vecteur de sortie. A, B et C sont les matrices d'état du système.

Le critère d'observabilité de Kalman est donné par la matrice d'observabilité suivante [21][8] :

$$O = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

Le critère d'observabilité stipule que le système est observable si et seulement si la matrice d'observabilité a un rang égal à l'ordre du système. En d'autres termes, si le nombre de vecteurs de base linéairement indépendants dans la matrice d'observabilité est égal à l'ordre du système, alors le système est observable.

Autrement dit :

la paire (A, C) est considérée comme observable lorsque les conditions suivantes sont satisfaites :

a) Le critère de Kalman est maximal

$$\text{rang}(O_{(A,C)}) = n$$

n égale au rang du système.

b) Lorsque la paire (A, C) n'est pas observable, il faut étudier sa détectabilité.

Le système est détectable si tous les états non observables sont stables.

2.5 Observateur linéaire

Les observateurs linéaires sont des dispositifs essentiels dans le domaine de l'automatique, conçus pour estimer les états internes d'un système dynamique en se basant uniquement sur les mesures de ses sorties. Ces observateurs, également connus sous le nom d'estimateurs d'état, sont largement utilisés pour surveiller et contrôler des systèmes complexes et leur permettre d'atteindre des performances optimales.

La famille des observateurs peut être subdivisée en plusieurs types, parmi lesquels se trouvent les observateurs linéaires. L'objectif principal des observateurs linéaires est de fournir une estimation précise et en temps réel des variables d'état inaccessibles ou difficiles à mesurer directement. En utilisant des modèles mathématiques du système, ces observateurs exploitent les informations disponibles pour reconstruire les états internes et les rendre disponibles pour le contrôle et la prise de décision. Ils jouent un rôle crucial dans de nombreux domaines, tels que l'automatisation industrielle, la robotique, la navigation et le contrôle des véhicules, et bien d'autres encore.

Divers types d'observateurs linéaires peuvent être identifiés dans le contexte d'étude et de commande des systèmes linéaires. Parmi ces types, certains sont fréquemment rencontrés et se démarquent par leurs caractéristiques distinctives ainsi que leurs applications spécifiques. Parmi ces types d'observateurs, on peut citer :

- Observateur d'état complet : ce type consiste à estimer tous les états du système.
- Observateur d'état réduit : contrairement au premier, ce type estime uniquement certains états.
- Observateur à gain adaptatif : ce type d'observateur linéaire est capable d'ajuster dynamiquement ses paramètres de gain en fonction des variations du système ou des conditions de fonctionnement.
- Observateur de Luenberger : c'est notre cas d'étude.
- Et d'autres types...

La formule générale d'un observateur linéaire est donnée par :

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + L(y - C\hat{x})$$

Où A , B , C sont les matrices du système, L le gain de l'observateur et \hat{x} l'état estimé, u est la commande du système, y est la sortie de ce dernier.

Il est important de noter que cette formule représente la forme générale d'un observateur linéaire, mais des variations spécifiques peuvent exister en fonction du système et des contraintes de conception.

2.5.1 Observateur de Luenberger

L'observateur de Luenberger est un concept fondamental dans le domaine de la théorie du contrôle des systèmes dynamiques, proposé par David Luenberger en 1964. Avant cette époque, les mesures directes étaient couramment utilisées pour recueillir des informations sur l'état d'un système, mais cette approche était limitée car toutes les variables d'état ne pouvaient pas toujours être mesurées directement. L'observateur de Luenberger a été conçu pour estimer l'état d'un système dynamique en temps réel à partir des mesures disponibles, en utilisant un modèle du système. Depuis son introduction, il a été largement adopté dans divers domaines comme l'aérospatiale, l'automatisation industrielle et la robotique, et a servi de base à l'élaboration d'autres techniques, telles que l'observateur de Kalman et les filtres de Kalman, qui gèrent les systèmes avec du bruit et de l'incertitude. À ce jour, l'observateur de Luenberger reste un sujet actif de recherche et d'application dans le domaine de la théorie du contrôle [14] [16] [15].

Synthèse de l'observateur Luenberger

L'observateur opère en mode de boucle fermée, avec un gain de rétroaction représenté par une matrice de gains L . Le dimensionnement de cette matrice est réalisé de manière à garantir une convergence rapide entre le modèle ou l'estimateur et le système réel.

Ainsi le vecteur de sortie y est comparé au vecteur équivalent \hat{y} , fourni par l'observateur, afin de permettre le fonctionnement en boucle fermée. Cela conduit à la définition d'une nouvelle variable, à savoir l'erreur d'observation (e).

Ce dernier est multiplié par la matrice de gains (L) et est utilisée comme entrée de l'observateur afin d'influencer les états estimés \hat{x} . Par le choix judicieux de la matrice de gains (L), il est possible de modifier la dynamique de l'observateur et ainsi d'ajuster la

vitesse de convergence de l'erreur vers zéro. Il est important de noter que la condition doit être respectée sur la matrice $(A - LC)$, qui doit être une matrice Hurwitz. En d'autres termes, ses valeurs propres doivent avoir des parties réelles négatives dans le cas continu, ou des modules inférieurs à 1 dans le cas discret. Cette condition garantit la stabilité et la performance de l'observateur d'état [20].

L'observateur de Lunberger peut être décrit par l'équation suivante [8],[21],[24] et [5], qui résume les concepts précédemment évoqués :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + Bu(t) + L(y(t) - \hat{y}(t)) \\ \hat{y}(t) = C\hat{x}(t) \end{cases} \quad (2.7)$$

Dans cette équation, \hat{x} représente le vecteur d'estimation des états du système, $\dot{\hat{x}}$ est la dérivée temporelle de \hat{x} , A et B sont des matrices du modèle du système, u est le vecteur d'entrée, y est le vecteur de sortie réel, C est une matrice d'observation, et L est la matrice de gains de la boucle de retour d'état.

La Figure (2.2) offre une illustration synthétique de l'observateur de Luenberger, en incorporant l'explication précédente et l'équation correspondante, tout en incluant le terme de commande par retour d'état qui dépend des paramètres du système estimés par l'observateur.

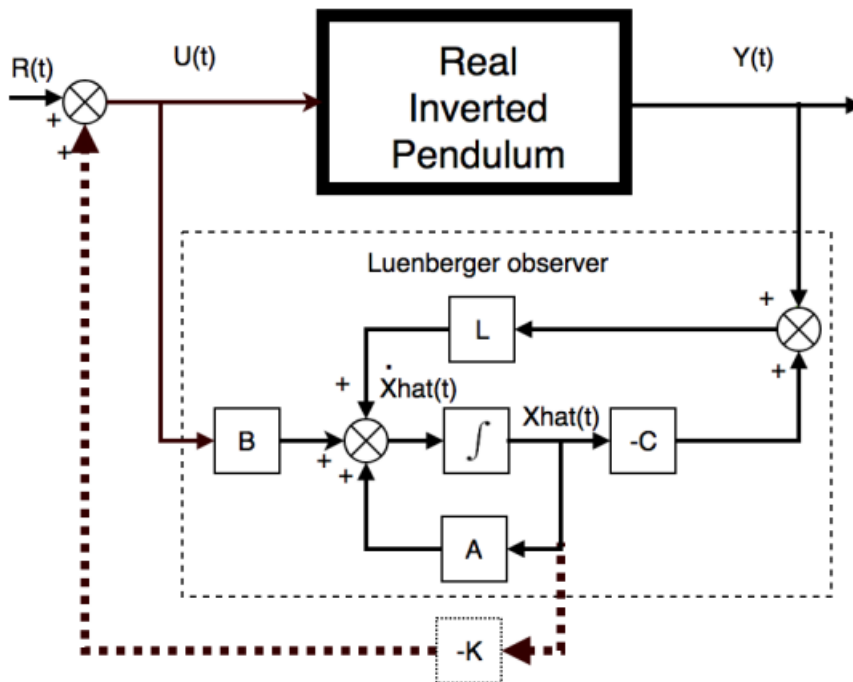


FIGURE 2.2 – Synthèse de l'observateur de Lunberger [12]

La matrice de gain L est déterminée en établissant une égalité entre l'équation caractéristique de la matrice $(A - LC)$ et l'équation caractéristique désirée. L'équation caractéristique de $A - LC$ est définie comme suit :

$$\det(\lambda I(A - LC)) = 0$$

Les valeurs propres λ sont sélectionnées de manière à atteindre les performances souhaitées en termes de stabilité et de rapidité du système. Ces valeurs propres doivent correspondre à des racines négatives ou avoir une partie réelle négative.

Le choix des valeurs propres est une étape cruciale dans la conception du système de commande. Il est déterminé en considérant les objectifs de performances spécifiques du système, afin de garantir que le système réponde de manière stable et précise .

Soit un système d'ordre n sous forme canonique d'observateur [13] :

$$A - LC = \begin{bmatrix} -a_{n-1} & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ -a_1 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} l_1 \\ \vdots \\ l_{n-1} \\ l_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-a_{n-1} - l_1) & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ (-a_1 - l_{n-1}) & 0 & \dots & 1 \\ (-a_0 - l_n) & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

L'équation caractéristique de $A - LC$ est donnée par :

$$s^n + (a_{n-1} + l_1)s^{n-1} + \dots + (a_1 + l_{n-1})s + (a_0 + l_n) = 0 \quad (2.8)$$

L'équation caractéristique de A

$$s^n + (a_{n-1})s^{n-1} + \dots + (a_1)s + (a_0) = 0 \quad (2.9)$$

L'équation désirée :

$$s^n + (d_{n-1})s^{n-1} + \dots + (d_1)s + (d_0) = 0 \quad (2.10)$$

avec les d_i sont les pôles désirés.

Donc

$$l_i = d_{n-i} - a_{n-i} \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2.11)$$

Application de l'observateur de Lunberger sur le pendule inversé rotatif :

Soit le modèle du pendule inversé rotatif donné par l'équation (2.12)

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases} \quad (2.12)$$

Tel que les matrices du système sont mentionnées dans (2.4).

Pour synthétiser un observateur de Luenberger, il est préalablement nécessaire de déterminer l'observabilité du système.

La matrice d'observabilité du PIR est donnée par :

$$O = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ CA^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 149.2751 & -0.0104 & -0.4915 \\ 0 & 261.6091 & -0.0103 & -0.8614 \\ 0 & -130.1307 & 0.0052 & 149.7036 \\ 0 & -226.8771 & 0.009 & 262.3561 \end{bmatrix}$$

On remarque que les vecteurs de la matrice d'observabilité sont indépendants, ce qui signifie que le système du PIR est observable. Pour confirmer cela, nous pouvons utiliser la commande 'rank(O)' dans MATLAB, qui nous donnera le rang de la matrice d'observabilité. Dans notre cas, le rang est égal à 4, ce qui correspond à l'ordre du système.

Par conséquent, il est possible d'appliquer différents observateurs linéaires pour estimer les états inaccessibles du système.

Soit la formule de l'observateur de Lunberger donner par (2.14).

L'erreur d'observation ϵ et sa dynamique sont définies par les deux équations suivantes :

$$\begin{cases} e = x - \hat{x} \\ \dot{e} = (A - LC)e \end{cases} \quad (2.13)$$

La matrice de gain L joue un rôle essentiel dans la régulation de la vitesse de convergence de l'erreur d'observation vers zéro. En effet, la dynamique de cette erreur est déterminée par les valeurs propres de la matrice L .

Détermination de la matrice de gain L :

Le choix de la matrice de gain L repose sur une évaluation approfondie des spécifications du système et des objectifs d'observation, en recherchant un compromis entre la convergence rapide de l'erreur d'observation et la stabilité du système d'observation.

L'équation de l'observateur peut être reformuler de la manière suivante :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = A_o \hat{x}(t) + Bu(t) + Ly(t) \\ \hat{y}(t) = C\hat{x}(t) \end{cases} \quad (2.14)$$

Avec : $A_o = A - LC$

Mathématiquement :

La matrice de gain L est déterminée mathématiquement par faire l'identification entre l'équation caractéristique de $A - LC$ et celle désirée on retrouve les l_i les éléments de la matrice L . Les pôles désirés sont incorporés dans ce polynôme caractéristique.

Sous MATLAB :

La matrice de gain L est calculée à l'aide du logiciel MATLAB, car son calcul mathématique direct est complexe en raison de la dimension de L , qui est de taille (2,4). L'utilisation d'outils informatiques tels que MATLAB permet d'automatiser le processus de calcul, ce qui facilite la détermination précise et efficace de la matrice de gain L .

Dans le cadre de l'utilisation de l'environnement de programmation MATLAB, une approche simplifiée pour déterminer le gain L consiste à utiliser la commande "place(A' , C' , P)". Cette commande permet de calculer le gain L de manière plus directe, en spécifiant les pôles désirés sous la variable P .

La matrice de gain L obtenue est décrit par :

$$L = 10^3 \begin{vmatrix} 0.1090 & -0.005 & 2.5089 & -0.0395 \\ -0.0013 & 0.1241 & 0.0293 & 3.9029 \end{vmatrix} \quad P = \begin{vmatrix} -75 & -50 & -33 & -76 \end{vmatrix}$$

2.5.2 Commande appliquée :

Avant d'entreprendre la synthèse de l'observateur linéaire de Luenberger, il est essentiel d'appliquer une commande linéaire au système pour assurer son fonctionnement et permettre à l'observateur d'estimer les états. Dans cette optique, nous choisissons d'utiliser la commande linéaire quadratique LQR.

Principe de la commande :

Le principe de la commande LQR est de minimiser une fonction coût qui est une somme pondérée des écarts de l'état et de l'entrée du système par rapport à des valeurs de référence souhaitées. La pondération est effectuée à l'aide de deux matrices : une matrice de pondération d'état et une matrice de pondération d'entrée [berkoune2021modelisation].

La fonction coût est définie comme suit :

$$\int_0^{\infty} (x^T Q x + u^T R u) dx$$

Où x est le vecteur d'état du système, u est le vecteur de commande, Q est la matrice de poids d'état, et R est la matrice de poids de commande. Cette fonction coût mesure la performance du système et prend en compte les coûts associés à la fois aux états et aux commandes. Avec :

- Q symétrique semi-définie positive.
- $R(t)$ symétrique définie positive.

LQR vise à minimiser la fonction coût quadratique J en calculant une loi de commande optimale. Cette loi de commande prend généralement la forme d'un gain de retour d'état K . Ce dernier est calculé en résolvant l'équation de Riccati qui est donnée par :

$$A^T P + P A - P B R^{-1} B^T P + Q = 0$$

où A , B , Q et R sont des matrices qui décrivent le système, et P est la matrice de gain de l'équation de Riccati.

La matrice P est déterminée en résolvant l'équation de Riccati à l'aide d'algorithmes de résolution numérique tels que l'algorithme de Lyapunov ou l'algorithme de Schur.

Une fois que la matrice de gain P est déterminée, le gain de retour d'état K est calculé comme suit :

$$K = R^{-1} B^T P$$

afin d'obtenir la commande :

$$u(t) = -Kx(t)$$

La conception concurrente de LQR est obtenue en sélectionnant les matrices de pondération pour la fonction de coût. Les poids choisis pour notre PIR étaient :

$$Q = \begin{vmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad \text{et} \quad R = 1 \quad (2.15)$$

Pour trouver les matrices de pondérations nous avons utilisé une méthode simple de choix libre des pondérations en vue d'aboutir à un correcteur satisfaisant.

Une fois les coefficients de pondération sont déterminés, la fonction 'lqr' de Matlab est utilisée pour calculer la matrice de gain K qui minimise la fonction quadratique J . On obtient :

$$K = [-2.4495 \quad 38.1924 \quad -1.5479 \quad 3.4305]$$

Les pôles en boucle fermée sont :

$$P = [-72.7332 \quad -8.2251 \pm 3.1465i \quad -2.4633]$$

2.5.3 Résultats de simulation 3D :

Les résultats présentés dans cette étude ont été obtenus en utilisant l'interface de simulation de Quanser 3D sur la plateforme "QUBE Servo" avec le logiciel de contrôle en temps réel "QUARC". Cette simulation génère des résultats similaires à ceux du système réel, sans perdre de vue le fait qu'il s'agit d'une simulation.

Il convient de souligner que notre système est constitué de quatre états, dont les deux premiers correspondent aux états réels (angle du bras et du pendule), tandis que les deux derniers sont reconstruits à l'aide de filtres passe-haut.

Dans un premier temps, nous allons comparer les états estimés par l'observateur avec les états du système. Cela nous permettra d'évaluer la précision des estimations fournies par l'observateur.

Par la suite, nous mettrons en œuvre les états estimés pour reconstruire la commande linéaire du système. permettant ainsi d'analyser la réponse du PIR en fonction de cette commande basée sur les estimations d'état.

Il est important de noter que notre système est considéré dans un contexte linéaire. Ainsi, pour permettre un fonctionnement adéquat du pendule, il est nécessaire de ramener le pendule dans une zone de linéarité à l'aide d'une action spécifique, comme illustré dans la figure (2.3).

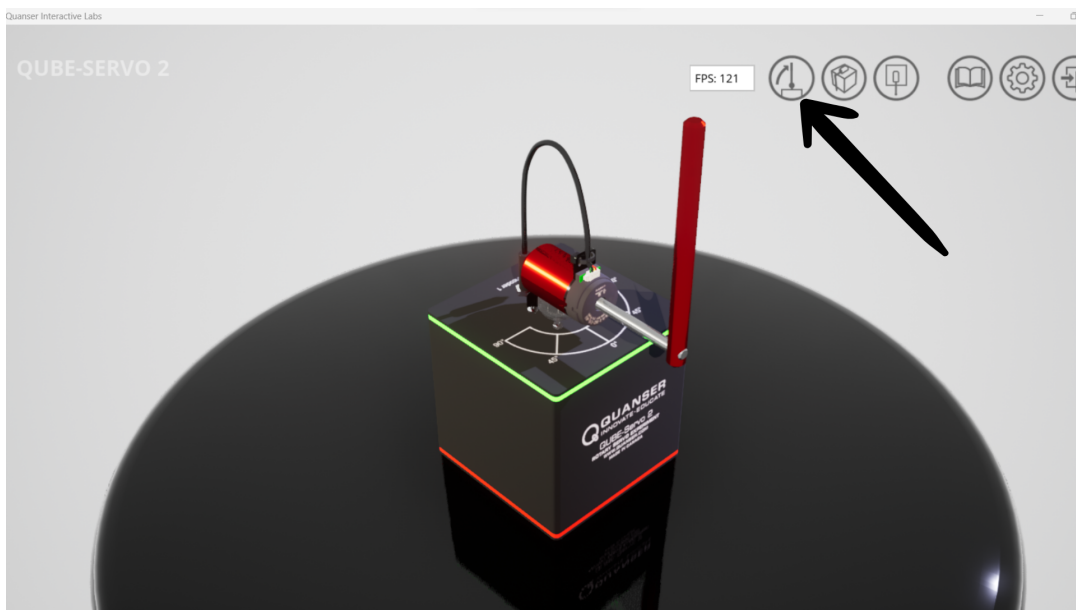


FIGURE 2.3 – L'interface de la simulation 3D de Quanser QUBE Servo 2

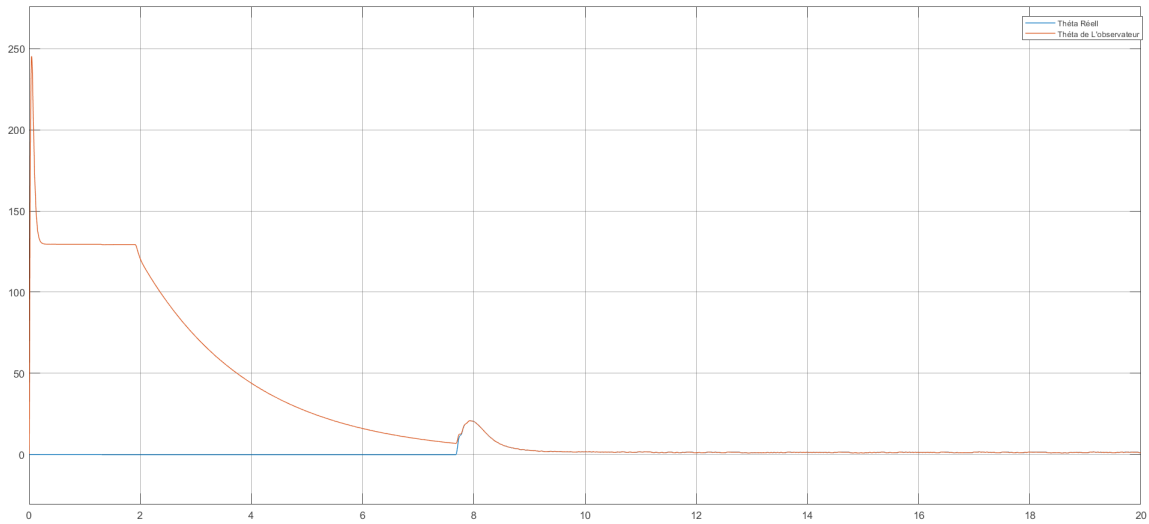


FIGURE 2.4 – L'évolution de l'angle réel et estimé du bras du PIR

Les figures (2.4) (2.5) représentent respectivement L'évolution de l'angle réel et estimé du bras, ainsi que celle du pendule du PIR.

Au début de la simulation, on remarque que l'angle réel du bras se situe à la position d'équilibre souhaitée de 0° . Cependant, dans les premières secondes, l'angle estimé se diverge et atteint environ 250° . Ce comportement est dû au fait que le système n'était pas initialement dans la zone de linéarité. À mesure qu'il se rapproche de cette zone, l'angle estimé converge vers la valeur souhaitée de 0° , finissant par coïncider avec l'angle réel aux alentours de 7 s .

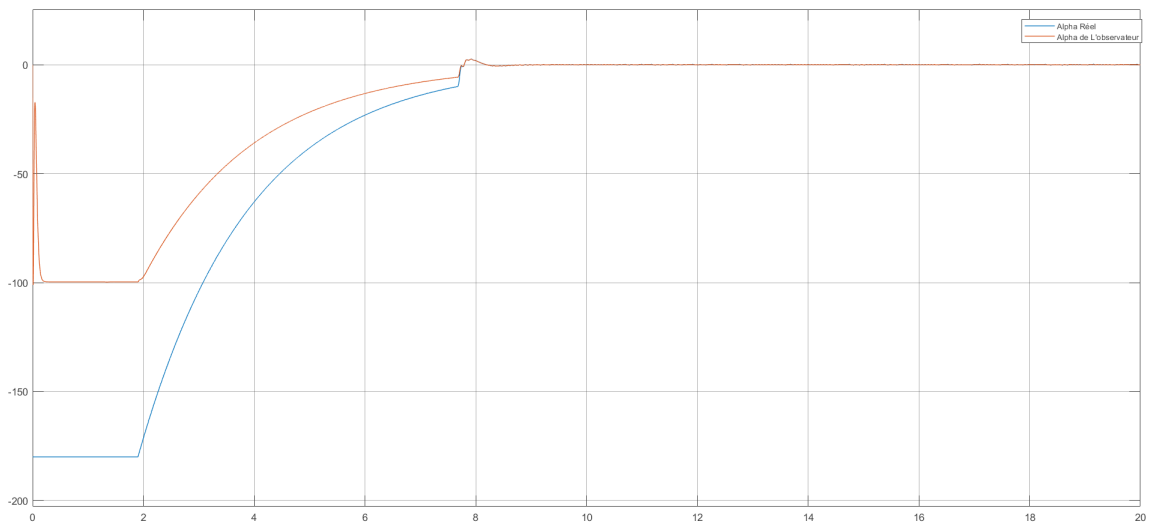


FIGURE 2.5 – L'évolution de l'angle réel et estimé du pendule du PIR

En ce qui concerne l'angle du pendule, on constate que l'état réel débute à une valeur initiale de -180° , correspondant à la position initiale du pendule. Au fil du temps, il évolue progressivement vers la position d'équilibre instable de 0° . En parallèle, l'état estimé démarre à -20° , puis diminue jusqu'à atteindre -100° en en 1 s , avant de croître

jusqu'à atteindre la position souhaitée de 0° . Après environ $6,5s$, l'état estimé converge avec l'état réel, se superposant ainsi.

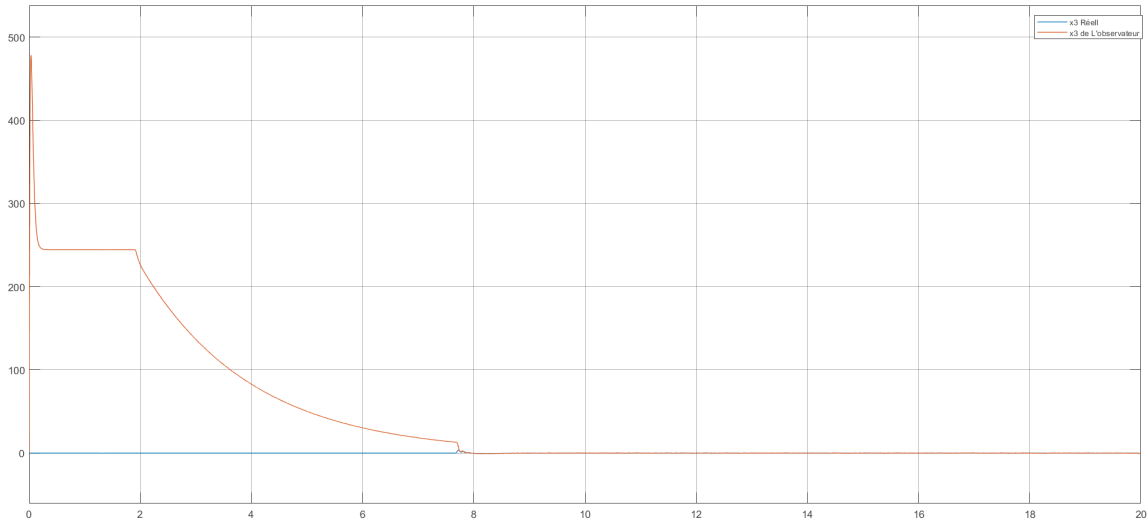


FIGURE 2.6 – L'évolution de la vitesse angulaire réel et estimé du bras du PIR

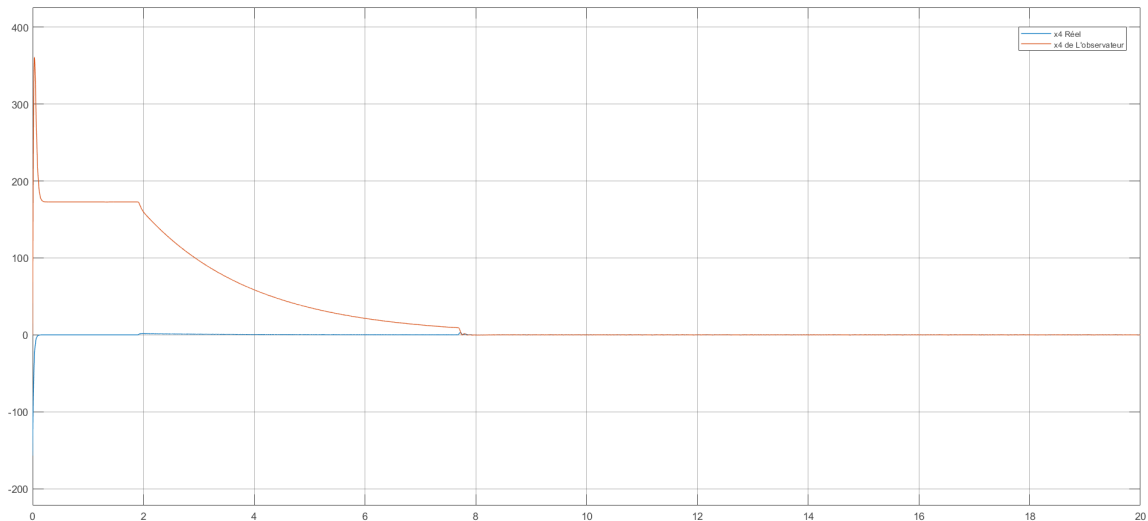


FIGURE 2.7 – L'évolution de la vitesse angulaire réel et estimé du pendule du PIR

Les résultats graphiques (2.6) et (2.7) illustrent l'évolution de la vitesse angulaire réel et estimé du bras, ainsi que celle du pendule du PIR respectivement.

On remarque que la vitesse angulaire reconstruite par le filtre du bras est nulle dès le début, ce qui indique que le bras est en position d'équilibre. Cette observation est cohérente avec le fait qu'il s'agit d'une simulation. Quant à la vitesse angulaire du pendule, elle débute à une valeur inférieure à -50 deg/s , puis converge vers 0 deg/s en l'espace d'une seconde. Cette évolution suggère que le pendule était initialement en position basse, expliquant ainsi la divergence de la vitesse angulaire, car il se trouvait en dehors de la plage de linéarité.

En ce qui concerne l'évolution de la vitesse angulaire estimée du bras et du pendule, on observe une divergence initiale. Cependant, lorsque le pendule est ramené dans la zone de linéarité, les vitesses angulaires du bras et du pendule convergent vers zéro en environ 6,5 secondes.

Reconstruction de la commande LQR à partir des états estimés par l'observateur de Luenberger

Après avoir étudié l'évolution des états estimés, qui présente une similitude avec les états réels, nous procéderons à la reconstruction de la commande LQR en utilisant ces états estimés. Notre objectif est de déterminer dans quelle mesure cette commande basée sur les estimations est capable de stabiliser le pendule jusqu'à son point d'équilibre instable.

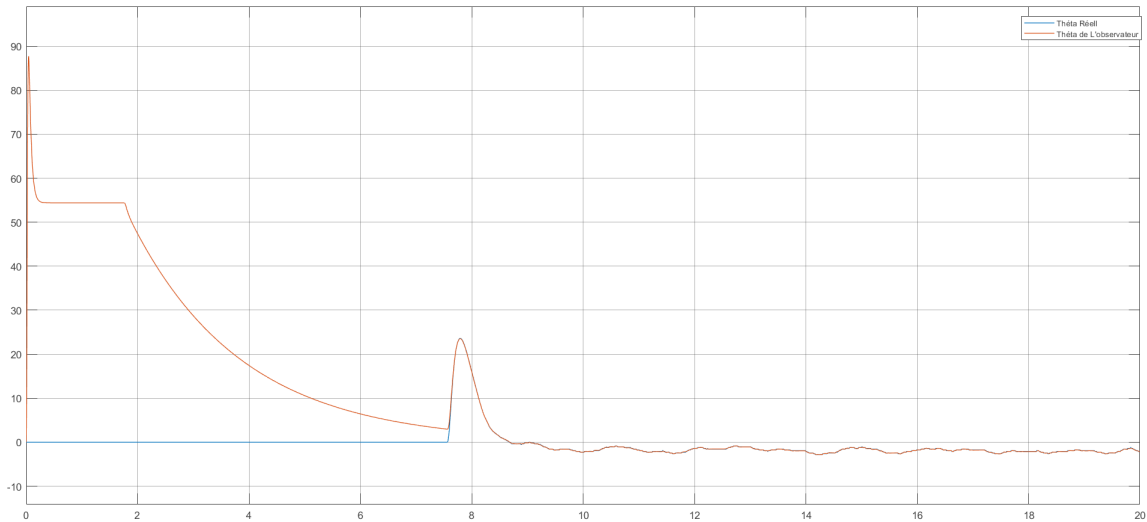


FIGURE 2.8 – L'évolution de l'angle réel et estimé du bras du PIR

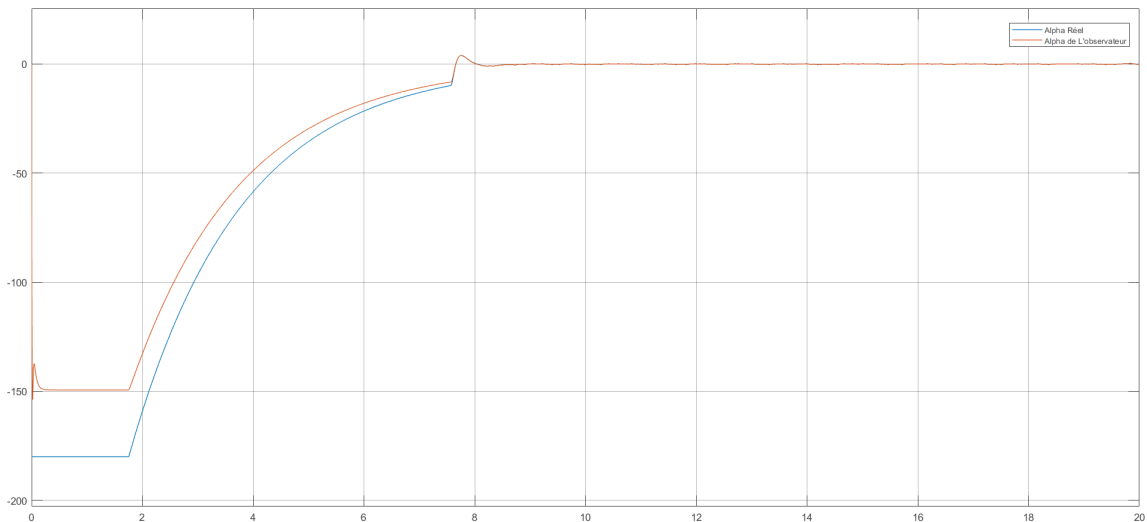


FIGURE 2.9 – L'évolution de l'angle réel et estimé du pendule du PIR

Les figures (2.8) et (2.9) présentent respectivement l'évolution de l'angle réel et estimé

du bras du PIR.

On observe que l'angle estimé du bras coïncide avec l'angle réel dans la plage de linéarité, mais présente de légères oscillations après un pic d'amplitude de 20 degrés.

De plus, l'état estimé suit l'état réel dès les premières 2s de la simulation. Lorsque le pendule atteint la position souhaitée, les deux états se superposent sans aucune oscillation.

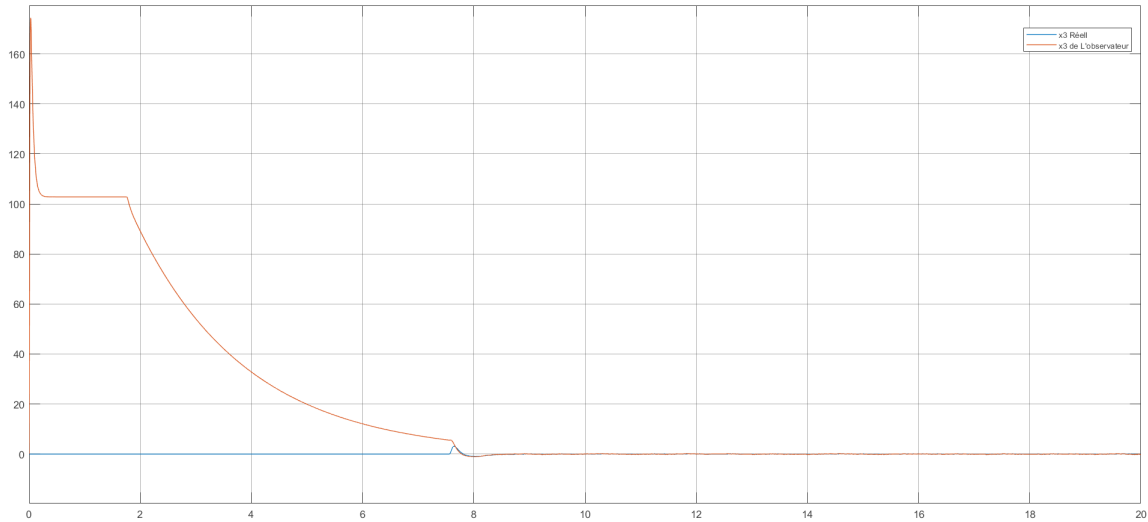


FIGURE 2.10 – L'évolution de la vitesse angulaire réel et estimé du bras du PIR

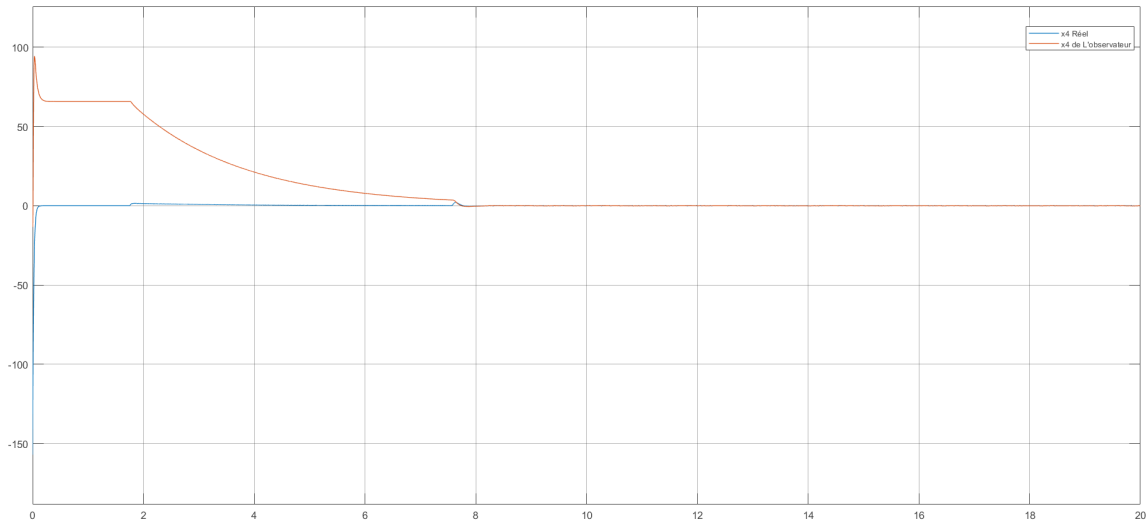


FIGURE 2.11 – L'évolution de la vitesse angulaire réel et estimé du pendule du PIR

L'évolution de la vitesse angulaire estimée du bras et du pendule, appliquant la commande LQR basée sur les estimations de l'observateur de Lunberger, est représentée dans les figures (2.10) et (2.11).

On constate que les deux vitesses angulaires convergent vers la position désirée en environ 7 secondes. Ce temps correspond à celui nécessaire pour que le pendule atteigne sa position

haute. Ainsi, peu importe les résultats obtenus avant la zone de linéarité, nous ne nous y intéressons pas, car notre système est linéaire.

L'erreur entre l'état estimé et l'état réel du PIR :

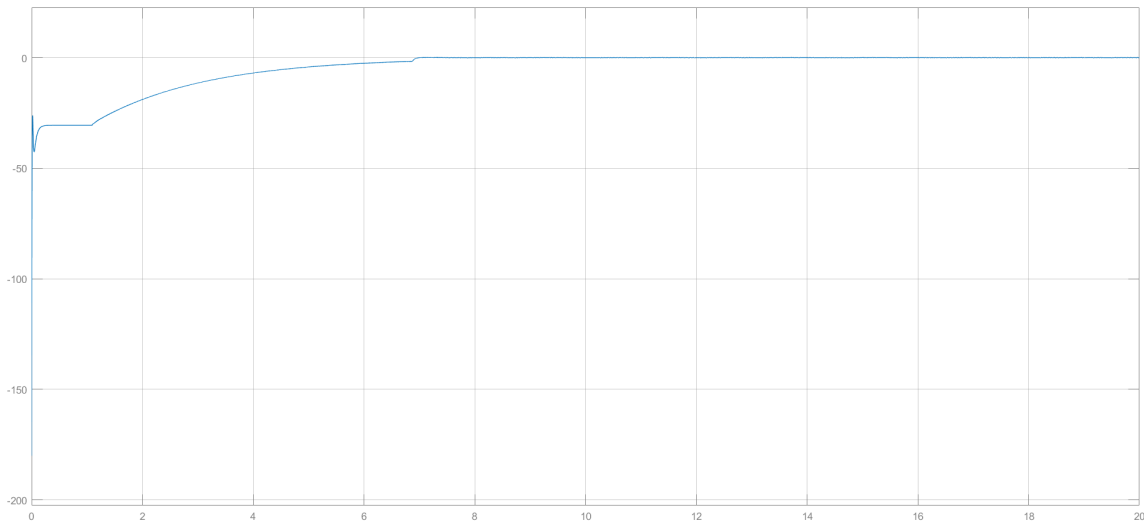


FIGURE 2.12 – L'erreur entre l'état estimé et l'état réel du pendule du PIR

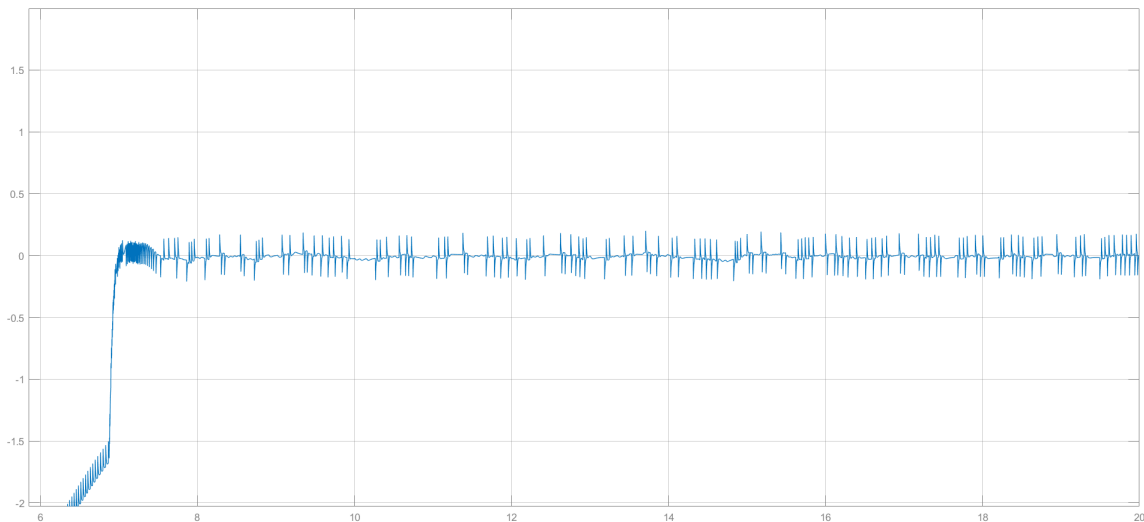


FIGURE 2.13 – zoom de l'erreur entre l'état estimé et l'état réel du pendule du PIR

La figure (2.12) présente l'écart entre l'état estimé et l'état réel du pendule du PIR. On observe une divergence de l'erreur au cours des premières secondes, jusqu'à ce qu'elle converge vers 6 s. Cela s'explique par le fait que le pendule était en dehors de la zone de linéarité au départ. Lorsqu'il atteint cette zone, l'erreur entre l'état estimé et l'état réel devient de seulement 0.2° , ce qui est négligeable, comme le montre la figure (2.13).

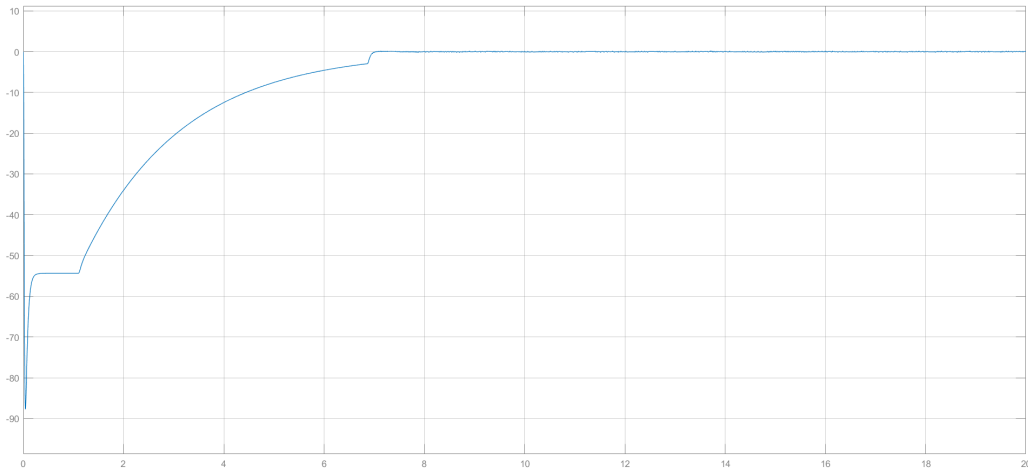


FIGURE 2.14 – L'erreur entre l'état estimé et l'état réel du bras du PIR

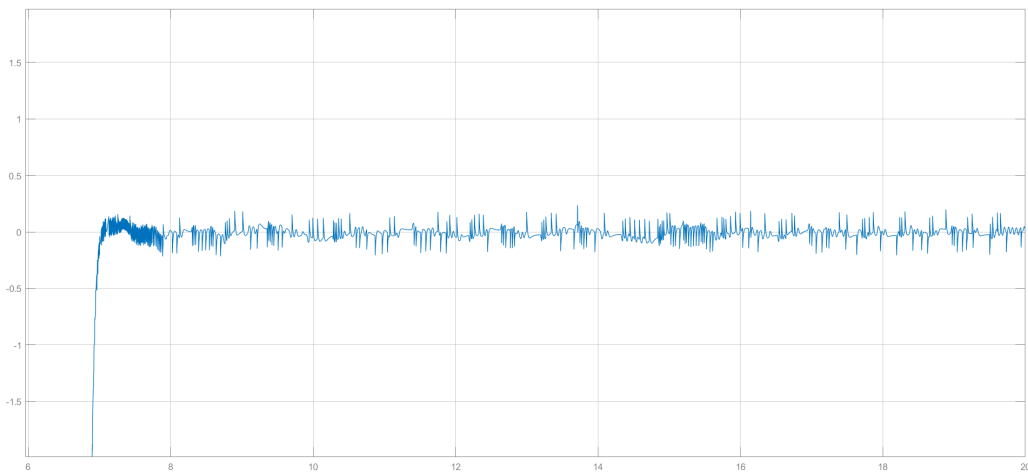


FIGURE 2.15 – zoom de l'erreur entre l'état estimé et l'état réel du bras du PIR

Ainsi l'erreur entre l'état réel et l'état estimé du bras est représentée dans la figure (2.14). On remarque qu'au départ, en raison de la position du pendule en dehors de la zone de linéarité, il y a une divergence qui se manifeste comme mentionné précédemment. Il est prévisible que le bras du PIR diverge dans les premières secondes. Cependant, à partir de 7 s, une convergence se produit et l'erreur diminue, atteignant environ 0.2° (figure 2.15).

2.6 Conclusion

En conclusion, les résultats positifs obtenus lors de l'application de l'observateur de Luenberger dans ce chapitre confirment son efficacité en tant que substitut fiable des capteurs réels. Toutefois, il convient de souligner que notre étude s'est principalement concentrée sur l'approche linéaire, en exploitant une zone de linéarité spécifique.

Par conséquent, il est pertinent de se demander si ce type d'observateur peut être appliqué à un système non linéaire, ou s'il est nécessaire de recourir à un observateur non linéaire. Cette question sera approfondie dans le chapitre suivant, où nous examinerons attentivement les possibilités d'application des observateurs sur des systèmes non linéaires.

CHAPITRE 3

SYNTHÈSE D'UN OBSERVATEUR NON LINÉAIRE POUR LE PIR

Sommaire

3.1	Introduction	49
3.2	Systèmes non linéaires	49
3.3	Observabilité des systèmes non linéaires	50
3.3.1	Quelques définitions [2]	50
3.4	Observateurs non linéaires	52
3.5	Observateur à mode glissant d'ordre 2 (Super-twisting)	52
3.5.1	Observateur à mode glissant d'ordre 1	52
3.5.2	Observateur super-twisting	54
3.5.3	Application au PIR	56
3.5.4	Analyse de convergence	56
3.5.5	La commande appliqué :	58
3.5.6	Résultats expérimentaux	59
3.6	Conclusion	65

3.1 Introduction

Dans le cadre de notre étude sur le pendule inversé rotatif qui est un système non linéaire, il est essentiel de considérer la complexité inhérente à l'analyse des systèmes de ce type. Afin de parvenir à une observation complète des états de ce système, nous proposons la conception et l'application d'un observateur non linéaire connu sous le nom d'observateur Super-twisting. Ce chapitre se concentrera sur la méthode de conception de cet observateur, ainsi que sur sa mise en œuvre concrète sur le pendule inversé rotatif.

3.2 Systèmes non linéaires

Les systèmes non linéaires sont des systèmes dynamiques dont le comportement ne peut pas être entièrement décrit par des équations linéaires. Ils sont caractérisés par des relations mathématiques non linéaires entre les variables d'état et les entrées du système. Contrairement aux systèmes linéaires, où le principe de superposition s'applique, les systèmes non linéaires ne satisfont pas ce principe, ce qui rend leur analyse et leur modélisation plus complexes.

Les systèmes non linéaires peuvent présenter une grande variété de comportements, tels que la présence de points d'équilibre multiples, des cycles limites, des bifurcations, des phénomènes de chaos et d'autres comportements non prévisibles. Leur dynamique peut être sensible aux conditions initiales et de petites variations dans les paramètres peuvent entraîner des changements significatifs dans leur comportement global.

La modélisation et l'analyse des systèmes non linéaires nécessitent souvent des outils mathématiques avancés tels que la théorie du contrôle non linéaire, des approches approximatives, telles que les développements en série de Taylor ou les méthodes de linéarisation locales, peuvent être utilisées pour étudier le comportement local des systèmes non linéaires autour de points d'équilibre.

Les systèmes non linéaires sont omniprésents dans de nombreux domaines scientifiques et d'ingénierie, tels que la physique, la biologie, l'économie, l'ingénierie électrique, l'aérospatiale et bien d'autres. Comprendre leur dynamique et développer des méthodes de contrôle efficaces pour ces systèmes revêt une grande importance pour résoudre des problèmes complexes du monde réel.

La forme générale d'un système non linéaire est donnée par les équations suivantes :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t) \\ y(t) = g(x(t), u(t), t) \end{cases} \quad (3.1)$$

- $\dot{x}(t)$: est la dérivée temporelle du vecteur d'état $x(t)$, qui représente les variables d'état du système.
- $f(x(t), u(t), t)$: est la fonction non linéaire qui décrit l'évolution des variables d'état en fonction du vecteur d'entrée $u(t)$, du temps t et de l'état actuel $x(t)$.
- $y(t)$: est le vecteur de sortie du système.
- $g(x(t), u(t), t)$: est la fonction non linéaire qui définit la relation entre les variables d'état, le vecteur d'entrée et le temps pour calculer la sortie $y(t)$.

Il est important de noter que la forme générale d'un système non linéaire peut varier en fonction de sa complexité et des interactions entre les variables d'état. Les fonctions spécifiques $f(x(t), u(t), t)$ $g(x(t), u(t), t)$ dépendent du système étudié et peuvent nécessiter une modélisation et une analyse plus détaillées pour être déterminées avec précision.

3.3 Observabilité des systèmes non linéaires

L'observabilité des systèmes non linéaires est un concept fondamental en théorie des systèmes qui permet d'évaluer la capacité à estimer l'état interne du système à partir des mesures de sortie disponibles. Alors que l'observabilité des systèmes linéaires est généralement bien comprise et étudiée, les systèmes non linéaires présentent des défis supplémentaires en raison de leur comportement complexe et non linéaire.

La notion d'observabilité d'un système fait référence à sa capacité intrinsèque à permettre la reconstruction de l'état initial $x(t_0)$ à partir d'informations limitées, à savoir des connaissances sur les sorties $y(t, t_0)$ et les entrées $u(t, t_0)$, recueillies sur une fenêtre temporelle suffisamment étendue $[t_0, t_0 + T]$.

3.3.1 Quelques définitions [2]

On note :

- Le système : Σ
- l'ensemble des états : X
- L'ensemble des entrées : U

Distinguabilité - Indistinguabilité :

La distinguabilité et l'indistinguabilité sont des concepts utilisés pour évaluer la capacité à différencier les états initiaux d'un système.

On considère deux états initiaux distincts, x_0 et x_1 , dans un ensemble d'états X . Si l'on peut trouver une entrée u telle que les trajectoires correspondantes à x_0 et x_1 restent dans X et produisent des sorties différentes $y(t, x_0) \neq y(t, x_1)$, alors les états sont distinguables. En revanche, si toutes les entrées permettent aux trajectoires de x_0 et x_1 de rester dans X et de produire les mêmes sorties $y(t, x_0) = y(t, x_1)$, alors les états sont indistinguables.

Observabilité :

Un système est dit observable en $x_0 \in X$ si tout autre état $x_1 \neq x_0$ est distinguable de x_0 dans X . Un système est observable s'il est observable en tout point $x_0 \in X$.

Observabilité locale :

Le concept d'observabilité locale est une notion plus forte que celle de l'observabilité globale, car il impose des conditions plus strictes. Si un système Σ est localement observable, cela signifie qu'il est également observable dans son ensemble, mais l'inverse n'est pas nécessairement vrai.

Observabilité faible :

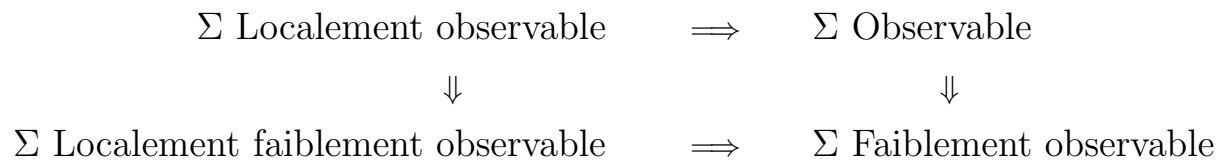
Soit un système dynamique donné Σ , considérons un point initial x_0 dans l'espace d'état X . L'observabilité faible stipule qu'il existe un voisinage ouvert $X'(x_0)$ autour de x_0 tel que, pour tout état x_1 appartenant à ce voisinage, il est possible de distinguer les paires d'états (x_0, x_1) à partir des mesures de sortie correspondantes.

En d'autres termes, dans $X'(x_0)$, il existe une trajectoire d'entrée $u(t)$ qui permet de distinguer les états x_0 et x_1 en observant les sorties correspondantes $y(t, x_0)$ et $y(t, x_1)$. Cela signifie que les trajectoires des sorties obtenues à partir des états x_0 et x_1 évoluent de manière différente et restent à l'intérieur de $X'(x_0)$.

Observabilité locale faible :

Le système Σ est considéré comme localement faiblement observable en $x_0 \in X$ lorsqu'il existe un voisinage ouvert $X'(x_0)$ inclus dans X qui contient x_0 . Dans ce voisinage, pour tout sous-voisinage $X''(x_0)$ contenu dans $X'(x_0)$ autour de x_0 , et pour tout état x_1 appartenant à ce sous-voisinage, les paires d'états (x_0, x_1) sont distinguables. De plus, les trajectoires $y(t, x_0)$ et $y(t, x_1)$ évoluent à l'intérieur de $X''(x_0)$.

En résumé, il existe quatre propriétés permettant de qualifier l'observabilité d'un système. Dans certains cas, ces propriétés sont équivalentes, mais en général, seule la propriété d'observabilité locale implique les autres. Voici le schéma d'implication des propriétés d'observabilité :



L'observabilité d'un système non linéaire est intimement liée à la notion de crochet de Lie. Le crochet de Lie est une opération mathématique qui capture les interactions non linéaires entre les différentes variables d'état du système. Il est défini comme le commutateur entre les dérivées partielles des équations d'état du système. Mathématiquement, le crochet de Lie entre deux fonctions f et g est donné par

$$L_f h = \sum_{i=1}^n f_i(x) \frac{\partial h}{\partial x_i} \tag{3.2}$$

Ainsi la matrice d'observabilité du système est définie par

$$O = \begin{bmatrix} h \\ L_f h \\ \vdots \\ L_f^{n-1} h \end{bmatrix} \tag{3.3}$$

Avec n est l'ordre du système.

3.4 Observateurs non linéaires

En automatique, la théorie des observateurs est une composante fondamentale de la conception des systèmes de contrôle. Les observateurs sont utilisés pour estimer les états d'un système qui ne peuvent pas être mesurés directement. Alors que la théorie des observateurs est relativement bien développée pour les systèmes linéaires, la conception d'observateurs pour les systèmes non linéaires reste un défi significatif.

Les systèmes non linéaires sont souvent plus difficiles à contrôler que leurs homologues linéaires en raison de leur complexité inhérente. Les observateurs non linéaires, qui sont conçus pour estimer les états des systèmes non linéaires, sont un outil clé pour relever ce défi.

Il existe plusieurs types d'observateurs non linéaires, chacun ayant ses propres avantages, inconvénients et domaines d'application. Parmi ceux-ci, on peut citer l'observateur de Kalman étendu (EKF), l'observateur à grand-gain, et l'observateur à mode glissant ainsi que l'observateur de Luenberger étendu, nous choisissons pour notre étude l'observateur à mode glissant d'ordre 2.

L'équation générale d'un observateur non linéaire peut être exprimée comme suit :

$$\dot{\hat{x}}(t) = f(\hat{x}(t), u(t), y(t)) \quad (3.4)$$

où :

- $\dot{\hat{x}}(t)$ est la dérivée de l'estimation des états $\hat{x}(t)$ par rapport au temps.
- f est une fonction non linéaire qui modélise l'évolution des états estimés \hat{x} en fonction des entrées du système u et des mesures disponibles y

La fonction f peut être déterminée en utilisant le modèle mathématique du système non linéaire et en prenant en compte les relations dynamiques entre les variables d'état du système.

Il convient de noter que l'équation exacte de l'observateur non linéaire peut varier en fonction de la méthode spécifique utilisée pour sa conception et des caractéristiques du système étudié. Différentes approches peuvent être utilisées pour déterminer la fonction f en fonction des objectifs de l'estimation et des contraintes du système.

3.5 Observateur à mode glissant d'ordre 2 (Super-twisting)

3.5.1 Observateur à mode glissant d'ordre 1

L'observateur à mode glissant est un type d'observateur utilisé en commande et en estimation des systèmes dynamiques non linéaires. Il est conçu pour estimer les états d'un système en temps réel, même en présence de perturbations ou de modèles incertains.

La technique de mode glissant est basée sur le concept de "surface de glissement", qui est une condition d'égalité dans l'espace d'état. Lorsque le système atteint cette surface, il "glisse" le long de la surface jusqu'à ce qu'il atteigne un point d'équilibre.

Dans le cas d'un observateur à mode glissant, la surface de glissement est généralement définie en fonction de l'erreur d'estimation d'état. L'observateur est alors conçu pour forcer

le système à atteindre la surface de glissement (c'est-à-dire à réduire l'erreur d'estimation) et à rester sur la surface (c'est-à-dire à maintenir l'erreur d'estimation petite).

L'observateur à mode glissant est largement utilisé dans les domaines de la commande et de l'estimation, notamment dans les systèmes de contrôle robuste et adaptatif. Il permet d'améliorer la performance du système en fournissant des estimations précises des états, ce qui permet de concevoir des lois de commande plus efficaces et résilientes face aux variations et aux perturbations.

Bref historique

Le concept du mode glissant a émergé de l'Union soviétique à la fin des années soixante, où les effets de l'introduction d'une action de contrôle discontinue dans les systèmes dynamiques ont été explorés.

Viktor S. Utkin a formulé l'idée de l'observateur à mode glissant, un ingénieur et scientifique russe, dans le domaine de la théorie du contrôle, en s'inspirant des travaux sur le "mode glissant" dans le contrôle des systèmes dynamiques. L'idée de base était d'utiliser une dynamique artificielle pour suivre la dynamique réelle du système et obtenir une estimation précise de ses états.

Les premières recherches sur l'observateur à mode glissant ont principalement porté sur les systèmes linéaires et ont montré son efficacité pour estimer les états des systèmes présentant des perturbations et des incertitudes [6].

Au fil des années, les chercheurs ont étendu l'application de l'observateur à mode glissant aux systèmes non linéaires, en développant des méthodes et des algorithmes adaptés. Des avancées significatives ont été réalisées dans le domaine de la théorie du contrôle non linéaire et de l'estimation des états, permettant une utilisation plus généralisée de l'observateur à mode glissant [6].

Synthèse de l'observateur à mode glissant d'ordre 1

La structure typique d'un observateur à mode glissant peut être divisée en deux parties : la dynamique de glissement et la loi de commutation.

Dynamique de glissement : Cette partie est généralement conçue pour obtenir une dynamique désirable lorsque le système est en mode de glissement (c'est-à-dire lorsque l'erreur d'estimation se trouve sur la surface de glissement). Dans la pratique, cela implique souvent de définir une dynamique de glissement qui est stable, comme une dynamique d'ordre supérieur avec des pôles stables.

Loi de commutation : La loi de commutation est la partie de l'observateur qui force le système à atteindre la surface de glissement. Elle est généralement conçue pour être une fonction de l'erreur d'estimation (la différence entre l'état réel et l'état estimé) et peut impliquer une discontinuité, où la loi de commande change en fonction du signe de l'erreur d'estimation [19].

La structure de l'observateur à mode glissant d'ordre 1 pour le système non linéaire exprimé sous forme triangulaire est la suivante [11] :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\hat{x}}_1 = \hat{x}_2 + \lambda_1 \text{sign}(x_1 - \hat{x}_1) \\ \dot{\hat{x}}_2 = \hat{x}_3 + E_1 \lambda_2 \text{sign}(\tilde{x}_2 - \hat{x}_2) \\ \vdots \\ \dot{\hat{x}}_{n-1} = \hat{x}_n + E_{n-2} \lambda_{n-1} \text{sign}(\tilde{x}_{n-1} - \hat{x}_{n-1}) \\ \dot{\hat{x}}_n = f(x_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_n, u) + E_{n-1} \lambda_n \text{sign}(\tilde{x}_n - \hat{x}_n) \end{array} \right. \quad (3.5)$$

où \tilde{x}_i est l'état équivalent sur la surface de glissement :

$$\tilde{x}_i = \hat{x}_i + E_{i-1} \lambda_{i-1} \text{sign}(\tilde{x}_{i-1} - \hat{x}_{i-1}), i = 2, \dots, n$$

Avec :

- \hat{x} est l'état estimé
- La fonction E_i est a zero s'il existe $1 \leq j < i$ tel que $\tilde{x}_j - \hat{x}_j \neq 0$ (par définition $\tilde{x}_1 = x_1$) sinon E_i est égale à 1 ($E_i = 1$, si $E_1 = E_2 = \dots = E_{i-1} = 1$ et $x_1 - \hat{x}_1 = 0$, sinon $E_i = 0$)
- $\lambda_i, a_i > 0$ sont les gains de l'observateur
- $f(\hat{x}, u)$ est la dynamique estimée du système

Bien que l'observateur à mode glissant offre plusieurs avantages en termes de robustesse et de performance de suivi cependant, l'un de ses inconvénients majeurs est le phénomène de chattering, qui est une oscillation à haute fréquence qui se produit lorsque le système atteint et reste sur la surface de glissement. Cela peut provoquer une usure excessive du système et de l'équipement, en particulier dans les systèmes physiques. De plus, le chattering peut conduire à des erreurs d'estimation plus importantes et à une dégradation des performances du système.

3.5.2 Observateur super-twisting

L'observateur Super-twisting, également connu sous le nom de "Super-twisting observer" en anglais, est une amélioration de l'observateur à mode glissant d'ordre 1. Il a été développé pour améliorer les performances de l'estimation d'état, en particulier dans les systèmes non linéaires et soumis à des perturbations.

Il a été développé dans les années 1990. Son concept a été introduit par Leonid M. Fridman, un chercheur et ingénieur ukrainien, dans le domaine de la théorie du contrôle non linéaire.

Les modes glissants d'ordre supérieur représentent une extension des techniques classiques de mode glissant. Initialement introduite pour conserver les avantages en termes de robustesse face aux incertitudes paramétriques, aux erreurs de modélisation et aux perturbations, cette approche offre également la facilité d'implémentation associée aux modes glissants classiques. Un aspect particulièrement attrayant des modes glissants d'ordre supérieur est leur capacité à éliminer le phénomène de "chattering", un défaut communément associé aux stratégies de contrôle de mode glissant traditionnelles. Tout en préservant les avantages clés des techniques précédentes, cette approche permet également d'améliorer la précision de convergence malgré les imperfections du modèle

[11].

L'algorithme Super-Twisting, qui est un exemple de contrôleur de mode glissant d'ordre supérieur, utilise une loi de commutation d'ordre supérieur pour assurer que le système atteint la surface de glissement en temps fini.

Il convient de noter qu'il existe plusieurs variantes et améliorations de l'observateur Super-twisting proposées par différents chercheurs, visant à améliorer ses performances ou à répondre à des exigences spécifiques.

Synthèse de l'observateur de super-twisting

la structure générale d'observateur super-twisting est la suivante [11] :

$$\begin{cases} u(e_1) = u_1 + \lambda_1 |e_1|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(e_1) \\ \dot{u}_1 = a_1 \text{sign}(e_1) \\ \lambda_1, a_1 > 0 \end{cases} \quad (3.6)$$

où $e_1 = x_1 - \hat{x}_1$, λ_1 et a_1 sont des paramètres positifs, u_1 est la sortie de l'observateur comme montre la figure(3.1).

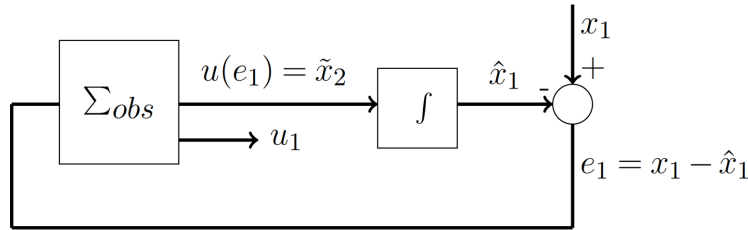


FIGURE 3.1 – Structure du différentiateur d'ordre deux

Un différentiateur robuste basé sur l'algorithme du super-twisting (3.6) est donné par les équations suivantes :

$$\Sigma_{obs} \equiv \begin{cases} \dot{\hat{x}}_1 = \tilde{x}_2 + \lambda_1 |e_1|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(e_1) \\ \dot{\hat{x}}_2 = a_1 \text{sign}(e_1) \\ \dot{\hat{x}}_2 = E_1 [\tilde{x}_3 + \lambda_2 |\tilde{e}_2|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(\tilde{e}_2)] \\ \dot{\hat{x}}_3 = E_1 a_2 \text{sign}(\tilde{e}_2) \\ \dot{\hat{x}}_3 = E_2 [\tilde{x}_4 + \lambda_3 |\tilde{e}_3|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(\tilde{e}_3)] \\ \vdots \\ \dot{\hat{x}}_{n-1} = E_{n-3} a_{n-2} \text{sign}(\tilde{e}_{n-2}) \\ \dot{\hat{x}}_{n-1} = E_{n-2} [\tilde{x}_n + \lambda_{n-1} |\tilde{e}_{n-1}|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(\tilde{e}_{n-1})] \\ \dot{\hat{x}}_n = E_{n-2} a_{n-1} \text{sign}(\tilde{e}_{n-1}) \\ \dot{\hat{x}}_n = E_{n-1} [\tilde{\theta} + \lambda_n |\tilde{e}_n|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(\tilde{e}_n)] \end{cases} \quad (3.7)$$

Où $\tilde{e}_i = \tilde{x}_i - \hat{x}_i$ pour $i = 1, \dots, n$ avec $\tilde{x}_1 = x_1, [\tilde{x}, \tilde{\theta}]^T = [\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_n, \tilde{\theta}]^T$ est la sortie de l'observateur et $\lambda_i, a_i > 0$ sont les gains de l'observateur. Pour $i = 1, \dots, n - 1$, les valeurs E_i assurent que les prochaines étapes sont activées qu'après avoir obtenu la convergence des étapes précédentes elles sont définies comme :

$$E_i = 1 \text{ si } |\tilde{e}_j| = |\tilde{x}_j - \hat{x}_j| \leq \epsilon, \text{ pour tout } j < i \text{ sinon } E_i = 0$$

avec ϵ est une constante positive

3.5.3 Application au PIR

Pour élaborer un observateur super-twisting étape par étape, le modèle du système PIR est reformulé en deux sous-systèmes d'observation en forme triangulaire comme suit [11] :

$$\Sigma_1 \equiv \begin{cases} \dot{x}_1 = x_3 \\ \dot{x}_3 = f_1(x) + g_1(x)u \\ y_1 = x_1 \end{cases} \quad (3.8)$$

$$\Sigma_2 \equiv \begin{cases} \dot{x}_2 = x_4 \\ \dot{x}_4 = f_2(x) + g_2(x)u \\ y_2 = x_2 \end{cases} \quad (3.9)$$

On applique l'algorithme du super-twisting sur le PIR, on aura :

$$\Sigma_{obs1} = \begin{cases} \dot{\hat{x}}_1 = \tilde{x}_3 + \lambda_1 |x_1 - \hat{x}_1|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(x_1 - \hat{x}_1) \\ \dot{\tilde{x}}_3 = a_1 \text{sign}(x_1 - \hat{x}_1) \\ \dot{\hat{x}}_3 = \tilde{\theta}_1 + E_1 \lambda_2 |\tilde{x}_3 - \hat{x}_3|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(\tilde{x}_3 - \hat{x}_3) \\ \dot{\tilde{\theta}}_1 = E_1 a_2 \text{sign}(\tilde{x}_3 - \hat{x}_3) \end{cases} \quad (3.10)$$

$$\Sigma_{obs2} = \begin{cases} \dot{\hat{x}}_2 = \tilde{x}_4 + \lambda_3 |x_2 - \hat{x}_2|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(x_2 - \hat{x}_2) \\ \dot{\tilde{x}}_4 = a_3 \text{sign}(x_2 - \hat{x}_2) \\ \dot{\hat{x}}_4 = \tilde{\theta}_2 + E_2 \lambda_4 |\tilde{x}_4 - \hat{x}_4|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(\tilde{x}_4 - \hat{x}_4) \\ \dot{\tilde{\theta}}_2 = E_2 a_4 \text{sign}(\tilde{x}_4 - \hat{x}_4) \end{cases} \quad (3.11)$$

3.5.4 Analyse de convergence

Lemme : Pour toutes conditions $(x_1(0), x_3(0)), (\hat{x}_1(0), \hat{x}_3(0))$, il existe un choix de λ_i et a_i tel que l'état de l'observateur (\hat{x}_1, \hat{x}_3) converge en un temps fini vers l'état (x_1, x_3) du système et $\tilde{\theta}_1$ converge aussi en temps fini vers $f_1(t, x)$.

Preuve : La stratégie de convergence de l'observateur est réalisée étape par étape sur différentes surface de glissement. La convergence de l'erreur d'observation vers zéro est obtenue en temps fini

Etape 1 : Si $e_1(0) \neq 0$, l'expression de l'erreur sera :

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = x_3 - \tilde{x}_3 - \lambda_1 |e_1|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(e_1) \\ \dot{\tilde{x}}_3 = a_1 \text{sign}(e_1) \\ \dot{\tilde{x}}_3 = f_1 - \tilde{\theta}_1 - E_1 \lambda_2 |e_3|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(e_3) \end{cases} \quad (3.12)$$

On calcule la deuxième dérivé de e_1 :

$$\ddot{e}_1 = f_1 - a_1 \text{sign}(e_1) - \frac{1}{2} \lambda_1 \dot{e}_1 |e_1|^{-\frac{1}{2}} \quad (3.13)$$

Si on suppose que le système est à entrée bornée et état borné, alors : $K_1 > |f_1|$, $K_2 > \dot{f}_1$. Les conditions qui garantissent la convergence de l'observateur après un temps fini t_1 c.à.d($e_1 = \dot{e}_1 = 0$) :

$$\begin{cases} a_1 > K_1 \\ \lambda_1 > \sqrt{2} \frac{K_1 + a_1}{\sqrt{a_1 - K_1}} \end{cases} \quad (3.14)$$

Comme $e_1 = 0$ et $\dot{e}_1 = 0$, alors $\tilde{x}_3 = x_3$, On obtient : $\hat{x}_1 = x_1, \tilde{x}_3 = x_3$

Etape 2 : Pour $t > t_1$, $E_1 = 1$ l'erreur d'observation devient :

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = 0 \\ \dot{e}_3 = f_1 - \tilde{\theta}_1 - \lambda_2 |e_3|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(e_3) \\ \dot{\tilde{\theta}}_1 = a_2 \text{sign}(e_3) \end{cases} \quad (3.15)$$

On calcule la deuxième dérivé de e_3 :

$$\ddot{e}_3 = \dot{f}_1 - a_2 \text{sign}(e_3) - \frac{1}{2} \lambda_2 \dot{e}_3 |e_3|^{-\frac{1}{2}} \quad (3.16)$$

Les conditions de convergence sont choisi comme suite :

$$\begin{cases} a_2 > K_2 \\ \lambda_2 > \sqrt{2} \frac{K_2 + a_2}{\sqrt{a_2 - K_2}} \end{cases} \quad (3.17)$$

On obtient ainsi une convergence en un temps fini $t_2 > t_1$ sur la surface de glissement. $e_3 = \dot{e}_3 = 0$, d'autre part $\forall t > t_2$:

$$\hat{x}_3 = \tilde{x}_3, \quad \hat{f}_1(\tilde{x}) = \tilde{\theta}$$

Lemme : Pour toutes conditions $(x_2(0), x_4(3)), (\hat{x}_2(0), \hat{x}_4(0))$, il existe un choix de λ_i et a_i tel que l'état de l'observateur $(\hat{x}_2), \hat{x}_4$ converge en un temps fini vers l'état (x_2, x_4) du système

Preuve, En appliquant le même processus d'analyse de convergence pour l'observateur, on démontre la convergence de l'erreur d'observation, e_2 et e_4 , vers zéro en un temps fini. Les conditions suffisantes pour assurer cette convergence sont choisies comme suits :

$$\begin{cases} a_3 > K_3 \\ \lambda_3 > \sqrt{2} \frac{K_3 + a_3}{\sqrt{a_3 - K_3}} \end{cases} \quad (3.18)$$

$$\begin{aligned} a_4 &> K_4 \\ \lambda_4 &> \sqrt{2} \frac{K_4 + a_4}{\sqrt{a_4 - K_4}} \end{aligned} \quad (3.19)$$

Avec : $K_3 > |f_2|$, $K_4 > |\dot{f}_2|$

Par conséquent, après un temps fini t_4 , l'état atteint les surfaces de glissement et sur ce surface, nous avons : $e_2 = \dot{e}_2 = 0$ d'où : $\hat{x}_2 = x_2$, $\tilde{x}_4 = x_4$ et $e_4 = \dot{e}_4 = 0$ d'où $\hat{x}_4 = \tilde{x}_4$, $\hat{f}_2(\tilde{x} = \tilde{\theta}_2)$.

3.5.5 La commande appliqué :

Afin d'utiliser l'observateur non linéaire de super-twisting, il est crucial d'appliquer une commande non linéaire à notre système du pendule inversé rotatif. Cela permet à ce dernier de fonctionner et amener le pendule à la position souhaitée, étant donné que l'observateur ne peut pas estimer les états en l'absence de fonctionnement du système. C'est pourquoi nous optons pour une commande robuste, à savoir la commande super-twisting modifiée.

Le PIR est représenté sous forme du modèle mathématique suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_3 \\ \dot{x}_2 = x_4 \\ \dot{x}_3 = f_1(x) + g_1(x)u \\ \dot{x}_4 = f_2(x) + g_2(x)u \end{cases} \quad (3.20)$$

Pour la démonstration de stabilité et le calcul de la commande, on choisit la fonction de Lyapunov suivante :

$$V = \frac{1}{2}S^2 \quad (3.21)$$

sa dérivée est :

$$\dot{V} = S\dot{S}$$

Afin de prendre en compte la dynamique à la fois du bras rotatif et du pendule, nous allons opter pour une surface de glissement qui permettra d'incorporer ces deux éléments dans une seule équation, formulée de la manière suivante [18] :

$$S = k_\theta \dot{\theta} + k_\alpha \dot{\alpha} + \lambda_\theta \theta + \lambda_\alpha \alpha$$

où k_θ , k_α , λ_θ et λ_α sont des gains de surface glissante.

Le système est stable si et seulement si : $\dot{V} < 0 \iff S\dot{S} < 0$

$$S\dot{S} = S \left(k_\theta \ddot{\theta} + k_\alpha \ddot{\alpha} + \lambda_\theta \dot{\theta} + \lambda_\alpha \dot{\alpha} \right) \quad (3.22)$$

$$= S \left[k_\theta \left(f_1(x) + g_1(x)u \right) + k_\alpha \left(f_2(x) + g_2(x)u \right) + \lambda_\theta x_3 + \lambda_\alpha x_4 \right] \quad (3.23)$$

$$= S \left[u \left(k_\theta g_1(x) + k_\alpha g_2(x) \right) + \left(k_\theta f_1(x) + k_\alpha f_2(x) + \lambda_\theta x_3 + \lambda_\alpha x_4 \right) \right] \quad (3.24)$$

Pour \dot{V} être négative, la formule de commande doit être de la forme suivante :

$$u = \left(k_\theta g_1(x) + k_\alpha g_2(x) \right)^{-1} \left(- \left(k_\theta f_1(x) + k_\alpha f_2(x) + \lambda_\theta x_3 + \lambda_\alpha x_4 \right) + u_d \right)$$

Et :

$$u_d = k_1|S|^{\frac{1}{2}}\text{sign}(S) + k_2S - Z$$

Où :

$$\dot{Z} = -k_3\text{sign}(S) - k_4S + d(x, t) \quad (3.25)$$

Avec k_1, k_2, k_3, k_4 sont des gains à identifier et $d(x, t)$ est une perturbation à compenser en choisissant les bon valeurs de k_3 et k_4 .

Paramètres de commande :

Paramètres	Valeur
k_θ	-0.1
k_α	0.2
λ_θ	-0.1
λ_α	3.1
k	1500
k_1	330
k_2	-0.1

3.5.6 Résultats expérimentaux

L'observateur non linéaire développé est évalué expérimentalement sur la plateforme "QUBE Servo" en utilisant le logiciel de contrôle en temps réel "QUARC". Le système étudié comprend quatre états, dont les deux premiers sont directement mesurables, tandis que les deux derniers sont reconstruits à l'aide de filtres passe-haut, comme nous l'avons mentionné précédemment.

Dans un premier temps, une étape cruciale consiste à comparer les états estimés par l'observateur avec les véritables états du système. Cette évaluation comparative permet d'évaluer la précision des estimations fournies par l'observateur et de mesurer l'efficacité des filtres dans la reconstitution des états manquants.

Par la suite, les états estimés par l'observateur sont considérés comme les états réels du système et sont utilisés comme tels lors de la phase de commande. L'objectif principal est d'évaluer la capacité de la commande de super-twisting modifiée à stabiliser le pendule dans la position désirée en utilisant ces états estimés.

Cette approche de commande 'Super-twisting modifié', adaptée et améliorée, génère des signaux de commande appropriés pour contrôler automatiquement le système, sans nécessiter d'intervention manuelle.

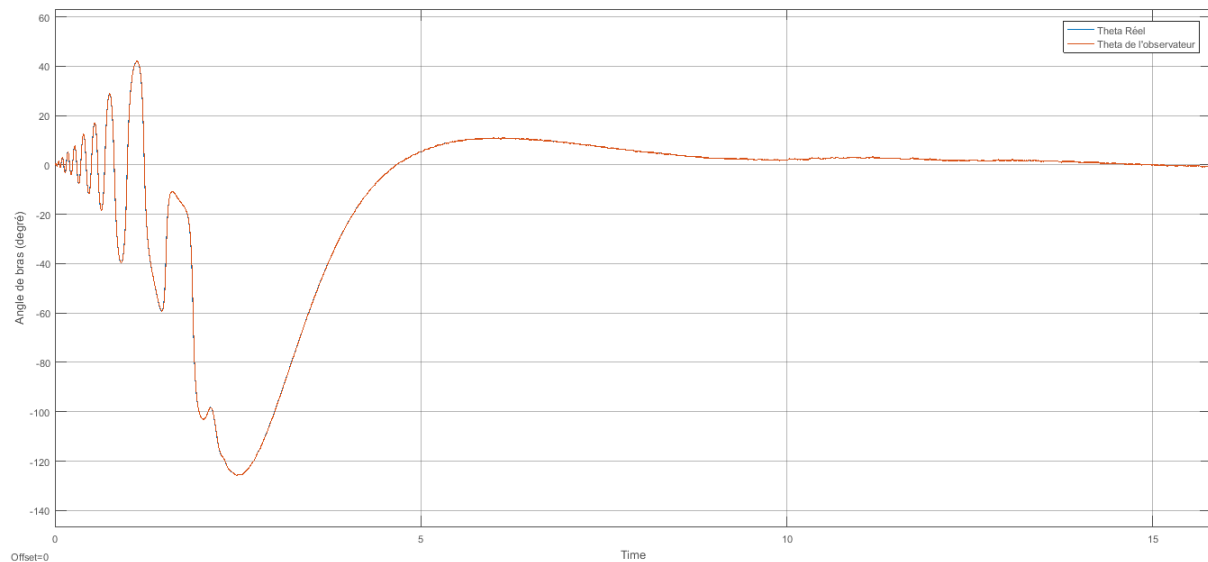


FIGURE 3.2 – L'évolution de l'angle réel du bras et de son estimation par l'observateur

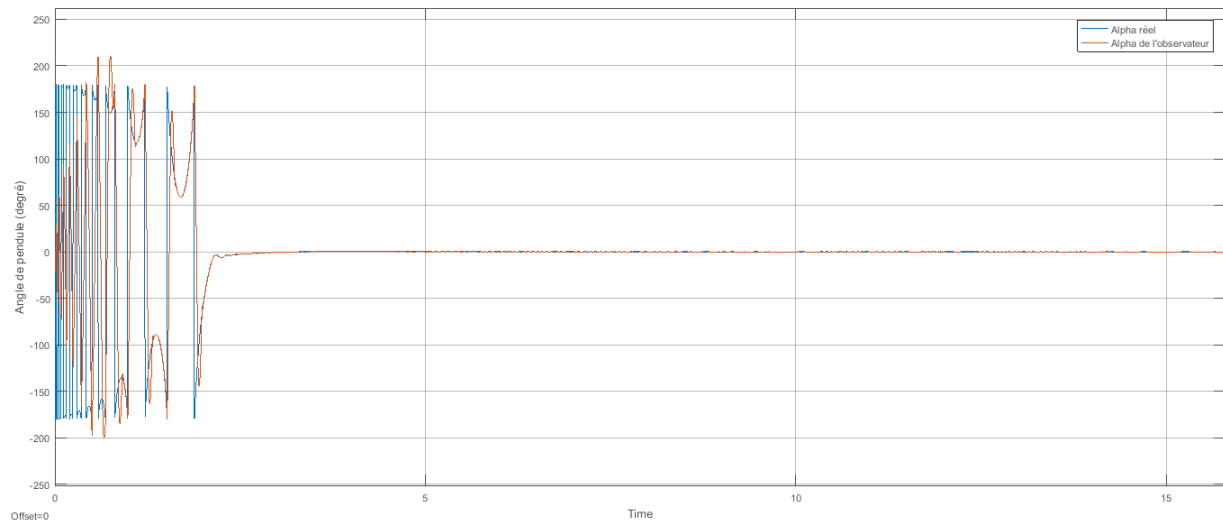


FIGURE 3.3 – L'évolution de l'angle réel du pendule et de son estimation par l'observateur

Les figures (3.2) (3.3) représentent respectivement l'évolution de l'angle du bras et du pendule du PIR, ainsi que leur estimation par l'observateur.

En ce qui concerne l'évolution de l'angle du bras, une observation importante est la correspondance parfaite entre l'angle réel θ et l'estimation fournie par l'observateur. Les deux courbes convergent vers la position désirée (0°) dans un temps de 6s, ce qui indique que l'observateur parvient à estimer de manière précise et cohérente l'angle réel du bras du PIR.

Relativement à l'évolution de l'angle du pendule du PIR, on observe un léger retard d'environ 1 seconde entre l'état estimé et l'état réel puis ces deux derniers se coïncide. Toutefois, les deux courbes finissent par converger vers la position d'équilibre instable de 0° en environ 2s.

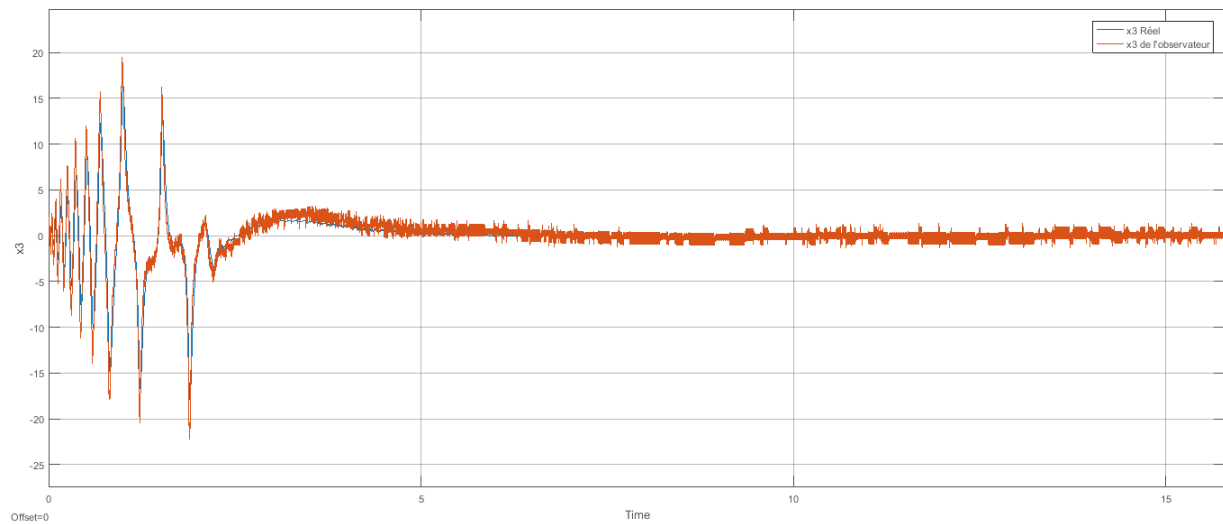


FIGURE 3.4 – L'évolution de la vitesse angulaire du bras et de son estimation par l'observateur

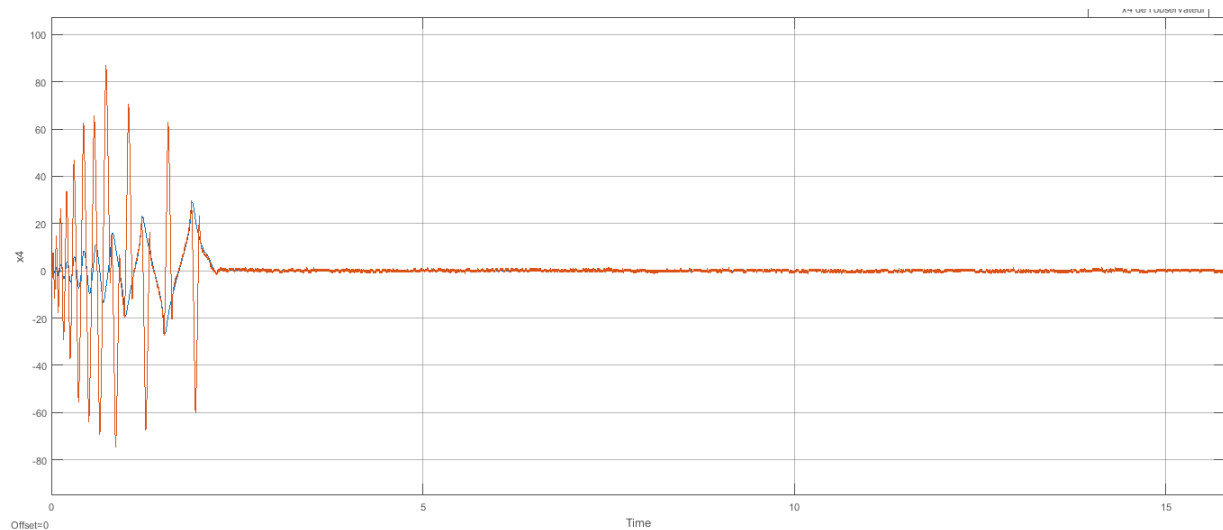


FIGURE 3.5 – L'évolution de la vitesse angulaire du pendule et de son estimation par l'observateur

Les résultats présentés dans les figures (3.4) et (3.5) illustrent respectivement l'évolution de la vitesse angulaire du bras et du pendule du PIR, ainsi que leur estimation par l'observateur.

On remarque que l'évolution de la vitesse angulaire du bras estimée par l'observateur est similaire à celle reconstruite par le filtre. Toutefois, une différence d'amplitude de plus de 2° est observée entre les deux.

Par la suite, les deux courbes convergent vers la position d'équilibre du pendule en un temps de 2,5s, ce qui indique que le pendule parvient à se stabiliser. Il convient de noter cependant la présence du phénomène de chattering, caractérisé par des oscillations à faible amplitude 1 deg/s , dans l'état estimé.

En ce qui concerne l'évolution de la vitesse angulaire du pendule, il est remarquable que l'amplitude de l'état estimé par l'observateur présente une augmentation significative, atteignant 80deg/s , soit quatre fois plus élevée que celle reconstruite par le filtre. Toutefois, les deux courbes finissent par se rejoindre en environ 2s, convergeant finalement vers la vitesse désirée de 0deg/s .

Reconstruction de la commande basée sur les états estimés par l'observateur

Dans cette étude, nous procédons à la reconstruction des états du système à partir des estimations fournies par l'observateur, ce qui permet d'adapter la formulation de la commande en fonction de ces états estimés. Ainsi, nous cherchons à évaluer la capacité du système à stabiliser le pendule en se basant uniquement sur ces estimations. En analysant la réponse du système, nous serons en mesure de déterminer si les estimations de l'observateur sont suffisamment précises pour atteindre la stabilité souhaitée.

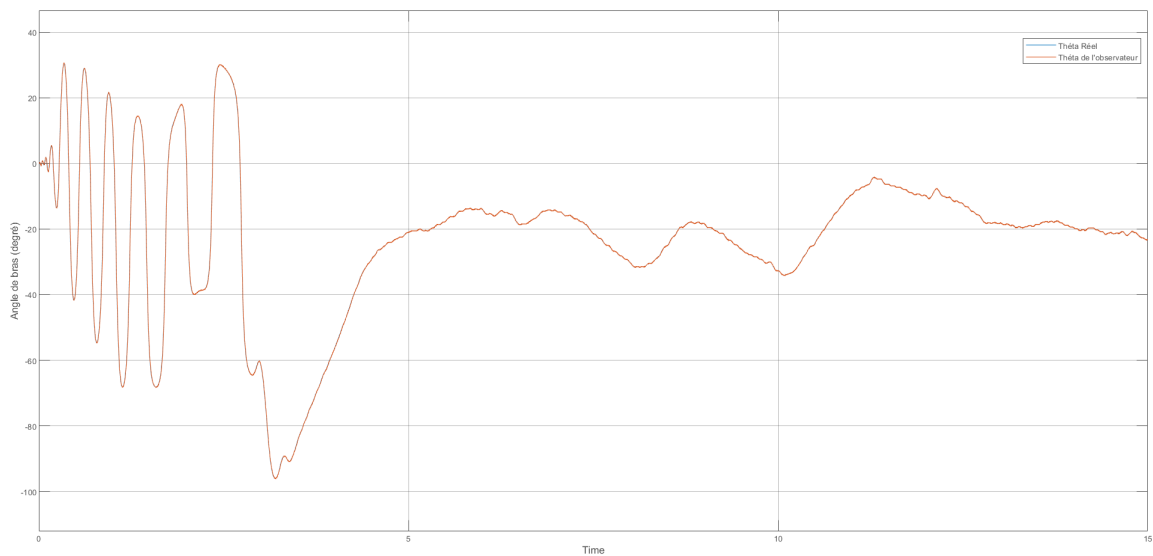


FIGURE 3.6 – L'évolution de l'angle du bras du PIR appliquons la commande basée sur les estimations de l'observateur

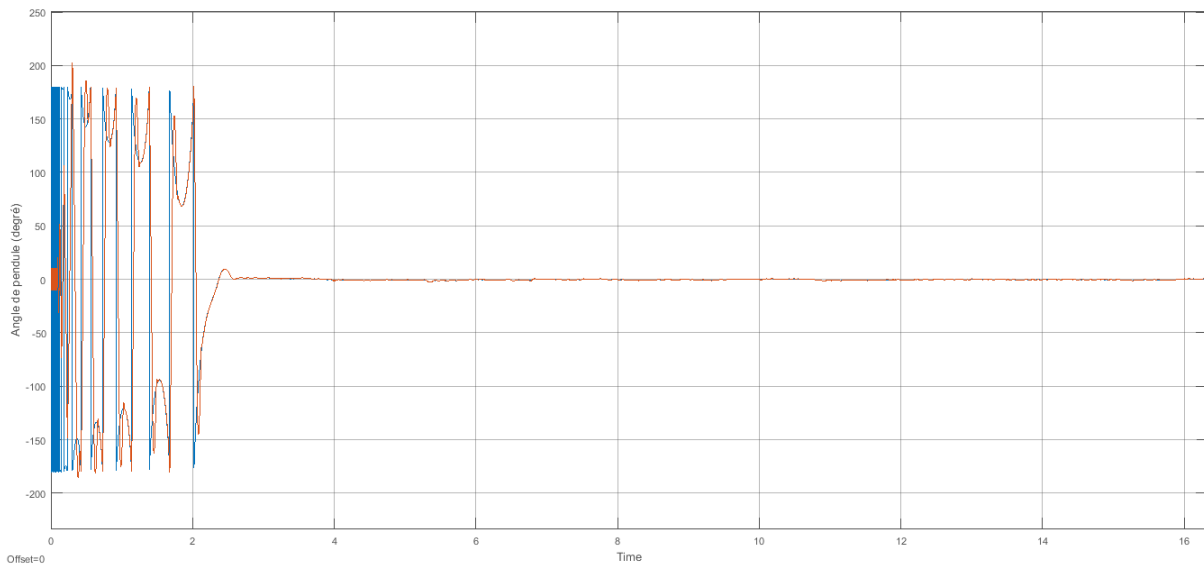


FIGURE 3.7 – L'évolution de l'angle du pendule du PIR appliquons la commande basée sur les estimations de l'observateur

Les évolutions de l'angle du bras et du pendule, à la fois réelles et estimées, du PIR lors de l'application de la commande basée sur les états estimés, sont représentées respectivement dans les figures (3.6) et (3.7). Ces graphiques nous permettent d'évaluer si l'état du système, lors de l'application de la commande basée sur les états estimés par l'observateur, suit fidèlement l'état réel dans ce contexte spécifique.

On peut observer que le bras rotatif effectue des mouvements de va-et-vient, correspondant aux oscillations illustrées, dans le but d'atteindre la position d'équilibre instable de 0 deg . Cependant, il persiste un léger décalage par rapport à la position désirée. Il convient de noter que le signal de l'état réel coïncide avec celui de l'état estimé comme la figure montre.

Concernant l'évolution de l'angle du pendule, on observe un léger retard entre l'angle réel du bras (signal bleu) et l'angle d'état correspondant à l'application de la commande basée sur les états estimés (signal rouge). Toutefois, l'objectif visé est de parvenir à une convergence rapide en utilisant les estimations fournies par l'observateur, dans un délai de 2 s .

Par ailleurs, il est remarquable que les deux angles ont une amplitude identique, ce qui confirme leur concordance. Les oscillations du pendule sont responsables du fait que celui-ci démarre depuis une position initiale de 180 deg pour atteindre progressivement la position désirée de 0 deg .

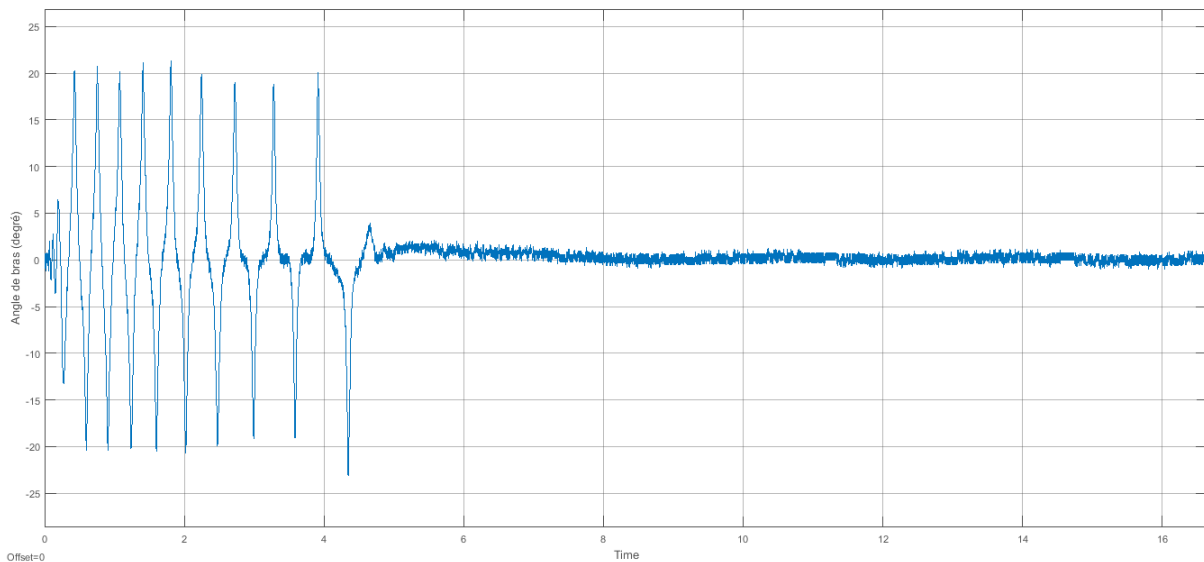


FIGURE 3.8 – L'évolution de la vitesse angulaire du bras du PIR appliquons la commande basée sur les estimations de l'observateur

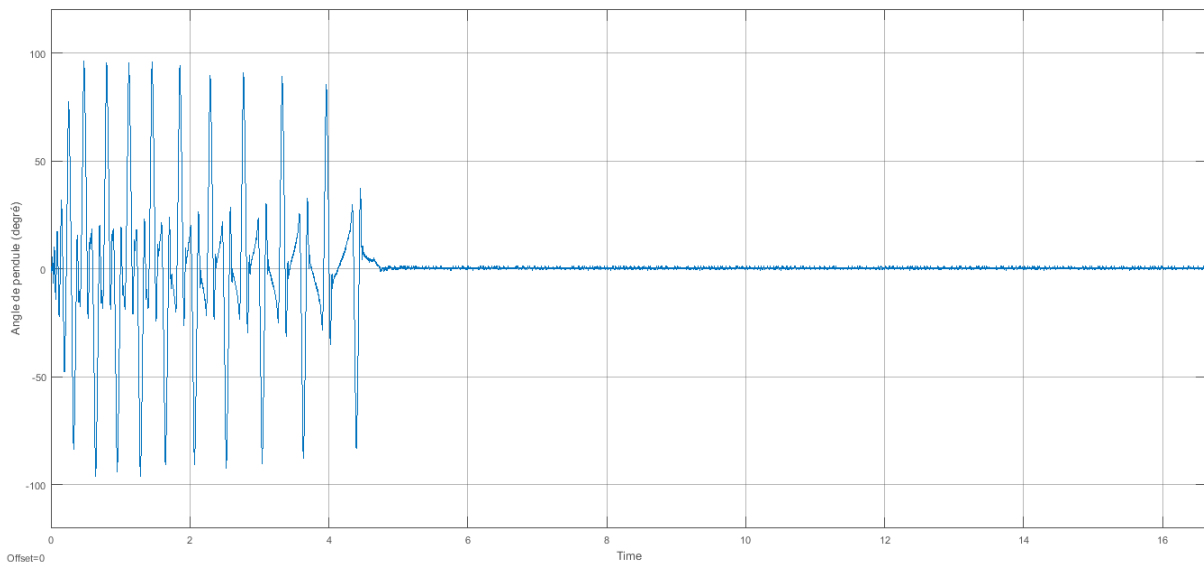


FIGURE 3.9 – L'évolution de la vitesse angulaire du pendule du PIR appliquons la commande basée sur les estimations de l'observateur

En ce qui concerne l'évolution de la vitesse angulaire du bras et du pendule, représentée respectivement dans les figures (3.8) et (3.9), il n'est pas nécessaire de les comparer avec celles du filtre car ces dernières correspondent aux états reconstruits. Notre objectif à cette étape est de mettre l'accent sur la capacité de la commande basée sur les états estimés. Il est notable que la vitesse angulaire du bras atteint une valeur maximale de 20deg/s , puis se stabilise à la position désirée de 0 degrés en environ 4.5 s . Cette évolution est cohérente et réalisable dans le contexte du système étudié.

Quant à la vitesse angulaire du pendule, elle nécessite un intervalle de temps similaire pour se stabiliser, mais atteint une valeur de 100 deg/s . Cette différence s'explique par la nature du pendule, qui effectue des oscillations afin de trouver sa position d'équilibre souhaitée.

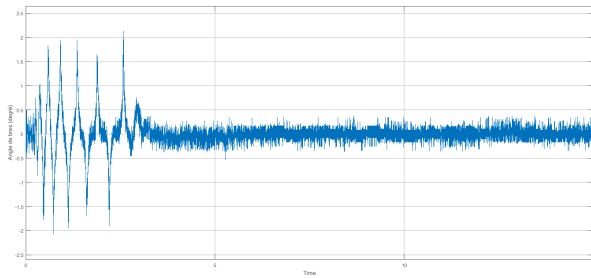
L'erreur entre l'état estimé et l'état réel du PIR :

FIGURE 3.10 – L'erreur entre l'état estimé et l'état réel du bras du PIR

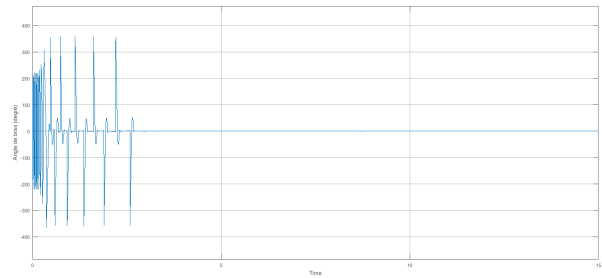


FIGURE 3.11 – L'erreur entre l'état estimé et l'état réel du pendule du PIR

Les figures (3.10) et (3.11) illustrent respectivement l'évolution de l'erreur entre l'état estimé et l'état réel du bras et du pendule du PIR.

Concernant le bras, on observe une erreur initiale très faible entre l'état estimé et l'état réel, qui atteint une amplitude maximale de 2° . Lorsque le bras se trouve dans la position d'équilibre instable, vers les 3 premières secondes, l'erreur devient de l'ordre de 0.3° , ce qui correspond à une quasi-coïncidence entre les deux états.

En ce qui concerne le pendule, on remarque une erreur plus importante 380° . Cela s'explique par le fait que le pendule effectue des oscillations aléatoires pour atteindre la zone d'équilibre instable. Mais ce qui nous intéresse, c'est que le pendule atteigne la position d'équilibre avec une erreur négligeable. Après environ 3 s, le pendule atteint la position d'équilibre et l'erreur s'annule.

3.6 Conclusion

En conclusion, l'application de l'observateur non linéaire synthétisé sur le pendule inversé rotatif a démontré son efficacité en fournissant des résultats satisfaisants. Grâce à sa capacité à prendre en compte les non-linéarités et les interactions complexes entre les variables, cet observateur a fourni une estimation plus précise des états du système. Son utilisation constitue une approche plus adaptée pour l'étude des systèmes non linéaires, qui présentent des défis majeurs lorsqu'il s'agit d'estimer leurs états de manière exhaustive.

CONCLUSION GÉNÉRALE

Dans cette étude, nous avons introduit deux types d'observateurs pour le pendule inversé rotatif qui représente un système non linéaire, sous actionné et instable. L'un de ces observateurs est spécifiquement dédié à la zone linéaire du système, obtenue par linéarisation autour du point d'équilibre désiré. Le deuxième observateur, quant à lui, est non linéaire et tient compte de l'ensemble des non-linéarités du système. Grâce à sa synthèse, l'observateur non linéaire s'est avéré plus polyvalent et précis que son homologue linéaire dans le cadre des systèmes non linéaires.

Les résultats obtenus démontrent la capacité des observateurs à estimer de manière précise les états du pendule inversé rotatif, même en présence de non-linéarités et de perturbations.

Il est important de souligner que cette étude ne se limite pas uniquement au pendule inversé rotatif, mais peut également être étendue à d'autres systèmes non linéaires d'intérêt pratique. Les observateurs présentés ici offrent une approche prometteuse pour la commande et l'estimation des états dans des systèmes complexes, contribuant ainsi à une meilleure compréhension du comportement dynamique de ces systèmes.

Cette avancée technologique ouvre de nouvelles perspectives dans le domaine industriel en offrant des solutions de surveillance et de contrôle sans la nécessité d'utiliser des capteurs physiques dans des zones inaccessibles ou difficiles à équiper.

L'utilisation de ces capteurs virtuels, c'est-à-dire les observateurs, a montré des avantages significatifs tels que l'optimisation des processus industriels, la réduction des coûts liés à l'installation et à la maintenance des capteurs physiques, ainsi que l'accélération des opérations grâce à une estimation rapide et précise des états du système.

Cependant, il convient de souligner que des efforts supplémentaires de recherche et de développement sont nécessaires pour améliorer encore la performance des observateurs, en particulier dans des systèmes complexes et non linéaires. De nouvelles techniques de synthèse et d'adaptation des observateurs pour répondre aux exigences spécifiques de chaque application seront essentielles pour atteindre des résultats optimaux.

RÉFÉRENCES

- [1] Quanser-Qube-Servo 2. *Pendule inversé rotationnel*. <https://www.quanser.com/products/qube-servo-2/>. URL : <https://www.quanser.com/products/qube-servo-2/>.
- [2] MANSOURI ABDELLAH. “CONTRIBUTION A LA COMMANDE DES SYSTEMES NON LINEAIRES ” Application aux robots et au moteur asynchrone”. Thèse de doct. L’Université des science et de la technologie d’Oran (USTO) MOHAMED BOUDIAF, 2004.
- [3] Mohamed BEDBOUDI. “Utilisation d’un observateur à grand gain dans une commande d’une machine asynchrone”. Thèse de doct. Université Mohamed Boudiaf-M’Sila, 2013.
- [4] Giuseppe CONTE, Claude H MOOG et Anna Maria PERDON. *Algebraic methods for nonlinear control systems*. Springer Science & Business Media, 2007.
- [5] Pierre-Marie DAMON et al. “Estimation of lateral motorcycle dynamics and rider action with luenberger observer”. In : *2016 IEEE 19th International Conference on Intelligent Transportation Systems (ITSC)*. IEEE. 2016, p. 2392-2397.
- [6] Christopher EDWARDS, Sarah K SPURGEON et Ron J PATTON. “Sliding mode observers for fault detection and isolation”. In : *Automatica* 36.4 (2000), p. 541-553.
- [7] Jean-Paul GAUTHIER, Hassan HAMMOURI et Sami OTHMAN. “A simple observer for nonlinear systems applications to bioreactors”. In : *IEEE Transactions on automatic control* 37.6 (1992), p. 875-880.
- [8] Hammar GHILES. “Synthèse d’observateur à entrée inconnue avec mesures discrètes Application sur un système hydraulique”. Thèse de doct. Université Mouloud Mameri, 2016.
- [9] Amal GUEZMIL. “Sur la Synthèse et l’Implémentation des Observateurs d’État pour le Diagnostic et la Commande de la Machine Asynchrone”. Thèse de doct. École Nationale d’ingénieurs de Monastir, 2017.
- [10] Mohamed Nadjib HADJALI et Zeryab MOUSSAOUI. “Commande à base d’observateur d’état : application au simulateur d’hélicoptère TRMS”. Thèse de doct. 2010.
- [11] Farah Amel HAOUARI. “Analyse d’observabilité et synthèse d’observateurs à modes glissants pour des systèmes non linéaires décrits par un modèle de Takagi-Sugeno”. Thèse de doct. 2020.

- [12] Ian S HOWARD. “A modular 3D-printed inverted pendulum”. In : *Towards Autonomous Robotic Systems : 20th Annual Conference, TAROS 2019, London, UK, July 3–5, 2019, Proceedings, Part I 20*. Springer. 2019, p. 413-424.
- [13] KENDOUCI KHEDIDJA. *Support de cours, ANALYSE ET COMMANDE DES SYSTEMES CONTINUS DANS L’ESPACE D’ETAT LINEAIRES*.
- [14] D. LUENBERGER. “An introduction to observers”. In : *IEEE Transactions on Automatic Control* 16.6 (1971), p. 596-602. DOI : [10.1109/TAC.1971.1099826](https://doi.org/10.1109/TAC.1971.1099826).
- [15] D. LUENBERGER. “Observers for multivariable systems”. In : *IEEE Transactions on Automatic Control* 11.2 (1966), p. 190-197. DOI : [10.1109/TAC.1966.1098323](https://doi.org/10.1109/TAC.1966.1098323).
- [16] David G. LUENBERGER. “Observing the State of a Linear System”. In : *IEEE Transactions on Military Electronics* 8.2 (1964), p. 74-80. DOI : [10.1109/TME.1964.4323124](https://doi.org/10.1109/TME.1964.4323124).
- [17] Wolfram MATHWORLD. *Euler-Lagrange Differential Equation*. <https://mathworld.wolfram.com/Euler-LagrangeDifferentialEquation.html>. URL : <https://mathworld.wolfram.com/Euler-LagrangeDifferentialEquation.html>.
- [18] Ngo Phong NGUYEN et al. “A nonlinear hybrid controller for swinging-up and stabilizing the rotary inverted pendulum”. In : *Nonlinear Dynamics* 104 (2021), p. 1117-1137.
- [19] Mohammed Rida RABEHI et Ali Abdessetar BERKOUNE. “Modélisation et commande non linéaire d’un pendule inversé rotatif”. Mém. de mast. Ecole Supérieure en science appliqué de Tlemcen, 2021.
- [20] M SEBBA et al. “Commande en vitesse du moteur synchrone à aimants permanents dotée d’un observateur d’état de Luenberger”. In : *4th International Conference on Computer Integrated Manufacturing*. T. 13. 2007, p. 89-104.
- [21] LOUNISSI SOULEYMAN et YALAOUI NASSIM ABDERRAHMANE. “Etude et simulation de l’observateur de lunberger généralisé (critère du cercle) appliqué sur un système non linéaire.” Thèse de doct. faculté des sciences et de la technologie univ bba, 2022.
- [22] Assem THABET. “Estimation de l’état pour la surveillance des systèmes de grandes dimensions. Application aux réseaux électriques”. Thèse de doct. Ecole Nationale d’Ingénieurs de Gabès, 2012.
- [23] Université TOULOUSE. *Systèmes linéaires à Temps Continu*. https://master-eea.univ-tlse3.fr/wp-content/uploads/2018/10/Sujets_TPs.pdf. URL : https://master-eea.univ-tlse3.fr/wp-content/uploads/2018/10/Sujets_TPs.pdf.
- [24] Nguyen VAN DONG et al. “Estimation of vehicle dynamics states using Luenberger observer”. In : *International Journal of Mechanical Engineering and Robotics Research* 8.3 (2019).

Résumé:

L'objectif de cette étude est de développer des stratégies d'observation pour le système non linéaire du pendule inversé rotatif . Étant donné que notre système possède quatre états, il est difficile d'obtenir une estimation complète de tous les états. C'est pourquoi nous utilisons des observateurs

Deux approches d'observation sont appliquées dans cette étude. Dans l'approche linéaire, nous utilisons l'observateur de Luenberger sur le modèle linéaire du système, puis nous analysons les résultats à l'aide de simulations 3D.

Ensuite, nous explorons une approche non linéaire en utilisant l'observateur non linéaire de type super-twisting. Cette approche est plus puissante car notre système est intrinsèquement non linéaire. Nous utilisons le modèle mathématique non linéaire du système pour appliquer cet observateur et analyser les résultats en utilisant la maquette réelle du système.

Mots clés: Système non linéaire, Pendule inversé rotatif, Modélisation mathématique, Observateur linéaire, Observateur non linéaire, Point d'équilibre.

Abstract:

The objective of this study is to develop observation strategies for the nonlinear system of the rotary inverted pendulum. Since our system has four states, it is challenging to obtain a complete estimation of all the states. That's why we are using observers.

Two observation approaches are applied in this study. In the linear approach, we employ the Luenberger observer on the linear model of the system, and then we analyze the results using 3D simulations.

Next, we explore a nonlinear approach by using the nonlinear super-twisting observer. This approach is more powerful as our system is inherently nonlinear. We apply this observer using the nonlinear mathematical model of the system and analyze the results using the actual system's physical model.

Keywords: Nonlinear system, Rotary inverted pendulum, Mathematical modeling, Linear observer, Nonlinear observer, Equilibrium point.

ملخص:

الهدف من هذه الدراسة هو تطوير استراتيجيات الملاحظة للنظام اللاخطي للنواس المقلوب الدوار. نظرًا لأن نظامنا يحتوي على أربع متغيرات ، فمن الصعب الحصول على تقدير كامل لجميع المتغيرات. لهذا السبب نستخدم المراقبين.

تم تطبيق نهجين للمراقبة في هذه الدراسة. في النهج الخطي ، نستخدم مراقب ليونبرجر على النموذج الخطي للنظام ، ثم نقوم بتحليل النتائج باستخدام المحاكاة ثلاثية الأبعاد.

بعد ذلك ، نستكشف نهجًا غير خطي باستخدام مراقب غير خطي فائق الالتواء. هذا النهج أكثر قوة لأن نظامنا بطبيعته غير خطي. نستخدم النموذج الرياضي غير الخطي للنظام لتطبيق هذا المراقب وتحليل النتائج باستخدام النموذج الحقيقي الفيزيائي للنظام.

الكلمات المفتاحية: النظام غير الخطي ، النواس المقلوب الدوار ، النمذجة الرياضية ، المراقب الخطي ، المراقب غير الخطي ، نقطة التوازن

