

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

MINISTRY OF HIGHER EDUCATION
AND SCIENTIFIC RESEARCH

HIGHER SCHOOL IN APPLIED SCIENCES
- T L E M C E N -



المدرسة العليا في العلوم التطبيقية
École Supérieure en
Sciences Appliquées

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
المدرسة العليا في العلوم التطبيقية
- تلمسان -

Mémoire de fin d'étude

Pour l'obtention du diplôme d'Ingénieur

Filière : Automatique
Spécialité : Automatique

Présenté par : Nidal Omar KOTBI et Boumediene BENZELLAT

Thème

**Modélisation et commande des systèmes
non linéaires par l'opérateur de Koopman**

Soutenu publiquement, le 02/07/ 2023 , devant le jury composé de :

M.Meghebbar Abdelmadjid	MCA	ESSA. Tlemcen	Président
M.Cherki Brahim	Professeur	ESSA. Tlemcen	Encadreur
M.Arichi Fayçal	MCA	ESSA. Tlemcen	Examineur 1
M.Mokhtari Mohammed Rida	MCA	ESSA. Tlemcen	Examineur 2

Année universitaire : 2022 / 2023

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

REMERCIEMENTS

Nous tenons à exprimer nos sincères remerciements à toutes les personnes qui ont contribué de près ou de loin à la réalisation de ce mémoire.

*Tout d'abord, nous souhaitons exprimer notre profonde gratitude à notre encadreur, Monsieur **Cherki Brahim**, pour sa précieuse guidance, son expertise et son soutien tout au long de ce travail. Ses conseils éclairés, sa disponibilité et ses encouragements ont été d'une importance capitale pour la réussite de ce projet. Nous remercions également Messieurs **A.Meghebbar**, **F.Arichi** et **M.R.Mokhtari**, pour avoir accepté d'examiner notre travail.*

Nous tenons également à remercier du fond du cœur nos parents et notre famille pour leur soutien constant, leur amour inconditionnel et leur présence tout au long de ce parcours. Leur soutien moral, leurs encouragements et leurs sacrifices ont été une source d'inspiration et de motivation inestimable pour nous. Nous leur sommes profondément reconnaissants pour tout ce qu'ils ont fait pour nous.

Nous souhaitons également exprimer notre reconnaissance envers nos collègues et amis qui ont partagé cette aventure avec nous. Leurs échanges, leur collaboration et leur amitié ont enrichi cette expérience et ont rendu ce travail plus stimulant. Leurs encouragements et leur support ont été précieux.

Enfin, nous voudrions adresser nos remerciements à toutes les personnes qui ont apporté leur contribution, même minime, à la réalisation de ce mémoire. Vos conseils, vos commentaires et votre soutien ont été d'une grande valeur et ont contribué à améliorer ce travail.

Nous sommes reconnaissants envers chacun d'entre vous pour votre précieuse contribution et votre présence à nos côtés tout au long de ce parcours. Vos encouragements et votre soutien ont été essentiels et nous sommes profondément reconnaissants de vous avoir à nos côtés.

Merci sincèrement à tous.

Nidal Omar KOTBI et Boumediene BENZELLAT.

الملخص

يهدف مشروع السنة الأخيرة هذا إلى تطوير نموذج الحالة الخطية العامة لنظام فيزيائي غير خطي باستخدام بيانات المدخلات و المخرجات التجريبية. لتحقيق هذا الهدف نتبنى نهجًا يجمع بين نظرية مشغل Koopman و Dynamic Mode Decomposition (DMD). تسمح لنا هذه الأساليب بتمثيل السلوك غير الخطي للنظام في مساحة خطية عالية الأبعاد، مما يسهل تحليل النظام ونمذجته. باستخدام DMD ، نحدد الأنماط الديناميكية المهيمنة، والتي يتم استخدامها بعد ذلك كقواعد في هذا الفضاء عالي الأبعاد. في الوقت نفسه، نقوم بتقريب مشغل Koopman للنظام غير الخطي باستخدام هذه الأوضاع الديناميكية المهيمنة. وبمكنا هذا النهج المبتكر من الحصول على نموذج خطي مخفض يجسد الديناميات الرئيسية للنظام على نطاق زمني واسع، متجاوزًا حدود النماذج الخطية التقليدية التي تقتصر على نقطة تشغيل محددة. يفتح هذا النهج وجهات نظر واعدة جديدة لنمذجة الأنظمة الديناميكية المعقدة والتحكم فيها.

تم تطبيق هذه الأساليب على أمثلة من الأنظمة الديناميكية غير الخطية باستخدام عمليات المحاكاة التي أجريت مع MATLAB ، بهدف تصميم وتحديد هذه الأنظمة. من النموذج الخطي الذي تم الحصول عليه، حاولنا أيضًا تطبيق قوانين التحكم لتثبيت الأنظمة أو تحسين أدائها. وقد تحققت نتائج مرضية، ونوقشت استنتاجات هامة.

الكلمات المفتاحية : نموذج حالة خطي شامل، نظام غير خطي، نظرية كوپمان، تحليل الأوضاع الديناميكية (DMD)، محاكاة، تحكم الأنظمة، نموذج مخفض، تحديد الأنظمة، ديناميكا الأنظمة.

ABSTRACT

This final year project aims to develop a global linear state model for a nonlinear physical system using experimental input/output data. To achieve this goal, we adopt an approach that combines the theory of Koopman operator and Dynamic Mode Decomposition (DMD). These methods allow us to represent the nonlinear behavior of the system in a higher-dimensional linear space, facilitating the analysis and modeling of the system. Using DMD, we identify the dominant dynamic modes, which are then used as bases in this higher-dimensional space. Concurrently, we approximate the Koopman operator of the nonlinear system using these dominant dynamic modes. This innovative approach enables us to obtain a reduced linear model that captures the main dynamics of the system over a wide time range, surpassing the limitations of traditional linear models that are limited to a specific operating point. This approach opens up new promising perspectives for modeling and controlling complex dynamical systems.

These approaches have been applied to examples of nonlinear dynamical systems using simulations conducted with MATLAB, aiming to model and identify these systems. From the obtained linear model, we also attempted to apply control laws to stabilize the systems or improve their performance. Satisfactory results have been achieved, and important conclusions have been discussed.

Keywords : global linear state model, nonlinear system, Koopman theory, dynamic mode decomposition (DMD), simulation, system control, reduced model, system identification, system dynamics.

RÉSUMÉ

Ce projet de fin d'études vise à développer un modèle d'état linéaire global pour un système physique non linéaire en utilisant des données expérimentales d'entrée/sortie. Pour atteindre cet objectif, nous adoptons une approche combinant la théorie de l'opérateur de Koopman et la décomposition en modes dynamiques (DMD). Ces méthodes nous permettent de représenter le comportement non linéaire du système dans un espace linéaire de dimension supérieure, facilitant ainsi l'analyse et la modélisation du système. En utilisant la DMD, nous identifions les modes dynamiques dominants, qui sont ensuite utilisés comme bases dans cet espace de dimension supérieure. Parallèlement, nous approximations l'opérateur de Koopman du système non linéaire en utilisant ces modes dynamiques dominants. Cette approche novatrice nous permet d'obtenir un modèle linéaire réduit qui capture les principales dynamiques du système sur une large plage de temps, dépassant ainsi les limitations des modèles linéaires classiques qui se limitent à un point de fonctionnement spécifique. Cette démarche ouvre de nouvelles perspectives prometteuses pour la modélisation et la commande de systèmes dynamiques complexes.

Ces approches ont été appliquées à des exemples de systèmes dynamiques non linéaires à l'aide de simulations réalisées avec MATLAB, dans le but de modéliser et d'identifier ces systèmes. À partir du modèle linéaire obtenu, nous avons tenté aussi d'appliquer des lois de commande pour stabiliser les systèmes ou améliorer leurs performances. Des résultats satisfaisants ont été obtenus et des conclusions importantes ont été discutées.

Mots-clés : modèle d'état linéaire global, système non linéaire, théorie de Koopman, décomposition des modes dynamiques (DMD), simulation, commande des systèmes, modèle réduit, identification des systèmes, dynamique des systèmes.

TABLE DES MATIÈRES

Table des Figures	10
Liste d'abréviations	11
Introduction générale	12
1 État de l'art sur la théorie de Koopman	14
1.1 Introduction :	14
1.2 La théorie de Koopman :	15
1.3 L'histoire de l'opérateur de koopman : [56]	15
1.4 Principales contributions à la théorie de l'opérateur de Koopman : [56]	16
1.5 Difficultés liées à la théorie de Koopman :	18
1.6 Conclusion :	18
2 L'opérateur de Koopman et la décomposition en mode dynamique (DMD)	19
2.1 Introduction :	19
2.2 L'opérateur de Koopman : [14, 56]	20
2.2.1 Introduction à l'opérateur de Koopman :	20
2.2.2 Les mathématiques derrière l'opérateur Koopman :	20
2.2.3 Exemple d'application de l'opérateur de Koopman :	22
2.3 La décomposition en mode dynamique (DMD) : [14, 56, 49]	24
2.3.1 Introduction à la DMD :	24
2.3.2 La décomposition en valeurs singulières (SVD) :	25
2.3.3 L'algorithme DMD :	29
2.3.4 La décomposition spectrale et le développement DMD :	32
2.3.5 Les application et les limites de la DMD :	33
2.3.6 La décomposition en mode dynamique avec contrôle (DMDe) : [14, 49]	36
2.3.7 Décomposition en Mode Dynamique étendu (<i>Extended DMD, EDMD</i>) :	39
2.4 Conclusion :	41

3	Application de l'opérateur de Koopman sur quelques systèmes	42
3.1	Introduction :	42
3.2	Application de la DMD :	42
3.2.1	Exemple 1 : Deux fonctions mixtes	42
3.2.2	Exemple 2 : Équation de Duffing	49
3.2.3	Exemple 3 : Équation de Van der pol (oscillateur non forcé)	52
3.2.4	Conclusion :	60
3.3	Application de la DMDC (avec contrôle) :	61
3.3.1	Exemple 1 : Système linéaire instable avec un régulateur proportionnel (1 ^{er} cas de DMDC : La matrice B est connue (1))	61
3.3.2	Exemple 2 : Pendule simple	63
3.3.3	Exemple 3 :	71
3.3.4	Conclusion :	76
3.4	Application de l'EDMD :	77
3.4.1	Exemple 1 :	77
3.4.2	Exemple 2 :	80
3.4.3	Conclusion :	84
3.5	Conclusion du chapitre :	85
	Conclusion générale	87

TABLE DES FIGURES

2.1	Schéma illustrant l'opérateur de Koopman pour les systèmes dynamiques non linéaires, d'après [10]. Les lignes en pointillés de $y_k \rightarrow x_k$ indiquent que nous aimerions pouvoir récupérer l'état d'origine	22
2.2	Visualisation du système de Koopman linéaire à trois dimensions à partir de (2.13) avec la projection de la dynamique sur le plan $x_1 - x_2$. La variété lente attirante est montrée en rouge, la contrainte $y_3 = y_1^2$ est montrée en bleu, et le sous-espace instable lent de (2.13) est montré en vert. Les trajectoires noires du système de Koopman linéaire dans y sont projetées sur les trajectoires du système non linéaire complet dans x dans le plan $y_1 - y_2$. Ici, $\mu = -0,05$ et $\lambda = -1$. Reproduit de Brunton et al. [10]	23
2.3	Schéma des matrices dans la SVD complète et économique (<i>full and economy SVD</i>).	26
2.4	Schéma de la SVD tronquée . Le sous-script " <i>rem</i> " indique le reste de \hat{U} , $\hat{\Sigma}$ ou V après la troncature.	28
2.5	Vue d'ensemble de la DMD illustrée sur l'écoulement de fluide autour d'un cylindre circulaire à un nombre de Reynolds de 100. Reproduite à partir de [31].	32
2.6	Aperçu des applications de l'analyse de Koopman basée sur les données via la DMD. Figures reproduites avec permission de : (a) haut [53], bas [51]; (b) [50]; (c) [26]; (d) [19]; (e) [9]; (f) provenant de Emw https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Protein_PCMT1_PDB_1i1n.png ; (g) provenant de Henk Monster https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Power_grid_masts_besides_the_new_Waalbridge_Nijmegen_-_panoramio.jpg ; (h) provenant de Daderot https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Minsky%27s_robot_arm,_late_1960s,_view_2_-_MIT_Museum_-_DSC03759.JPG . Reproduite à partir de [13]	35
3.1	Les profils et les dynamiques des signaux f_1 et f_2	43
3.2	Des graphiques en 3D montrant l'évolution des deux modes f_1 et f_2 avec le temps.	43
3.3	Le tracé spatial-temporel en 3D du signal mixte f	44
3.4	Les profils et les dynamiques résultant d'application de la DMD.	44
3.5	Le tracé spatial-temporel en 3D du signal mixte f identifié par DMD.	45
3.6	Les profils et les dynamiques résultant d'application de la SVD.	46
3.7	SVD (modes)	46
3.8	Comparaison entre les modes récupérés par la DMD (en bleu et rouge) et ceux récupérés par l'analyse SVD (décomposition en valeurs singulières) ou PCA (analyse en composantes principales) (en mauve et jaune).	47

3.9	Le tracé spatial-temporel en 3D du signal mixte f , en prédictant son état deux fois dans le futur.	47
3.10	Différentes perspectives de Koopman pour l'oscillateur de Duffing, $\ddot{x} = x - x^3$, l'équation pour une particule dans un double puits de potentiel. (a) La linéarisation traditionnelle près des points fixes donne de petites régions où le système est approximativement linéaire. (b) La théorie de Koopman peut étendre le théorème de Hartman-Grobman pour élargir le domaine de linéarité jusqu'au prochain point fixe [32]. Reproduite à partir de [13].	49
3.11	Le portrait de phase de l'équation de Duffing.	49
3.12	L'évolution temporelle du système original de l'équation de Duffing.	50
3.13	L'évolution du système linéaire résultant.	51
3.14	Le portrait de phase du système original de Van Der Pol.	53
3.15	L'évolution du système original de Van Der Pol.	53
3.16	L'évolution du système linéaire résultant.	54
3.17	Le portrait de phase du système original de Van Der Pol pour $x_0 = [10; 3]$	55
3.18	L'évolution du système original de Van Der Pol pour $x_0 = [10; 3]$	56
3.19	L'évolution du système linéaire résultant.	56
3.20	Le portrait de phase des états reconstruits à l'aide de DMD pour $x_0 = [10; 3]$	57
3.21	L'évolution du système original de Van Der Pol pour $x_0 = [10; 3]$	57
3.22	L'évolution du système original de Van Der Pol pour $x_0 = [10; 3]$ dans un temps de simulation = 2000.	58
3.23	L'évolution du système linéaire résultant pour des données suffisantes.	59
3.24	Le portrait de phase des états reconstruits à l'aide de DMD pour des données suffisantes.	59
3.25	Le tracé des données générées X_{data}	61
3.26	La commande appliquée sur notre pendule.	65
3.27	L'évolution temporelle du système étudié X_{data}	65
3.28	Le portrait de phase du système étudié.	66
3.29	Comparaison des données reconstruites par la DMDC X_{dmdc} (en bleu et marron) avec les données du système étudié X_{data} (en vert).	67
3.30	Erreur de reconstruction des états par DMDC : Différence entre les données reconstruites et les données originales.	68
3.31	Le portrait de phase du système étudié.	68
3.32	Stabilisation du modèle non linéaire.	69
3.33	Stabilisation du modèle non linéaire.	70
3.34	La commande appliquée sur notre système non linéaire.	72
3.35	L'évolution temporelle du système étudié X_{data}	72
3.36	Comparaison des données reconstruites par la DMDC X_{dmdc} (en bleu et marron) avec les données du système étudié X_{data} (en vert).	74
3.37	Erreur de reconstruction des états par DMDC : Différence entre les données reconstruites et les données originales.	74
3.38	Résultat de la stabilisation de système non linéaire en boucle ouvert en utilisant la commande u_{lqr}	75
3.39	Portrait de phase du modèle linéaire X_{dmdc}	76
3.40	Comparaison des données reconstruites par l'EDMD X_{edmd} (en bleu et marron) avec les données du système étudié X_{data} (en vert).	78
3.41	Erreur de reconstruction des états par l'EDMD : Différence entre les données reconstruites et les données originales.	79

3.42	Portrait de phase du modèle reconstruit X_{edmd} (à droite) et du modèle initial X_{data} (à gauche)	79
3.43	La commande appliquée sur notre système non linéaire.	81
3.44	L'évolution temporelle du système étudié X_{data} sous la commande (3.58).	82
3.45	Une comparaison entre les résultats de la reconstruction de l'état x_1 obtenus par l'EDMD ($x_{1,EDMD}$ en vert) et les données du système original correspondantes ($x_{1,data}$ en bleu).	82
3.46	Une comparaison entre les résultats de la reconstruction de l'état x_2 obtenus par l'EDMD ($x_{2,EDMD}$ en vert) et les données du système original correspondantes ($x_{2,data}$ en bleu).	83
3.47	Erreur de reconstruction des états par l'EDMD : Différence entre les données reconstruites et les données originales.	83

LISTE D'ABRÉVIATIONS

Acronyme	Signification
DMD	Dynamic Mode Decomposition
KMD	Koopman Mode Decomposition
LQR	Linear Quadratic Regulator
DMDc	Dynamic Mode Decomposition with control
KIC	Koopman operator Identification with Control
EDMD	Extended Dynamic Mode Decomposition
MPC	Model Predictive Control
KRONIC	Koopman Reduced Order Nonlinear Identification and Control
aDMDc	algebraic Dynamic Mode Decomposition with control
EDP	Équation aux Dérivées Partielles
POD	Proper Orthogonal Decomposition
SVD	Singular Value Decomposition
ECOG	Electrocorticography
sech	sécante hyperbolique
PCA	Principal Component Analysis

INTRODUCTION GÉNÉRALE

La plupart des systèmes physiques présentent une dynamique non linéaire complexe, ce qui rend la recherche de solutions analytiques coûteuseS en termes de calcul, voire parfois impossible à trouver. Pour résoudre ces systèmes, la linéarisation est une approche courante, mais elle peut entraîner une perte de fidélité et de précision dans la modélisation en raison des limites du type de linéarisations utilisée.

Ce mémoire propose une méthode spectrale novatrice basée sur l'opérateur de Koopman pour contourner ces limitations. Cette approche présente plusieurs avantages significatifs par rapport à d'autres méthodes de linéarisation des systèmes non linéaires. Elle permet de préserver la fidélité de la dynamique non linéaire tout en fournissant une approximation linéaire plus précise des systèmes. Contrairement aux méthodes analytiques, la méthode de Koopman peut être appliquée à des systèmes non linéaires complexes sans contraintes de calcul. Elle se base sur l'utilisation de données expérimentales ou simulées, ce qui la rend adaptée pour capturer les comportements réels des systèmes. De plus, elle offre des perspectives intéressantes pour la commande de ces systèmes en utilisant des modèles linéaires.

L'opérateur de Koopman est un outil puissant qui permet de plonger le comportement non linéaire dans un espace de dimension supérieure où il peut être traité de manière linéaire. En utilisant des méthodes pilotées par les données, comme la décomposition en modes dynamiques (DMD) et ses variantes, il est possible d'approximer l'opérateur de Koopman pour des systèmes dynamiques non linéaires spécifiques. La DMD est une méthode couramment utilisée pour cette tâche. De plus, elle peut être adaptée aux systèmes dynamiques avec commande en utilisant une variante appelée Décomposition en mode dynamique avec contrôle (DMDC). Pour les systèmes présentant une complexité non linéaire, la DMD étendue (EDMD) peut être utilisée.

Notre travail débute par un premier chapitre consacré à l'état de l'art de la méthode de l'opérateur de Koopman. Nous y présentons la théorie, son historique et ses principales contributions. Nous abordons également les difficultés et les avantages de cette approche.

Dans le deuxième chapitre, nous posons les bases mathématiques de la théorie de l'opérateur de Koopman. Étant donné que l'opérateur de Koopman est approximé à l'aide de méthodes basées sur les données, nous nous concentrons sur la décomposition en modes dynamiques (DMD), l'un des outils les plus importants. Nous détaillons la méthode de décomposition en valeurs singulières (SVD) qui sous-tend la DMD, et nous étudions également ses variantes, telles que la DMDC et l'EDMD, qui permettent d'approximer l'opérateur de Koopman de manière plus précise.

Enfin, dans le troisième chapitre, nous appliquons ces méthodes basées sur les données à des systèmes de dynamique non linéaire afin d'évaluer leur efficacité. Nous utilisons la DMD pour capturer les principales dynamiques du comportement du système, en identifiant les modes dynamiques ou les motifs spatio-temporels qui contribuent le plus à l'évolution du système. Nous utilisons ensuite ces modes pour construire un modèle linéaire permettant de prédire l'évolution du système. Nous tentons également de commander le système non linéaire en utilisant le modèle linéaire généré. Ce chapitre présente également l'interprétation des résultats obtenus et les conclusions tirées de notre recherche.

En résumé, ce mémoire présente une méthode prometteuse basée sur la théorie de l'opérateur de Koopman et les méthodes pilotées par les données pour générer une approximation linéaire des systèmes non linéaires sur une large plage temporelle, et non seulement autour d'un point de fonctionnement spécifique. Cette approche ouvre de nouvelles possibilités pour la modélisation et la commande de systèmes dynamiques complexes.

CHAPITRE 1

ÉTAT DE L'ART SUR LA THÉORIE DE KOOPMAN

1.1 Introduction :

L'émergence de la théorie de l'opérateur de Koopman a été facilitée par les progrès des systèmes basés sur les données et de l'informatique. Cette théorie offre une nouvelle perspective alternative pour décrire les systèmes dynamiques en identifiant des états intrinsèques et des systèmes de coordonnées alternatifs grâce à l'utilisation de l'opérateur de Koopman. En obtenant de nouvelles représentations linéaires de systèmes non linéaires, des changements significatifs peuvent être apportés dans la façon dont nous modélisons, prédisons et contrôlons des systèmes similaires. Ce chapitre fournit une vue d'ensemble de l'opérateur de Koopman et une revue de la littérature sur la théorie de Koopman et ses applications.

1.2 La théorie de Koopman :

La théorie de Koopman est une théorie mathématique qui a été développée par Bernard Koopman dans les années 1930 [27]. Elle s'est d'abord appliquée à la mécanique quantique, mais elle a été étendue à de nombreux autres domaines, notamment les systèmes dynamiques, la théorie du chaos, la physique statistique, la théorie de l'information et la théorie de la communication.

Koopman a tenté de résoudre un problème fondamental en mécanique quantique : comment étudier l'évolution temporelle des systèmes quantiques sans devoir résoudre l'équation de Schrödinger à chaque instant ? Il a proposé une solution élégante en introduisant l'**opérateur de Koopman**, un opérateur unitaire linéaire qui préserve la structure des observables quantiques. Ainsi, l'évolution temporelle des observables plutôt que celle des états quantiques eux-mêmes a pu être décrite dans des systèmes quantiques complexes.

Plus tard, l'opérateur de Koopman a été généralisé pour s'appliquer aux systèmes dynamiques classiques.

Actuellement, la théorie de Koopman est un axe de recherche actif dans plusieurs domaines, tels que la physique, les mathématiques appliquées et l'ingénierie. Les recherches les plus récentes ont porté sur l'application de cette théorie à la détection de changements, la modélisation de systèmes complexes et la commande de systèmes dynamiques.

Depuis son introduction dans les années 1930, la théorie de Koopman a été largement étudiée et développée. À l'origine, la théorie était conçue pour les systèmes linéaires, mais des travaux ultérieurs ont montré comment étendre la théorie à des systèmes non-linéaires. Cette extension est basée sur l'utilisation de fonctions de base et d'opérateurs de Koopman non-linéaires. La théorie de Koopman a également été utilisée pour formuler des problèmes de contrôle dans un cadre de systèmes dynamiques linéaires et non-linéaires, ce qui permet de concevoir des lois de commande plus robustes et plus efficaces. Des algorithmes numériques ont également été développés pour l'analyse et la simulation de systèmes dynamiques, utilisant des techniques d'optimisation, de calcul numérique et d'apprentissage automatique. Enfin, la théorie de Koopman a également trouvé des applications dans le domaine de l'apprentissage automatique, permettant de modéliser des systèmes dynamiques complexes et de prédire leur évolution future.

Plus récemment, la théorie de Koopman a suscité un intérêt croissant avec l'avènement de l'apprentissage automatique et de l'intelligence artificielle. Elle offre un cadre mathématique solide pour l'étude et la modélisation de systèmes dynamiques complexes, ce qui peut être utile dans de nombreux domaines, tels que la robotique, la finance et la biologie computationnelle.

1.3 L'histoire de l'opérateur de koopman : [56]

L'origine de l'opérateur de Koopman remonte aux travaux pionniers de Koopman [27], qui a introduit un opérateur capable de générer une transformation unitaire dans les systèmes dynamiques hamiltoniens. Le travail de Koopman a ensuite été étendu grâce aux efforts de collaboration avec John von Neumann en 1932 [28], où ils ont exploré la théorie spectrale associée à l'opérateur que Koopman avait découvert un an plus tôt.

Cependant, la méthode analytique de modélisation de systèmes dynamiques à l'aide de cet opérateur n'a pas été mise en pratique pendant environ 70 ans car les calculs étaient considérés comme trop difficiles à réaliser sans assistance. Ce n'est que dans les années 2000 que l'opérateur de Koopman est réapparu dans les recherches d'Igor Mezic [39, 41], qui a démontré comment réduire et reconstruire des espaces d'états de grande dimension à partir de données.

Mezic a également utilisé les valeurs propres significatives de l'opérateur de Koopman pour identifier et analyser les motifs dans la dynamique de données apparemment chaotiques, connus sous le nom de modes de Koopman.

Plus tard, Rowley et al. [51] a utilisé l'opérateur de Koopman pour analyser l'écoulement de fluides complexes. Leur approche consistait à capturer discrètement des structures pertinentes grâce à une décomposition en modes de Koopman (KMD), qui servait de méthode basée sur les données pour établir une connexion entre les mesures d'un système et ses dynamiques correspondantes dans l'espace d'état. Pour identifier KMD, Rowley et ses collègues ont utilisé des algorithmes de réduction dimensionnelle développés initialement par Schmid et al. [53]. Dans leur travail, Schmid et al. [53] ont également proposé une approche basée sur les données pour déterminer des informations dynamiques à partir d'un champ d'écoulement passant dans un cylindre, et identifier les modes dominants décrivant la dynamique dans un processus appelé la décomposition de mode dynamique (DMD). Ensemble, les travaux de Schmid [53] et de Rowley [51] ont développé une relation étroite entre KMD et DMD, et les deux techniques de décomposition sont devenues populaires pour étudier les écoulements non linéaires en particulier [52, 34, 31, 25], ainsi que dans d'autres domaines qui seront décrits plus en détail dans la section 1.4.

1.4 Principales contributions à la théorie de l'opérateur de Koopman : [56]

La théorie de Koopman a attiré l'attention de chercheurs renommés tels que Mezić Igor [40], Peter J. Schmid [53], Steve Brunton [15, 12], Matthew O. Williams [67] et Hassan Arbabi [4]. Leurs travaux ont contribué à l'avancement de la théorie de Koopman dans des domaines variés tels que la dynamique des fluides, l'apprentissage automatique, la mécanique quantique, la robotique et l'ingénierie électrique. Ces chercheurs ont développé des approches novatrices pour modéliser et contrôler des systèmes dynamiques complexes en utilisant les opérateurs de Koopman. Leur travail a ouvert de nouvelles perspectives pour l'analyse et la résolution de problèmes complexes dans ces domaines.

Brunton et al. ont exploré la relation entre l'opérateur de Koopman et plusieurs fonctions observables pour former un sous-espace de Koopman et développer un opérateur de Koopman [11]. Leur étude a montré que la matrice d'état dérivée de l'approximation de l'opérateur de Koopman pour des systèmes spécifiques pourrait être utilisée pour développer des lois de contrôle par un régulateur linéaire quadratique (LQR). De plus, Proctor et al. [49] ont étendu leurs recherches antérieures sur la décomposition dynamique en modes (DMD) pour créer une méthode DMD avec contrôle (DMDc) afin d'extraire des modèles de contrôle de faible ordre à partir de systèmes de plus grande dimension en tant que base de l'algorithme DMD. Cette variante de DMD a donné des résultats positifs dans l'analyse des données de maladies infectieuses. Proctor et al. [48] ont introduit une technique pour déterminer l'opérateur de Koopman d'un système en considérant ses entrées et son contrôle (KIC), basée sur les recherches antérieures de DMDc.

Des efforts ont également été déployés pour améliorer la précision de l'opérateur de Koopman en "levant" les états du système vers un ensemble d'observables, limitant ainsi les données requises de DMD et étendant l'algorithme DMD (EDMD) [68]. Korda et al. [30] ont introduit l'application de l'EDMD pour plonger les dynamiques non linéaires sur des états augmentés et ont exploré la recherche de lois de contrôle pour les systèmes en utilisant le contrôle prédictif basé sur le modèle (MPC). Certains travaux ont également été réalisés pour optimiser les méthodes de boosting dynamique en optimisant le dictionnaire de fonctions utilisé pour booster les variables d'état via l'EDMD avec l'apprentissage de dictionnaire [33].

Les applications de l'opérateur de Koopman ont été explorées dans le domaine de la robotique, où l'opérateur est utilisé pour développer des contrôleurs en boucle fermée pour les systèmes de pendule [1]. Kaiser et al. [25] ont exploré l'application de la théorie de l'opérateur de Koopman dans la génération de contrôle basé sur l'énergie en utilisant une variante de la DMD avec contrôle appelée "Extended Dynamic Mode Decomposition with Control" (EDMDc), et l'a comparée à une autre méthode de détermination de l'opérateur de Koopman appelée "Koopman Reduced Order Nonlinear Identification and Control" (KRONIC).

Cependant, l'opérateur de Koopman n'est pas une solution miracle pour résoudre les systèmes dynamiques; un travail récent de Gonzalez et al. [23] vise à démontrer certaines des faiblesses de l'opérateur de Koopman et des algorithmes DMD et propose des approches alternatives de reconstruction. Avec la popularité croissante de l'opérateur de Koopman, de nombreux travaux ont montré sa viabilité dans l'approximation de systèmes dynamiques non linéaires avec cet opérateur linéaire depuis les travaux de Mezic [39] et Mezic et al. [30]. Plus récemment, Surana [58] et Surana et Banazuk [59] ont exploré l'utilisation d'un opérateur de Koopman et d'un filtre de Kalman. Comme mentionné précédemment, les propriétés de l'opérateur de Koopman sont très attrayantes lorsqu'il s'agit d'explorer l'utilisation d'un filtre de Kalman; les aspects de modélisation de dynamiques non linéaires axés sur les données fonctionnent en tandem avec les contraintes d'un filtre de Kalman conventionnel. Dans ce travail, ils explorent la levée des dynamiques du système et des matrices d'observation à partir de données d'un système donné. Dans [59], Surana et Banazuk démontrent l'utilisation du filtre de Koopman-Kalman dans un système dynamique non linéaire canonique avec un sous-espace de Koopman de dimension finie, en utilisant des méthodes conventionnelles pour approximer l'opérateur avec ses valeurs propres et ses vecteurs propres. Dans [45], Netto et Mili explorent l'utilisation d'un filtre de Kalman robuste basé sur l'opérateur de Koopman à vraisemblance maximale généralisée pour estimer les états d'un générateur de puissance et comparent leur filtre au travail de Surana et Banazuk. Dans [70], Yeung et al. utilisent l'apprentissage en profondeur pour apprendre l'opérateur de Koopman des systèmes non linéaires en optimisant la façon dont les dictionnaires utilisés pour EDMD sont trouvés et utilisés sur des domaines spécifiques. En utilisant ces dictionnaires, le travail analyse et prédit la dynamique d'un oscillateur glycolytique de plusieurs centaines d'étapes dans le futur. D'autres méthodes d'incorporation ont été développées dans [20], où Fonzi et al. ont développé une autre variante de DMDc pour les modèles aéroélastiques pour les ailes morphantes appelée "algebraic dynamic mode decomposition with control (aDMDc)". Cette variation de DMD prend en compte les dynamiques aérostructurales changeantes sur le corps des profils aérodynamiques qui sont modélisés dans le travail.

1.5 Difficultés liées à la théorie de Koopman :

La théorie de Koopman présente plusieurs difficultés. Tout d'abord, c'est une méthode mathématique complexe qui peut être difficile à appliquer pour les personnes qui n'ont pas une formation approfondie en mathématiques et en physique. De plus, la construction de la base de fonctions dépend des données collectées qui doivent être collectées avec soin pour garantir la validité de la méthode. La théorie de Koopman peut également être sensible aux erreurs de mesure, ce qui peut entraîner des erreurs dans la construction de la base de fonctions.

Les autres difficultés sont :

- **La sélection de la base de fonctions** : La théorie de Koopman nécessite la construction d'une base de fonctions pour représenter la dynamique du système. Cependant, le choix de cette base de fonctions peut être difficile, et les bases de fonctions courantes ne sont pas toujours optimales pour certains systèmes dynamiques.

- **L'extension aux systèmes chaotiques** : Bien que la théorie de Koopman ait été initialement développée pour des systèmes dynamiques réguliers, son application aux systèmes chaotiques est plus difficile en raison de la complexité et de l'imprévisibilité de la dynamique chaotique.

- **Le traitement des données expérimentales** : La construction d'une base de fonctions précise et complète nécessite souvent une grande quantité de données, ce qui peut poser des défis pour les applications pratiques.

- **Les applications à grande échelle** : La théorie de Koopman est plus facilement applicable aux systèmes de petite et moyenne échelle, mais son application aux systèmes de grande échelle, tels que les réseaux électriques ou les systèmes de transport, est plus difficile.

- **L'interprétation physique** : La théorie de Koopman fournit des descriptions mathématiques précises de la dynamique des systèmes, mais il est souvent difficile de donner une interprétation physique à ces descriptions.

1.6 Conclusion :

Dans ce chapitre, nous avons donné les principales idées sur la théorie de Koopman et les contributions les plus importantes de cette théorie à la résolution des problèmes des systèmes dynamiques, ainsi que les difficultés posées par cette méthode.

CHAPITRE 2

L'OPÉRATEUR DE KOOPMAN ET LA DÉCOMPOSITION EN MODE DYNAMIQUE (DMD)

2.1 Introduction :

Dans ce chapitre, nous discuterons du concept et des mathématiques sous-jacentes à l'opérateur de Koopman et à l'algorithme DMD (Dynamic Mode Decomposition). Nous aborderons également la DMD avec contrôle (DMDc), l'EDMD et leur relation avec l'approximation de l'opérateur de Koopman à partir des données de l'espace d'état.

Notre objectif est d'utiliser des méthodes pilotées par les données (data-driven methods) pour approximer l'opérateur de Koopman, qui est un opérateur de dimension infinie qui fait évoluer linéairement l'état d'un système dynamique dans un espace de dimension infinie. Pour cela, nous utiliserons la méthode DMD, qui est une méthode de décomposition en modes dynamiques à partir de données expérimentales.

Plus précisément, la DMD utilise des mesures des états d'un système dynamique pour trouver les modes dominants de ce système à partir des données et reconstruire une représentation linéaire de l'évolution du système.

En effet, l'opérateur de Koopman permet de représenter la dynamique d'un système comme une transformation linéaire dans l'espace des fonctions. La DMD utilise cette représentation pour extraire des modes dynamiques et reconstruire l'évolution temporelle du système à partir de ces modes. Ainsi, la DMD est une méthode pratique pour l'analyse des systèmes dynamiques basée sur l'opérateur de Koopman, et qui permet de traiter efficacement les données expérimentales.

2.2 L'opérateur de Koopman : [14, 56]

2.2.1 Introduction à l'opérateur de Koopman :

La théorie de l'opérateur de Koopman est récemment apparue comme une perspective alternative pour les systèmes dynamiques en termes de l'évolution des mesures. En 1931, Bernard O. Koopman a démontré qu'il était possible de représenter un système dynamique non linéaire en termes d'un opérateur linéaire de dimension infinie agissant sur un espace de Hilbert de fonctions de mesure de l'état du système. Cet opérateur de Koopman est linéaire, et sa décomposition spectrale caractérise complètement le comportement d'un système non linéaire, de manière analogue à $\frac{dx}{dt} = Ax$. Cependant, il est également de dimension infinie, car il y a une infinité de degrés de liberté requis pour décrire l'espace de toutes les fonctions de mesure possibles de l'état. Cela pose de nouveaux défis. Obtenir des approximations matricielles de dimension finie de l'opérateur de Koopman est l'objet d'efforts de recherche intenses et promet de permettre des représentations globalement linéaires de systèmes dynamiques non linéaires. L'expression de la dynamique non linéaire dans un cadre linéaire est attrayante en raison de la richesse des techniques d'estimation et de contrôle optimal disponibles pour les systèmes linéaires et de la capacité à prédire analytiquement l'état futur du système. Obtenir une approximation de dimension finie de l'opérateur de Koopman a été difficile en pratique, car cela implique d'identifier un sous-espace engendré par un sous-ensemble des fonctions propres de l'opérateur de Koopman. L'opérateur de Koopman est souvent calculé à partir de données de l'espace d'état en utilisant des algorithmes de décomposition en modes dynamiques (DMD) ou des variantes telles que la DMDc et l'EDMD.

2.2.2 Les mathématiques derrière l'opérateur Koopman :

Considérons l'évolution d'un système dynamique autonome :

$$\frac{d}{dt}x = f(x) \quad (2.1)$$

Où x est un vecteur, $x \in \mathbb{R}^n$, et f est une fonction Lipschitzienne continue, garantissant l'existence et l'unicité des solutions de (2.1). Pour une formulation plus générale, voir [2].

Nous considérerons également le système dynamique en temps discret :

$$x_{k+1} = F(x_k) \quad (2.2)$$

Où la règle F applique l'espace d'état sur lui-même, c'est-à-dire $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. Également connue sous le nom d'**application**, la dynamique en temps discret est plus générale que la formulation en temps continu présentée dans l'équation (2.1), englobant également les systèmes discontinus et hybrides.

Les dynamiques en temps discret peuvent être induites à partir des dynamiques en temps continu, où x_k est obtenu en échantillonnant discrètement la trajectoire de l'équation (2.1) dans le temps, de sorte que $x_k = x(k\Delta t)$. Le propagateur en temps discret $F_{\Delta t}$ est maintenant paramétré par l'étape de temps Δt . Pour un temps arbitraire t , le flot (*flow map*) F_t est définie comme suit :

$$F_t(x(t_0)) = x(t_0) + \int_{t_0}^{t_0+t} f(x(\tau))d\tau. \quad (2.3)$$

La perspective en temps discret est souvent plus naturelle lorsqu'on considère des données expérimentales et un contrôle numérique.

L'opérateur de Koopman fait avancer les fonctions de mesure de l'état avec le flot des dynamiques. Nous considérons des fonctions scalaire de mesures réelles $g : \mathbf{M} \rightarrow \mathbb{R}$, qui sont des éléments d'un espace de Hilbert de dimension infinie. Les fonctions g sont également communément appelées **observables**, cela n'a aucun rapport avec la notion *l'observabilité* de la théorie du contrôle. Typiquement, l'espace de Hilbert est donné par les fonctions carrées sommables sur M ; d'autres choix d'un espace de mesure sont également valables. L'opérateur de Koopman K_t est un opérateur linéaire de dimension infinie qui agit sur les fonctions de mesure g comme suit :

$$\mathcal{K}_t g = g \circ F_t, \quad (2.4)$$

Où \circ est l'opérateur de composition. Pour un système à **temps discret** avec un pas de temps Δt , cela devient :

$$\mathcal{K}_{\Delta t} g(x_k) = g(F_{\Delta t}(x_k)) = g(x_{k+1}), \quad (2.5)$$

Dans l'équation (2.4), l'opérateur de Koopman fait évoluer l'observable par rapport au temps de manière continue, tandis que dans l'équation (2.5), l'opérateur de Koopman fait évoluer la dynamique en temps discret par rapport à Δt , qui est l'intervalle entre k et $k + 1$ dans la série temporelle. Plus de détails sur les liens entre ces deux représentations peuvent être trouvés dans [25, 14, 48, 30, 38].

En d'autres termes, l'opérateur de Koopman définit un système dynamique linéaire en dimension infinie qui fait avancer l'observable $g_k = g(x_k)$ vers l'étape de temps suivante :

$$g(x_{k+1}) = \mathcal{K}_{\Delta t} g(x_k), \quad (2.6)$$

Notez que ceci est vrai pour n'importe quelle fonction observable g et pour n'importe quel état x_k . L'opérateur de Koopman est linéaire, une propriété héritée de la linéarité de l'opération d'addition dans les espaces de fonctions :

$$\mathcal{K}_t(\alpha_1 g_1(x) + \alpha_2 g_2(x)) = \alpha_1 g_1(F_t(x)) + \alpha_2 g_2(F_t(x)) \quad (2.7)$$

$$= \alpha_1 \mathcal{K}_t g_1(x) + \alpha_2 \mathcal{K}_t g_2(x) \quad (2.8)$$

Pour des systèmes dynamiques suffisamment réguliers, il est également possible de définir l'analogue continu dans le temps du système dynamique de Koopman dans l'équation (2.6) :

$$\frac{d}{dt} g = \mathcal{K} g, \quad (2.9)$$

L'opérateur \mathcal{K} est le générateur infinitésimal de la famille à un paramètre de transformations \mathcal{K}_t [2]. Il est défini par son action sur une fonction observable g :

$$\mathcal{K} g = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\mathcal{K}_t g - g}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{g \circ F_t - g}{t} \quad (2.10)$$

Les systèmes dynamiques linéaires dans les équations (2.9) et (2.6) sont analogues aux systèmes dynamiques dans les équations (2.1) et (2.2), respectivement. Il est important de noter que l'état d'origine x peut être l'**observable**, et l'opérateur de dimension infinie \mathcal{K}_t fera avancer cette fonction. Cependant, la représentation simple de l'observable $g = \mathbf{x}$ dans une base choisie pour l'espace de Hilbert peut devenir arbitrairement complexe une fois itérée à travers la dynamique. En d'autres termes, trouver une représentation pour $\mathcal{K}\mathbf{x}$ peut ne pas être simple ou direct.

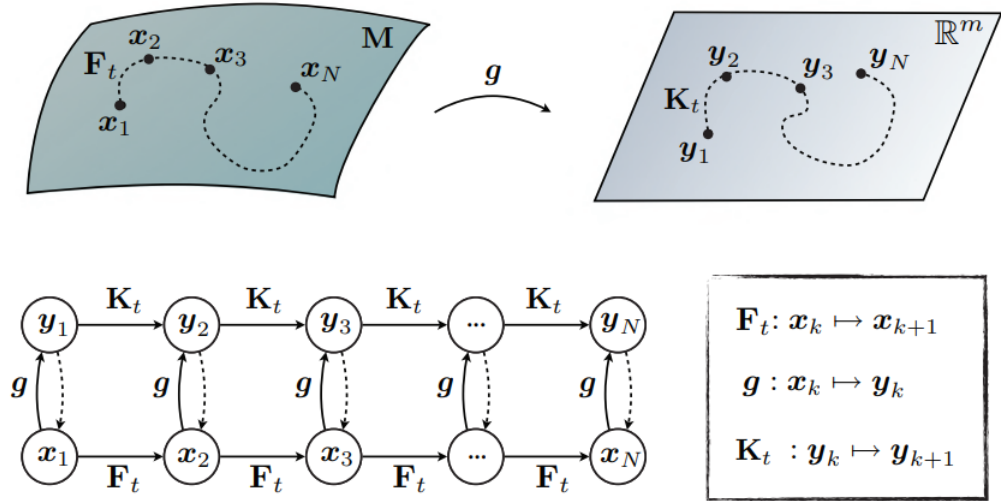


FIGURE 2.1 – Schéma illustrant l'opérateur de Koopman pour les systèmes dynamiques non linéaires, d'après [10]. Les lignes en pointillés de $y_k \rightarrow x_k$ indiquent que nous aimerions pouvoir récupérer l'état d'origine

Cependant, comme le montre la figure (Fig. 2.1), cet opérateur fait progresser la mesure du changement de dynamique au fil du temps [14, 48, 30].

2.2.3 Exemple d'application de l'opérateur de Koopman :

Voici un exemple qui nous permet de mieux comprendre l'opérateur de Koopman. Considérons l'équation différentielle non linéaire à deux variables d'états et un point fixe, défini comme suit :

$$\dot{x}_1 = \mu x_1 \quad (2.11)$$

$$\dot{x}_2 = \lambda(x_2 - x_1^2) \quad (2.12)$$

Le terme au carré dans (2.12) montre bien la non-linéarité. Si $\lambda < \mu < 0$, alors la dynamique de x_2 converge rapidement vers x_1^2 , de sorte que $x_2 = x_1^2$ soit un attracteur lent [31]. Cet exemple a été utilisé pour démontrer la capacité de l'opérateur de Koopman à capturer une dynamique non linéaire en termes d'opérateur linéaire sur des mesures non linéaires de l'état X [31].

En particulier, il est possible d'augmenter l'état X avec la mesure non linéaire $g = x_1^2$. Donc, si nous restreignons l'opérateur de Koopman à un sous-espace observable couvert par les mesures x_1, x_2 et x_1^2 , nous obtenons un système dynamique linéaire sur ces trois états qui fait progresser l'état original X :

$$\text{Pour : } Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_1^2 \end{bmatrix} \implies \dot{Y} = \begin{bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \\ \dot{y}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & -\lambda \\ 0 & 0 & 2\mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

Dans ce cas l'opérateur de Koopman se réduit à la matrice : $\mathcal{K} = \begin{bmatrix} \mu & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & -\lambda \\ 0 & 0 & 2\mu \end{bmatrix}$.

L'espace vectoriel observable de Koopman à trois dimensions complet est visualisé dans la figure (2.2). Les trajectoires qui commencent sur la variété invariante $y_3 = y_1^2$, visualisée par la surface bleue, sont contraintes à rester sur cette variété. Il y a un sous-espace *lent*, engendré par les vecteurs propres correspondant aux valeurs propres lentes μ et 2μ ; ce sous-espace est visualisé par la surface verte. Enfin, il y a la variété asymptotiquement attractive d'origine du système, $y_2 = y_1^2$, qui est visualisée comme la surface rouge. Les surfaces paraboliques bleue et rouge se croisent toujours en une parabole inclinée à 45 degrés dans la direction $y_2 - y_3$. La surface verte se rapproche de cette inclinaison de 45 degrés à mesure que le rapport entre les dynamiques rapides et lentes devient de plus en plus grand. Dans l'espace vectoriel observable de Koopman à trois dimensions complet, la dynamique produit un seul nœud stable, avec des trajectoires attirées rapidement vers le sous-espace vert, puis approchant lentement le point fixe.

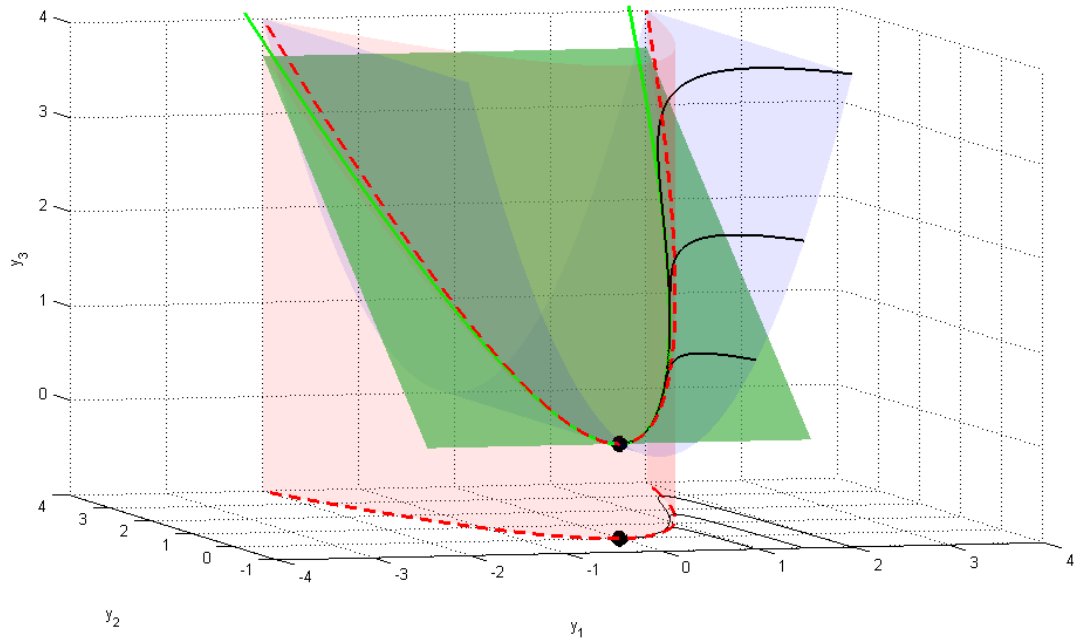


FIGURE 2.2 – Visualisation du système de Koopman linéaire à trois dimensions à partir de (2.13) avec la projection de la dynamique sur le plan $x_1 - x_2$. La variété lente attirante est montrée en rouge, la contrainte $y_3 = y_1^2$ est montrée en bleu, et le sous-espace instable lent de (2.13) est montré en vert. Les trajectoires noires du système de Koopman linéaire dans y sont projetées sur les trajectoires du système non linéaire complet dans x dans le plan $y_1 - y_2$. Ici, $\mu = -0,05$ et $\lambda = -1$. Reproduit de Brunton et al. [10]

Cependant, dans la plupart des cas, il est extrêmement difficile de trouver l'opérateur Koopman. Par exemple :

$$\frac{dx}{dt} = x^2 \longrightarrow \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ x^2 \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

Bien que cela semble être un système dynamique très simple, nous constaterons que nous ne pouvons pas trouver facilement l'opérateur de Koopman comme dans l'exemple précédent. Si nous utilisons la représentation augmentée $[x, x^2]$, nous trouvons que :

$$\frac{d}{dx} y_2 = \frac{d}{dx} x^2 = 2x\dot{x} = 2x^3 \quad (2.15)$$

Comme nous pouvons le voir, x^3 n'est pas contenu dans l'espace d'état d'origine, ce qui signifie que nous aurons besoin d'inclure un autre x^3 , puis x^4 , x^5 ... qui deviendra de dimension infinie, nous ne parviendrons jamais à une solution fermée et nous aurons un nombre infini d'états et nous devons utiliser une expansion de Taylor pour la résoudre. L'intuition de cet exemple est que si nous choisissons simplement une série de Taylor, une série de Fourier, cela ne fonctionnera généralement pas comme un bon opérateur de Koopman.

Pour ce système pour lequel il n'est pas facile de trouver l'opérateur de Koopman fini, la méthode consiste à trouver les fonctions propres sur lesquelles l'opérateur de Koopman pourrait avoir des dimensions finies. Lorsque nous examinons l'exemple $\dot{x} = x^2$, nous pouvons voir qu'une fonction $\phi(x) = \exp(1/x)$ satisfait :

$$\frac{d}{dt}\phi(x) = x^{-2}\phi(x)\dot{x} = \phi(x) \quad (2.16)$$

Ce qui signifie que sur cette observable $\phi(x)$, le système deviendra un système linéaire. Cela semble très magique.

La fonction magique $\exp(1/x)$ est en fait la solution à cette EDP (Équation aux Dérivées Partielles).

2.3 La décomposition en mode dynamique (DMD) : [14, 56, 49]

2.3.1 Introduction à la DMD :

La Dynamic Mode Decomposition (DMD) est une technique de factorisation et de réduction de dimension pour les séquences de données. Dans sa forme la plus courante, elle traite des mesures séquentielles de grande dimension, extrait des structures cohérentes, isole le comportement dynamique et réduit les processus d'évolution complexes à leurs caractéristiques et composants essentiels. La décomposition est intimement liée à l'analyse de Koopman et, depuis son introduction, a engendré diverses extensions, généralisations et améliorations. Elle a été appliquée aux séquences de données numériques et expérimentales prises à partir de systèmes fluides simples à complexes et a également eu un impact au-delà de la dynamique des fluides dans, par exemple, la surveillance vidéo, l'épidémiologie, la neurobiologie et l'ingénierie financière.

La décomposition en modes dynamiques (DMD) a été développée par Schmid [53, 54], dans la communauté de la dynamique des fluides pour identifier des structures cohérentes spatio-temporelles à partir de données de haute dimension. DMD est basée sur la décomposition en modes orthogonaux propres (Proper orthogonal Decomposition, POD), qui utilise la décomposition en valeurs singulières (SVD) computationnellement efficace, de sorte qu'elle s'adapte bien pour fournir une réduction de dimensionnalité efficace dans les systèmes de grande dimension.

La DMD fournit une décomposition modale dans laquelle chaque mode est composé de structures spatialement corrélées qui ont le même comportement linéaire dans le temps (par exemple, des oscillations à une fréquence donnée avec une croissance ou une décroissance). Ainsi, la DMD ne fournit pas seulement une réduction de la dimensionnalité en termes du nombre de modes nécessaires pour représenter avec précision la dynamique du système, mais elle fournit également une décomposition physiquement significative des données en structures cohérentes spatialement avec des comportements temporels distincts.

Peu après le développement de l'algorithme DMD original [53, 54], Rowley, Mezić et leurs collaborateurs [51] ont établi une connexion importante entre la DMD et la théorie de Koopman. La DMD peut être formulée comme un algorithme permettant d'identifier le système dynamique linéaire le mieux adapté qui fait progresser les mesures de grande dimension vers l'avant dans le temps [64].

De cette manière, la DMD approxime l'opérateur de Koopman restreint à l'ensemble des mesures directes de l'état d'un système de grande dimension.

Enfin, la DMD est une plateforme extrêmement flexible, à la fois mathématiquement et numériquement, facilitant les innovations liées à la compression de données, la théorie de contrôle et les techniques multi-résolutions.

2.3.2 La décomposition en valeurs singulières (SVD) :

Introduction à la SVD :

La décomposition en valeurs singulières (SVD) est l'une des factorisations de matrice les plus importantes de l'ère informatique, fournissant une base pour plusieurs méthodes de données. La SVD fournit une décomposition de matrice numériquement stable qui peut être utilisée à des fins variées et qui est garantie d'exister.

La SVD est une technique mathématique fondamentale utilisée dans l'analyse des données et l'apprentissage automatique. Elle permet de décomposer une matrice en trois matrices plus simples, ce qui peut faciliter l'analyse et la compréhension des données.

La SVD est largement utilisée dans les domaines de la reconnaissance de formes, de la compression de données, de la reconnaissance de la parole, de l'analyse de texte et de l'optimisation des systèmes de recommandation.

La décomposition en valeurs singulières est une généralisation de la décomposition en valeurs propres, qui permet de décomposer une matrice en vecteurs propres et valeurs propres. La SVD étend cette idée en permettant de décomposer n'importe quelle matrice, même si elle n'est pas carrée.

En bref, la SVD est une méthode puissante pour simplifier la compréhension des données complexes et pour améliorer les performances des algorithmes d'apprentissage automatique en réduisant la dimensionnalité des données.

Définition de la SVD :

En général, nous sommes intéressés à analyser un ensemble de données volumineux $X \in \mathbb{C}^{n \times m}$:

$$X = \begin{bmatrix} | & | & \cdots & | \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_m \\ | & | & \cdots & | \end{bmatrix} \quad (2.17)$$

Les colonnes $x_k \in \mathbb{C}^n$ peuvent être des mesures provenant de simulations ou d'expériences. Par exemple, les colonnes peuvent représenter des images qui ont été remodelées en vecteurs colonnes avec autant d'éléments que de pixels dans l'image. Les vecteurs colonnes peuvent également représenter l'état d'un système physique qui évolue dans le temps, comme la vitesse de fluide en un ensemble de points discrets, un ensemble de mesures neuronales, ou l'état d'une simulation météorologique avec une résolution d'un kilomètre carré.

L'indice k est une étiquette indiquant le k^{eme} ensemble distinct de mesures. X consistera en une série chronologique (*time-series*) de données, et $x_k = x(k\Delta t)$. Souvent, la dimension d'état n est très grande, de l'ordre de millions ou de milliards de degrés de liberté.

Les colonnes sont souvent appelées *snapshots*, et m est le nombre de snapshots dans X . Pour de nombreux systèmes, $n \gg m$, ce qui donne une matrice haute et mince (*tall-skinny*), par opposition à une matrice courte et large (*short-fat*) lorsque $n \ll m$.

La SVD est une décomposition matricielle **unique** qui existe pour chaque matrice $X \in \mathbb{C}^{n \times m}$ à valeurs complexes :

$$X = U\Sigma V^* \quad (2.18)$$

Où : $U \in \mathbb{C}^{n \times n}$ et $V \in \mathbb{C}^{m \times m}$ sont des matrices orthogonales, et $\Sigma \in \mathbb{R}^{n \times m}$ est une matrice avec des entrées réelles non négatives sur la diagonale et des zéros hors de la diagonale. Ici, * représente la transposée conjuguée complexe¹.

Lorsque $n \geq m$, la matrice Σ a au plus m éléments non nuls sur la diagonale, et peut s'écrire comme $\Sigma = \begin{bmatrix} \hat{\Sigma} \\ 0 \end{bmatrix}$. L'équation (2.18) peut s'écrire dans ce cas comme suit :

$$X = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ u_1 & u_2 & \cdots & u_n \\ | & | & & | \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 & \cdots & 0 \\ & \sigma_2 & \\ & & \ddots \\ 0 & \cdots & \sigma_m \\ \hline 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} | & | & \cdots & | \\ v_1 & v_2 & \cdots & v_n \\ | & | & & | \end{bmatrix}^* \quad (2.19)$$

Par conséquent, il est possible de représenter *exactement* X en utilisant la SVD économique (*economy SVD*) :

$$X = U\Sigma V^* = \begin{bmatrix} \hat{U} & \hat{U}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\Sigma} \\ 0 \end{bmatrix} V^* = \hat{U}\hat{\Sigma}V^*. \quad (2.20)$$

Avec $\hat{U} \in \mathbb{C}^{n \times m}$, $\hat{\Sigma} \in \mathbb{R}^{m \times m}$ et $V \in \mathbb{C}^{m \times m}$.

La SVD complète (*Full SVD*) et la *economy SVD* sont affichés dans la figure suivante (2.3) :

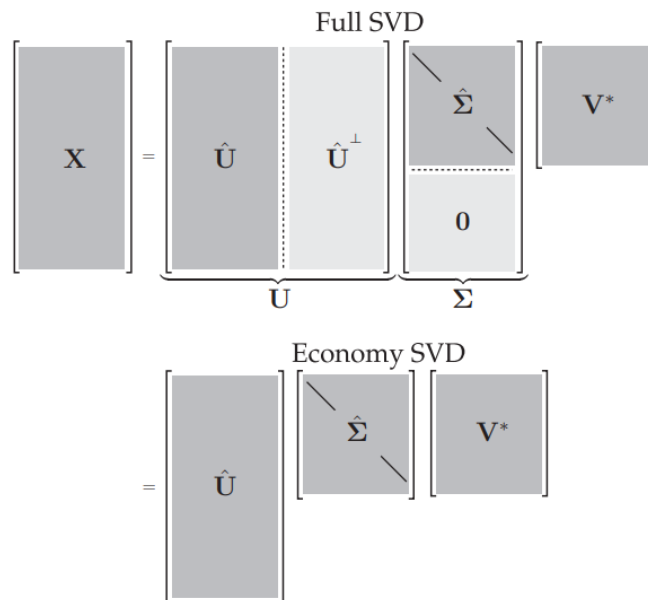


FIGURE 2.3 – Schéma des matrices dans la SVD complète et économique (*full and economy SVD*).

1. Pour les matrices à valeurs réelles, cela équivaut à la transposée régulière $X^* = X^T$.

Les colonnes de \hat{U}^T engendrent un espace vectoriel complémentaire et orthogonal à celui engendré par \hat{U} . Les colonnes de U sont appelées vecteurs singuliers gauches (*left singular vectors*) de X et les colonnes de V sont les vecteurs singuliers droits (*right singular vectors*). Les éléments diagonaux de $\hat{\Sigma} \in \mathbb{R}^{m \times m}$ sont appelés valeurs singulières (*singular values*) et elles sont classées par ordre décroissant tel que :

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3 \geq \dots \geq \sigma_m > \sigma_{m+1} = \dots = 0, \quad (2.21)$$

Le rang de X est égal au nombre de valeurs singulières non nulles : $\text{rank}(X) = m$.

Les notations suivantes pour les valeurs singulières sont souvent adoptées : [71]

$$\bar{\sigma}(X) = \sigma_{\max}(X) = \sigma_1 = \text{la plus grande valeur singulière de } X; \quad (2.22)$$

$$\underline{\sigma}(X) = \sigma_{\min}(X) = \sigma_m = \text{la plus petite valeur singulière de } X. \quad (2.23)$$

Deux propriétés importantes sont déduites de la SVD de X :

- $\|X\| = \sigma_1$ (Notons que $\|X\|$ est la norme euclidienne 2, $\|X\| := \|X\|_2$).

- $\|X\|_F^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \dots + \sigma_m^2$.

Où : $\|\cdot\|_F$ est la norme de Frobenius.

Note :

Soit $A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{m \times n}$, la norme de Frobenius $\|A\|_F$ est définie comme la racine carrée de la somme des carrés des valeurs absolues de tous les éléments de la matrice. Mathématiquement, elle peut être exprimée comme suit :

$$\|A\|_F := \sqrt{\text{trace}(A^*A)} = \sqrt{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2} \quad (2.24)$$

La résultat est une valeur scalaire non négative qui représente la "taille" ou la "magnitude" de la matrice.

La commande Matlab :

```
Full SVD >> [U, S, V] = svd(X); % X = UΣV*
Economy SVD >> [U, S, V] = svd(X, 'econ'); % X = ŨŜV*
```

La SVD tronquée (*truncated SVD*) : [14, 49]

La propriété la plus utile et déterminante de la décomposition en valeurs singulières (SVD) est qu'elle fournit une approximation optimale de bas rang d'une matrice X . En fait, la SVD fournit une hiérarchie d'approximations de bas rang, car une approximation de rang- r est obtenue en conservant les r premières valeurs singulières et vecteurs, et en supprimant le reste.

Schmidt (de Gram-Schmidt) a généralisé la SVD aux espaces fonctionnels et a développé un théorème d'approximation, établissant que la SVD tronquée (*truncated SVD*) est l'approximation optimale de bas rang de la matrice sous-jacente X [55]. Le théorème d'approximation de Schmidt a été redécouvert par Eckart et Young [18] et est parfois appelé le théorème d'Eckart-Young.

La SVD tronquée de X conduit à la décomposition suivante :

$$X = \hat{U} \hat{\Sigma} V^* = \begin{bmatrix} \tilde{U} & \hat{U}_{\text{rem}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\Sigma} & 0 \\ 0 & \hat{\Sigma}_{\text{rem}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{V}^* \\ V_{\text{rem}}^* \end{bmatrix} \quad (2.25)$$

$$X \approx \tilde{U} \tilde{\Sigma} \tilde{V}^*, \quad (2.26)$$

Où $\hat{U} \in \mathbb{C}^{n \times m}$, $\hat{\Sigma} \in \mathbb{R}^{m \times m}$, $V^* \in \mathbb{C}^{m \times m}$, $\tilde{U} \in \mathbb{C}^{n \times r}$, $\tilde{\Sigma} \in \mathbb{R}^{r \times r}$, $\tilde{V}^* \in \mathbb{C}^{r \times m}$, "rem" indique les valeurs singulières restantes $m - r$, et * représente la transposée conjuguée complexe. L'équation (2.26) démontre comment réduire la dimension de la matrice de données X en choisissant de manière appropriée une valeur de troncature r des valeurs singulières, éliminant ainsi les termes restants ("rem") et permettant d'obtenir la pseudo-inverse puisque $\tilde{\Sigma}$ est **carrée**. Le choix approprié de la valeur de troncature r a une riche histoire scientifique ; notamment, le théorème d'Eckart-Young fournit une méthode rigoureuse et populaire pour choisir r [18, 42, 22]. De plus, il existe des développements théoriques récents visant à identifier le bon r lorsque X peut présenter du bruit additif [21, 16].

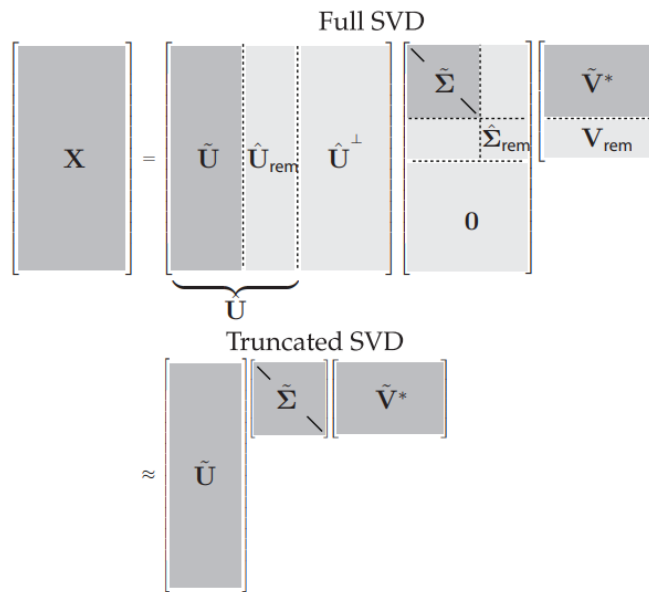


FIGURE 2.4 – Schéma de la **SVD tronquée**. Le sous-script "rem" indique le reste de \hat{U} , $\hat{\Sigma}$ ou V après la troncature.

La SVD tronquée est illustrée dans la figure (Fig. 2.4), avec \tilde{U} , $\tilde{\Sigma}$ et \tilde{V} désignant les matrices tronquées. Si X n'a pas un rang complet, alors certaines des valeurs singulières dans $\hat{\Sigma}$ peuvent être nulles, et la SVD tronquée peut toujours être exacte. Cependant, pour des valeurs de troncature r qui sont inférieures au nombre de valeurs singulières non nulles (c'est-à-dire le rang de X), la SVD tronquée ne donne qu'une approximation de X :

$$X \approx \tilde{U} \tilde{\Sigma} \tilde{V}^* \quad (2.27)$$

Si nous choisissons la valeur de troncature pour conserver toutes les valeurs singulières non nulles, alors $X = \tilde{U} \tilde{\Sigma} \tilde{V}^*$ est exact.

2.3.3 L'algorithme DMD :

Plusieurs algorithmes ont été proposés pour DMD, bien que nous présentions ici le cadre exact de la DMD développé par Tu et al. [64]. La exacte DMD repose sur une décomposition en valeurs singulières efficace et numériquement bien conditionnée, tout comme la formulation originale de Schmid [53].

DMD est intrinsèquement basé sur les données, donc la première étape consiste à collecter un certain nombre de paires de snapshots de l'état d'un système au fur et à mesure de son évolution dans le temps.

DMD repose sur l'hypothèse que l'état d'un système est relié au suivant par :

$$x_{k+1} = Ax_k, \quad (2.28)$$

Ici, $x(t) \in \mathbb{R}^n$ et $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, c'est la matrice décrivant l'évolution de l'état du système de manière continue dans le temps, l'indice k indique l'itération temporelle d'un système dynamique discret.

Les mesures simulées ou expérimentales pour x_k sont ensuite collectées à des intervalles de temps réguliers Δt pour devenir des *snapshots* à utiliser dans un système à temps discret. Le pas de temps Δt est suffisamment petit pour résoudre les fréquences les plus élevées dans la dynamique.

Ces snapshots sont collectés et ensuite organisés en deux matrices de données, X et X' :

$$\begin{aligned} X &= \begin{bmatrix} | & | & \cdots & | \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_{m-1} \\ | & | & & | \end{bmatrix} \\ X' &= \begin{bmatrix} | & | & & | \\ x_2 & x_3 & \cdots & x_m \\ | & | & & | \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.29)$$

- Les lignes de la matrice de données X représentent les mesures par snapshot de temps, et les colonnes représentent les snapshots de temps (qui évoluent dans le temps).

- X' est une grande matrice de données décalée, elle avance d'un pas de temps vers le futur.

L'algorithme DMD cherche la décomposition spectrale principale (c'est-à-dire les valeurs propres et les vecteurs propres) de l'opérateur linéaire A qui correspond le mieux à l'avancement de X vers X' (les deux matrices de snapshots) dans le temps \rightarrow Construire un modèle dynamique linéaire :

$$X' \approx AX \quad (2.30)$$

Si nous supposons un échantillonnage uniforme dans le temps, cela devient :

$$x_{k+1} \approx Ax_k, \quad (2.31)$$

La matrice A la mieux adaptée établit un système dynamique linéaire qui fait avancer approximativement les mesures de snapshots dans le temps, ce qui peut être formulé mathématiquement comme un problème d'optimisation :

$$A = \underset{A}{\operatorname{argmin}} \| X' - AX \|_F = X' X^\dagger \quad (2.32)$$

Où : $\| \cdot \|_F$ est la norme de Frobenius (expliquée dans la section 2.3.2).

Ainsi, par régression :

$$\implies A = X' X^\dagger \quad (2.33)$$

X^\dagger : la pseudo-inverse de X .

La pseudo-inverse peut être calculée à l'aide de la SVD de $X = U\Sigma V^*$ en tant que $X^\dagger = V\Sigma^{-1}U^*$. Où $*$ désigne la transposée conjuguée complexe. Les colonnes de U sont connues sous le nom de modes POD.

Il convient de noter à ce stade que la matrice A dans (2.31) ressemble étroitement à l'opérateur de Koopman dans (2.6), si nous choisissons des mesures linéaires directes de l'état, de sorte que $g(x) = x$. Cette connexion a été établie à l'origine par Rowley, Mezic et leurs collaborateurs [51] et a suscité un intérêt considérable à la fois pour la DMD et la théorie de Koopman.

- L'algorithme exacte de la DMD de Tu et al. [64] est donné par les étapes suivantes :

1. Premièrement, on prend la décomposition en valeurs singulières (SVD) de X (voir section 2.3.2) :

$$X \approx \tilde{U}\tilde{\Sigma}\tilde{V}^* \quad (2.34)$$

Où : V^* : Transposée conjuguée de V .

$\tilde{U} \in \mathbb{C}^{n \times r}$; $\tilde{\Sigma} \in \mathbb{R}^{r \times r}$ et $\tilde{V} \in \mathbb{C}^{m \times r}$ ($\tilde{V}^* \in \mathbb{C}^{r \times m}$).

r est le rang de l'approximation réduite (SVD tronquée) de la matrice de données X , qui peut être soit exact, soit approximatif, $r \leq m$.

En pratique, choisir le rang approximatif r est l'une des étapes les plus importantes et subjectives de la DMD, et de la réduction de la dimensionnalité en général.

Les colonnes de la matrice \tilde{U} sont également connues sous le nom de *modes POD*, et elles satisfont $\tilde{U}^*\tilde{U} = I$. De même, les colonnes de \tilde{V} sont orthonormales et satisfont $\tilde{V}^*\tilde{V} = I$.

La réduction SVD est utilisée à cette étape de l'algorithme pour extraire de la matrice de données les informations les plus importantes (minimiser le rang). Plus précisément, si une structure de basse dimension est présente dans les données, les valeurs singulières diminueront rapidement pour atteindre zéro avec peut-être seulement quelques modes dominants.

2. D'après (2.32), une matrice d'approximation \bar{A} de la matrice complète A peut être calculée en utilisant la pseudo-inverse de X trouvée par la méthode SVD (2.26) :

$$A \approx \bar{A} = X^\dagger \tilde{V} \tilde{\Sigma}^{-1} \tilde{U}^*. \quad (2.35)$$

Un modèle dynamique du processus peut être construit selon ce qui suit :

$$x_{k+1} = \bar{A}x_k; \quad (2.36)$$

Où x et \bar{A} ont la même dimension que les matrices décrites précédemment dans (2.31).

Cependant, le calcul peut être excessivement coûteux en termes de temps de calcul et de mémoire si $n \gg 1$.

Donc il n'est pas recommandé de calculer directement la matrice d'approximation \bar{A} dans ce cas, car \bar{A} est une matrice de taille $(n \times n)$ et n peut être très grand.

À la place, lorsque $r \ll n$, nous pouvons calculer une approximation de faible rang $\tilde{\bar{A}}$, qui est un modèle plus compact et efficace sur le plan computationnel de taille $(r \times r)$ et peut être trouvé en projetant x_k sur un sous-espace linéaire de dimension r .

Cependant, nous sommes seulement intéressés par les r premières valeurs propres et vecteurs propres de A , et nous pouvons donc projeter A sur les modes POD de U en utilisant une transformation de base de cette façon :

$$\tilde{A} = \tilde{U}^* \bar{A} \tilde{U} = \tilde{U}^* X' \tilde{V} \tilde{\Sigma}^{-1}. \quad (2.37)$$

De plus, le calcul est efficace car $\tilde{A} \in \mathbb{R}^{r \times r}$ et $r \ll n$.

La clé de l'observation ici est que malgré sa taille réduite, la matrice réduite \tilde{A} conserve les mêmes valeurs propres non nulles que la matrice complète A , qui codent le comportement à long terme du système. Cet opérateur dynamique réduit peut toujours capturer les dynamiques dominantes du système, car il est obtenu en projetant A ($\bar{A} \approx A$) sur les modes POD dominants (les colonnes de la matrice \tilde{U}), ce qui nous permet de représenter le comportement du système dans un espace de dimension inférieure.

L'opérateur dynamique réduit \tilde{A} est une approximation linéaire de faible rang de l'opérateur dynamique réel A , qui décrit l'évolution des modes POD dans le temps.

La matrice d'ordre réduit \tilde{A} définit un modèle linéaire de basse-dimension pour la dynamique du vecteur de coefficients POD \tilde{x} :

$$\tilde{x}_{k+1} = \tilde{A} \tilde{x}_k \quad (2.38)$$

Il est possible de reconstruire l'état de haute-dimension x (l'état complet) à partir de l'état réduit \tilde{x} en utilisant la matrice \tilde{U} , comme suit :

$$x = \tilde{U} \tilde{x} \quad (2.39)$$

-
3. Calculer la décomposition propre (spectrale) de \tilde{A} :

$$\tilde{A} W = W \Lambda \quad (2.40)$$

Les entrées de la matrice diagonale Λ sont les valeurs propres de DMD, qui correspondent également aux valeurs propres de la matrice complète A : croissance/décroissance, oscillations. Les colonnes de W sont des vecteurs propres de \tilde{A} et fournissent une transformation de coordonnées qui diagonalise la matrice. Ces colonnes peuvent être considérées comme des combinaisons linéaires d'amplitudes de modes POD qui se comportent linéairement avec un seul motif temporel donné par λ .

-
4. Finalement, nous pouvons calculer les modes DMD Φ en utilisant les vecteurs propres de \tilde{A} (c'est-à-dire les colonnes de W) et les corrélations spatiales correspondantes entre les mesures (c'est-à-dire les colonnes de $X' \tilde{V} \tilde{\Sigma}^{-1}$), comme suit :

$$\Phi = X' \tilde{V} \tilde{\Sigma}^{-1} W, \quad (2.41)$$

Ici, X' est la matrice instantanée décalée dans le temps, \tilde{V} et $\tilde{\Sigma}$ sont obtenus à partir de la SVD de X' , et W est la matrice des vecteurs propres du système réduit \tilde{A} . Les colonnes de Φ correspondent aux modes DMD, qui décrivent la structure spatiale du comportement dynamique du système en tant que corrélations spatiales entre les mesures.

Remarquablement, ces modes DMD sont des vecteurs propres de la matrice A de grande dimension correspondant aux valeurs propres dans Λ , comme le montre Tu et al. [64] :

$$A\Phi = (X'\tilde{V}\tilde{\Sigma}^{-1}\underbrace{\tilde{U}^*}_{\tilde{A}})(X'\tilde{V}\tilde{\Sigma}^{-1}W) \quad (2.42)$$

$$= X'\tilde{V}\tilde{\Sigma}^{-1}\tilde{A}W \quad (2.43)$$

$$= X'\tilde{V}\tilde{\Sigma}^{-1}W\Lambda \quad (2.44)$$

$$= \Phi\Lambda. \quad (2.45)$$

Parce que A est une représentation approximative de l'opérateur de Koopman restreint à un sous-espace de mesures linéaires de dimension finie, nous nous intéressons souvent aux vecteurs propres Φ et aux valeurs propres Λ de A tels que : $A\Phi = \Phi\Lambda$ (2.45).

Donc, cela nous montre que nous pouvons obtenir les valeurs et vecteurs propres de la grande matrice A sans même la calculer réellement, nous travaillons seulement sur \tilde{A} .

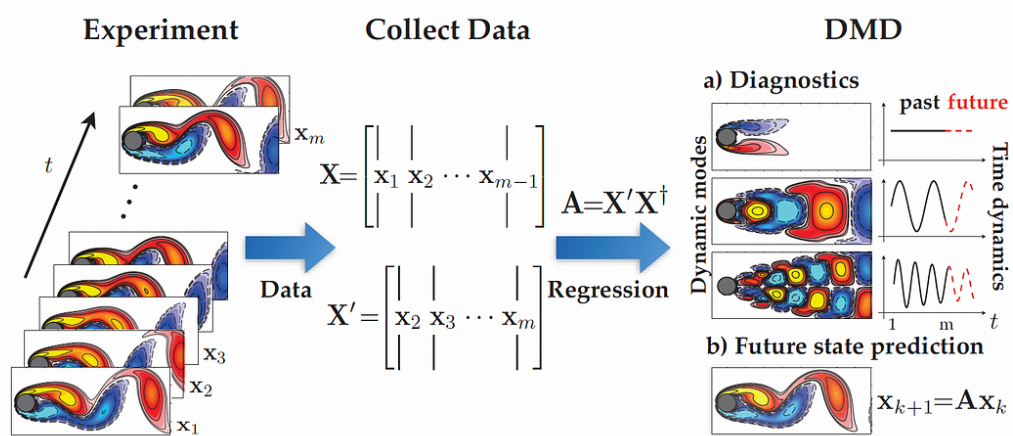


FIGURE 2.5 – Vue d'ensemble de la DMD illustrée sur l'écoulement de fluide autour d'un cylindre circulaire à un nombre de Reynolds de 100. Reproduite à partir de [31].

2.3.4 La décomposition spectrale et le développement DMD :

La Décomposition Spectrale et le développement DMD (DMD Expansion) sont deux techniques utilisées dans l'analyse des systèmes dynamiques.

La Décomposition Spectrale est une méthode utilisée pour décomposer une matrice en ses composantes, afin de mieux comprendre son comportement. La méthode consiste à trouver les valeurs propres et les vecteurs propres de la matrice, qui peuvent être utilisés pour diagonaliser la matrice. La matrice diagonalisée est plus facile à analyser car elle est composée de composantes plus simples, et les valeurs propres et les vecteurs propres peuvent fournir des informations sur le comportement du système.

DMD Expansion, en revanche, est une méthode utilisée pour analyser des données de séries temporelles de systèmes dynamiques. Elle consiste à trouver un ensemble de modes, appelés modes DMD, qui peuvent être utilisés pour approximer le comportement du système dans le temps. Les modes DMD sont obtenus en appliquant l'algorithme DMD aux données de séries temporelles, ce qui implique de trouver les vecteurs propres et les valeurs propres d'un opérateur linéaire qui décrit l'évolution du système dans le temps. Les modes DMD sont ensuite utilisés pour reconstruire le comportement du système, permettant ainsi la prédiction et le contrôle de son comportement.

La Décomposition Spectrale et le développement DMD sont des outils puissants pour l'analyse des systèmes dynamiques, et peuvent être utilisés ensemble pour obtenir une compréhension plus complète du comportement du système.

L'un des aspects les plus importants de la DMD est la capacité à développer l'état du système en termes d'une décomposition spectrale basée sur les données :

$$x_k = \sum_{j=1}^r \phi_j \lambda_j^{k-1} b_j = \Phi \Lambda^{k-1} \mathbf{b}, \quad (2.46)$$

Où ϕ_j sont les modes de DMD (vecteurs propres de la matrice A), λ_j sont les valeurs propres de la DMD (valeurs propres de la matrice A), et b_j est l'amplitude du mode. Le vecteur \mathbf{b} des amplitudes de mode est généralement calculé comme suit :

$$\mathbf{b} = \Phi^\dagger x_1. \quad (2.47)$$

L'expansion spectrale ci-dessus (2.46) peut également être écrite en temps continu en introduisant les valeurs propres continues $\omega = \log(\lambda)/\Delta t$:

$$x(t) = \sum_{j=1}^r \phi_j e^{w_j t} b_j = \Phi e^{\Omega t} \mathbf{b}. \quad (2.48)$$

À $t=0$: $x(0) = \Phi \mathbf{b} \implies \mathbf{b} = \Phi \backslash x(0)$

Où Ω est une matrice diagonale contenant les valeurs propres en temps continu ω_j .

En résumé, à partir de Φ , nous pouvons reconstruire notre approximation de la dynamique temporelle de $x(t)$ en projetant nos approximations sur une solution future, également connue sous le nom de **prédiction d'état futur**.

Pour les systèmes avec des comportements périodiques ou quasi-périodiques dominants et de grande dimension, DMD donne une très bonne approximation même s'ils sont fortement non linéaires.

2.3.5 Les application et les limites de la DMD :

L'un des principaux avantages de la décomposition des modes dynamiques est sa formulation simple en termes de régression linéaire. DMD ne nécessite pas de connaissance des équations gouvernant le système étudié. Pour cette raison, DMD a rapidement été étendue pour inclure plusieurs innovations méthodologiques et a été largement appliquée au-delà de la dynamique des fluides [31], où elle a été développée. Ici, nous présentons des applications prometteuses dans différents domaines, tout en soulignant les limites actuelles de la théorie DMD qui doivent être abordées dans les recherches futures.

Applications de la DMD :

- **La dynamique des fluides :** La DMD est apparue dans la communauté de dynamique des fluides [53] et a depuis été appliquée à une large gamme de géométries de flux (jets, écoulements en cavité, sillages, écoulements de canal, couches limites, etc.) pour étudier la mélange, l'acoustique et la combustion, entre autres phénomènes. Dans l'article original de Schmid [53, 54], à la fois un écoulement en cavité et un jet ont été considérés. Dans l'article original de Rowley et al. [51], un jet dans un écoulement croisé a été étudié. La DMD a également été appliquée aux sillages, notamment pour étudier le verrouillage de fréquence [63], le sillage d'un cylindre [5] et le décrochage dynamique [17]. En acoustique, la DMD a été utilisée pour capturer l'acoustique proche et lointaine résultant des instabilités observées dans les écoulements de cisaillement [57]. En combustion, la DMD a été utilisée pour comprendre la libération de chaleur cohérente dans les flammes turbulentes de tourbillonnement [43]. La DMD a également été utilisée pour analyser des écoulements plus exotiques, notamment un modèle simulé d'un train à grande vitesse [44].
- **Epidémiologie :** DMD a récemment été appliquée pour étudier les systèmes épidémiologiques par Proctor et Eckhoff [50]. Il s'agit d'une application particulièrement interprétable, car les fréquences modales correspondent souvent aux fluctuations annuelles ou saisonnières. De plus, la phase des modes DMD donne un aperçu de la propagation spatiale des fronts de maladies, ce qui peut informer les efforts d'intervention future. L'application de DMD aux systèmes de maladies a également motivé l'utilisation de DMD avec contrôle [49], car il est impossible d'arrêter les vaccinations afin d'identifier la dynamique non forcée.
- **Neurosciences :** Les signaux complexes provenant des enregistrements neuronaux sont de plus en plus fidèles et de haute dimension, les avancées dans le matériel poussant les frontières de la collecte de données. DMD a le potentiel de transformer l'analyse de tels enregistrements neuronaux, comme le montre une étude récente qui a identifié des caractéristiques dynamiquement pertinentes dans les données ECOG de patients en sommeil [9]. Depuis lors, plusieurs travaux ont appliqué DMD à des enregistrements neuronaux ou suggéré une mise en œuvre possible dans le matériel [3, 8, 62].
- **Traitement vidéo :** La séparation des objets avant-plan et arrière-plan dans les vidéos est une tâche courante dans les applications de surveillance. La séparation en temps réel est un défi qui est aggravé par l'augmentation constante des résolutions vidéo. DMD fournit une plate-forme flexible pour la séparation de vidéos, car l'arrière-plan peut être approximé par un mode DMD avec une valeur propre nulle [24, 19, 47].
- **Autres applications :** DMD a été appliqué à un éventail de problèmes de plus en plus diversifié, y compris la robotique [7], la finance [36] et la physique des plasmas [61]. On s'attend à ce que cette tendance continue de croître.

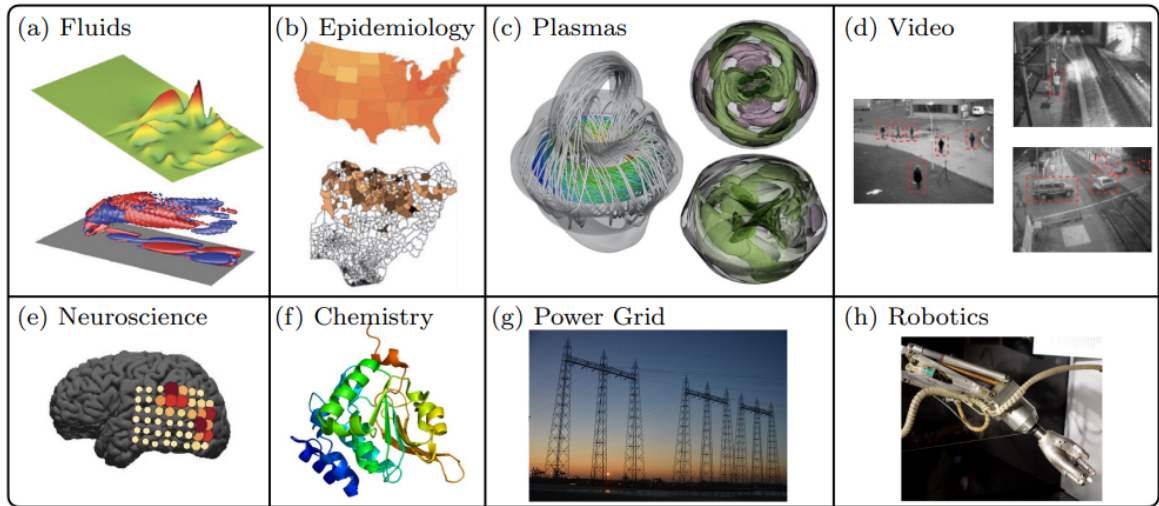


FIGURE 2.6 – Aperçu des applications de l'analyse de Koopman basée sur les données via la DMD. Figures reproduites avec permission de : (a) haut [53], bas [51]; (b) [50]; (c) [26]; (d) [19]; (e) [9]; (f) provenant de Emw https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Protein_PCMT1_PDB_1i1n.png; (g) provenant de **Henk Monster** https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Power_grid_masts_besides_the_new_Waalbridge_Nijmegen_-_panoramio.jpg; (h) provenant de **Daderot** https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Minsky%27s_robot_arm,_late_1960s,_view_2_-_MIT_Museum_-_DSC03759.JPG. Reproduite à partir de [13]

Difficultés liées à l'utilisation de la DMD :

- **Ondes progressives** : La DMD est basée sur la SVD d'une matrice de données $X = U\Sigma V^*$ dont les colonnes sont des mesures spatiales évoluant dans le temps. Dans ce cas, la SVD est une séparation des variables espace-temps en modes spatiaux, donnés par les colonnes de U , et en dynamique temporelle, donnée par les colonnes de V . Comme dans le POD, la DMD présente donc des limitations pour les problèmes qui présentent des ondes progressives, où la séparation des variables est connue pour échouer.
- **Transitoires** : De nombreux systèmes d'intérêt sont caractérisés par des phénomènes transitoires et intermittents. Plusieurs méthodes ont été proposées pour identifier ces événements, telles que le DMD multi-résolution et l'utilisation de coordonnées de retard. Cependant, il est toujours nécessaire de formaliser le choix des échelles de temps pertinentes et de la taille de la fenêtre pour calculer le DMD.
- **Spectre continu** : En relation avec ce qui précède, de nombreux systèmes sont caractérisés par un contenu de fréquence à large bande, par opposition à quelques fréquences distinctes et discrètes. Ce contenu de fréquence à large bande est également appelé spectre continu, où chaque fréquence dans une plage continue est observée. Par exemple, le pendule simple présente un spectre continu, car le système a une fréquence naturelle pour de petites déviations, et cette fréquence se déforme et ralentit continuellement à mesure que de l'énergie est ajoutée au pendule. D'autres systèmes incluent l'optique non linéaire et la turbulence à large bande. Ces systèmes posent un grave défi pour la DMD, car ils résultent en un grand nombre de modes, même si la dynamique est probablement générée par les interactions non linéaires de quelques modes dominants.

- **Fortes non-linéarités et choix de mesures :** Bien que des progrès significatifs aient été réalisés pour connecter DMD aux systèmes non linéaires [69], choisir des mesures non linéaires pour augmenter la régression DMD n'est toujours pas une science exacte. Identifier les sous-espaces de mesure qui restent fermés sous l'opérateur de Koopman est un défi en cours [11]. Les progrès récents dans l'apprentissage en profondeur ont le potentiel de permettre la représentation d'eigenfonctions extrêmement complexes à partir de données [66, 60, 37, 70, 46, 35].

2.3.6 La décomposition en mode dynamique avec contrôle (DMDc) : [14, 49]

Un avantage majeur de DMD est sa capacité à décrire des systèmes dynamiques complexes et de grande dimension en termes d'un petit nombre de modes dominants qui représentent des structures cohérentes spatio-temporelles. La réduction de la dimensionnalité du système de n (souvent des millions ou des milliards) à r (dizaines ou centaines) permet une prédiction plus rapide et une estimation à plus faible latence, ce qui se traduit généralement par des contrôleurs avec une performance et une robustesse accrues.

Proctor et al. [49] ont étendu l'algorithme DMD pour inclure l'effet de l'actionnement et du contrôle, dans l'algorithme appelé DMD avec contrôle (DMDc). Il a été observé que l'application naïve de DMD aux données d'un système avec actionnement (actuation) résultait souvent en une dynamique incorrecte, car les effets de la dynamique interne étaient confondus avec les effets de l'actionnement. DMDc a été initialement motivé par le problème de la caractérisation et du contrôle de la propagation de maladies, où il est déraisonnable d'arrêter les efforts d'intervention (par exemple, les vaccinations) simplement pour obtenir une caractérisation de la dynamique non forcée [50]. Au lieu de cela, si le signal d'actionnement est mesuré, une nouvelle régression DMD peut être formulée afin de dissocier l'effet de la dynamique interne de celui de l'actionnement et du contrôle. Par la suite, cette approche a été étendue pour effectuer DMDc sur des mesures fortement sous-échantillonnées ou compressées par Bai et al. [6].

La méthode DMDc cherche à identifier les meilleurs opérateurs linéaires A et B qui satisfont approximativement les dynamiques suivantes sur les données de mesure :

$$x_{k+1} \approx Ax_k + Bu_k \quad (2.49)$$

La variable d'état x et la commande d'actionnement u sont collectées et organisées dans les matrices de données suivantes :

- La matrice des snapshots X et la matrice de snapshots décalés dans le temps X' de (2.29) :

$$X = \begin{bmatrix} | & & | \\ x_1 & \cdots & x_m \\ | & & | \end{bmatrix}, X' = \begin{bmatrix} | & & | \\ x_2 & \cdots & x_{m+1} \\ | & & | \end{bmatrix} \quad (2.50)$$

- Une matrice de l'historique d'entrée d'actionnement (*matrix of the actuation input history*) Υ est assemblée :

$$\Upsilon = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ u_1 & u_2 & \cdots & u_m \\ | & | & & | \end{bmatrix} \quad (2.51)$$

Les dynamiques dans (2.49) peuvent être écrites en termes de matrices de données :

$$X' \approx AX + B\Upsilon \quad (2.52)$$

Comme dans l'algorithme DMD (voir section 2.3.3), les valeurs propres et vecteurs propres principaux de l'opérateur linéaire A sont obtenus par réduction de dimension et régression. Donc, on distingue 2 cas pour la DMDc :

1. **Premier cas :** Si la matrice d'actionnement (*Actuation Matrix*) B est **connue**, il est alors facile de corriger l'effet de l'actionnement et d'identifier la décomposition spectrale de A en remplaçant X' par $X' - B\Upsilon$ dans l'algorithme DMD.

De (2.52), on tire :

$$(X' - B\Upsilon) \approx AX, \quad (2.53)$$

La résolution de la correspondance A peut être effectuée de manière similaire à (2.33) (Par régression).

Avec $(X' - B\Upsilon)$ est le nouveau X' dans $A = X'X^\dagger$.

Encore une fois, la décomposition en valeurs singulières tronquée de X (2.26) donne la factorisation matricielle $\tilde{U}\tilde{\Sigma}\tilde{V}^*$. Ainsi, \bar{A} l'approximation de A est donnée par la description suivante :

$$A \approx \bar{A} = (X' - B\Upsilon)\tilde{V}\tilde{\Sigma}^{-1}\tilde{U}^*. \quad (2.54)$$

Notez que si les *snapshots* de contrôle sont $u_j = 0$, alors la dérivation est équivalente à la méthode DMD.

Un modèle dynamique à la fois du processus calculé et de la matrice d'entrée donnée peut être construit et décrit par ce qui suit :

$$x_{k+1} = \bar{A}x_k + Bu_k, \quad (2.55)$$

Cependant, si $r \ll n$, un modèle plus compact et plus efficace en termes de calcul peut être trouvé en projetant \bar{A} sur les modes POD dominants de U en utilisant la même transformation de base telle que décrite précédemment pour la méthode DMD.

Le modèle d'ordre réduit peut être dérivé de la manière suivante :

$$\tilde{x}_{k+1} = \tilde{U}^*\bar{A}\tilde{U}\tilde{x}_k + \tilde{U}^*Bu_k \quad (2.56)$$

$$= \tilde{U}^*(X' - B\Upsilon)\tilde{V}\tilde{\Sigma}^{-1}\tilde{x}_k + \tilde{U}^*Bu_k \quad (2.57)$$

$$= \tilde{A}\tilde{x}_k + \tilde{B}\tilde{u}_k \quad (2.58)$$

L'approximation à faible dimension de la matrice A est donnée par ce qui suit :

$$\tilde{A} = \tilde{U}^*(X' - B\Upsilon)\tilde{V}\tilde{\Sigma}^{-1}. \quad (2.59)$$

La décomposition en valeurs propres de \tilde{A} définie par $\tilde{A}W = W\Lambda$ donne des vecteurs propres qui peuvent être utilisés pour trouver les modes dynamiques. Tout comme pour la méthode DMD exacte, les modes dynamiques Φ peuvent être trouvés avec la description suivante :

$$\Phi = (X' - B\Upsilon)\tilde{V}\tilde{\Sigma}^{-1}W. \quad (2.60)$$

2. **Deuxième cas :** Lorsque B est **inconnu**, à la fois A et B doivent être identifiés simultanément en résolvant le problème d'optimisation des moindres carrés suivant :

$$\min_{[A \ B]} \left\| X' - [A \ B] \begin{bmatrix} X \\ \Upsilon \end{bmatrix} \right\|^2 \quad (2.61)$$

Dans ce cas, la dynamique (2.52) peut être reformulée comme suit :

$$X' \approx \begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ \Upsilon \end{bmatrix} = G\Omega. \quad (2.62)$$

Où la solution est donnée par :

$$\begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix} = X' \begin{bmatrix} X \\ \Upsilon \end{bmatrix}^\dagger. \quad (2.63)$$

On a $G = \begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix}$ est obtenue par régression des moindres carrés et $\Omega = \begin{bmatrix} X \\ \Upsilon \end{bmatrix}$, donc (2.63) devient :

$$G \approx X'\Omega^\dagger. \quad (2.64)$$

La matrice $\Omega = \begin{bmatrix} X^* & \Upsilon^* \end{bmatrix}^*$ est généralement une matrice de données de grande dimension, qui peut être approximée à l'aide de la SVD :

$$\Omega = \tilde{U}\tilde{\Sigma}\tilde{V}^* \quad (2.65)$$

Notez que la valeur de troncature de Ω doit être plus grande que celle de X .

De l'équation (2.65) on tire :

$$\Omega^\dagger = \tilde{V}\tilde{\Sigma}^{-1}\tilde{U}^*, \quad (2.66)$$

Cela fournit une approximation de G :

$$G \approx \bar{G} = X'\tilde{V}\tilde{\Sigma}^{-1}\tilde{U}^*. \quad (2.67)$$

La matrice \tilde{U} doit être divisée en deux matrices, $\tilde{U} = \begin{bmatrix} \tilde{U}_1^* & \tilde{U}_2^* \end{bmatrix}^*$, pour fournir des bases pour X et Υ .

Nous pouvons maintenant trouver des approximations des matrices A et B :

$$\begin{bmatrix} A, B \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} \bar{A}, \bar{B} \end{bmatrix} \quad (2.68)$$

$$\approx \begin{bmatrix} X'\tilde{V}\tilde{\Sigma}^{-1}\tilde{U}_1^*, & X'\tilde{V}\tilde{\Sigma}^{-1}\tilde{U}_2^* \end{bmatrix} \quad (2.69)$$

Un modèle dynamique utilisant les matrices \bar{A} et \bar{B} peut être construit et décrit par ce qui suit :

$$x_{k+1} = \bar{A}x_k + \bar{B}u_k \quad (2.70)$$

Mais pour un système de grande dimension où $n \gg 1$, cela devient prohibitif en termes de calcul.

Ici, nous cherchons à nouveau un modèle d'ordre réduit de rang $r \ll n$, où une transformation est nécessaire.

Contrairement à la méthode DMD, les vecteurs singuliers gauche tronqués \tilde{U} ne peuvent pas être utilisés pour définir l'espace sur lequel l'état évolue. Pour (2.69), les vecteurs singuliers gauche tronqués de Ω définissent l'espace d'entrée (*Input space*). Pour trouver une transformation linéaire, nous utilisons un sous-espace d'ordre réduit du sous-espace de sortie (*Output subspace*). Cette observation fondamentale permet à la méthode DMDc de découvrir une représentation d'ordre réduit des dynamiques A et de la matrice d'entrée B .

Pour trouver le sous-espace d'ordre réduit du sous-espace de sortie, une deuxième décomposition en valeurs singulières (SVD) est nécessaire pour la matrice de données de l'espace de sortie X' . Ça veut dire que \tilde{U} de (2.65) fournit une base réduite pour l'espace d'entrée (*input space*), tandis que \hat{U} de :

$$X' = \hat{U}\hat{\Sigma}\hat{V}^* \quad (2.71)$$

définit une base réduite pour l'espace de sortie (*output space*). Il est alors possible d'approximer $G = \begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix}$ en projetant sur cette base :

$$\tilde{G} = \hat{U}^* G \begin{bmatrix} \hat{U} \\ I \end{bmatrix}. \quad (2.72)$$

Les matrices projetées résultantes \tilde{A} et \tilde{B} dans \tilde{G} sont :

$$\tilde{A} = \hat{U}^* \hat{A} \hat{U} = \hat{U}^* X' \tilde{V} \tilde{\Sigma}^{-1} \tilde{U}_1^* \hat{U}. \quad (2.73)$$

$$\tilde{B} = \hat{U}^* \hat{B} = \hat{U}^* X' \tilde{V} \tilde{\Sigma}^{-1} \tilde{U}_2^*. \quad (2.74)$$

Nous pouvons alors former l'équation d'ordre réduit telle que donnée par (2.58) suivante :

$$\tilde{x}_{k+1} = \tilde{A}\tilde{x}_k + \tilde{B}\tilde{u}_k \quad (2.75)$$

Plus important encore, il est possible de récupérer les vecteurs propres Φ de DMD, de la décomposition propre $\tilde{A}W = W\Lambda$:

$$\Phi = X' \tilde{V} \tilde{\Sigma}^{-1} \tilde{U}_1^* \hat{U} W. \quad (2.76)$$

2.3.7 Décomposition en Mode Dynamique étendu (*Extended DMD, EDMD*) :

Maintenant, nous allons introduire une variante de la méthode DMD appelée "Extended Dynamic Mode Decomposition" (EDMD). La DMD étendue (EDMD) est une extension de la DMD qui permet de modéliser des systèmes fortement non linéaires en identifiant les changements non linéaires de coordonnées nécessaires pour approximer l'opérateur de Koopman.

Dans la méthode DMD traditionnelle, les données sont considérées comme évoluant linéairement entre les mesures (2.28). Cela signifie que les relations entre les différentes variables dans le système sont supposées être linéaires. Cependant, de nombreux systèmes réels présentent des comportements non linéaires, où les relations entre les variables ne peuvent pas être approximées par des fonctions linéaires simples.

L'EDMD remédie à cette limitation en introduisant des transformations non linéaires des caractéristiques dans le processus de décomposition dynamique. Au lieu d'utiliser les données brutes, l'EDMD utilise une fonction de transformation non linéaire pour injecter les données dans un espace de caractéristiques de dimension réduite. Cette fonction de transformation est choisie en fonction de la connaissance du système et des caractéristiques que l'on souhaite capturer.

En effectuant cette transformation non linéaire, l'EDMD permet de capturer les relations non linéaires entre les variables du système. Ainsi, les structures cohérentes et les dynamiques non linéaires peuvent être mieux représentées et identifiées par la décomposition dynamique. Les modes extraits par l'EDMD reflètent alors les comportements non linéaires du système, ce qui permet une meilleure compréhension et prédiction de son évolution.

En résumé, l'approche de la décomposition en mode dynamique étendue (EDMD) a été introduite par Williams et al. [67] pour résoudre la limitation de DMD en introduisant des transformations non linéaires des caractéristiques, ce qui permet de capturer les comportements non linéaires des systèmes et de fournir une meilleure représentation des dynamiques sous-jacentes. Cela rend l'EDMD plus adapté à l'analyse de systèmes complexes et non linéaires par rapport à la méthode DMD traditionnelle.

L'algorithme de DMD étendu [67] est essentiellement le même que celui de DMD standard [64], sauf qu'au lieu de réaliser une régression sur des mesures directes de l'état, une régression DMD linéaire de meilleure qualité (*best-fit*) est réalisée sur un vecteur augmenté contenant des mesures non linéaires de l'état.

Dans l'EDMD, un état augmenté $z \in \mathbb{R}^p$ est construit à partir de mesures non linéaires de l'état \mathbf{x} données par les fonctions θ_k .

$$z = \Theta^T(x) = \begin{bmatrix} \theta_1(x) \\ \theta_2(x) \\ \vdots \\ \theta_p(x) \end{bmatrix}. \quad (2.77)$$

Ici, le vecteur Θ est la collection de mesures du système qui peut contenir l'état d'origine du système \mathbf{x} ainsi que des mesures non linéaires, il arrive souvent que $p \gg n$, où p est le rang de l'état augmenté. Une fois z trouvé, deux matrices de données sont construites, comme dans le cas de la DMD (2.29) :

$$Z = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ z_1 & z_2 & \cdots & z_m \\ | & | & & | \end{bmatrix} \quad Z' = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ z_2 & z_3 & \cdots & z_{m+1} \\ | & | & & | \end{bmatrix} \quad (2.78)$$

Ici, $z_k = \Theta^T(x_k) = \Theta^T(x(k\Delta t))$, où nous supposons que les données sont échantillonnées à des intervalles réguliers dans le temps, pour simplifier. Comme dans DMD, un opérateur de matrice linéaire de meilleur ajustement (*best fit*) A_Z est construit qui mappe (maps) Z dans Z' :

$$A_Z = \operatorname{argmin}_{A_Z} \| Z' - A_Z Z \|_F = Z' Z^\dagger. \quad (2.79)$$

Cette régression peut être écrite en termes des matrices de données $\Theta(X)$ et $\Theta(X')$:

$$A_Z = \operatorname{argmin}_{A_Z} \| \Theta^T(X') - A_Z \Theta^T(X) \| = \Theta^T(X') (\Theta^T(X))^\dagger. \quad (2.80)$$

Étant donné que le vecteur augmenté \mathbf{z} peut être considérablement plus grand que l'état \mathbf{x} , il est généralement nécessaire d'utiliser des méthodes de noyau pour calculer cette régression [69]. L'utilisation de méthodes de noyau (kernel) pour approximer l'opérateur de Koopman avec DMD est devenue un sujet de recherche important ces dernières années. En principe, la bibliothèque enrichie Θ fournit une base plus grande dans laquelle approximer l'opérateur de Koopman. Il a été démontré récemment que dans la limite des données (snapshots) infinies, l'opérateur DMD étendu converge vers l'opérateur de Koopman projeté sur le sous-espace engendré par Θ [29]. Cependant, si Θ ne couvre pas un sous-espace invariant de Koopman, alors l'opérateur projeté peut ne pas avoir de ressemblance avec l'opérateur de Koopman d'origine, car toutes les valeurs et vecteurs propres peuvent être différents. En fait, il a été démontré que l'opérateur DMD étendu aura des valeurs et vecteurs propres erronés à moins qu'il ne soit représenté en termes d'un sous-espace invariant de Koopman [11].

Il est donc essentiel d'utiliser des techniques de validation et de validation croisée pour s'assurer que les modèles EDMD ne sont pas surajustés et qu'ils sont bien adaptés au système réel, comme discuté ci-dessous. Par exemple, il a été démontré que EDMD ne peut pas contenir l'état d'origine x en tant que mesure et représenter un système qui a plusieurs points fixes, des orbites périodiques ou d'autres attracteurs, car ces systèmes ne peuvent pas être topologiquement conjugués à un système linéaire de dimension finie [11].

2.4 Conclusion :

En conclusion, dans ce chapitre, nous avons exploré le concept de l'opérateur de Koopman et l'algorithme de décomposition en modes dynamiques (DMD). Nous avons également discuté des variantes de la DMD, telles que la DMD avec contrôle (DMDc) et l'EDMD, et de leur relation avec la découverte de l'opérateur de Koopman à partir des données de l'espace d'état.

Au cours de notre étude, nous avons souligné que la recherche directe de l'opérateur de Koopman peut être complexe, même pour des systèmes simples. Cependant, au fur et à mesure que nous approfondissons la recherche de cet opérateur, nous nous confrontons à des systèmes de dimension infinie. Dans de tels cas, l'utilisation d'expansions de Taylor ou de séries de Fourier naïves ne suffit généralement pas à obtenir un bon opérateur de Koopman. Pour surmonter ces difficultés, les méthodes pilotées par les données, telles que la DMD et ses variantes, offrent une alternative précieuse. Elles permettent d'approximer efficacement l'opérateur de Koopman en utilisant les données disponibles, ouvrant ainsi de nouvelles perspectives pour l'analyse et la modélisation des systèmes dynamiques.

Nous avons également constaté que la méthode DMD offre une approche prometteuse pour approximer l'opérateur de Koopman, en particulier pour les systèmes dynamiques non linéaires. En extrayant les modes caractéristiques des systèmes à partir des données, la DMD permet une analyse précise de leur comportement et offre des capacités de modélisation et de prédiction de leur évolution future. Cela constitue un avantage significatif pour de nombreuses applications dans divers domaines.

En résumé, la méthode DMD constitue un outil précieux pour l'analyse et la modélisation des systèmes dynamiques, en particulier lorsque la recherche directe de l'opérateur de Koopman devient complexe. Cependant, des recherches supplémentaires sont nécessaires pour perfectionner ces méthodes et élargir leur applicabilité dans des scénarios plus complexes. En exploitant les données disponibles et en développant de nouvelles techniques, nous pourrions continuer à améliorer notre compréhension des systèmes dynamiques et à exploiter leur potentiel dans diverses applications.

CHAPITRE 3

APPLICATION DE L'OPÉRATEUR DE Koopman SUR QUELQUES SYSTÈMES

3.1 Introduction :

Dans ce chapitre, nous allons appliquer des méthodes pilotées par les données telles que la DMD (Dynamic Mode Decomposition) et ses variantes, la DMDc (DMD with control) et l'EDMD (Extended DMD) sur des exemples de systèmes pour approximer l'opérateur de Koopman. Nous allons également vérifier l'efficacité de ces méthodes dans la modélisation et la commande des systèmes. Nous discuterons et analyserons les résultats obtenus ainsi que les limites auxquelles nous avons fait face lors de l'évaluation de l'efficacité de ces algorithmes pour trouver un opérateur de Koopman utilisable. Pour cette section, nous utiliserons des ensembles de données provenant de différents systèmes étudiés à l'aide d'expériences virtuelles.

3.2 Application de la DMD :

3.2.1 Exemple 1 : Deux fonctions mixtes

Cet exemple est un problème spécialement conçu pour DMD ; il nous montrera comment DMD peut trouver la structure cachée d'un système dynamique linéaire. Nous avons un système linéaire constitué par la somme des deux signaux spatio-temporels $f = f_1 + f_2$ avec :

$$f_1(x, t) = \operatorname{sech}(x + 3)\exp(i2.3t); \quad (3.1)$$

$$f_2(x, t) = 2\operatorname{sech}(x)\tanh(x)\exp(i2.8t); \quad (3.2)$$

Note : La fonction sécante hyperbolique, notée sech est la fonction définie sur \mathbb{R} par :

$$\operatorname{sech} x = \frac{1}{\operatorname{ch} x} = \frac{2}{e^x + e^{-x}} \quad (3.3)$$

Résultats de simulation de système original :

Les 2 modes originaux ainsi que ses dynamiques (fréquences) sont montrés dans la figure suivante :

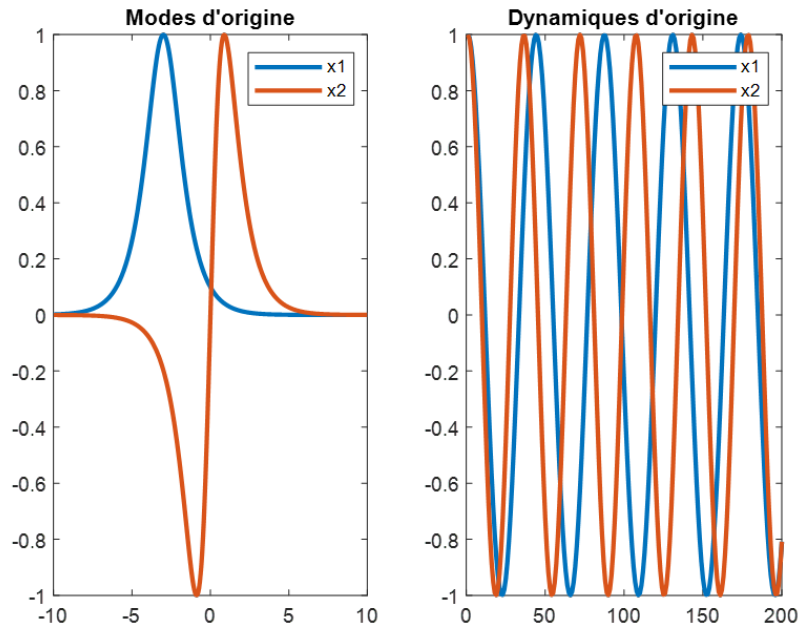


FIGURE 3.1 – Les profils et les dynamiques des signaux f_1 et f_2 .

Remarques :

- Les modes représentent les amplitudes spatiales des signaux f_1 et f_2 ($sech(x+3)$ et $2sech(x)tanh(x)$), les dynamiques représentent uniquement les fréquences.
- Les deux signaux ont des profils différents tels qu'indiqués dans la première figure de (3.1) et des dynamiques avec des fréquences différentes telles qu'indiquées dans la deuxième figure de (3.1).

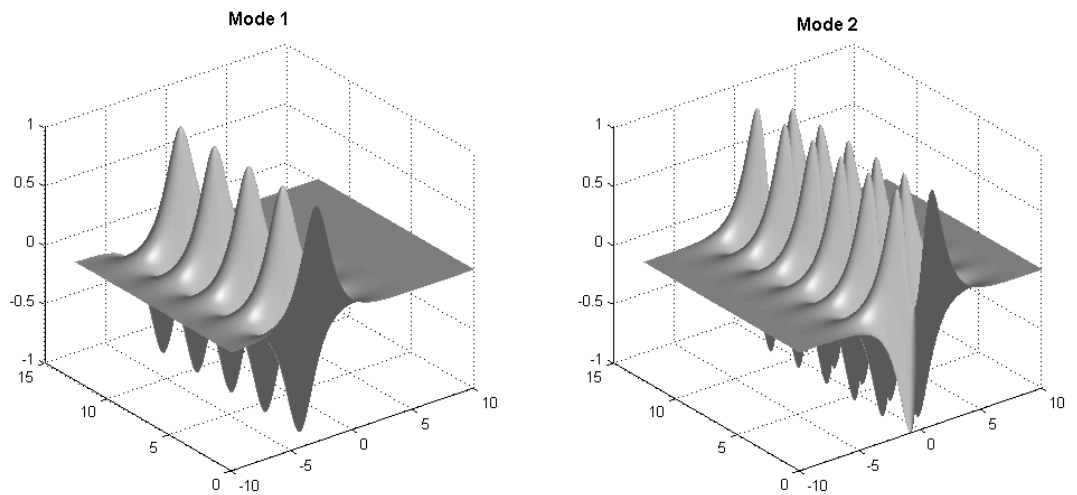
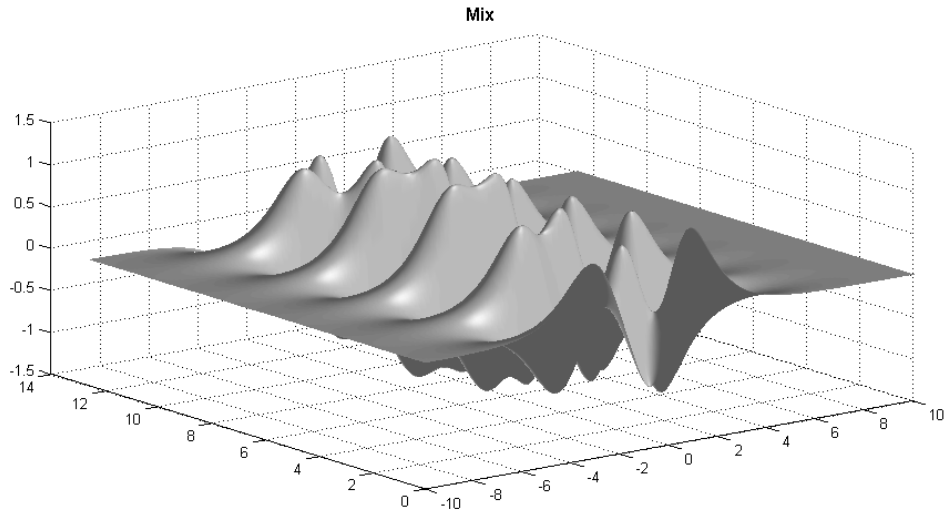


FIGURE 3.2 – Des graphiques en 3D montrant l'évolution des deux modes f_1 et f_2 avec le temps.

FIGURE 3.3 – Le tracé spatial-temporel en 3D du signal mixte f .

Application de la DMD :

En utilisant ce signal mixte comme entrée, nous allons essayer de trouver la structure cachée du système dynamique. Étant donné que les dynamiques des deux signaux sont des fonctions circulaires (sin, cos), cela peut être considéré comme l'état généré par un système linéaire. C'est exactement le problème que DMD peut traiter.

Voici les résultats de la DMD, comprenant les profils des deux modes et les dynamiques correspondantes :

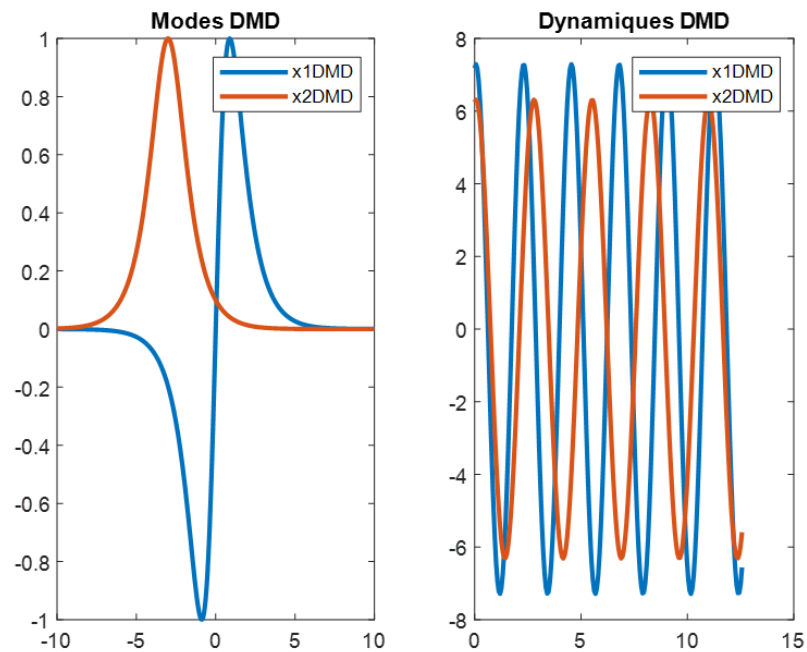


FIGURE 3.4 – Les profils et les dynamiques résultant d'application de la DMD.

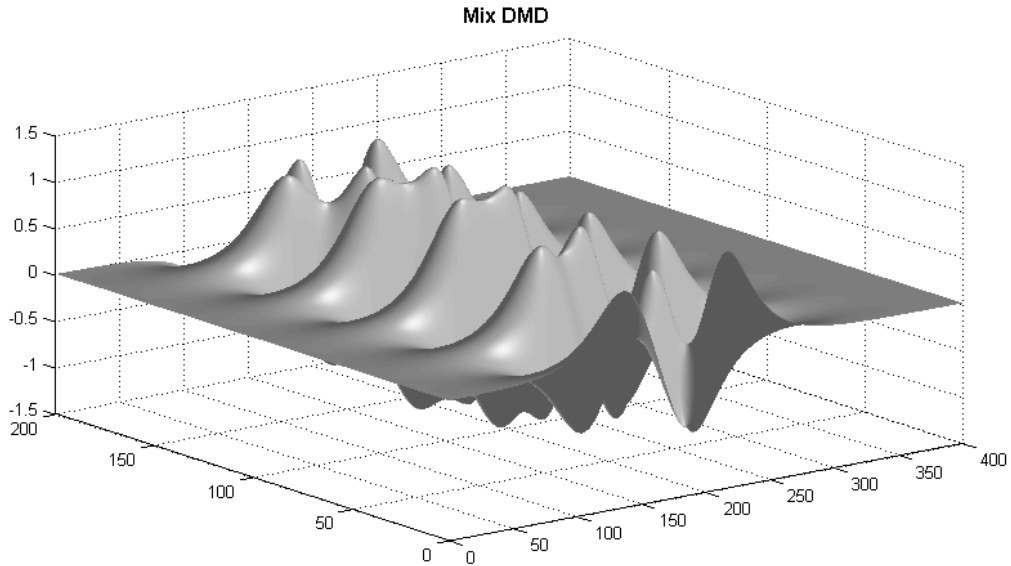


FIGURE 3.5 – Le tracé spatial-temporel en 3D du signal mixte f identifié par DMD.

Remarque :

Nous pouvons observer que la DMD permet une séparation claire des différents modes et une reconnaissance de leurs fréquences, comme le montrent les deux figures (Fig. 3.1) et (Fig. 3.4). Cependant, nous notons une inversion de l'ordre des états, où le mode 2 de la DMD (X_{2dmd}) correspond au mode 1 d'origine (X_{1data}), et de même pour le mode 1 de la DMD (X_{1dmd}) qui correspond au mode 2 original (X_{2data}).

En effet, dans la méthode DMD (Dynamic Mode Decomposition), les modes obtenus peuvent ne pas être ordonnés de la même manière que les modes d'origine du système. Cette variation d'ordre est inhérente à la nature de la décomposition spectrale réalisée par la DMD. La DMD extrait des modes caractéristiques à partir des données temporelles et les classe en fonction de leur contribution spectrale, ce qui peut perturber leur ordre en raison du classement des valeurs singulières effectué lors de l'application de la SVD (Singular Value Decomposition). De plus, la matrice Σ résultante de la SVD utilisée dans le calcul de la matrice Φ (2.41) peut également influencer l'ordre des modes.

Il est important de noter que même si l'ordre des modes peut varier dans la DMD, les modes obtenus correspondent toujours aux modes d'origine du système. L'ordre spécifique des modes peut être ajusté ou réorganisé en fonction des besoins spécifiques de l'analyse.

Comparaison entre les modes résultants de PCA et ceux de DMD :

Ici, nous comparons la DMD avec l'analyse SVD (décomposition en valeurs singulières) ou PCA (analyse en composantes principales). La figure suivante sont les résultats de la décomposition en valeurs singulières des signaux mixtes.

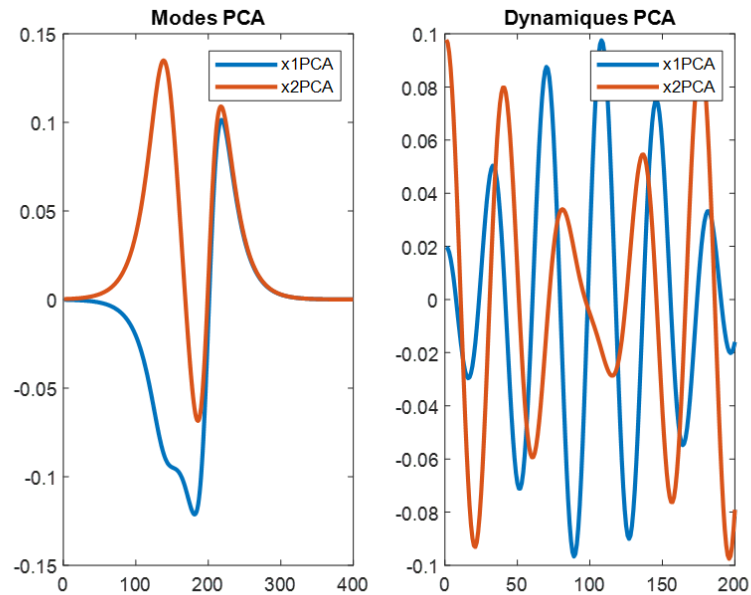


FIGURE 3.6 – Les profils et les dynamiques résultant d'application de la SVD.

Les modes SVD :

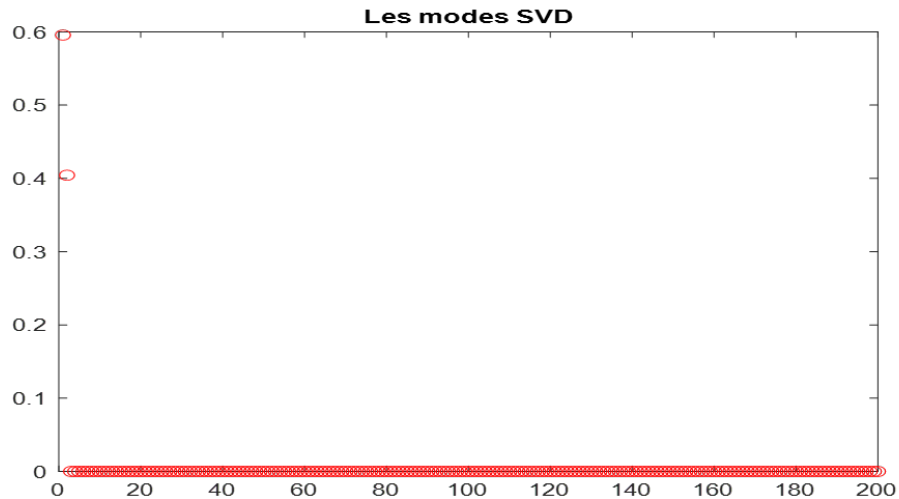


FIGURE 3.7 – SVD (modes)

Tout d'abord, lorsque nous regardons la figure (Fig. 3.7), nous constatons que la SVD parvient avec succès à identifier le rang du système (rang = 2). Cependant, elle n'a pas réussi à séparer les deux modes, comme le montre la figure (Fig. 3.6). Nous remarquons également que, de manière similaire à la DMD, l'analyse SVD (ou PCA) inverse l'ordre des états x_1 et x_2 (la raison mentionnée précédemment (*Remarque*) s'applique également dans ce contexte, car il s'agit d'une décomposition en valeurs singulières (SVD)).

La figure suivante présente une comparaison entre les résultats des modes récupérés en utilisant la DMD et la SVD :

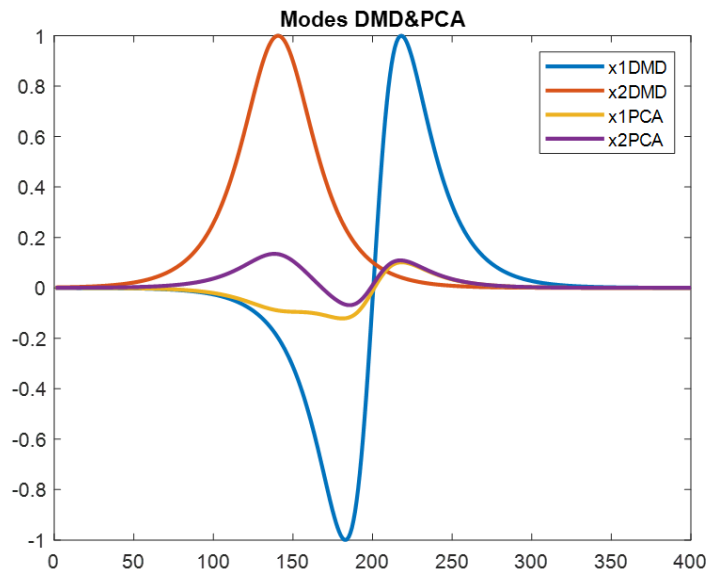


FIGURE 3.8 – Comparaison entre les modes récupérés par la DMD (en bleu et rouge) et celle récupérés par l'analyse SVD (décomposition en valeurs singulières) ou PCA (analyse en composantes principales) (en mauve et jaune).

Prédiction future :

Et maintenant, après avoir identifié le système, nous pouvons effectuer une prédiction de l'état futur. Ici, nous avons essayé de prédire l'état en doublant le temps deux fois dans le futur.

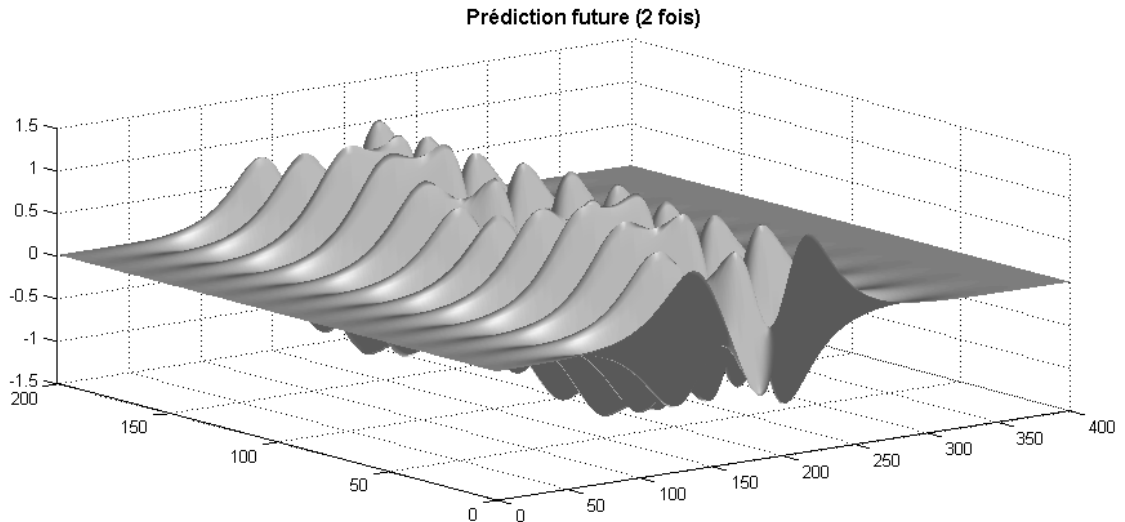


FIGURE 3.9 – Le tracé spatial-temporel en 3D du signal mixte f , en prédisant son état deux fois dans le futur.

Des conclusions :

Cet exemple illustre l'utilisation de la DMD (Dynamic Mode Decomposition) pour analyser les signaux linéaires mixtes $f = f_1 + f_2$ présentant des profils et des dynamiques à fréquences distinctes. La DMD permet d'extraire les modes représentant la structure cachée du système dynamique.

Les résultats démontrent que la DMD sépare efficacement les modes et reconnaît précisément leurs fréquences. Cependant, l'ordre des états peut différer des modes d'origine en raison de la décomposition spectrale de la DMD, qui classe les modes selon leur contribution spectrale. Malgré cette inversion, les modes obtenus correspondent toujours aux modes d'origine, permettant ainsi la reconstruction de l'état du système, la prédiction de son évolution future et l'analyse des interactions entre les variables d'état.

Comparée à l'analyse SVD ou PCA, la DMD se révèle plus efficace dans la séparation des modes, soulignant sa capacité à extraire les informations pertinentes du système dynamique. En revanche, l'analyse SVD n'a pas réussi à séparer les modes de manière satisfaisante, bien qu'elle ait pu identifier le rang des systèmes.

La DMD s'est avérée particulièrement adaptée à ce problème, compte tenu de la nature circulaire des dynamiques des signaux mixtes, correspondant à l'état généré par un système linéaire. Cela met en évidence l'aptitude spécifique de la DMD à traiter ce type de situation.

De plus, l'application de la DMD a permis des prédictions satisfaisantes de l'état futur du système, notamment avec une prédiction à deux pas dans le futur.

En résumé, l'utilisation de la DMD dans cet exemple a fourni des résultats satisfaisants pour la décomposition et l'analyse des signaux mixtes, révélant la structure cachée du système dynamique sous-jacent. Cette expérience souligne l'utilité de la DMD dans la compréhension et la modélisation des systèmes dynamiques.

3.2.2 Exemple 2 : Équation de Duffing

Le système oscillatoire de Duffing est un exemple simple souvent utilisé pour illustrer l'application de la théorie de Koopman. L'équation de Duffing est représenté dans l'espace d'état par $\ddot{x} = x - x^3$ [13].

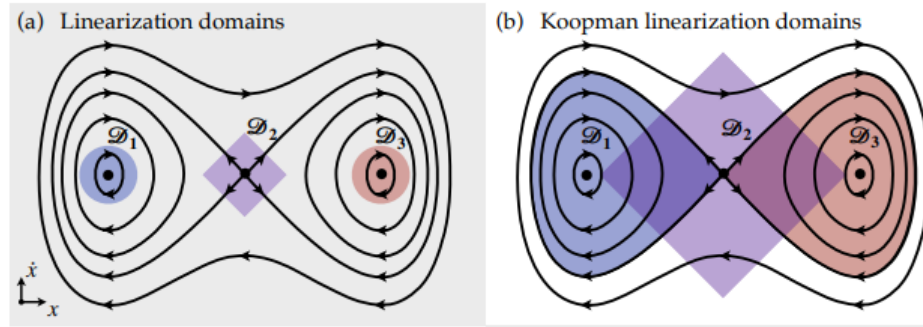


FIGURE 3.10 – Différentes perspectives de Koopman pour l'oscillateur de Duffing, $\ddot{x} = x - x^3$, l'équation pour une particule dans un double puits de potentiel. (a) La linéarisation traditionnelle près des points fixes donne de petites régions où le système est approximativement linéaire. (b) La théorie de Koopman peut étendre le théorème de Hartman-Grobman pour élargir le domaine de linéarité jusqu'au prochain point fixe [32]. Reproduite à partir de [13].

Représentation d'état :

L'équation de Duffing peut être représentée dans l'espace d'état par :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_1 - x_1^3 \end{cases} \quad (3.4)$$

Où x_1 représente la position de l'oscillateur et x_2 sa vitesse. Cette représentation permet de décrire l'évolution du système au cours du temps en fonction de ses états précédents et des entrées externes.

Résultats du simulation de système original (Prenant une condition initiale $x_0 = [0.5; 0.5]$) :

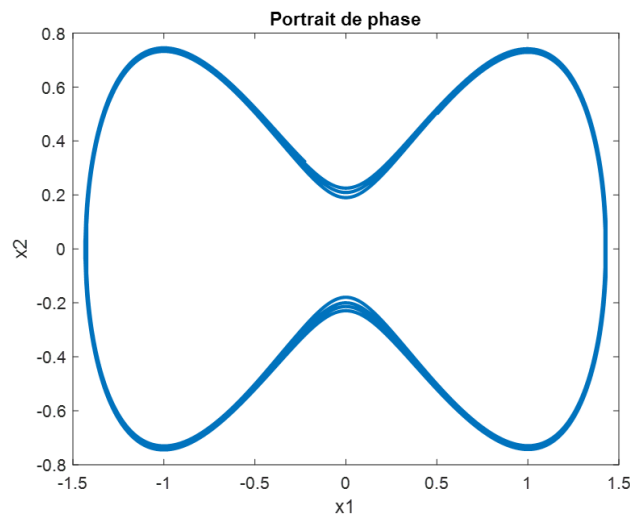


FIGURE 3.11 – Le portrait de phase de l'équation de Duffing.

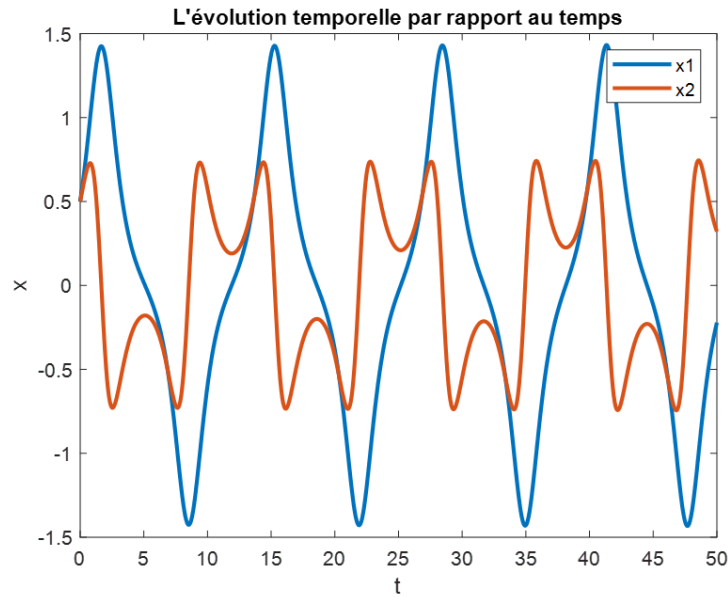


FIGURE 3.12 – L'évolution temporelle du système original de l'équation de Duffing.

La figure (Fig. 3.12) est juste représentative pour bien visualiser le comportement de système, mais pour l'identification nous avons pris les données pour un grand temps de simulation = 1000. Dans le prochain exemple, nous allons bien expliquer l'importance de choisir un temps de simulation suffisant pour générer suffisamment des données pour l'algorithme.

Identification du système par DMD :

Après l'utilisation de la méthode de la DMD, on obtient une représentation de l'état du système sous la forme linéaire $x_{k+1} = \bar{A}x_k$ (2.36).

Les matrices \tilde{A} et \bar{A} sont trouvées comme suit :

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0,001 \\ -0,00066 & 1 \end{bmatrix} \quad \tilde{A} = \begin{bmatrix} 1 & -0,001 \\ 0,00066 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

Rappel : (De la section 2.3.3)

L'opérateur dynamique réduit \tilde{A} est une approximation linéaire de l'opérateur dynamique réel A , il est obtenu en projetant A sur les modes POD dominants (Les colonnes de U sont connues sous le nom de modes POD), ce qui nous permet de représenter le comportement du système dans un espace de dimension inférieure.

L'avantage majeur est que malgré sa taille réduite, la matrice \tilde{A} conserve les mêmes valeurs propres non nulles que la matrice complète A .

$$L = \text{eig}(A) = \text{eig}(\tilde{A}) = \begin{cases} \lambda_1 = 1.0000 + 0.0008i \\ \lambda_2 = 1.0000 - 0.0008i \end{cases} \quad (3.6)$$

Dans notre cas le nombre de valeurs singulières dominantes r est égale à l'ordre de système n ($r = n = 2$), donc il est possible de travailler directement avec la matrice \bar{A} qui est l'approximation de A (calculé dans l'équation 2.35) pour reconstruire l'état complet de système en traçant l'évolution : $x_{k+1} = \bar{A}x_k$ (2.36).

Cette approximation est valable que lorsque les conditions $n \gg 1$ et $r \ll n$ ne sont pas vérifiées (comme notre cas).

Il existe une autre méthode de reconstruction basée sur les modes DMD Φ (2.41) en utilisant la formule de développement DMD (DMD Expansion (2.3.4)) en temps continu (2.48).

$$x(t) = \Phi e^{\Omega t} \mathbf{b}. \quad (3.7)$$

Avec : $\mathbf{b} = \Phi \backslash x(0)$.

Donc les modes DMD sont utilisés pour reconstruire l'état du système, prévoir son évolution future et analyser les interactions spatiales des variables d'état.

Également, ils permettent de décomposer le système en composantes dynamiques indépendantes, ce qui facilite l'analyse et la compréhension des mécanismes sous-jacents du système.

L'importante utilité des modes DMD réside dans le fait qu'ils sont des vecteurs propres qui représentent les structures spatiales du comportement dynamique d'un système. Ces vecteurs propres capturent les variations spatiales des variables d'état et permettent ainsi de visualiser les motifs, les oscillations et les interactions du système. En identifiant les modes DMD, on peut comprendre les modes dominants du système et leur contribution à la dynamique globale. Cela permet une meilleure compréhension des mécanismes sous-jacents et facilite l'analyse et la prédiction du système.

Les modes DMD résultant de l'identification du système de Duffing par DMD sont représentés par la matrice Φ suivante :

$$\Phi = \begin{bmatrix} -0.7752 + 0.0011i & -0.7752 - 0.0011i \\ -0.0014 - 0.6317i & -0.0014 + 0.6317i \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

En résumé, les modes DMD sont des vecteurs propres qui représentent les structures spatiales des comportements dynamiques d'un système et fournissent des informations précieuses sur les oscillations, les motifs et les interactions spatiales des variables d'état.

Résultat de simulation de système linéaire :

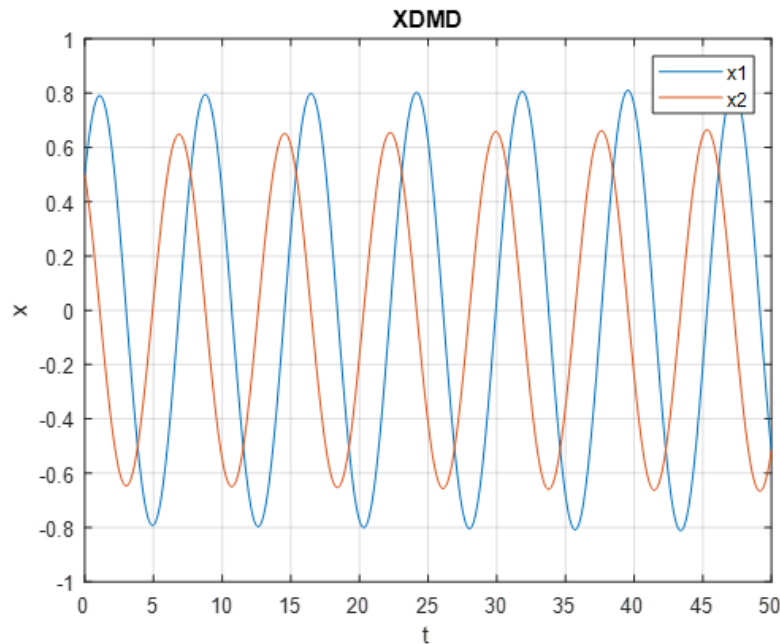


FIGURE 3.13 – L'évolution du système linéaire résultant.

Interprétation des résultats :

L'application de la DMD au système de Duffing permet de construire un modèle linéaire du système et d'extraire les modes DMD qui capturent les comportements dynamiques. Ces modes fournissent des informations précieuses sur les oscillations, motifs et interactions spatiales des variables d'état, permettant la reconstruction de l'état du système, la prédiction de son évolution future et l'analyse des interactions entre variables d'état.

Grâce à ces résultats, nous avons obtenu une approximation satisfaisante du comportement du système d'origine. Il est important de souligner que le modèle linéaire résultant de la DMD génère des oscillations avec une forme caractéristique (voir Fig. 3.13), ce qui limite sa capacité à reproduire les signaux oscillatoires déformés du système d'origine (voir Fig. 3.12). Ainsi, les résultats obtenus par la DMD ne sont qu'une approximation du comportement réel du système.

3.2.3 Exemple 3 : Équation de Van der pol (oscillateur non forcé)

Le système de Van der Pol est un exemple de système dynamique non linéaire qui décrit les oscillations auto-entretenues. Il a été introduit par le physicien néerlandais Balthasar van der Pol en 1927 [65].

Le système de Van der Pol est décrit par l'équation différentielle suivante :

$$\frac{d^2x}{dt^2} - \mu(1 - x^2)\frac{dx}{dt} + x = 0, \quad (3.9)$$

Où x est la position et μ est un paramètre qui détermine la force de non-linéarité.

Ce système peut être utilisé pour modéliser de nombreux phénomènes physiques, tels que les oscillations électriques dans les circuits électroniques, les vibrations dans les systèmes mécaniques et les oscillations cardiaques.

Le système de Van der Pol possède des propriétés intéressantes, notamment la capacité à générer des oscillations périodiques complexes et à entrer en résonance avec d'autres systèmes. Il a également été utilisé pour modéliser des phénomènes tels que la synchronisation de neurones dans le cerveau et la dynamique des populations dans l'écologie.

Représentation d'état :

Pour le système de Van der Pol, la représentation d'état peut être obtenue en introduisant deux variables d'état, x_1 et x_2 .

Donc les équations d'état pour le système de Van der Pol sont comme suit :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = \mu(1 - x_1^2)x_2 - x_1 \end{cases} \quad (3.10)$$

Où x_1 représente la position et x_2 représente la vitesse, le vecteur d'état est défini donc tel que : $x := [x_1, x_2]^T = [x, dx/dt]^T$.

Résultats de simulation de système original (Prenant $\mu = 1$ et une condition initiale $x_0 = [1; 0]$) :

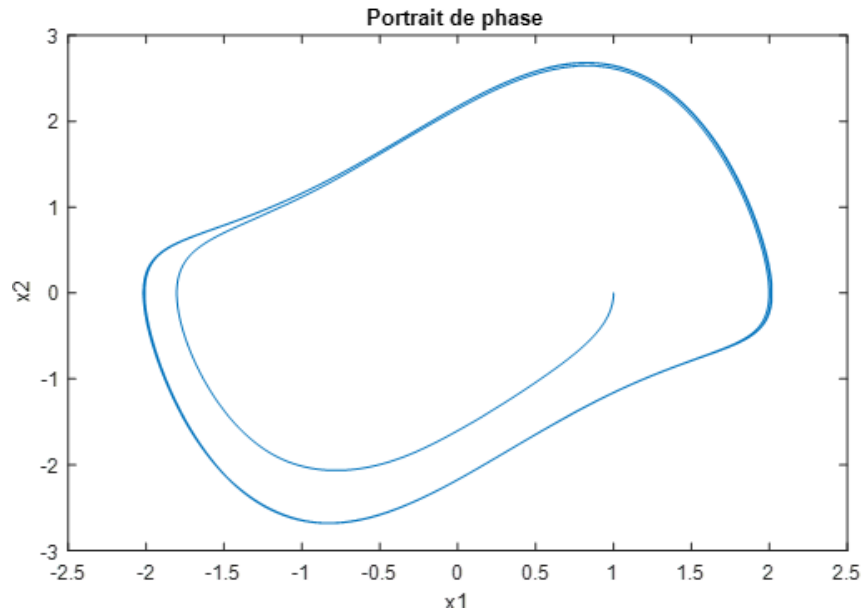


FIGURE 3.14 – Le portrait de phase du système original de Van Der Pol.

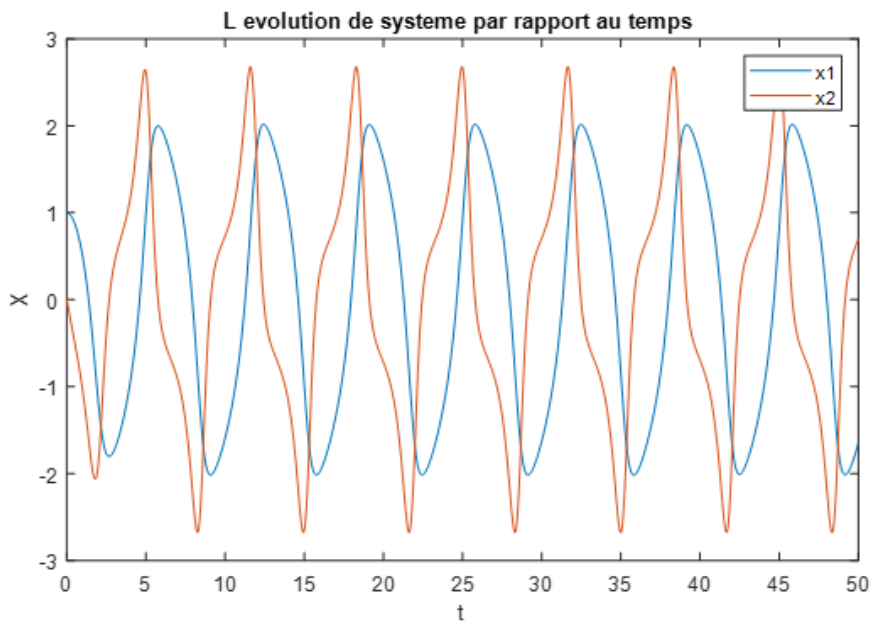


FIGURE 3.15 – L'évolution du système original de Van Der Pol.

La figure (Fig. 3.15) est juste représentative pour bien visualiser le comportement de système, mais pour l'identification nous avons pris nos données pour un grand temps de simulation = 1000.

Identification du système par DMD :

L'identification en utilisant la méthode de la DMD nous a donné les deux matrices \tilde{A} et \bar{A} :

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 1.0000 & 0.0010 \\ -0.0010 & 1.0000 \end{bmatrix} \quad \tilde{A} = \begin{bmatrix} 1.0000 & -0.0010 \\ 0.0010 & 1.0000 \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

Rappelons toujours que l'opérateur dynamique réduit \tilde{A} est obtenu en projetant A sur les modes POD dominants de U .

La matrice \tilde{A} conserve toujours les mêmes valeurs propres non nulles que la matrice complète A .

$$L = \text{eig}(A) = \text{eig}(\tilde{A}) = \begin{cases} \lambda_1 = 1.0000 + 0.0010i \\ \lambda_2 = 1.0000 - 0.0010i \end{cases} \quad (3.12)$$

C'est le même cas d'exemple précédent où le nombre de valeurs singulières dominantes r est égale à l'ordre de système n ($r = n = 2$). Donc après l'identification, on obtient une représentation de l'état du système sous la forme linéaire $x_{k+1} = \tilde{A}x_k$ (2.36) qui va reconstruire l'état complet de système.

Avec \bar{A} est une approximation de la matrice complète A , valable lorsque les conditions $n \gg 1$ et $r \ll n$ ne sont pas vérifiées.

Comme mentionné précédemment, il existe une autre méthode de reconstruction en utilisant la formule de développement DMD (DMD Expansion) en temps continu (2.48).

Les modes DMD résultant de l'identification du système de Van der Pol par DMD sont représentés par la matrice Φ suivante :

$$\Phi = \begin{bmatrix} -0.7077 - 0.0199i & -0.7077 + 0.0199i \\ 0.0198 - 0.7059i & 0.0198 + 0.7059i \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

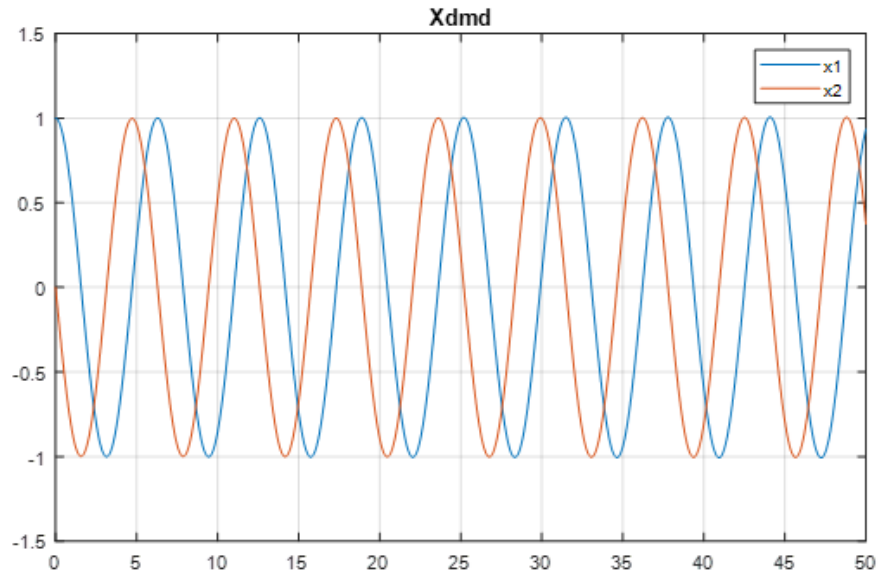
Résultat de simulation de système linéaire :


FIGURE 3.16 – L'évolution du système linéaire résultant.

Interprétation des résultats :

L'application de la DMD à l'équation de Van Der Pol non forcée permet de construire un modèle linéaire du système et d'extraire les modes DMD qui capturent les comportements dynamiques. En utilisant ces modes, nous sommes en mesure de reconstruire l'état du système, de prédire son évolution future et d'analyser les interactions entre les variables d'état.

Grâce à ces résultats, nous avons obtenu une approximation satisfaisante du comportement du système d'origine. Il est toutefois important de souligner que le modèle linéaire résultant de la DMD génère des oscillations avec une forme caractéristique (voir Fig. 3.16), ce qui limite sa capacité à reproduire les signaux oscillatoires déformés du système d'origine (voir Fig. 3.15). Malgré cela, l'approximation obtenue pour le système d'origine, avec une condition initiale de $x_0 = [1; 0]$, est largement acceptable.

Point négatif de la DMD :

Maintenant nous allons changer les conditions initiales appliquées au système de Van Der Pol : $x_0 = [10; 3]$.

Pour l'identification de ce système avec les nouvelles conditions initiales, nous allons premièrement générer des données dans un temps de simulation = 400.

Le nouveau comportement est bien montré dans les deux figures suivantes :

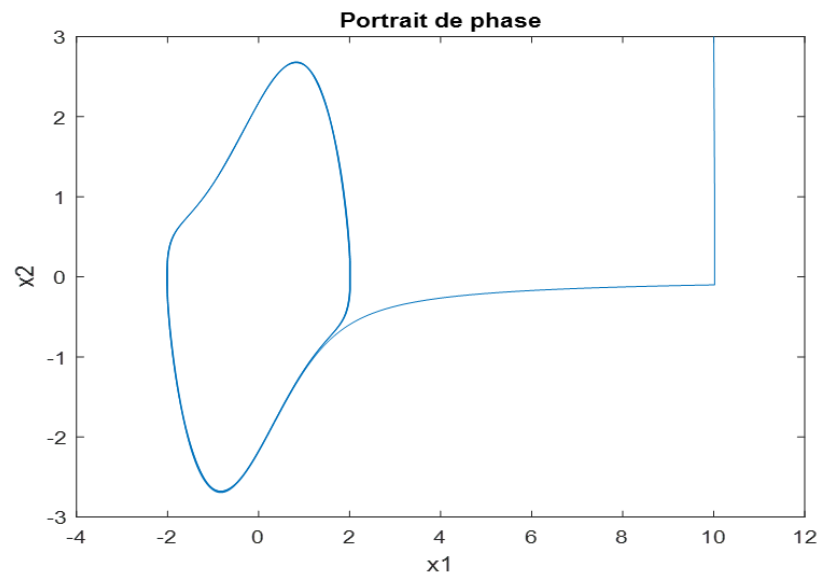
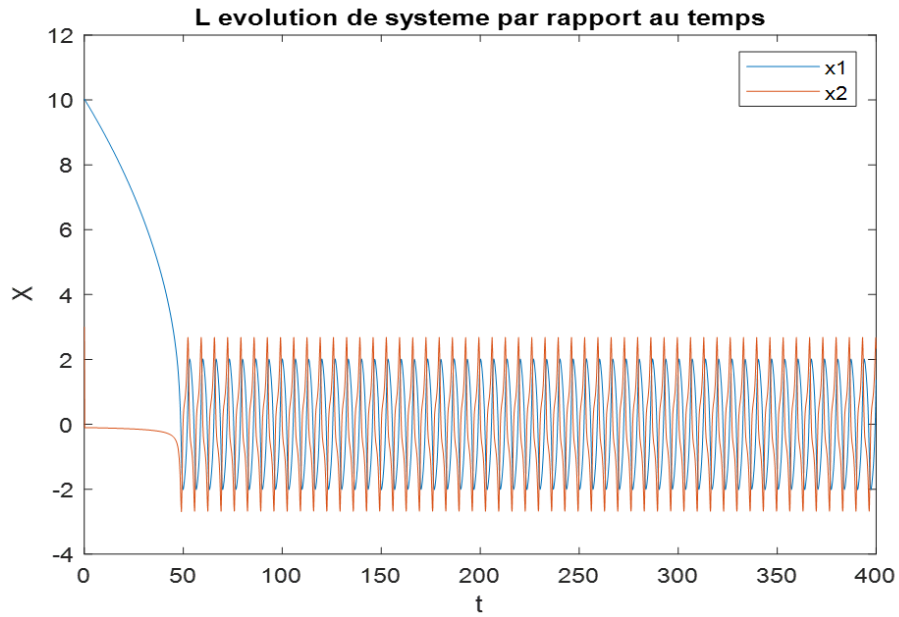


FIGURE 3.17 – Le portrait de phase du système original de Van Der Pol pour $x_0 = [10; 3]$.

FIGURE 3.18 – L'évolution du système original de Van Der Pol pour $x_0 = [10; 3]$.

Résultat d'identification par DMD :

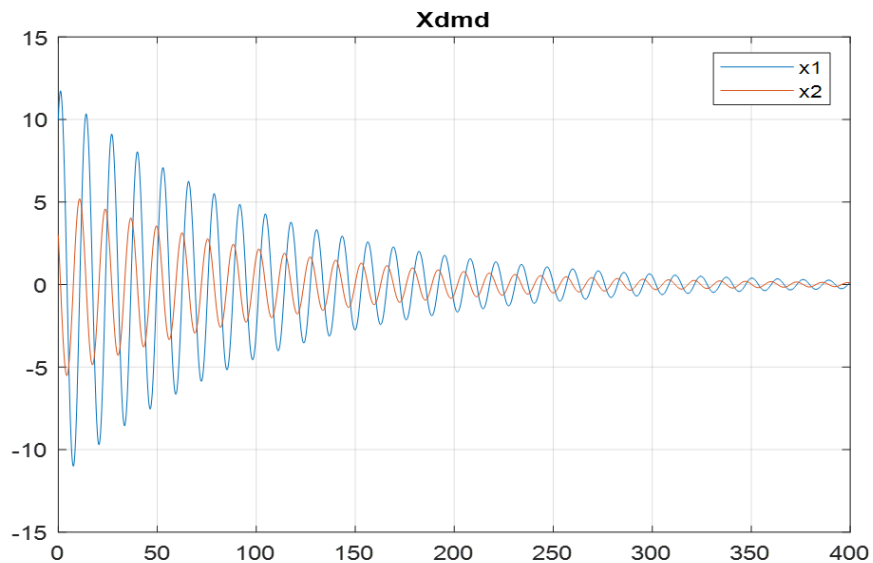


FIGURE 3.19 – L'évolution du système linéaire résultant.

On observe que le système reconstruit par la DMD tend à converger vers la valeur 0. Cependant, d'après la figure (Fig. 3.17), le portrait de phase du système de Van der Pol présente un cycle limite, ce qui indique qu'il est de nature oscillante, comme le montre la figure (Fig. 3.18).

Nous pouvons donc conclure que l'algorithme de DMD, en raison du manque de données générées, ne parvient pas à capturer la dynamique en régime permanent du système d'origine, ce qui conduit à une reconstruction stable (convergence) malgré le caractère oscillant du système d'origine.

Afin de confirmer cette observation, nous allons tracer le portrait de phase de l'évolution linéaire obtenue par la DMD (calculée à partir de l'équation 2.36) dans la figure (Fig. 3.20).

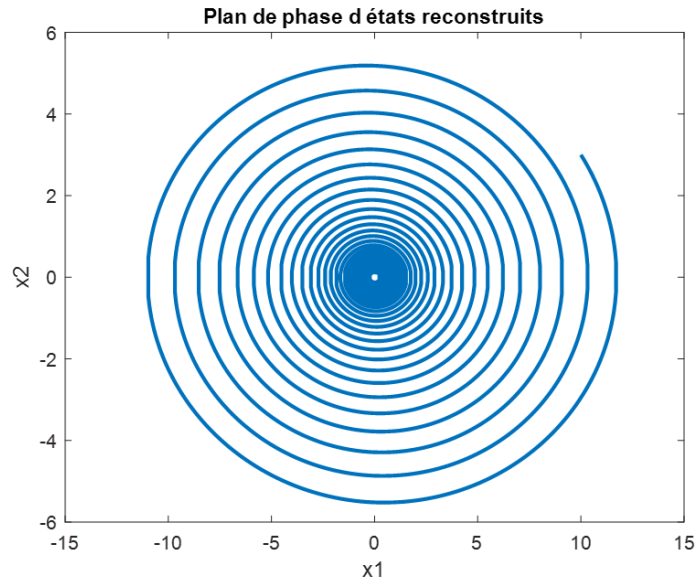


FIGURE 3.20 – Le portrait de phase des états reconstruits à l'aide de DMD pour $x_0 = [10; 3]$.

L'algorithme de DMD, avec le temps de simulation donné, n'a pas pu collecter suffisamment de données. Par conséquent, l'algorithme suppose que le système converge directement vers zéro, ce qui entraîne une réaction similaire à celle d'un foyer stable, alors que le système d'origine (Fig. 3.17) présente un cycle limite. Cela explique le résultat obtenu dans le portrait de phase (Fig. 3.20).

Si nous effectuons une prédiction future sur une durée deux fois plus longue que celle utilisée pour l'identification (c'est-à-dire 800 unités de temps), le système continuera à converger, ce qui conduira à une mauvaise identification.

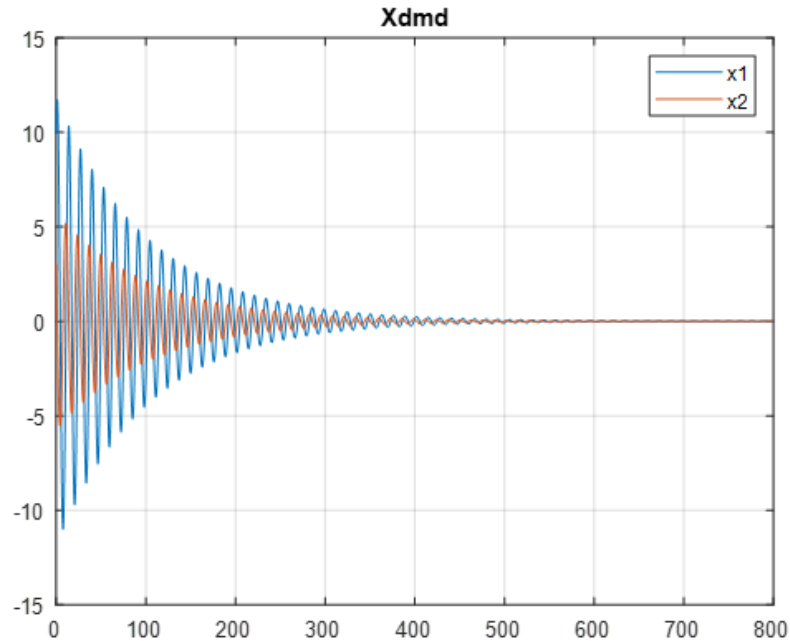


FIGURE 3.21 – L'évolution du système original de Van Der Pol pour $x_0 = [10; 3]$.

Interprétation des résultats :

Nous remarquons donc que cette identification ne conserve pas exactement les mêmes caractéristiques clés du système non linéaire initial, dans ce cas le cycle limite (voir Fig. 3.18).

Pour remédier à ce problème, il est nécessaire de fournir suffisamment de données à la DMD afin qu'elle puisse reconstruire le modèle linéaire correct. Il est en effet reconnu que le manque de données est l'un des points faibles de la décomposition en modes dynamiques (DMD).

En collectant plus de données ou en augmentant la durée de simulation, on peut améliorer la capacité de la DMD à capturer la dynamique du système d'origine de manière plus précise, en prenant en compte les caractéristiques oscillantes ou non linéaires. Cela permettra d'obtenir une reconstruction plus fidèle du système et de mieux représenter son comportement réel.

Donc deuxièmement, nous allons générer des données en utilisant un temps de simulation de 2000 unités, puis tracer l'évolution du système linéaire reconstruit par la DMD sur une durée de 400 unités.

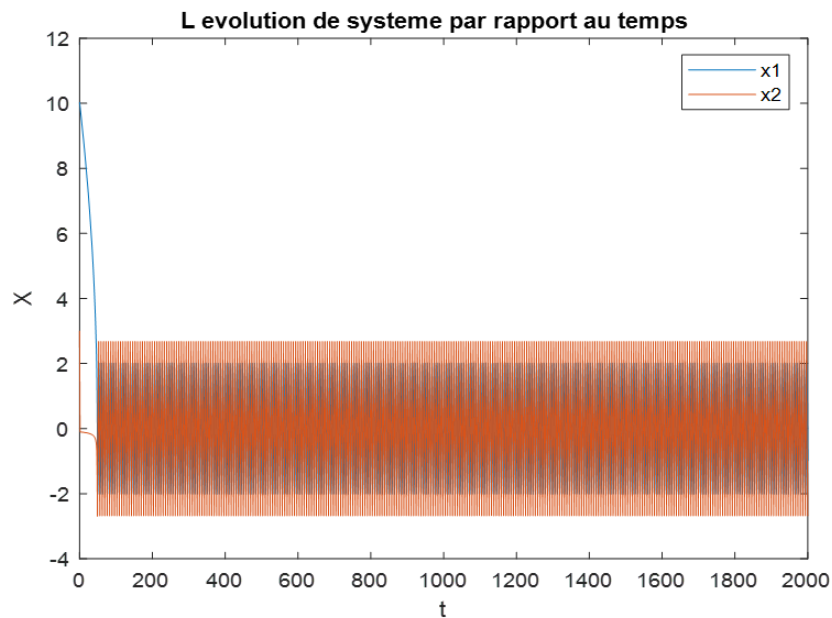


FIGURE 3.22 – L'évolution du système original de Van Der Pol pour $x_0 = [10; 3]$ dans un temps de simulation = 2000.

Résultat d'identification par DMD :

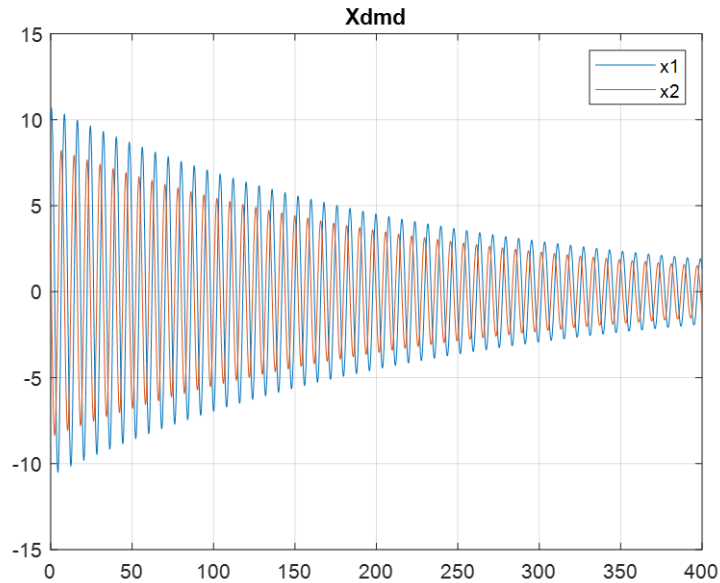


FIGURE 3.23 – L'évolution du système linéaire résultant pour des données suffisantes.

Le système reconstruit, illustré dans la figure (Fig. 3.23), présente clairement des oscillations, contrairement au système reconstruit précédemment montré dans la figure (Fig. 3.19), bien que les deux aient été simulés sur la même période de temps (400 unités).

Nous allons maintenant visualiser le portrait de phase de l'évolution linéaire obtenue par la DMD à partir de données suffisantes, comme illustré dans la figure (Fig. 3.24). On peut observer une amélioration de la qualité de la reconstruction, et la caractéristique principale du système initial, qui est la convergence vers un cycle limite (voir Fig. 3.17), est bien conservée. En effet, si l'on examine la figure (Fig. 3.24), on constate que le portrait de phase ne présente plus un foyer stable, comme illustré dans la figure (Fig. 3.20), mais plutôt un cycle limite convergent.

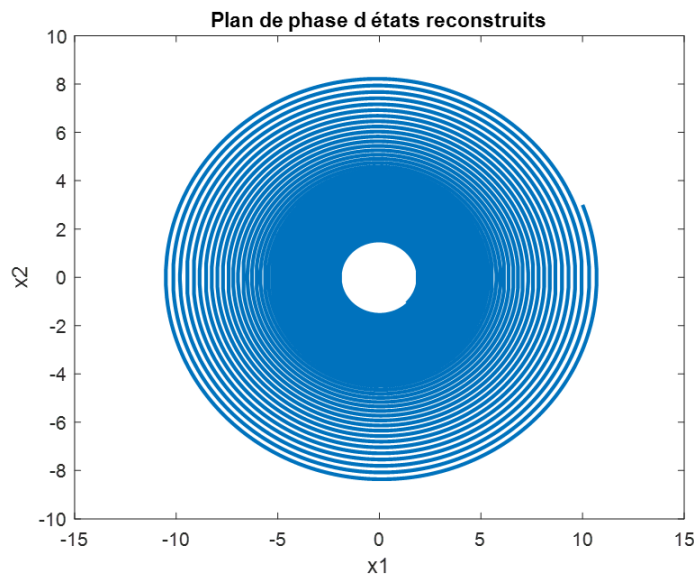


FIGURE 3.24 – Le portrait de phase des états reconstruits à l'aide de DMD pour des données suffisantes.

3.2.4 Conclusion :

La méthode de décomposition en modes dynamiques (DMD) a été appliquée à différents exemples de systèmes dynamiques. Les résultats montrent que la DMD est efficace pour extraire les modes représentatifs des systèmes étudiés, ce qui permet de reconstruire l'état du système, de prédire son évolution future et d'analyser les interactions entre les variables d'état. Comparée à d'autres méthodes comme l'analyse en valeurs singulières (SVD) ou l'analyse en composantes principales (PCA), la DMD présente de meilleures performances dans la séparation des modes et l'extraction d'informations pertinentes.

Cependant, le modèle linéaire obtenu par la DMD présente des limitations, notamment dans sa capacité à reproduire précisément les signaux oscillatoires déformés du système d'origine. Il est important de prendre en compte cette limitation lors de l'interprétation des résultats.

Par ailleurs, le manque de données peut affecter la capacité de la DMD à reconstruire correctement le modèle linéaire du système. Cependant, en augmentant la quantité de données ou en prolongeant la durée de simulation, il est possible d'améliorer la précision de la reconstruction et de mieux représenter le comportement réel du système, en tenant compte de ses caractéristiques oscillatoires ou non linéaires.

En conclusion, la DMD offre une approche précieuse pour analyser les systèmes dynamiques. Cependant, il est essentiel de reconnaître les défis liés au manque de données et aux signaux oscillatoires déformés, et de travailler à améliorer la précision de la reconstruction en fournissant des données adéquates. Les variantes de la DMD, telles que la DMDc et l'EDMD, seront appliquées dans les prochaines sections de ce chapitre.

3.3 Application de la DMDC (avec contrôle) :

3.3.1 Exemple 1 : Système linéaire instable avec un régulateur proportionnel (1^{er} cas de DMDC : La matrice B est connue (1))

DMDC peut aider à découvrir la dynamique sous-jacente d'un système à partir de mesures à la fois de l'état et des entrées externes. Ici, nous illustrons cette idée sur un système linéaire instable à deux dimensions avec un régulateur stabilisant. Malgré la simplicité du problème mathématique, l'exemple est instructif pour le concept général de DMDC [49].

Considérons le système dynamique suivant :

$$A = \begin{bmatrix} 0.9 & 0 \\ 0 & 1.1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, K = \begin{bmatrix} 0 & 0.3 \end{bmatrix}, \quad (3.14)$$

Notons que A est **instable** car la deuxième valeur propre $\lambda_2 = 1.1 > 1$ (hors du cercle unité).

Maintenant, nous allons générer des données en discret du système précédent tel que :

$$\begin{cases} u_k = -Kx_k \\ x_{k+1} = Ax_k + Bu_k \end{cases} \quad (3.15)$$

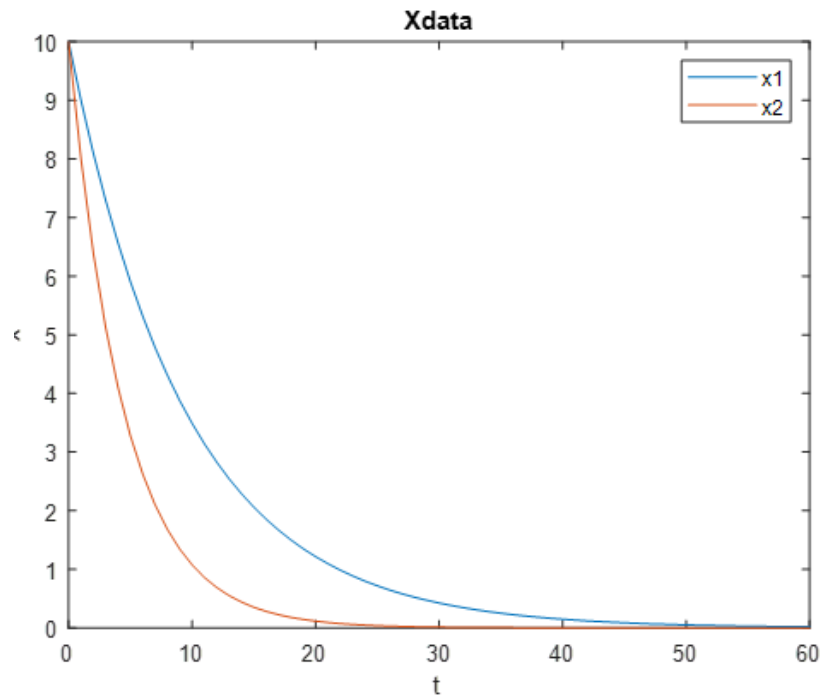


FIGURE 3.25 – Le tracé des données générées X_{data} .

Ainsi, par régression, nous allons chercher A_{naive} tel que :

$$A_{naive} = X'X^\dagger \quad (3.16)$$

Nous avons un système à 2 états et plus de mesures dans le temps que d'états, c'est pourquoi nous utilisons une simple pseudo-inverse X^\dagger .

La pseudo-inverse X^\dagger peut être calculée à l'aide de la SVD de $X = \tilde{U}\tilde{\Sigma}\tilde{V}^*$ en tant que $X^\dagger = \tilde{V}\tilde{\Sigma}^{-1}\tilde{U}^*$.

La formule (3.16) devient :

$$A_{naive} = X'\tilde{V}\tilde{\Sigma}^{-1}\tilde{U}^* \quad (3.17)$$

Nous constaterons que notre A_{naive} est le modèle A en boucle fermée avec des valeurs propres stables.

$$A_{naive} = A - BK = \begin{bmatrix} 0.9 & 0 \\ 0 & 0.8 \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

Ainsi, la matrice A du DMD identifie **incorrectement** la dynamique en boucle fermée et non la véritable matrice A instable.

Pour trouver le modèle DMDc correct, nous cherchons A_{corr} en supposant que nous avons le vecteur B tel que :

$$A_{corr} = (X' - B\Upsilon)X^\dagger \quad (3.19)$$

Ça veut dire :

$$A_{corr} = (X' - B\Upsilon)\tilde{V}\tilde{\Sigma}^{-1}\tilde{U}^* \quad (3.20)$$

C'est la formule définie précédemment dans l'algorithme de la DMDc (2.54).

Maintenant, notre matrice de DMD avec contrôle A_{corr} (matrice d'approximation) obtient le bon modèle de système d'origine.

$$A_{corr} = A = \begin{bmatrix} 0.9 & 0 \\ 0 & 1.1 \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

où nous récupérons la dynamique linéaire instable à partir des données de l'état et des instantanés de contrôle.

Conclusion :

Cet exemple démontre l'utilité de DMDc pour récupérer une dynamique instable à partir d'un système qui semblerait autrement stable.

Notez que cet exemple suppose que la matrice B est connue. Cela peut être excessivement restrictif lors de l'étude de systèmes avec une rétroaction (*feedback*) dépendante de l'état. Avec un signal de contrôle dépendant de l'état, il est impossible de reconstruire B en utilisant la méthode décrite dans (2). Cependant, la matrice B peut être récupérée si une petite perturbation aléatoire est ajoutée au contrôleur $u_k = Kx_k + \delta_k$, où chaque δ est tiré d'une distribution gaussienne avec une moyenne nulle. Cela rompt la symétrie de la rétroaction dépendante de l'état (*state-dependent feedback*), permettant d'étudier indépendamment les matrices A et B . De plus, cela offre au numérique ou à l'expérimentateur une procédure pour étudier des systèmes de grande dimension avec une rétroaction d'état (*state feedback*) [49].

3.3.2 Exemple 2 : Pendule simple

Description du système :

Le pendule simple est un système physique constitué d'un objet de masse \mathbf{m} suspendu à une corde de longueur \mathbf{l} , qui oscille librement sous l'effet de la gravité. C'est l'un des systèmes les plus simples pour étudier les oscillations.

la dynamique d'un pendule simple avec une entrée de contrôle peut être décrite par l'équation différentielle suivante :

$$\ddot{\theta} + (k/ml^2)\dot{\theta} + (g/l)\sin(\theta) = (1/ml^2)u \quad (3.22)$$

Où :

- θ est l'angle (la position angulaire) que la corde du pendule fait avec la verticale.
- $\dot{\theta}$ représente la dérivée de θ par rapport au temps, c'est-à-dire la vitesse angulaire du pendule.
- $\ddot{\theta}$ représente l'accélération angulaire.
- \mathbf{g} est l'accélération due à la gravité (accélération gravitationnelle).
- \mathbf{k} Coefficient de frottement visqueux.
- \mathbf{l} est la longueur de la corde (la tige).
- \mathbf{m} est la masse du pendule (l'objet).
- \mathbf{u} est l'entrée de contrôle, cette variable de commande peut être utilisée pour modifier le comportement du système.

L'équation du pendule simple est une équation non linéaire en raison de la présence du terme $\sin(\theta)$. Cependant, pour de petites oscillations où θ est proche de zéro, on peut approximer $\sin(\theta)$ par θ en utilisant la formule de l'angle petit.

Ainsi, pour de petites oscillations, l'équation du pendule simple linéaire devient :

$$\ddot{\theta} + (k/ml^2)\dot{\theta} + (g/l)\theta = (1/ml^2)u \quad (3.23)$$

La représentation d'état :

La représentation d'état de ce système peut être obtenue en introduisant deux variables d'état, $x_1 = \theta$ et $x_2 = \dot{\theta}$, et une variable de commande, u .

Donc les équations d'état (*les dynamiques*) de pendule simple avec entrée de contrôle sont comme suit :

$$\dot{x} = \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -(g/l)\sin(x_1) - (k/ml^2)x_2 + (1/ml^2)u \end{cases} \quad (3.24)$$

Sous la forme d'un système non linéaire affine en commande :

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u \quad (3.25)$$

La représentation donnée permet de modéliser, simuler et contrôler le comportement d'un pendule en tenant compte de la gravité, de l'amortissement et d'une entrée de contrôle externe u .

Ce système présente des comportements non linéaires. L'analyse directe de ce système peut être difficile en raison de sa non-linéarité. Cependant, en utilisant la méthode de DMDC (Dynamic Mode Decomposition avec contrôle), nous pouvons obtenir un modèle linéaire simplifié qui capture les principales caractéristiques du système.

L'analyse de ce modèle linéaire obtenu par DMDC nous permettra de mieux comprendre le comportement global du système, d'identifier les modes dominants qui contribuent à son évolution, et de concevoir des stratégies de commande appropriées pour stabiliser le système et améliorer ses performances en boucle fermée. Nous examinerons les résultats de l'application de la DMDC sur ce système non linéaire, en mettant l'accent sur la reconstruction des états, la comparaison avec les données originales, et l'analyse des modes dynamiques extraits.

Résultats de simulation de système original :

Les valeurs des paramètres utilisés dans cet exemple sont données comme suit :

- Longueur du pendule : $l = 0.5 \text{ m}$
- Masse du pendule : $m = 0.1 \text{ Kg}$
- Accélération gravitationnelle : $g = 9.8 \text{ m.s}^{-2}$
- Coefficient de frottement visqueux : $k = 25e-3 \text{ Kg.s}^{-1}$.

Pour simuler notre système, nous allons appliquer une commande par retour d'état sur le système non linéaire, de la forme :

$$u = -k_1x_1 - k_2x_2, \quad (3.26)$$

Il est important de noter que dans ce cas, étant donné que notre signal de commande dépend des états du système, il est impossible de reconstruire directement la matrice B (comme cela a été expliqué dans la conclusion de notre premier exemple).

Cependant, il est possible de récupérer une estimation de la matrice B en ajoutant un petit bruit aléatoire au signal de commande.

Ainsi, notre commande sera mise en œuvre de la manière suivante :

$$v = 0.01 \times \text{randn}(1, \text{length}(t)), \quad (3.27)$$

$$u = v - k_1x_1 - k_2x_2, \quad (3.28)$$

Où $k_1 = 0.3333$ et $k_2 = 0.6666$.

v représente le bruit aléatoire ajouté au signal de commande, et t est le vecteur de temps.

En utilisant cette formulation de commande, nous serons en mesure de stabiliser notre système et d'étudier son comportement en boucle fermée.

Dans les figures suivantes, nous présenterons les résultats de la simulation de notre système commandé. Nous commencerons par afficher le signal de commande appliqué, qui est calculé en fonction des états du système et du paramètres de commande k_1 et k_2 . Ensuite, nous examinerons l'évolution temporelle des états du système, ce qui nous permettra d'analyser comment ils se comportent sous l'influence de la commande. Enfin, nous représenterons le plan de phase du système, qui nous donnera une visualisation graphique des trajectoires suivies par les états du système.

Note : La condition initiale prise est : $x_0 = [\pi/4; 0]$

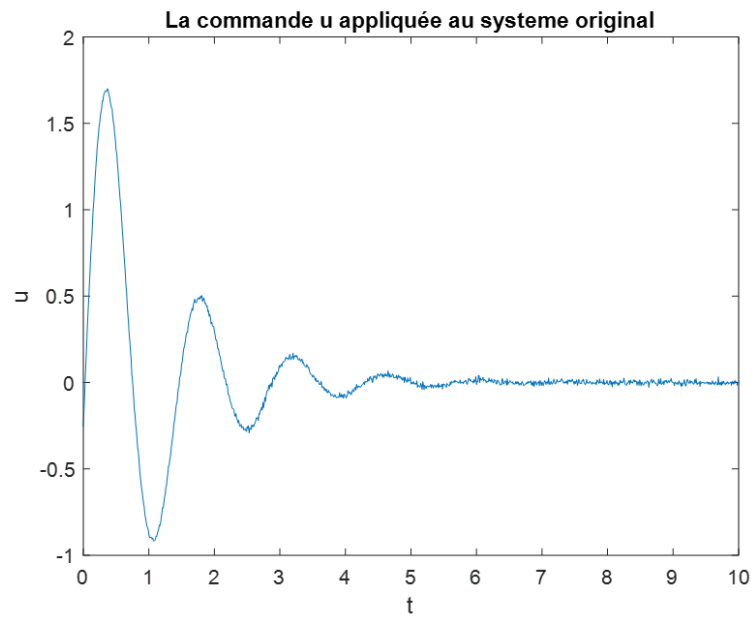


FIGURE 3.26 – La commande appliquée sur notre pendule.

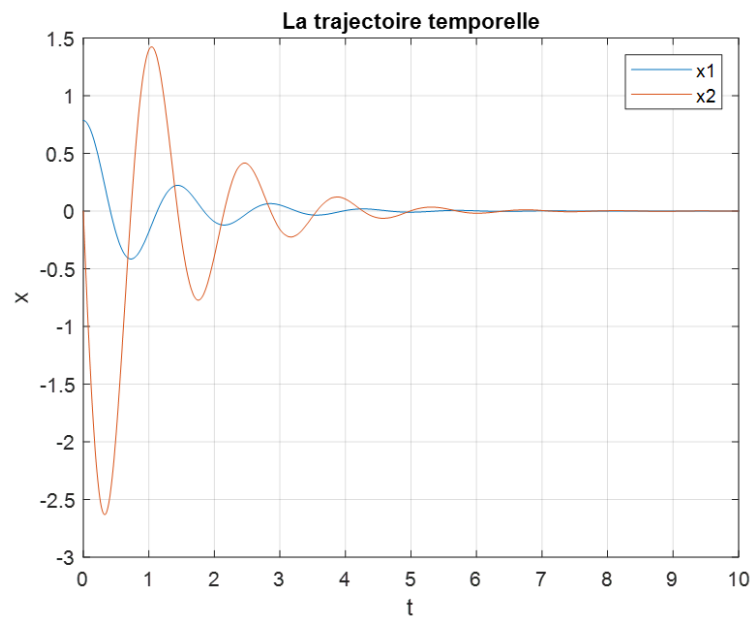


FIGURE 3.27 – L'évolution temporelle du système étudié X_{data} .

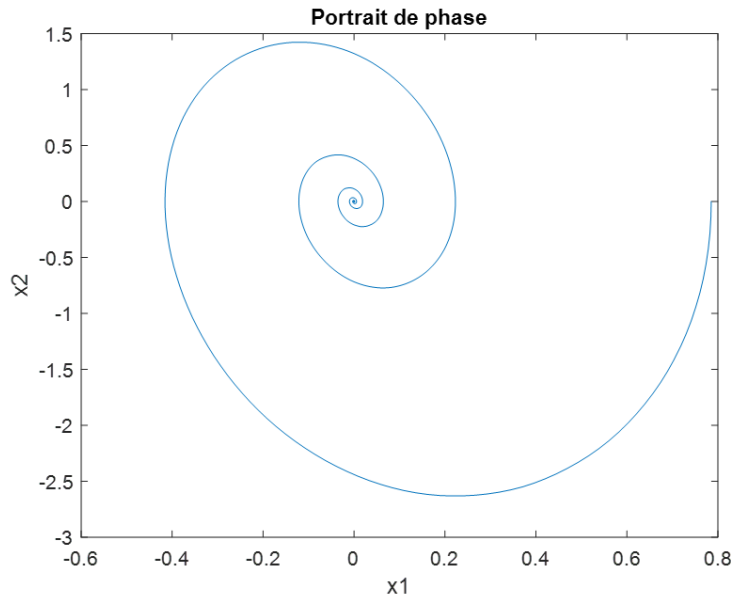


FIGURE 3.28 – Le portrait de phase du système étudié.

Identification du système par DMDC :

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 0.9990 & 0.0099 \\ -0.1925 & 0.9831 \end{bmatrix}, \tilde{A} = \begin{bmatrix} 1.0001 & -0.1924 \\ 0.0100 & 0.9820 \end{bmatrix}, \quad (3.29)$$

La matrice réduite \tilde{A} conserve les mêmes valeurs propres non nulles que la matrice complète A :

$$\lambda_1 = 0.9910 + 0.0429i \quad (3.30)$$

$$\lambda_2 = 0.9910 - 0.0429i \quad (3.31)$$

$$\bar{B} = \begin{bmatrix} 0.00001 \\ 0.0018 \end{bmatrix}, \tilde{B} = \begin{bmatrix} 0.0018 \\ 0.0002 \end{bmatrix} \quad (3.32)$$

\tilde{A} et \tilde{B} sont des matrices résultantes de la projection de A et B sur une base réduite pour l'espace de sortie \tilde{G} (selon les équations 2.73 et 2.74).

Les projections \tilde{A} et \tilde{B} sont utilisées lorsque l'ordre de système n est largement supérieur au r ($r \ll n$) qui est le rang de l'approximation réduite (SVD).

Mais dans notre cas le nombre de valeurs singulières dominantes r est égale à l'ordre de système n ($r = n = 2$), ça veut dire que les deux conditions $n \gg 1$ et $r \ll n$ ne sont pas vérifiées. Donc nous pouvons travailler qu'avec les matrices d'approximations \bar{A} et \bar{B} de la matrice complète A et la matrice d'actionnement B respectivement (selon l'équation 2.69).

Après l'identification, Un modèle dynamique utilisant les matrices \bar{A} et \bar{B} peut être construit et décrit par ce qui suit (Selon 2.70) :

$$x_{k+1} = \bar{A}x_k + \bar{B}u_k \quad (3.33)$$

$$x_{k+1} = \begin{bmatrix} 0.9990 & 0.0099 \\ -0.1925 & 0.9831 \end{bmatrix} x_k + \begin{bmatrix} 0.00001 \\ 0.0018 \end{bmatrix} u_k \quad (3.34)$$

Où : u_k est la même commande appliquée au système d'origine (Avec le bruit).

Les modes DMD sont des vecteurs propres associés aux valeurs propres du système linéaire reconstruit à partir de l'algorithme DMDc. Ces modes représentent les structures spatiales du comportement dynamique du système et permettent de décomposer le système en composantes dynamiques indépendantes. Les modes DMDc sont utilisés pour la reconstruction de l'état du système, la prédiction de son évolution future, l'analyse des interactions spatiales des variables d'état, ainsi que la compréhension des mécanismes sous-jacents du système. Ils jouent un rôle important dans la modélisation, la commande et l'analyse des systèmes dynamiques non linéaires.

L'application de la DMDc permet non seulement de construire un modèle dynamique linéaire, mais également d'extraire les modes DMD, notés Φ , de ce système linéaire résultant.

Dans cet exemple, la matrice Φ est obtenue comme suit :

$$\Phi = \begin{bmatrix} -0.0353 - 0.2167i & -0.0353 + 0.2167i \\ 0.9671 + 0.0218i & 0.9671 - 0.0218i \end{bmatrix} \quad (3.35)$$

L'évolution du modèle dynamique résultant " X_{dmdc} " :

Nous pouvons observer le résultat de l'évolution du modèle dynamique résultant de l'application de la DMDc en comparant ce dernier, noté X_{dmdc} , avec celui du système original, noté X_{data} (voir Fig. 3.27), en les affichant sur la même figure :

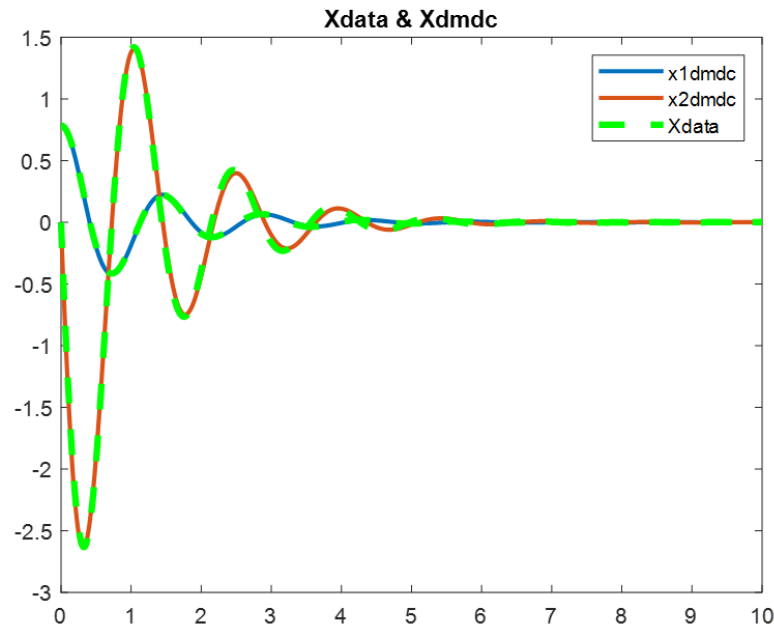


FIGURE 3.29 – Comparaison des données reconstruites par la DMDc X_{dmdc} (en bleu et marron) avec les données du système étudié X_{data} (en vert).

Nous remarquons que la DMDC reconstruit parfaitement les états du système étudié avec une faible erreur définie comme $err = X_{data} - X_{dmdc}$. Cette observation est illustrée dans la figure suivante :

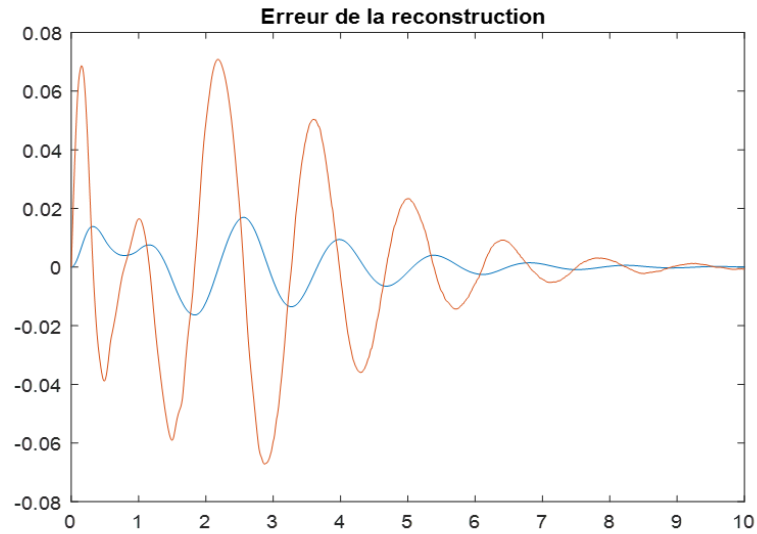


FIGURE 3.30 – Erreur de reconstruction des états par DMDC : Différence entre les données reconstruites et les données originales.

En traçant le portrait de phase de l'évolution linéaire obtenue par la DMDC (équation 3.34) dans la figure (Fig. 3.31), nous remarquons que l'identification ne se contente pas de reconstruire l'état du système original, mais conserve également les principales caractéristiques du système non linéaire original, notamment la stabilité du foyer (voir Fig. 3.28).

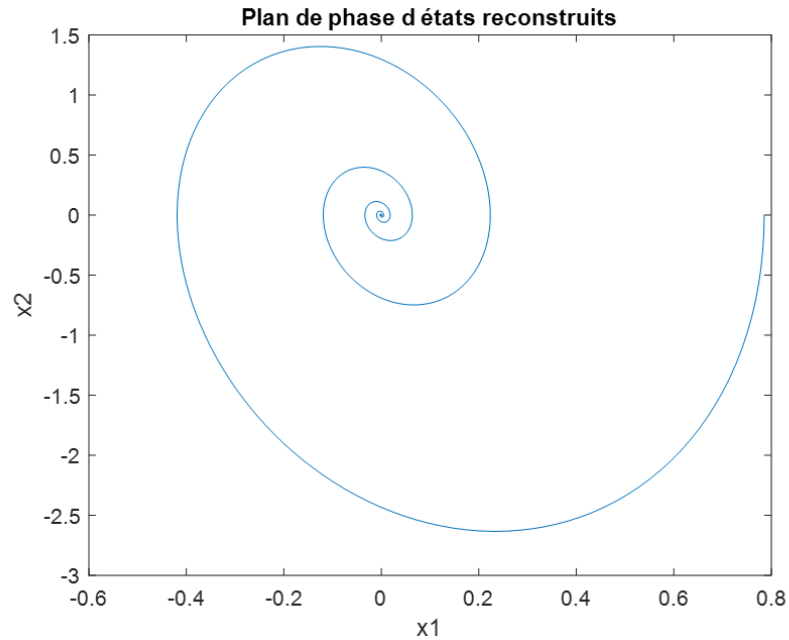


FIGURE 3.31 – Le portrait de phase du système étudié.

Stabilisation du modèle non linéaire :

Après avoir extrait le modèle linéaire de notre pendule non linéaire (3.34), nous pouvons maintenant appliquer différentes commandes sur ce modèle afin de le stabiliser et même d'améliorer les performances du processus. Il est important de noter que le système identifié par la DMDc est celui en boucle fermée avec une entrée de commande bruitée.

Nous allons maintenant appliquer une commande linéaire quadratique (LQR) qui utilise un retour d'état optimal.

La commande LQR est définie par l'équation suivante :

$$u_{lqrk} = -K_{lqr} x_k \quad (3.36)$$

Où K_{lqr} est déterminé comme suit : $K_{lqr} = [2.0822 \quad 23.8898]$

Puisque notre objectif est de stabiliser le système non linéaire d'origine à l'aide d'une commande obtenue à partir de la stabilisation du modèle linéaire résultant de la DMDc, nous avons déjà utilisé une commande LQR pour stabiliser le modèle linéaire, décrite dans l'équation (3.36). Maintenant, nous allons superposer cette commande LQR au système d'origine déjà bouclé. Pour ce faire, nous reprenons la commande initiale (3.28) et ajoutons la commande de retour d'état résultant de la LQR (3.36), ce qui nous donne la commande suivante :

$$v = 0.01 \times \text{randn}(1, \text{length}(t)), \quad (3.37)$$

$$u = v - k_1 x_1 - k_2 x_2 - k_{lqr1} x_1 - k_{lqr2} x_2, \quad (3.38)$$

Avec $k_{lqr1} = 2.0822$ et $k_{lqr2} = 23.8898$

Le résultat de l'application de la commande (3.38) sur le système original non linéaire est illustré dans la figure suivante :

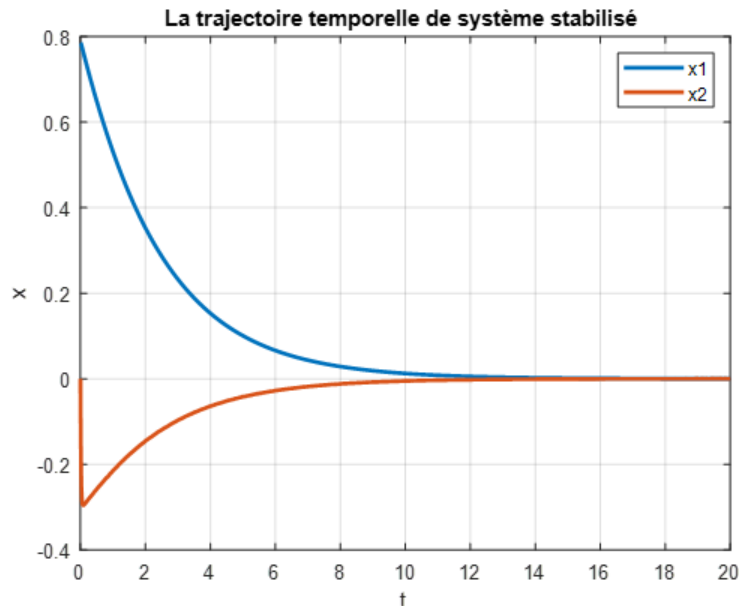


FIGURE 3.32 – Stabilisation du modèle non linéaire.

Le résultat de la stabilisation du système déjà bouclé, tel qu'illustré dans la figure (Fig. 3.32), est parfait. Par conséquent, nous allons maintenant essayer d'appliquer la commande u_{lqr} au système d'origine non bouclé. La commande appliquée au système non linéaire est la suivante :

$$u = -2.0822x_1 - 23.8898x_2, \quad (3.39)$$

Le résultat de l'application de la commande (3.39) sur le système original non linéaire est illustré dans la figure suivante :

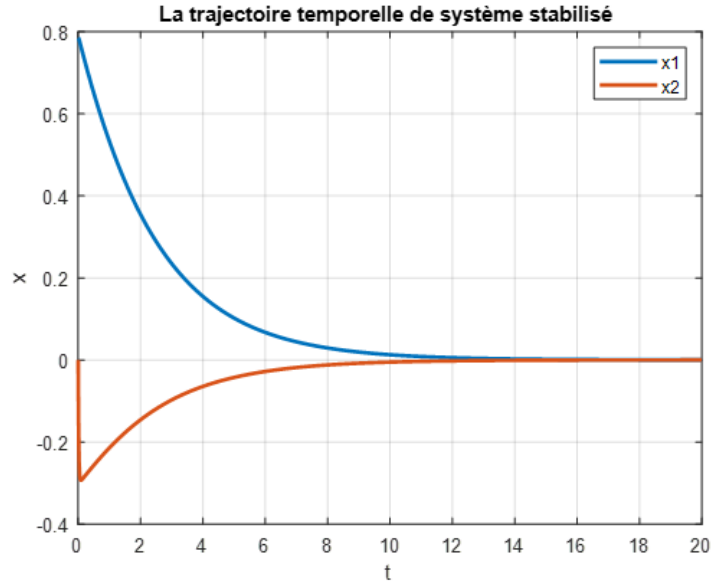


FIGURE 3.33 – Stabilisation du modèle non linéaire.

Le système non linéaire d'origine est parfaitement stabilisé, en utilisant seulement la commande résultante de la stabilisation du modèle linéaire obtenu à partir de la DMDC (boucle ouverte) (Fig. 3.33) et même en superposant cette commande au système non linéaire déjà bouclé (Fig. 3.32). Ainsi, nous avons réussi à stabiliser le système non linéaire, même si l'identification a été faite en boucle fermée.

Interprétation des résultats :

Le système original illustré dans la figure (Fig. 3.27) est déjà stable, mais l'application de la commande LQR sur le système non linéaire (Fig. 3.33) permet d'améliorer l'amortissement du système, de réduire le dépassement et d'accélérer la stabilisation en minimisant le temps de réponse. Cette partie vise à démontrer qu'il est possible de stabiliser le système non linéaire en appliquant différentes commandes sur le modèle linéaire obtenu grâce à la DMDC.

L'application de la DMDC à notre pendule commandé par un retour d'état nous a permis d'identifier les meilleurs opérateurs linéaires \bar{A} et \bar{B} qui approximent les dynamiques linéaires des données de mesure. Cela signifie que nous avons construit un modèle dynamique linéaire (« best fit ») qui offre une meilleure reconstruction des états du système initial.

L'identification par DMDC permet non seulement de reconstruire l'état du système original, mais conserve également les principales caractéristiques du système non linéaire d'origine, notamment la stabilité du foyer dans notre cas. De plus, nous avons identifié les modes DMD Φ qui décrivent la structure spatiale du comportement dynamique du système en tant que corrélations spatiales entre les mesures.

La stabilisation du modèle non linéaire est réalisée en utilisant la commande obtenue à partir de la stabilisation par LQR du modèle linéaire issu de la DMDc. Cette commande est appliquée au système non linéaire pour maintenir sa stabilité.

En utilisant la commande dérivée de la stabilisation du modèle linéaire (LQR), nous nous assurons que le système non linéaire se comporte de manière souhaitée et atteint un état d'équilibre stable. Cela démontre l'efficacité de la méthode de stabilisation basée sur la DMDc pour les systèmes non linéaires.

En conclusion, nous pouvons déduire que la méthode DMDc donne une très bonne approximation des systèmes contrôlés.

3.3.3 Exemple 3 :

Description et analyse du système étudié :

Le système étudié est décrit par un modèle non linéaire comprenant deux équations d'états :

$$\dot{x} = \begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1^3 + x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 - x_2^3 + \cos(x_1)u \end{cases} \quad (3.40)$$

Où x_1 et x_2 sont les variables d'état du système, $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ et u est une entrée de commande.

Ce système présente des comportements non linéaires complexes, tels que des termes cubiques et une dépendance de la fonction cosinus. L'analyse directe de ce système peut être difficile en raison de sa non-linéarité. Cependant, en utilisant la méthode de DMDc (Dynamic Mode Decomposition avec contrôle), nous pouvons extraire les modes dynamiques sous-jacents à partir des données d'état et de l'entrée de commande, et obtenir ainsi un modèle linéaire simplifié qui capture les principales caractéristiques du système.

L'analyse de ce modèle linéaire obtenu par DMDc nous permettra de mieux comprendre le comportement global du système, d'identifier les modes dominants qui contribuent à son évolution, et de concevoir des stratégies de commande appropriées pour stabiliser le système et améliorer ses performances en boucle fermée. Nous analyserons ensuite les résultats de l'application de la DMDc sur ce système non linéaire, en mettant l'accent sur la reconstruction des états, la comparaison avec les données originales, et l'analyse des modes dynamiques extraits.

Dans les sections suivantes, nous présenterons les résultats de notre étude et discuterons des conclusions que nous pouvons en tirer.

Résultats de simulation de système original :

Cette fois-ci, nous allons simuler notre système en utilisant une commande rectangulaire (ou signal carré) de la forme suivante :

$$u = \text{square}(t), \quad (3.41)$$

Cette fonction permet de créer une forme d'onde périodique qui alterne entre deux valeurs constantes, généralement -1 et 1, avec une période régulière.

Et étant donné que notre signal de commande est indépendant des états du système, nous pouvons estimer la matrice B sans avoir besoin d'utiliser du bruit.

Nous allons tracer le signal de commande appliqué dans la figure suivante :

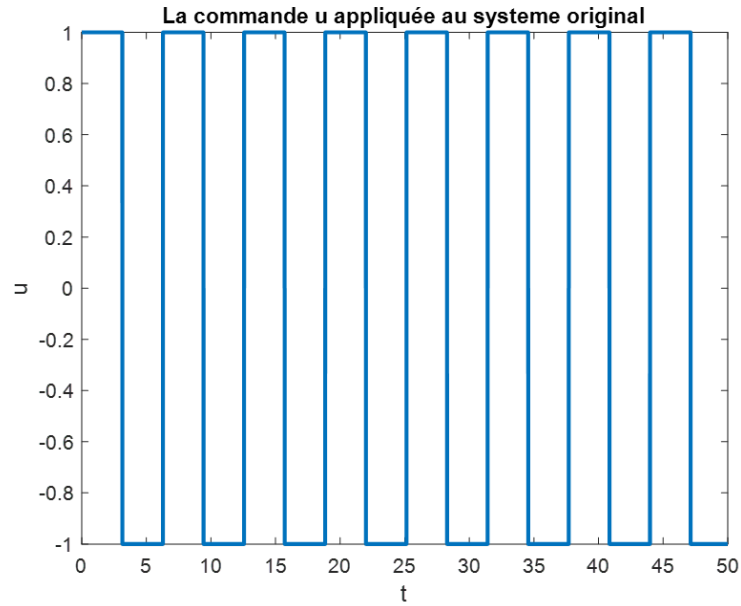


FIGURE 3.34 – La commande appliquée sur notre système non linéaire.

La figure suivante présente l'évolution temporelle des états du système, nous permettant ainsi d'observer leur comportement sous l'influence de la commande.

Note : La condition initiale prise est $x_0 = [1; 0.5]$

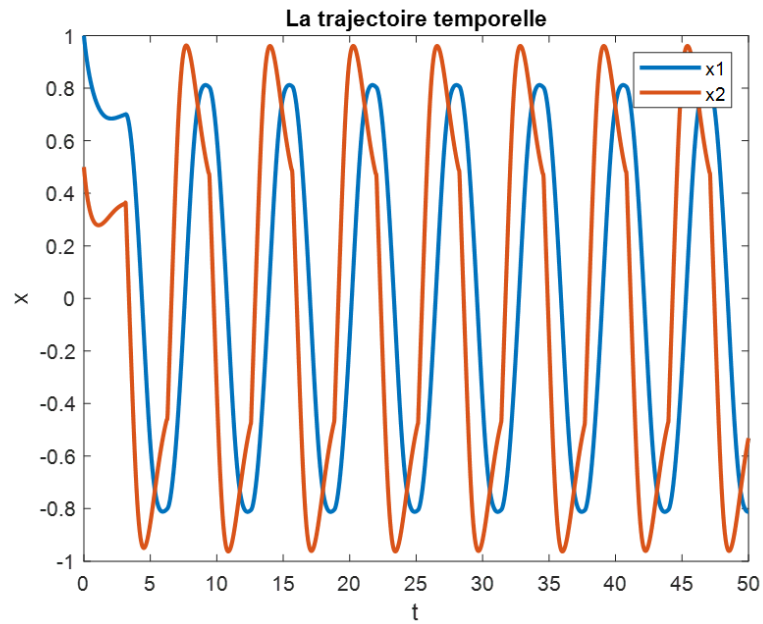


FIGURE 3.35 – L'évolution temporelle du système étudié X_{data} .

Identification du système par DMDC :

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 0.9947 & 0.0102 \\ -0.0102 & 0.9948 \end{bmatrix}, \tilde{A} = \begin{bmatrix} 0.9947 & -0.0102 \\ 0.0101 & 0.9948 \end{bmatrix}, \quad (3.42)$$

La matrice réduite \bar{A} conserve les mêmes valeurs propres non nulles que la matrice complète A :

$$\lambda_1 = 0.9948 + 0.0102i \quad (3.43)$$

$$\lambda_2 = 0.9948 - 0.0102i \quad (3.44)$$

$$\bar{B} = \begin{bmatrix} -0.0003 \\ 0.0075 \end{bmatrix}, \tilde{B} = \begin{bmatrix} -0.0058 \\ 0.0048 \end{bmatrix} \quad (3.45)$$

\bar{A} et \tilde{B} sont des matrices résultantes de la projection de A et B sur une base réduite pour l'espace de sortie \tilde{G} (selon les équations 2.73 et 2.74).

Dans cet exemple, comme précédemment nous n'avons pas besoin d'utiliser ces matrices car le nombre de valeurs singulières dominantes r est égale à l'ordre de système n ($r = n = 2$), ça veut dire que les deux conditions $n \gg 1$ et $r \ll n$ ne sont pas vérifiées. Donc nous pouvons travailler qu'avec les matrices d'approximations \bar{A} et \tilde{B} de la matrice complète A et la matrice d'actionnement B respectivement (selon l'équation 2.69).

Après l'identification, Un modèle dynamique utilisant les matrices \bar{A} et \tilde{B} peut être construit et décrit par ce qui suit (selon 2.70) :

$$x_{k+1} = \bar{A}x_k + \tilde{B}u_k \quad (3.46)$$

$$x_{k+1} = \begin{bmatrix} 0.9947 & 0.0102 \\ -0.0102 & 0.9948 \end{bmatrix} x_k + \begin{bmatrix} -0.0003 \\ 0.0075 \end{bmatrix} u_k \quad (3.47)$$

Où : u_k est la même commande appliquée au système d'origine (Signal carré).

Comme précédemment, nous pouvons extraire les modes DMDC, notés Φ , du modèle dynamique linéaire résultant de la DMDC. Ces modes représentent les structures spatiales du comportement dynamique d'un système. Dans cet exemple, la matrice Φ est obtenue de la manière suivante :

$$\Phi = \begin{bmatrix} -0.4347 + 0.5525i & -0.4347 - 0.5525i \\ -0.5541 - 0.4341i & -0.5541 + 0.4341i \end{bmatrix} \quad (3.48)$$

L'évolution du modèle dynamique résultant " X_{dmdc} " :

Nous pouvons observer le résultat de l'évolution du modèle dynamique résultant de l'application de la DMDC en comparant ce dernier, noté X_{dmdc} , avec celui du système original, noté X_{data} (voir Fig. 3.35), en les affichant sur la même figure :

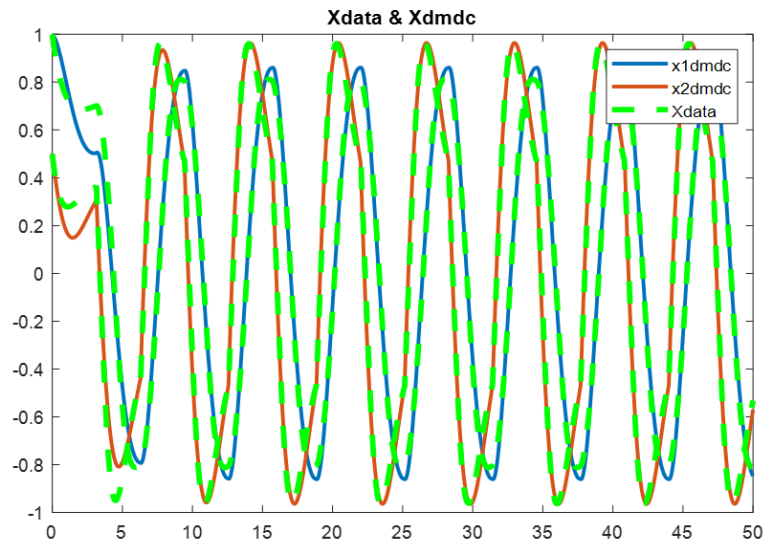


FIGURE 3.36 – Comparaison des données reconstruites par la DMDC X_{dmhc} (en bleu et marron) avec les données du système étudié X_{data} (en vert).

Nous constatons que la DMDC reconstruit un modèle parfait comparé au modèle du système d'origine, avec une faible erreur définie comme $err = X_{data} - X_{dmhc}$. Cette observation est illustrée dans la figure suivante :

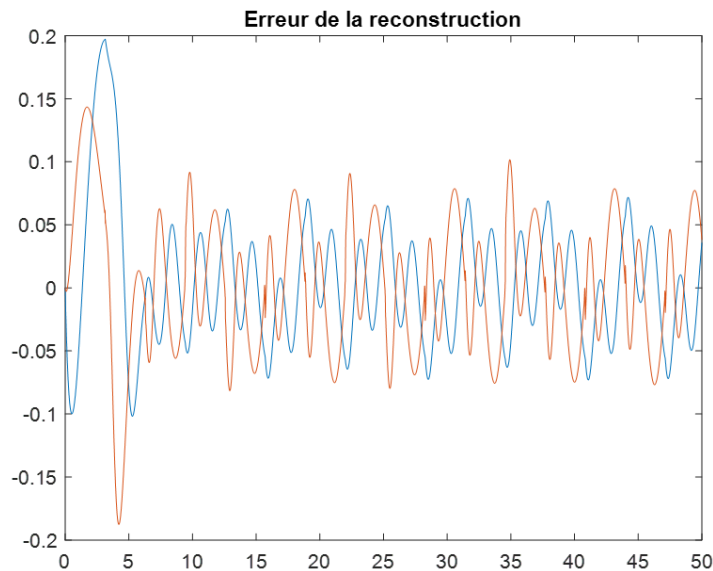


FIGURE 3.37 – Erreur de reconstruction des états par DMDC : Différence entre les données reconstruites et les données originales.

Stabilisation du modèle non linéaire :

Maintenant, nous allons extraire une commande linéaire quadratique (LQR) en stabilisant le modèle linéaire obtenu (3.47) en utilisant la méthode DMDC, pour l'appliquer sur le système non linéaire.

La commande LQR utilisée est définie par l'équation suivante :

$$u_{lqrk} = -K_{lqr} x_k \quad (3.49)$$

Où K_{lqr} est déterminé comme suit : $K_{lqr} = [14.2344 \quad 28.7822]$

Maintenant nous allons commander notre système non linéaire en utilisant le retour d'état obtenu par la méthode LQR. La commande (3.41) sera remplacée par u_{lqr} de (3.49) :

$$u_{lqr} = -14.2344x_1 - 28.7822x_2; \quad (3.50)$$

Nous avons appliqué un signal carré en tant qu'entrée de notre processus, ce qui nous a permis d'identifier le système en boucle ouverte.

La figure suivante illustre le résultat de l'application de la commande u_{lqr} sur le système non linéaire :

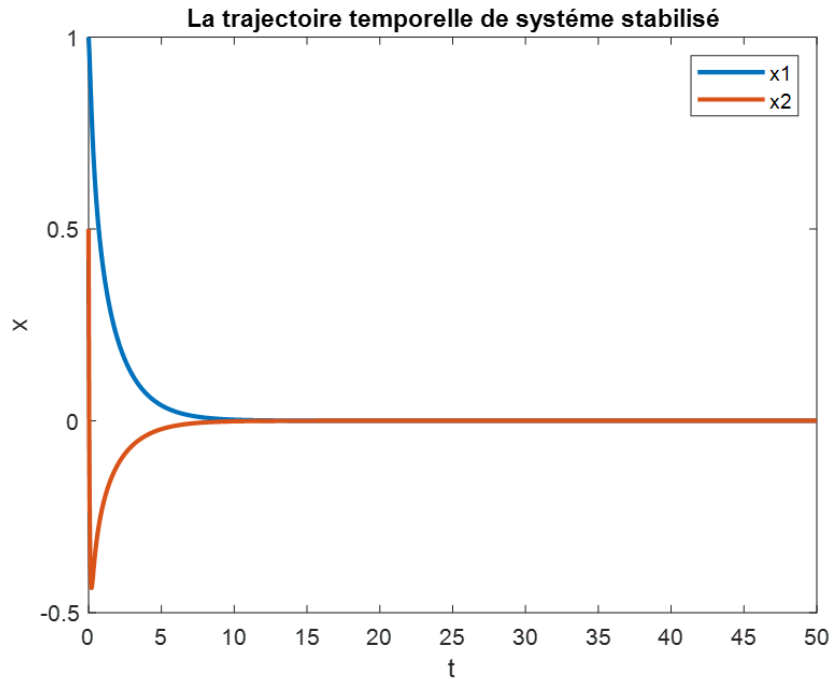
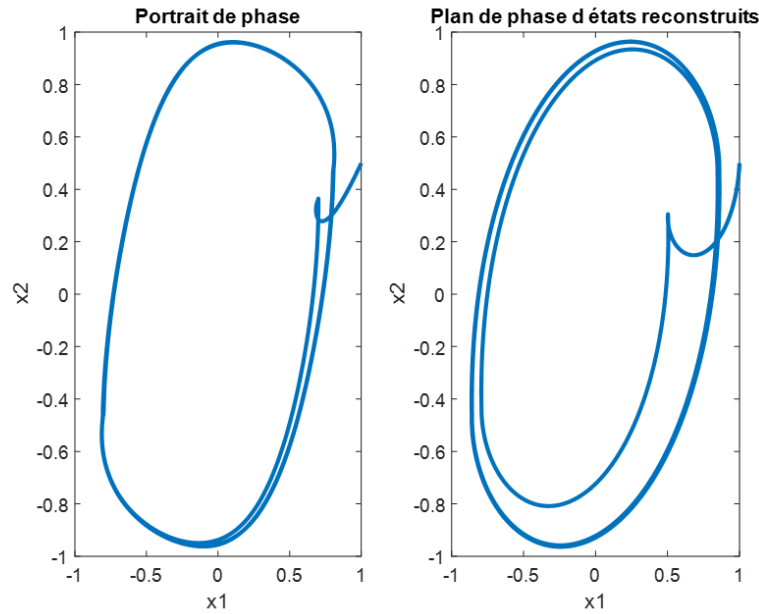


FIGURE 3.38 – Résultat de la stabilisation de système non linéaire en boucle ouvert en utilisant la commande u_{lqr} .

Finalement, nous allons visualiser maintenant la qualité de reconstruction et la conservation des caractéristiques clés du système non linéaire initial en comparant les portraits de phase de l'évolution linéaire obtenue par la DMDC et du système original. Ces deux portraits de phase sont tracés dans la même figure (Fig. 3.39).

FIGURE 3.39 – Portrait de phase du modèle linéaire X_{dmdc}

Nous pouvons remarquer que l'identification du modèle par la DMDC parvient à récupérer exactement le comportement du système d'origine, dans ce cas la convergence vers le cycle limite.

Interprétation des résultats :

Dans cet exemple, nous avons effectivement observé une bonne reconstruction du système avec une erreur acceptable. Notre objectif d'identification a été atteint avec succès, et nous avons pu stabiliser efficacement le système non linéaire en utilisant une commande générée à partir de la stabilisation du modèle linéaire obtenu par la DMDC, en utilisant une commande LQR (3.50).

Comme mentionné précédemment, l'identification par DMDC permet non seulement de reconstruire l'état du système d'origine, mais conserve également les principales caractéristiques du système non linéaire initial. De plus, nous avons identifié les modes DMD Φ qui décrivent la structure spatiale du comportement dynamique du système en tant que corrélations spatiales entre les mesures.

Cette expérience démontre ainsi l'efficacité de la méthode DMDC dans l'identification et la commande de systèmes non linéaires, ouvrant des perspectives prometteuses pour la gestion et le contrôle de tels systèmes.

3.3.4 Conclusion :

La section consacrée à l'application de la DMDC dans ce travail a présenté trois exemples significatifs. Dans ces exemples, la DMDC s'est révélée efficace pour reconstruire précisément l'état des systèmes, identifier les caractéristiques non linéaires et stabiliser les systèmes non linéaires.

La DMDC a permis de capturer les comportements périodiques ou quasi-périodiques dominants des systèmes étudiés, tout en conservant les principales caractéristiques non linéaires. De plus, elle a été utilisée pour générer une commande de stabilisation à partir du modèle linéaire obtenu, ce qui a amélioré les performances et assuré la stabilité des systèmes non linéaires.

En conclusion, la méthode DMDC s'est avérée prometteuse pour la modélisation, l'identification et la commande de systèmes dynamiques non linéaires. Elle offre une meilleure compréhension des comportements non linéaires et des outils efficaces pour la gestion et le contrôle de ces systèmes.

3.4 Application de l'EDMD :

Dans les exemples de la section précédente, nous avons utilisé la méthode de la "Dynamic Mode Decomposition with control (DMDc)" pour identifier un modèle linéaire à partir de données expérimentales d'un système non linéaire. Cela nous a permis de reconstruire et d'analyser le comportement du système à partir d'observations limitées.

Cependant, la méthode DMD standard présente une limitation dans sa capacité à identifier les changements non linéaires de coordonnées nécessaires pour approximer l'opérateur de Koopman dans des systèmes fortement non linéaires. Pour remédier à cette limitation, nous allons maintenant utiliser une nouvelle approche appelée Dynamic Mode Decomposition étendue (EDMD).

L'EDMD est spécialement conçu pour analyser les systèmes dynamiques dont la dynamique est fortement non linéaire, tout en travaillant avec des mesures disponibles linéaires ou limitées.

Dans la suite de cette étude, nous appliquerons donc l'EDMD aux exemples précédents que nous avons étudiés avec la DMDc. Nous analyserons les résultats obtenus afin d'évaluer l'efficacité de cette nouvelle méthode d'identification du modèle fortement non linéaire. Cela nous permettra de mieux comprendre les avantages et les limites de l'EDMD par rapport à la DMDc, et d'apprécier son potentiel pour l'analyse de systèmes complexes et non linéaires.

L'EDMD utilise les mesures non linéaires de l'état original générées par le système pour construire un état augmenté de la forme :

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} x \\ \theta(x) \end{bmatrix} \quad (3.51)$$

Cette expression correspond à un cas particulier de l'équation (2.77) que nous avons étudiée précédemment. Où \bar{x} représente l'état augmenté, x représente l'état d'origine et $\theta(x)$ représente une fonction non linéaire qui dépend des composantes de l'état x .

L'objectif de cette augmentation de l'état est de capturer les caractéristiques non linéaires du système. En ajoutant la partie non linéaire $\theta(x)$ à l'état, on tient compte des effets non linéaires qui ne peuvent pas être représentés par l'état original seul. Cela permet de prendre en compte les interactions complexes et non linéaires entre les différentes composantes de l'état.

L'état augmenté contient des informations supplémentaires sur la non-linéarité du système, ce qui peut être exploité pour concevoir une commande plus précise et adaptée aux caractéristiques spécifiques du système.

3.4.1 Exemple 1 :

Nous allons reprendre le deuxième exemple de la section précédente, qui concerne le pendule, afin d'appliquer l'EDMD. La représentation d'état de ce système, telle que donnée précédemment dans l'équation (3.24), est la suivante :

$$\dot{x} = \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -(g/l)\sin(x_1) - (k/ml^2)x_2 + (1/ml^2)u \end{cases} \quad (3.52)$$

La même commande par retour d'état appliquée précédemment sur le système non linéaire peut être exprimée comme suit, sans avoir besoin du bruit :

$$u = -k_1x_1 - k_2x_2, \quad (3.53)$$

Avec : $k_1 = 0.3333$ et , $k_2 = 0.6666$.

L'état augmenté construit en utilisant les mesures non linéaires de l'état $X = [x_1; x_2]$ résultant de ce pendule est de la forme :

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \theta_1(x) \\ \theta_2(x) \end{bmatrix} \quad (3.54)$$

Nous avons choisi $\theta_1(x)$ et $\theta_2(x)$ tel que :

$$\begin{cases} \theta_1(x) = x_2^3 \\ \theta_2(x) = x_1^3 + x_1 x_2 \end{cases} \quad (3.55)$$

Les modes DMD résultant de l'application de la DMD standard sur l'état augmenté \bar{x} sont donnés par une matrice de dimension $(n \times n)$, où n est la dimension de l'état augmenté. Dans ce cas, la matrice Φ est de dimension (4×4) .

Pour reconstruire les états bruts de notre système, il est nécessaire de réduire la dimension de la matrice Φ à la dimension des états du système initial (2×2) . De même, il faut réduire la dimension des valeurs propres résultant de la DMD.

Dans notre cas, la matrice réduite des modes Φ ainsi que les valeurs propres correspondantes λ , obtenues en réduisant la dimension, sont données par :

$$\Phi = \begin{bmatrix} -0.0286 - 0.0411i & -0.0286 + 0.0411i \\ 0.2033 - 0.0887i & 0.2033 + 0.0887i \end{bmatrix}, \quad \lambda = \begin{bmatrix} 0.9904 + 0.0430i \\ 0.9904 - 0.0430i \end{bmatrix} \quad (3.56)$$

En utilisant les matrices résultantes, nous appliquons la formule d'expansion spectrale donnée par l'équation (2.48) afin de tracer l'évolution temporelle du système résultant et d'identifier les états du système d'origine. Les résultats semblent bien fonctionner. Nous allons comparer les données résultant de l'EDMD, notées X_{edmd} , avec celles du système original, notées X_{data} (voir Fig. 3.27), en les affichant sur la même figure :

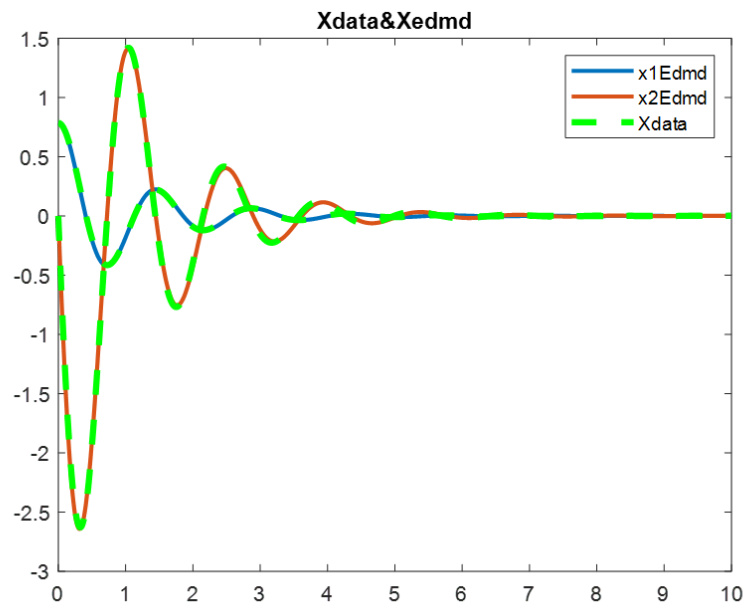


FIGURE 3.40 – Comparaison des données reconstruites par l'EDMD X_{edmd} (en bleu et marron) avec les données du système étudié X_{data} (en vert).

Nous remarquons que l'EDMD reconstruit les états du système étudié de manière précise, avec une erreur minimale définie comme $err = X_{data} - X_{edmd}$. Cette observation est représentée dans la figure suivante :

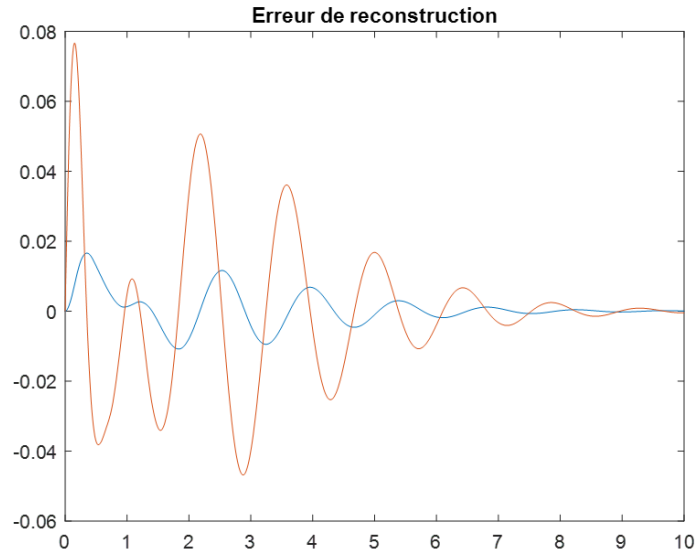


FIGURE 3.41 – Erreur de reconstruction des états par l'EDMD : Différence entre les données reconstruites et les données originales.

Finalement, nous allons comparer les portraits de phase de l'évolution linéaire obtenue par l'EDMD et du système original. Ces deux portraits de phase sont tracés dans la même figure (Fig. 3.42), où nous pouvons remarquer que l'EDMD parvient à récupérer exactement le comportement du système d'origine, notamment son foyer stable.

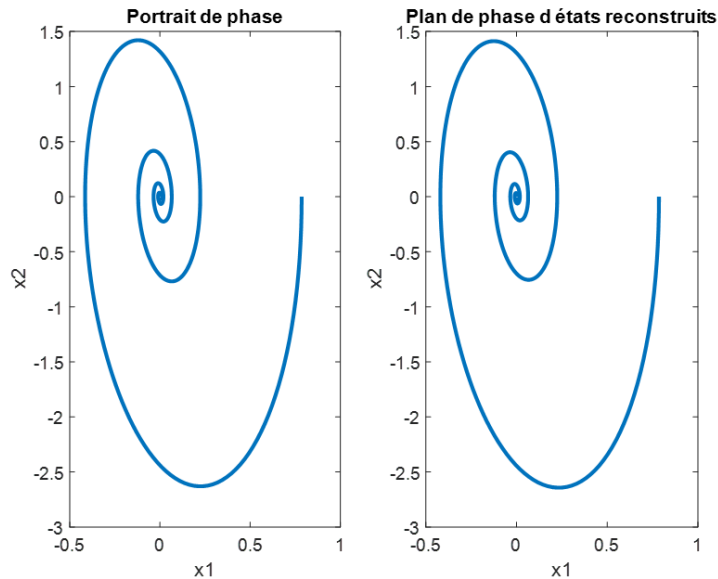


FIGURE 3.42 – Portrait de phase du modèle reconstruit X_{edmd} (à droite) et du modèle initial X_{data} (à gauche)

Interprétation des résultats :

Dans cet exemple, l'EDMD a été appliqué avec succès en utilisant des fonctions non linéaires pour construire l'état augmenté du système. Nous constatons donc que l'ajout de non-linéarités aux mesures linéaires générées par le système, permet d'identifier correctement les états du système d'origine. L'idée ici est de choisir les bonnes non-linéarités pour construire un état augmenté capable de capturer les comportements non linéaires du système et de fournir une meilleure représentation des dynamiques sous-jacentes.

Puisque le système dynamique non linéaire du pendule n'est pas trop complexe, il est relativement facile de choisir les non-linéarités appropriées. Cela a permis de construire une matrice de données augmentée (3.54), ce qui a facilité la modélisation et l'analyse plus efficaces des comportements non linéaires du pendule.

L'identification des dynamiques du pendule est excellente, avec une faible erreur. En fait, les résultats semblent même meilleurs que ceux obtenus avec l'application de la méthode DMDc, ce qui est mis en évidence en analysant les erreurs obtenues avec la méthode DMDc (voir Fig. 3.30) et avec l'EDMD (voir Fig. 3.41). Toutefois, il convient de noter que dans le cas d'un système commandé, la méthode DMDc reste préférable.

L'EDMD s'est avéré particulièrement utile lorsque la DMD standard ne pouvait pas capturer de manière précise les non-linéarités du système. Les résultats obtenus ont démontré l'efficacité de l'EDMD dans la modélisation et la prédiction de systèmes dynamiques complexes.

3.4.2 Exemple 2 :

Reprenons maintenant le troisième exemple de la section "Application de la DMDc", qui est décrit par un modèle non linéaire comprenant les deux équations d'état suivantes :

$$\dot{x} = \begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1^3 + x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 - x_2^3 + \cos(x_1)u \end{cases} \quad (3.57)$$

Ici, x_1 et x_2 sont les variables d'état du système, et u est une entrée de commande. Comme mentionné précédemment, ce système présente des comportements non linéaires complexes, tels que des termes cubiques et une dépendance de la fonction cosinus.

Effectivement, dans certains cas, le choix des fonctions non linéaires appropriées pour construire l'état augmenté (3.51) peut être difficile ou peu évident, étant donné que cet exemple présente des comportements non linéaires complexes. C'est là que l'utilisation des fonctions radiales de base (RBF) dans l'EDMD peut être particulièrement avantageuse. Nous allons donc appliquer l'EDMD à cet exemple en utilisant des fonctions RBF, afin de vérifier leur efficacité pour gérer ces cas de systèmes.

Note :

Les fonctions radiales de base (RBF), telles que les thin-plate splines, offrent flexibilité et adaptabilité pour modéliser les non-linéarités dans les systèmes complexes. Elles permettent de capturer automatiquement les relations non linéaires entre les variables d'état, simplifiant ainsi la modélisation sans spécifier explicitement les fonctions non linéaires. L'utilisation des RBF dans l'EDMD permet une approche adaptative et flexible pour modéliser les non-linéarités complexes.

De plus, la variabilité des conditions initiales dans le prédicteur Koopman basé sur l'EDMD avec les RBF facilite l'évaluation de la capacité de généralisation du modèle et de sa sensibilité aux variations initiales. Cela permet d'obtenir une meilleure compréhension de la performance et de la robustesse du modèle face à différentes conditions de départ.

En combinant les RBF avec l'EDMD, il est possible d'obtenir une modélisation précise des non-linéarités tout en évaluant la capacité de généralisation du modèle, ce qui est essentiel pour une analyse approfondie des systèmes complexes.

Dans notre exemple, nous utiliserons la fonction RBF "thin-plate splines" en prenant une condition initiale $x_0 = [1; 0.5]$.

Nous avons utilisé un signal de commande similaire à une onde carrée (square(t) utilisée précédemment). La commande utilisée pour contrôler notre système est la suivante :

$$u = (-1)^{\text{round}(t/30)} \quad (3.58)$$

Ce signal génère une forme d'onde carrée qui alterne sa valeur entre -1 et 1 à des intervalles réguliers de 30 unités de temps.

Nous pouvons visualiser la forme de cette commande dans la figure suivante :

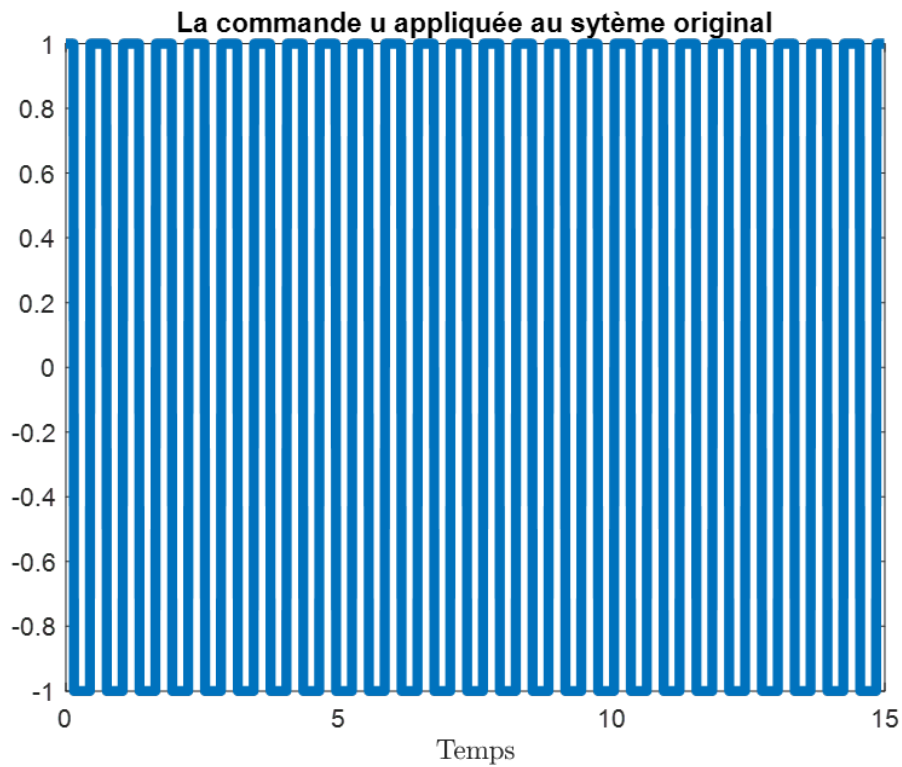


FIGURE 3.43 – La commande appliquée sur notre système non linéaire.

La figure suivante présente l'évolution temporelle des états du système, nous permettant ainsi d'observer leur comportement sous l'influence de la commande (3.58) :

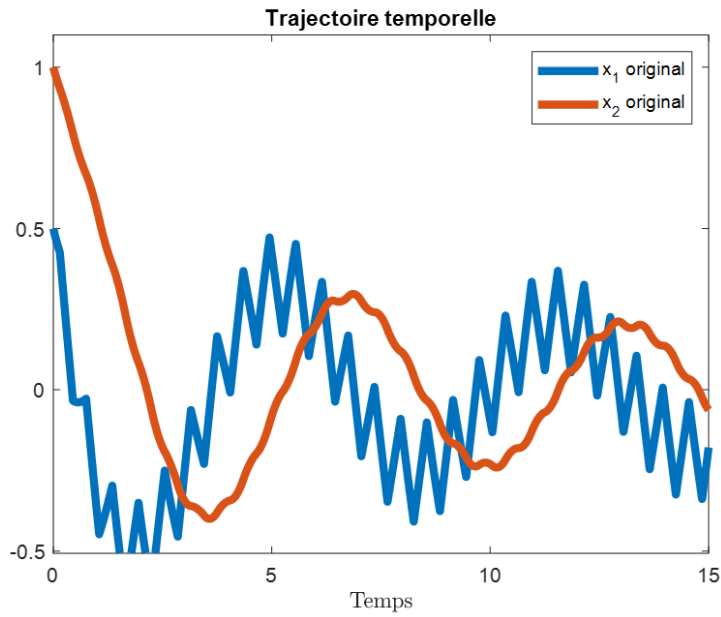


FIGURE 3.44 – L'évolution temporelle du système étudié X_{data} sous la commande (3.58).

Après l'application de l'EDMD sur l'état augmenté construit à l'aide de la fonction RBF "thin-plate splines", nous pouvons maintenant visualiser les résultats de la reconstruction X_{EDMD} en les comparant avec ceux du système original X_{data} (voir Fig. 3.44), en les affichant sur la même figure : Pour l'état x_1 :

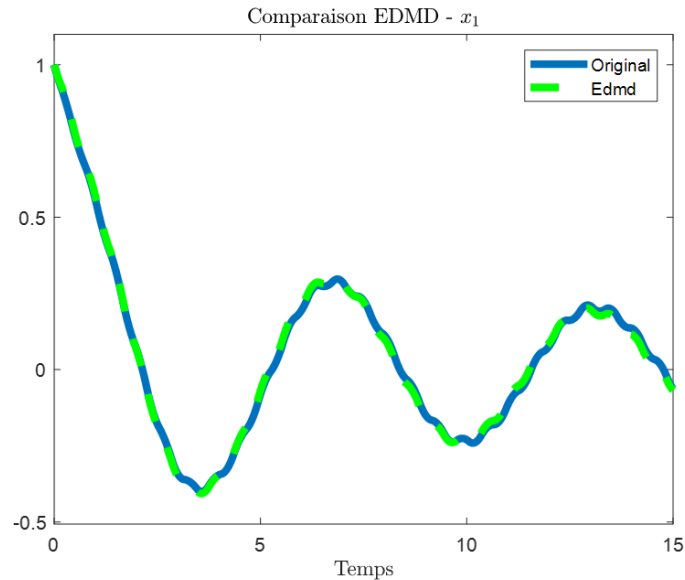


FIGURE 3.45 – Une comparaison entre les résultats de la reconstruction de l'état x_1 obtenus par l'EDMD ($x_{1,EDMD}$ en vert) et les données du système original correspondantes ($x_{1,data}$ en bleu).

Pour l'état x_2 :

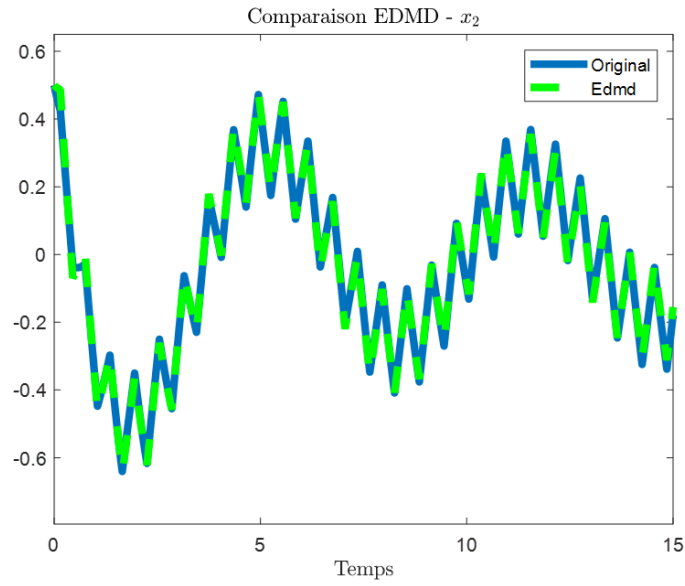


FIGURE 3.46 – Une comparaison entre les résultats de la reconstruction de l'état x_2 obtenus par l'EDMD ($x_{2,EDMD}$ en vert) et les données du système original correspondantes ($x_{2,data}$ en bleu).

Nous constatons que l'EDMD, utilisant la fonction RBF, reconstruit de manière précise les états du système étudié, avec une faible erreur définie comme $err = X_{data} - X_{edmd}$. Cette observation est illustrée dans la figure suivante :

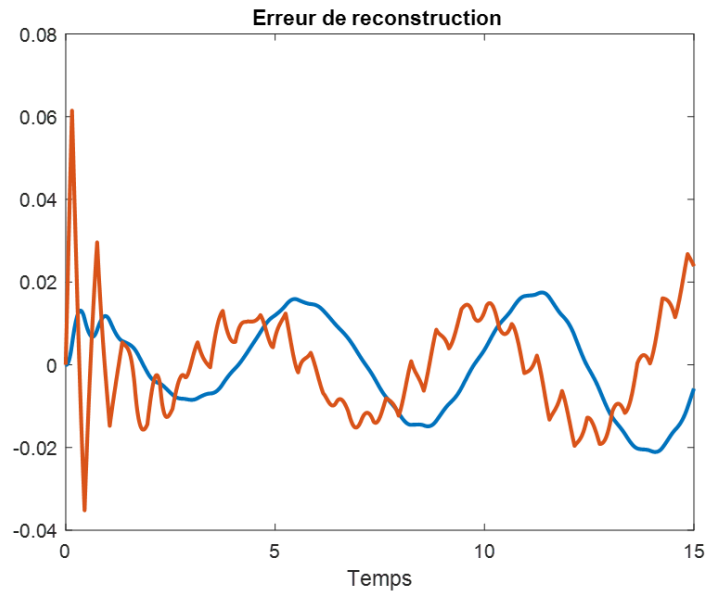


FIGURE 3.47 – Erreur de reconstruction des états par l'EDMD : Différence entre les données reconstruites et les données originales.

Interprétation des résultats :

Cet exemple présente des non-linéarités plus complexes que l'exemple précédent, ce qui rend difficile le choix des fonctions non linéaires appropriées pour construire l'état augmenté dans le cadre de l'EDMD. Pour résoudre ce défi, nous avons proposé une nouvelle méthode qui capture automatiquement les relations non linéaires entre les variables d'état, sans spécifier explicitement les fonctions non linéaires, et qui permet une modélisation adaptative et flexible des non-linéarités complexes. Cette méthode repose sur l'utilisation des fonctions radiales de base (RBF) dans le cadre de l'EDMD.

Plus précisément, nous avons utilisé la fonction RBF "thin-plate splines" pour générer les non-linéarités. L'état augmenté a été construit et l'EDMD a été appliqué avec succès, fournissant d'excellents résultats en termes d'identification. Nous avons pu capturer avec précision les comportements non linéaires du système et obtenir une meilleure représentation des dynamiques sous-jacentes, facilitant ainsi la modélisation et l'analyse du système. L'erreur obtenue par l'EDMD (voir Fig. 3.47) est nettement plus faible que celle obtenue par l'application de la DMDc (voir Fig. 3.37). Cependant, il convient de souligner que l'objectif de la DMDc reste l'identification du système en vue de sa commande.

La variabilité des conditions initiales dans le prédicteur Koopman basé sur l'EDMD avec les RBF joue un rôle important pour évaluer la capacité de généralisation d'un modèle performant et robuste face à différentes conditions initiales. Ainsi, nous pouvons conclure que l'EDMD, en utilisant les RBF, fournit des résultats précis et confirme sa capacité à gérer des systèmes non linéaires complexes.

3.4.3 Conclusion :

Dans cette section, nous avons présenté deux exemples d'application de l'EDMD (Extended Dynamic Mode Decomposition) pour modéliser des systèmes dynamiques non linéaires. Dans le premier exemple, l'utilisation d'EDMD avec des fonctions non linéaires appropriées a permis une identification précise des états du système d'origine et une capture efficace des comportements non linéaires, notamment dans le cas du système du pendule.

Dans le deuxième exemple, nous avons fait face à des non-linéarités plus complexes, rendant le choix des fonctions appropriées plus difficile. Pour résoudre ce défi, nous avons proposé une nouvelle méthode basée sur l'utilisation des fonctions radiales de base (RBF) dans l'EDMD, offrant une approche adaptative et flexible pour modéliser les non-linéarités complexes du système étudié.

Les résultats obtenus dans les deux exemples ont démontré l'efficacité de l'EDMD dans la modélisation et la prédiction de systèmes dynamiques non linéaires complexes. L'erreur obtenue par l'EDMD était significativement faible, mettant en évidence l'importance de prendre en compte les non-linéarités pour obtenir une représentation précise des dynamiques sous-jacentes.

En conclusion, l'EDMD s'est révélé être une approche puissante pour la modélisation et l'analyse de systèmes dynamiques complexes. Son utilisation de fonctions non linéaires permet de capturer automatiquement les relations entre les variables d'état, offrant ainsi une meilleure compréhension des comportements non linéaires des systèmes étudiés.

3.5 Conclusion du chapitre :

En conclusion de ce chapitre consacré à l'application de la méthode de décomposition en modes dynamiques (DMD) et de ses variantes, notamment la DMD avec contrôle (DMDc) et l'EDMD (Extended Dynamic Mode Decomposition), sur des exemples de systèmes dans le contexte de l'analyse, de la commande et de la modélisation des systèmes dynamiques, plusieurs conclusions importantes peuvent être tirées.

Tout d'abord, il a été démontré que la DMD est une approche efficace pour extraire les modes caractéristiques des systèmes étudiés. Cela permet de reconstruire l'état du système, de prédire son évolution future et d'analyser les interactions entre les variables d'état. Comparée à d'autres méthodes telles que l'analyse en valeurs singulières (SVD) ou l'analyse en composantes principales (PCA), la DMD présente de meilleures performances en termes de séparation des modes et d'extraction d'informations pertinentes.

Cependant, il est important de noter que le modèle linéaire obtenu par la DMD présente certaines limitations, notamment sa capacité limitée à reproduire avec précision les signaux oscillatoires déformés du système d'origine, car le modèle génère principalement des oscillations caractéristiques. Il convient donc de prendre en compte ces limitations lors de l'interprétation des résultats.

Par ailleurs, l'impact du manque de données sur la capacité de la DMD à reconstruire correctement le modèle linéaire du système a été souligné. Cependant, il a été démontré qu'en augmentant la quantité de données ou en prolongeant la durée de simulation, il est possible d'améliorer la précision de la reconstruction et de mieux représenter le comportement réel du système, en tenant compte de ses caractéristiques oscillatoires ou non linéaires.

L'étude des variantes de la DMD, notamment la DMDc et l'EDMD, a également été réalisée. Dans le cas de la DMDc, son efficacité a été observée pour reconstruire précisément l'état des systèmes, identifier les caractéristiques non linéaires et stabiliser les systèmes en boucle ouverte. Cette méthode a permis de capturer les comportements périodiques ou quasi-périodiques dominants des systèmes étudiés tout en conservant les principales caractéristiques non linéaires.

De plus, la DMDc a été utilisée avec succès pour générer une commande de stabilisation à partir du modèle linéaire obtenu, ce qui a amélioré les performances et assuré la stabilité des systèmes non linéaires.

Quant à l'EDMD, des exemples d'application ont été présentés pour modéliser des systèmes dynamiques non linéaires. Il a été démontré que l'utilisation de l'EDMD avec des fonctions non linéaires appropriées permet une identification précise des états du système d'origine et une capture efficace des comportements non linéaires. Une nouvelle méthode basée sur l'utilisation des fonctions radiales de base (RBF) dans l'EDMD a également été proposée pour modéliser les non-linéarités complexes, démontrant ainsi une plus grande efficacité dans la capture de ces non-linéarités.

En résumé, la méthode DMD, ainsi que ses variantes DMDc et EDMD, offrent des approches précieuses pour l'analyse, la modélisation, la prédiction et la commande des systèmes dynamiques. Elles permettent une meilleure compréhension des comportements non linéaires et offrent des outils efficaces pour la gestion et le contrôle de ces systèmes. Toutefois, il convient de relever les défis liés au manque de données et aux signaux oscillatoires déformés, et de poursuivre les recherches afin d'améliorer la précision de la reconstruction en fournissant des données adéquates.

Les avancées réalisées dans le domaine de la DMD et de ses variantes ouvrent des perspectives passionnantes pour la modélisation des systèmes dynamiques dans divers domaines d'application. En exploitant pleinement les avantages offerts par la DMDC et l'EDMD, il est possible de mieux comprendre et prédire les comportements des systèmes dynamiques complexes, contribuant ainsi aux avancées scientifiques et technologiques. Cependant, il est essentiel de continuer à mener des recherches afin de surmonter les limitations actuelles et d'exploiter pleinement le potentiel de ces méthodes dans la résolution de problèmes réels.

CONCLUSION GÉNÉRALE

En conclusion, L'opérateur de Koopman est un outil puissant qui peut être utilisé pour linéariser des systèmes non linéaires dans leur ensemble. Le cadre de l'opérateur de Koopman suscite de plus en plus d'attention dans la communauté du contrôle, mais il en est encore à ses débuts. Il existe également de nombreuses zones de recherche inexplorées et des problèmes ouverts. Le principal défi consiste à traiter la nature infiniment dimensionnelle de l'opérateur et les approximations inhérentes des schémas numériques, ce qui est en quelque sorte le prix à payer pour développer des méthodes linéaires pour les systèmes non linéaires.

La méthode DMD ainsi que ses variantes, telles que l'EDMD et la DMDc, sont considérées comme des outils puissants pour l'analyse et la modélisation des systèmes dynamiques. Elles sont basées sur les données et permettent d'approximer efficacement l'opérateur de Koopman. Ces méthodes ont démontré leur utilité dans une variété de domaines, offrant des perspectives nouvelles pour l'étude des comportements dynamiques, la prédiction des évolutions futures et l'identification des modes de comportement caractéristiques d'un système. Grâce à leur approche data-driven, elles évitent souvent la nécessité d'une connaissance préalable complète des équations sous-jacentes, ce qui les rend particulièrement adaptées à l'analyse de systèmes complexes et non linéaires. Ces méthodes offrent des approches efficaces pour extraire des modes dynamiques dominants à partir de données temporelles, ce qui permet de réduire la dimensionnalité des systèmes complexes et de capturer les comportements caractéristiques.

L'utilisation de la méthode DMD a permis de mettre en évidence des modes cohérents dans les données, ce qui a facilité la compréhension des structures sous-jacentes et des mécanismes dynamiques des systèmes étudiés. De plus, l'extension de la méthode DMD à travers l'approche EDMD a permis d'intégrer des informations supplémentaires, telles que les dérivées temporelles, pour une meilleure représentation des systèmes non linéaires.

La méthode DMDc s'est avérée être une extension prometteuse, permettant de contrôler et de manipuler les modes dynamiques extraits. Cela ouvre de nouvelles perspectives pour la conception de stratégies de contrôle efficaces et la modélisation prédictive des systèmes dynamiques.

Cependant, il convient de noter que ces méthodes sont sensibles aux bruits et aux erreurs de modélisation. Une attention particulière doit donc être portée à la qualité des données d'entrée et aux hypothèses sous-jacentes lors de l'application de ces méthodes.

En résumé, les méthodes DMD, EDMD et DMDc offrent des outils précieux pour l'analyse, la modélisation et le contrôle des systèmes dynamiques. Leur utilisation peut permettre de mieux comprendre les phénomènes observés, d'extraire les modes dominants et de développer des modèles prédictifs précis. Cependant, il est important de les appliquer avec soin en tenant compte des limitations et des considérations spécifiques à chaque cas d'étude.

De futures perspectives de ce travail peuvent être envisagées : calculer des commandes prédictives ; utiliser de vraies données expérimentales pour développer des modèles linéaires ; appliquer les techniques DMD et Koopman à des systèmes d'ordre élevé comme les réseaux électriques, les modèles économiques, les réseaux sociaux ou bien le cerveau humain qui est composé de milliards de neurones interconnectés ...

BIBLIOGRAPHIE

- [1] Ian Abraham, Gerardo de la Torre, and Todd Murphey. Model-based control using Koopman operators. In *Robotics : Science and Systems XIII*, Jul 2017.
- [2] Ralph Abraham, Jerrold E. Marsden, and Tudor Ratiu. *Manifolds, Tensor Analysis, and Applications*, volume 75 of *Applied Mathematical Sciences*. Springer-Verlag, 1988.
- [3] Mradul Agrawal, Sandeep Vidyashankar, and Ke Huang. On-chip implementation of ecog signal data decoding in brain-computer interface. In *Mixed-Signal Testing Workshop (IMSTW), 2016 IEEE 21st International*, pages 1–6. IEEE, 2016.
- [4] Hassan Arbabi and Igor Mezić. Ergodic theory, dynamic mode decomposition, and computation of spectral properties of the koopman operator. *SIAM Journal on Applied Dynamical Systems*, 16(4) :2096–2126, 2017.
- [5] Shervin Bagheri. Koopman-mode decomposition of the cylinder wake. *Journal of Fluid Mechanics*, 726 :596–623, 2013.
- [6] Z Bai, E Kaiser, JL Proctor, JN Kutz, and SL Brunton. Dynamic mode decomposition for compressive system identification. *arXiv preprint arXiv :1710.07737*, 2017.
- [7] Emanuel Berger, Martin Sastuba, Daniel Vogt, Benjamin Jung, and Heni Ben Amor. Estimation of perturbations in robotic behavior using dynamic mode decomposition. *Journal of Advanced Robotics*, 29(5) :331–343, 2015.
- [8] Alexander Broad, T D Murphey, and Brenna Argall. Learning models for shared control of human-machine systems with unknown dynamics. In *Robotics : Science and Systems Proceedings*, 2017.
- [9] Bingni W Brunton, Lise A Johnson, Jeffrey G Ojemann, and J Nathan Kutz. Extracting spatial-temporal coherent patterns in large-scale neural recordings using dynamic mode decomposition. *Journal of Neuroscience Methods*, 258 :1–15, 2016.
- [10] Steven L. Brunton, Bingni W. Brunton, Joshua L. Proctor, and J. Nathan Kutz. Koopman invariant subspaces and finite linear representations of nonlinear dynamical systems for control. *PLOS ONE*, 11(2) :e0150171, Feb 2016.
- [11] Steven L. Brunton, Bingni W. Brunton, Joshua L. Proctor, and J. Nathan Kutz. Koopman invariant subspaces and finite linear representations of nonlinear dynamical systems for control. *PloS one*, 11(2) :e0150171, 2016.

-
- [12] Steven L Brunton, Bingni W Brunton, Joshua L Proctor, and J Nathan Kutz. Data-driven discovery of koopman eigenfunctions for control. *SIAM Journal on Applied Dynamical Systems*, 17(1) :245–262, 2018.
- [13] Steven L Brunton, Marko Budišić, Eurika Kaiser, and J Nathan Kutz. Modern koopman theory for dynamical systems. *arXiv preprint arXiv :2102.12086*, 2021.
- [14] Steven L Brunton and J Nathan Kutz. *Data-Driven Science and Engineering : Machine Learning, Dynamical Systems, and Control*. Cambridge University Press, 2019.
- [15] Steven L Brunton, Joshua L Proctor, and J Nathan Kutz. Modern koopman theory for dynamical systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 61(4) :399–413, 2016.
- [16] David L. Donoho and Matan Gavish. Minimax risk of matrix denoising by singular value thresholding. *The Annals of Statistics*, 42 :2413–2440, 2014.
- [17] Ryan Dunne and Beverley J McKeon. Dynamic stall on a pitching and surging airfoil. *Experiments in Fluids*, 56(8) :1–15, 2015.
- [18] Carl Eckart and Gale Young. The approximation of one matrix by another of lower rank. *Psychometrika*, 1(3) :211–218, 1936.
- [19] NB Erichson, SL Brunton, and JN Kutz. Compressed dynamic mode decomposition for real-time object detection. *Journal of Real-Time Image Processing*, 12(4) :703–712, 2016.
- [20] N. Fonzi, S. L. Brunton, and U. Fasel. Data-driven nonlinear aeroelastic models of morphing wings for control. *Proceedings of the Royal Society of London Series A*, 476(2239) :20200079, July 2020.
- [21] Matan Gavish and David L. Donoho. The optimal hard threshold for singular values is $4/\sqrt{3}$. *Preprint*, 2013.
- [22] Gene H. Golub and Christian Reinsch. Singular value decomposition and least squares solutions. *Numerische Mathematik*, 14 :403–420, 1970.
- [23] Efrain Gonzalez, Moad Abudia, Michael Jury, Rushikesh Kamalapurkar, and Joel A Rosenfeld. Anti-koopmanism. 2021.
- [24] Jacob Grosek and J Nathan Kutz. Dynamic mode decomposition for real-time background/foreground separation in video. *arXiv preprint arXiv :1404.7592*, 2014.
- [25] Eurika Kaiser, J Nathan Kutz, and Steven L Brunton. Data-driven discovery of koopman eigenfunctions for control. *Machine Learning : Science and Technology*, 2(3) :035023, 2021.
- [26] A. A. Kaptanoglu, K. D. Morgan, C. J. Hansen, and S. L. Brunton. Characterizing magnetized plasmas with dynamic mode decomposition. *Physics of Plasmas*, 27 :032108, 2020.
- [27] B O Koopman. Hamiltonian systems and transformation in hilbert space. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 17(5) :315–318, 1931.
- [28] B O Koopman and J V Neumann. Dynamical systems of continuous spectra. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, 18(3) :255–263, 1932.
- [29] Milan Korda and Igor Mezic. On convergence of extended dynamic mode decomposition to the koopman operator. *Journal of Nonlinear Science*, 28(2) :687–710, 2018.
- [30] Milan Korda and Igor Mezić. Linear predictors for nonlinear dynamical systems : Koopman operator meets model predictive control. *Automatica*, 93 :149–160, Jul 2018.
- [31] J Nathan Kutz, Steven L Brunton, Bingni W Brunton, and Joshua L Proctor. *Dynamic Mode Decomposition : Data-Driven Modeling of Complex Systems*. SIAM-Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, PA, USA, 2016.
-

-
- [32] Y. Lan and I. Mezic. Linearization in the large of nonlinear systems and koopman operator spectrum. *Physica D : Nonlinear Phenomena*, 242 :42–53, 2013.
- [33] Qianxiao Li, Felix Dietrich, Erik M. Bollt, and Ioannis G. Kevrekidis. Extended dynamic mode decomposition with dictionary learning : A data-driven adaptive spectral decomposition of the Koopman operator. *Chaos : An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, 27(10) :103111, Oct 2017.
- [34] Dirk M Luchtenburg, Steven L Brunton, J Nathan Kutz, Jonathan H Tu, and Clarence W Rowley. On dynamic mode decomposition : Theory and applications. *Journal of Computational Dynamics*, 1(2) :391–421, 2014.
- [35] Bethany Lusch, J. Nathan Kutz, and Steven L. Brunton. Deep learning for universal linear embeddings of nonlinear dynamics. *Nature Communications*, 9(1) :4950, 2018.
- [36] Jordan Mann and J Nathan Kutz. Dynamic mode decomposition for financial trading strategies. *Quantitative Finance*, pages 1–13, 2016.
- [37] Andreas Mardt, Luca Pasquali, Hao Wu, and Frank Noé. Vampnets : Deep learning of molecular kinetics. *Nature Communications*, 9(1), 2018.
- [38] Alexandre Mauroy, Igor Mezic, and Yoshihiko Susuki. *The Koopman Operator in Systems and Control Concepts, Methodologies, and Applications : Concepts, Methodologies, and Applications*. 01 2020.
- [39] I Mezic. Spectral properties of dynamical systems, model reduction and decompositions. *Nonlinear Dynamics*, 41 :309–325, 2005.
- [40] Igor Mezic. Analysis of fluid flows via spectral properties of the koopman operator. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 45 :357–378, 2013.
- [41] Igor Mezi’c and Andrzej Banaszuk. Comparison of systems with complex behavior. *Physica D : Nonlinear Phenomena*, 197(1) :101–133, 2004.
- [42] L. Mirsky. Symmetric gauge functions and unitarily invariant norms. *The Quarterly Journal of Mathematics. Oxford. Second Series*, 11 :50–59, 1960.
- [43] Jonas P Moeck, Jean-Francois Bourgouin, Daniel Durox, Thierry Schuller, and Serge Candel. Tomographic reconstruction of heat release rate perturbations induced by helical modes in turbulent swirl flames. *Experiments in Fluids*, 54(4) :1–17, 2013.
- [44] Thomas W Muld, Gunilla Efraimsson, and Dan S Henningson. Flow structures around a high-speed train extracted using proper orthogonal decomposition and dynamic mode decomposition. *Computers & Fluids*, 57 :87–97, 2012.
- [45] M. Netto and L. Mili. A robust data-driven koopman kalman filter for power systems dynamic state estimation. *IEEE Transactions on Power Systems*, 33(6) :7228–7237, 2018.
- [46] Samuel E Otto and Clarence W Rowley. Linearly-recurrent autoencoder networks for learning dynamics. *arXiv preprint arXiv :1712.01378*, 2017.
- [47] Seth D Pendergrass, J Nathan Kutz, and Steven L Brunton. Streaming gpu singular value and dynamic mode decompositions. *arXiv preprint arXiv :1612.07875*, 2016.
- [48] Joshua Proctor, Steven Brunton, and J. Kutz. Generalizing koopman theory to allow for inputs and control. *SIAM Journal on Applied Dynamical Systems*, 17(2) :147–167, 2016.
- [49] Joshua L. Proctor, Steven L. Brunton, and J. Nathan Kutz. Dynamic mode decomposition with control. *SIAM Journal on Applied Dynamical Systems*, 15(1) :142–161, 2016.
- [50] Joshua L Proctor and Philip A Eckhoff. Discovering dynamic patterns from infectious disease data using dynamic mode decomposition. *International Health*, 7(2) :139–145, 2015.
-

-
- [51] Clarence Rowley, Igor Mezic, Shervin Bagheri, Philipp Schlatter, and Dan Henningson. Spectral analysis of nonlinear flows. *Journal of Fluid Mechanics*, 641 :115–127, 2009.
- [52] Taraneh Sayadi, Peter J Schmid, Joseph W Nichols, and Parviz Moin. Reduced-order representation of near-wall structures in the late transitional boundary layer. *Journal of Fluid Mechanics*, 748 :278–301, 2014.
- [53] Peter J Schmid. Dynamic mode decomposition of numerical and experimental data. *Journal of Fluid Mechanics*, 656 :5–28, 2010.
- [54] Peter J Schmid and Jörn Sesterhenn. Dynamic mode decomposition of numerical and experimental data. In *61st Annual Meeting of the APS Division of Fluid Dynamics*. American Physical Society, November 2008.
- [55] E. Schmidt. Zur theorie der linearen und nichtlinearen integralgleichungen. i teil. entwicklung willkürlichen funktionen nach system vorgeschriebener. *Mathematische Annalen*, 3 :433–476, 1907.
- [56] Gregory A. Snyder. A thesis submitted to the graduate division of the university of hawai‘i at mānoa in partial fulfillment of the requirements for the degree of master of science in mechanical engineering. Master’s thesis, University of Hawai‘i at Mānoa, December 2021.
- [57] Guo-Wei Song, Frédéric Alizard, Jean-Christophe Robinet, and Xavier Gloerfelt. Global and koopman modes analysis of sound generation in mixing layers. *Physics of Fluids*, 25(12) :124101, 2013.
- [58] Amit Surana. Koopman operator based observer synthesis for control-affine nonlinear systems. In *2016 IEEE 55th Conference on Decision and Control (CDC)*, pages 6492–6499. IEEE, 2016.
- [59] Amit Surana and Andrzej Banaszuk. Linear observer synthesis for nonlinear systems using koopman operator framework. *IFAC-PapersOnLine*, 49(18) :716–723, 2016.
- [60] Naoya Takeishi, Yoshinobu Kawahara, and Takehisa Yairi. Learning koopman invariant subspaces for dynamic mode decomposition. In *Advances in Neural Information Processing Systems*, pages 1130–1140, 2017.
- [61] Roy Taylor, J. Nathan Kutz, Kyle Morgan, and Brian Nelson. Dynamic mode decomposition for plasma diagnostics and validation. *Review of Scientific Instruments*, 89(5) :053501, 2018.
- [62] Santosh Tirunagari, Norman Poh, Kevin Wells, Mirosław Bober, Isky Gorden, and David Windridge. Movement correction in dce-mri through windowed and reconstruction dynamic mode decomposition. *Machine Vision and Applications*, 28(3-4) :393–407, 2017.
- [63] Jonathan H Tu, Clarence W Rowley, Emily Aram, and Rajeev Mittal. Koopman spectral analysis of separated flow over a finite-thickness flat plate with elliptical leading edge. In *AIAA paper*, volume 2864, 2011.
- [64] Jonathan H. Tu, Clarence W. Rowley, Dirk M. Luchtenburg, Steven L. Brunton, and J. Nathan Kutz. On dynamic mode decomposition : Theory and applications. *Journal of Computational Dynamics*, 1(2) :391–421, 2014.
- [65] B. van der Pol. The nonlinear theory of electric oscillations. *Proceedings of the Institute of Radio Engineers*, 22(9) :1051–1086, Sept. 1934.
- [66] Christoph Wehmeyer and Frank Noé. Time-lagged autoencoders : Deep learning of slow collective variables for molecular kinetics. *The Journal of Chemical Physics*, 148(24) :241703, 2018.
- [67] Matthew O Williams and Ioannis G Kevrekidis. A data-driven approximation of the koopman operator : Extending dynamic mode decomposition. *Journal of Nonlinear Science*, 25(6) :1307–1346, 2015.

- [68] Matthew O. Williams, Ioannis G. Kevrekidis, and Clarence W. Rowley. A data-driven approximation of the Koopman operator : Extending dynamic mode decomposition. *Journal of Nonlinear Science*, 25(6) :1307–1346, 2015.
- [69] Matthew O Williams, Clarence W Rowley, and Ioannis G Kevrekidis. A kernel approach to data-driven koopman spectral analysis. *Journal of Computational Dynamics*, 2(2) :247–265, 2015.
- [70] Enoch Yeung, Soumya Kundu, and Nathan Hodas. Learning deep neural network representations for koopman operators of nonlinear dynamical systems. 2017.
- [71] Kemin Zhou and John Comstock Doyle. *Essentials of robust control*, volume 104. Prentice hall Upper Saddle River, NJ, 1998.