Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique

ECOLE SUPERIEURE EN SCIENCES APPLIQUEES DE TLEMCEN

Analyse numérique 1

Cours et Exercices corrigés

Mahlia Zouleykha

2022-2023

Préface

Ce polycopié d'analyse numérique est destiné aux étudiants de la deuxième année des classes préparatoires aux grandes écoles. Il propose un rappel de cours et un recueil d'exercices corrigés sur le programme de premier semestre de l'analyse numérique. Il est structuré en trois chapitres :

Résolution d'équations non linéaires.

Résolution des systèmes linéaires : Méthodes directes.

Résolution des systèmes linéaires : Méthodes itératives.

Table des matières

Chapitre 1

Résolution d'équations non linéaires

1.1 Introduction

L'objectif de ce chapitre est de savoir résoudre des équations réelles du type $f(x) = 0$ où f est une fonction réelle à valeurs réelle, continue sur un intervalle $[a, b]$ de $\mathbb{R}$. Les équations non linéaires se retrouvent dans beaucoups des problèmes issus de la physique, de la chimie et de la biologie. Ces équations amènent une difficulté qui est de trouver la solution quand elle existe, puisque seulement pour certaines équations particulières que les procédés classiques permettent d'exprimer les solutions exactes (par exemple, équation du second ordre), il faudra donc recourir aux méthodes numériques.

Parmi les méthodes disponibles pour résoudre ces équations, nous étudierons trois méthodes classiques:

1) La méthode de dichotomie.
2) La méthode du point fixe.
3) La méthode de Newton.

On se placera dans le cas où, localement, il y a une unique solution pour en donner un algorithme d'approximation puis on analyse la convergence des algorithmes proposés.

1.2 Séparation des solutions de l'équation $f(x) = 0$

Définition 1.2.1 *On dit qu'une solution α de l'équation $f(x) = 0$ est séparable si on peut trouver un intervalle $[a, b]$ tel que α soit la seule solution de cette équation dans $[a, b]$.*

La méthode la plus classique pour séparer les solutions de l'équation $f(x) = 0$

est de faire l'étude des variations de f puis utiliser le théorème des valeurs intermidiaires , ou bien de réécrire l'équation $f(x) = 0$ sous la forme $f_1(x) = f_2(x)$ puis chercher les points d'intersection des courbes représentatives de f_1 et f_2.

On cherche d'abord à séparer les solutions de $f(x) = 0$ puis on essaie de les approximer.

1.3 Méthodes itératives et ordre de convergence

Soit $g : [a, b] \to [a, b]$ une fonction continue.

Définition 1.3.1 *On appelle méthode itérative un procédé de calcul de la forme*

$$\begin{cases} x_0 \in [a, b] \\ x_{n+1} = g(x_n), n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

Cette formule est dite formule de récurrence.
Le procédé est dit convergent si la suite (x_n) et convergente.

On suppose dans la suite que f est continue sur $[a, b]$ et que le zéro α est localisé dans l' intervalle $[a, b]$.

Définition 1.3.2 *On dit que la suite (x_n) converge globalement vers α si pour tout $x_0 \in [a, b]$, la suite (x_n) converge vers α.*

On dit que la suite (x_n) converge localement vers α s'il exite un voisinage $V_\alpha =]\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon[$ de α tel que pour tout $x_0 \in V_\alpha$, la suite (x_n) converge vers α.

On suppose que le procédé $x_{n+1} = g(x_n)$ converge vers α.

Définition 1.3.3 *On dit que la convergence de (x_n) vers α est d'ordre p si*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|x_{n+1} - \alpha|}{|x_n - \alpha|^p} = C$$

où C et p sont des réels strictements positifs.
Si $p = 1$ et $C < 1$, la convergence est dite linéaire.
Si $p = 2$, la convergence est dite quadratique.

Remarque 1.3.1 *Afin de diminuer le temps de calcul, la vitesse de convergence est essentielle. Plus l'ordre d'une méthode itérative est élevé, plus le temps de calcul diminue.*

Proposition 1.3.1 *Soit $g : [a, b] \to [a, b]$ de classe C^p, avec $p \in \mathbb{N}$.*

Si $g^{(i)}(\alpha) = 0$ pour $1 \le i \le p - 1$ et $g^{(p)}(\alpha) \neq 0$, la méthode itérative $x_{n+1} = g(x_n)$ est d'ordre p. De plus, $\lim_{n\to\infty} \frac{|x_{n+1}-\alpha|}{|x_n-\alpha|^p} = \frac{|g^p(\alpha)|}{p}$.

Preuve: Le développement de Taylor de g au voisinage de α est donné par

$$g(x) = g(\alpha) + \sum\nolimits_{i=1}^{p-1} g^{(i)}(\alpha)\frac{(x-\alpha)^i}{i} + g^{(p)}(\zeta)\frac{(x-\alpha)^p}{p}$$

où ζest entre x et α.
Comme $g(\alpha) = \alpha$ et $g^{(i)}(\alpha) = 0$, $i = 1, .., p-1$ on a

$$g(x) = \alpha + g^{(p)}(\zeta)\frac{(x-\alpha)^p}{p}$$

Sachant que $x_{n+1} = g(x_n)$, nous obtenons

$$x_{n+1} = \alpha + g^{(p)}(\zeta)\frac{(x_n-\alpha)^p}{p}$$

Comme ζest entre x et α, alors elle tend vers α.
On trouve que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|x_{n+1}-\alpha|}{|x_{n+1}-\alpha|^p} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left|g^{(p)}(\zeta)\right|}{p} = \frac{g^{(p)}(\alpha)}{p}$$

■

1.4 Méthode de dichotomie

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$.On suppose que $f(a)f(b) < 0$ et que α est l'unique solution de $f(x) = 0$ dans $[a, b]$.

La méthode de dichotomie consiste à construire une suite (c_n) qui converge vers α de la manière suivante:
On note $c = \frac{a+b}{2}$, $[a_0, b_0] = [a, b]$.
Deux cas de figures sont possibles:
· Ou bien $f(c) = 0$, auquel cas la solution est $\alpha = c$.
· Ou bien $f(c) \neq 0$, dans ce cas:
Si $f(a)f(c) < 0$, alors $\alpha \in]a, c[$ et $[a_1, b_1] = [a, c]$.
Si $f(b)f(c) < 0$, alors $\alpha \in]c, b[$ et $[a_1, b_1] = [b, c]$.
On itère ce procédé pour obtenir une suite d'intervalles $[a_n, b_n]$.
On note

$$c_n = \frac{a_n + b_n}{2}$$

.

Théorème 1.4.1 *La suite (c_n) converge vers α, de plus ,à l'itération n, on a*

$$|c_n - \alpha| \leq \frac{b-a}{2^{n+1}}$$

Preuve: Remarquons que $|a_n - b_n| = \frac{b-a}{2^n}$ et comme $|c_n - \alpha| < \frac{|a_n - b_n|}{2}$, on déduit que $|c_n - \alpha| \leq \frac{b-a}{2^{n+1}}$, ce qui implique que $\lim_{n\to\infty} c_n = \alpha$. ■

La méthode de dichotomie est donc globalement convergente, pourtant ne ne peut pas s'assurer que $\lim_{n\to\infty} \frac{|x_{n+1}-\alpha|}{|x_{n+1}-\alpha|} < 1$. La méthode de dichotomie n'est pas une méthode d'ordre 1 au sens de la définition (1.3.3) et sa convergence est lente.

Définition 1.4.1 *On dira que le terme x_{n_0} d'une suite (x_n) approche la limite α avec une précision ε si $|x_{n_0} - \alpha| \leq \varepsilon$.*

Critère d'arrêt

Pour calculer k, le nombre minimal d'itérations assurant la précision ε, il suffit de poser $\frac{b-a}{2^{k+1}} \leq \varepsilon$ ou $|c_{i+1} - c_i| \leq \varepsilon$.

1.5 Méthode de point fixe

1.5.1 Principe de la méthode

La méthode de point fixe est fondée sur le principe de transformer la problème $f(x) = 0$ en un problème équivalent $g(x) = x$. On est ainsi ramené à la recherche des points fixes de g en utilisant l'algorithme suivant:

$$\begin{cases} x_0 \in [a, b] \\ x_{n+1} = g(x_n), n = 0, 1, 2, ... \end{cases}$$

La convergence de cette suite n'est guarantie que sous certaines conditions. Si la suite (x_n) converge, cela ne peut être que vers un point fixe de g. En effet, si g est continue, en posant $\lim_{n\to\infty} x_n = \alpha$, nous avons

$$\begin{aligned} \alpha &= \lim_{n\to\infty} x_n \\ &= \lim_{n\to\infty} g(x_n) \\ &= g(\lim_{n\to\infty} x_n) \\ &= g(\alpha) \end{aligned}$$

Définition 1.5.1 *On dit que α est un point fixe de g si $g(\alpha) = \alpha$.*

Définition 1.5.2 *Soit g une fonction de classe C^1 sur $[a, b]$. g est dite strictement contractante dans $[a, b]$ si $\max\limits_{x\in[a,b]} |g'(x)| = k < 1$.*

1.5.2 Convergence de la méthode du point fixe

Le théorème suivant fournit une condition de convergence globale.

Théorème 1.5.1 *Soit I un intervalle fermé et g une fonction vérifiant les conditions suivantes:*
$\cdot\ x \in I \Rightarrow g(x) \in I$.
$\cdot g$ *est une application strictement contractante dans I de rapport de contraction k.*
alors pour tout $x_0 \in I$, la suite

$$\begin{cases} x_0 \in I \\ x_{n+1} = g(x_n), n = 0, 1, 2, ... \end{cases}$$

converge vers α, l'unique solution de l'équation $g(x) = x$. De plus, à l'étération n, l'erreur commise est majorée par

$$|x_n - \alpha| \leq \frac{k^n}{1-k} |x_1 - x_0|$$

Remarque 1.5.1 *Ce théorème guarantit à la fois l'existence et l'unicité de α et fournit une suite qui converge vers la solution.*

Preuve: Comme $g : I \to I$, on a $x_n \in I$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
On commence par montrer que (x_n) est une suite de Cauchy.
En effet, on a:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, |x_{n+1} - x_n| = |g(x_n) - g(x_{n-1})| \leq k |x_n - x_{n-1}|$$

Par conséquent, on obtient que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, |x_{n+1} - x_n| \leq k^n |x_1 - x_0|$$

On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $p \in \mathbb{N}$ avec p$\rangle$2, on a:

$$\begin{aligned} |x_{n+p} - x_n| &\leq |x_{n+p} - x_{n+p-1}| + |x_{n+p-1} - x_{n+p-2}| + |x_{n+p-2} - x_{n+p-3}| + ... + |x_{n+1} - x_n| \\ &\leq k^{n+p-1} |x_1 - x_0| + k^{n+p-2} |x_1 - x_0| + k^{n+p-3} |x_1 - x_0| + ... + k^n |x_1 - x_0| \\ &= \frac{1-k^p}{1-k} k^n |x_1 - x_0| \\ &\leq \frac{1}{1-k} k^n |x_1 - x_0| \end{aligned}$$

On choisit n tel que $\frac{1}{1-k} k^n |x_1 - x_0| < \varepsilon$.
On obtient donc pour tout $\varepsilon \geq 0$, il existe un n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$,

$$|x_{n+p} - x_n| \leq \frac{1}{1-k} k^n |x_1 - x_0| \leq \varepsilon$$

La suite (x_n) est donc de Cauchy et elle converge vers une limite α.

Comme $x_{n+1} = g(x_n)$ et la fonction g est continue sur I, on obtient donc par passage à la limite que $g(\alpha) = \alpha$.

Pour montrer l'unicité de α, supposons que g admet deux point fixe α_1, α_2, on a alors

$$|\alpha_1 - \alpha_2| = |g(\alpha_1) - g(\alpha_2)| \leq k\,|\alpha_1 - \alpha_2|$$

donc

$$|\alpha_1 - \alpha_2|\,(1-k) \leq 0$$

Comme $k < 1$, on en déduit que $\alpha_1 = \alpha_2$. ■

En particulier, il est difficile de déterminer un intervalle $[a, b]$ sur lequel la fonction g est stable. Le théorème suivant nous permet d'affranchir cet hypothèse.

Théorème 1.5.2 *(convergence locale) Soit g une fonction de classe C^1 au voisinage de α où $g(\alpha) = \alpha$ et $|g'(\alpha)| < 1$. Alors , il existe V_α, un voisinage de α dans $[a, b]$ tel que la suite*

$$\begin{cases} x_0 \in V_\alpha \\ x_{n+1} = g(x_n), n = 0, 1, 2, ... \end{cases}$$

converge vers α. De plus,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|x_{n+1} - \alpha|}{|x_n - \alpha|} = g'(\alpha) \qquad (1.1)$$

Preuve: Comme $|g'(\alpha)| < 1$, il existe $k > 0$ tel que $|g'(\alpha)| \leq k < 1$ et g' est continue au voisinage de α, on peut trouver un voisinage $V_\alpha = [\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon]$ tel que $|g'(x)| \leq k < 1$, $\forall x \in V_\alpha$,donc g est contractante sur V_α. De plus , $g(V_\alpha) \subset V_\alpha$. En effet, le théorème des accroissement finis implique que

$$\forall x \in V_\alpha, |g(x) - \alpha| = |g(x) - g(\alpha)| \leq |g'(\zeta)|\,|x - \alpha| \leq |x - \alpha|$$

Donc

$$|g(x) - \alpha| \leq |x - \alpha| \leq \varepsilon$$

On en déduit que $g(x) \in V_\alpha$.

Le théorème du point fixe implique que la suite

$$\begin{cases} x_0 \in V_\alpha \\ x_{n+1} = g(x_n), n = 0, 1, 2, ... \end{cases}$$

converge vers α.

Le théorème des accroissement finis implique qu'il existe ζ_n entre x_n et α telle que

$$|x_{n+1}-\alpha| = |g(x_n)-g(\alpha)| = |g'(\zeta_n)|\,|x_n-\alpha|$$

D'où, $\frac{|x_{n+1}-\alpha|}{|x_n-\alpha|} = |g'(\zeta_n)|$.

Comme $\lim_{n\to\infty}\zeta_n = \alpha$ et g est continue, on a , $\lim_{n\to\infty}\frac{|x_{n+1}-\alpha|}{|x_n-\alpha|} = g'(\alpha)$. ■

On déduit de (1.1) que la suite (x_n) converge vers α avec un ordre 1.

1.5.3 Divergence de la méthode du point fixe

Théorème 1.5.3 *Si $|g'(\alpha)| > 1$, alors la méthode de point fixe diverge pour tout x_0 .*

Preuve: On suppose que la suite (x_n) est suffisament proche de α.

$|x_{n+1}-\alpha| = |g(x_n)-g(\alpha)| = |g'(\zeta_n)|\,|x_n-\alpha|$ avec ζ_n entre x_n et α. Donc $\frac{|x_{n+1}-\alpha|}{|x_n-\alpha|} = |g'(\zeta_n)| > 1$. ■

Remarque 1.5.2 *Dans le cas où $|g'(\alpha)| = 1$, il peut y avoir convergence ou divergence.*

Définition 1.5.3 *Si $|g'(\alpha)| < 1$, α est appelé point fixe attractif.*

Si $|g'(\alpha)| > 1$, α est appelé point fixe répulsif.

Si $|g'(\alpha)| = 1$, α est appelé point fixe douteux.

1.5.4 Vitesse de convergence

Soit α tel que $g(\alpha) = \alpha$ et k le rapport de contraction. On pose $e_n = |x_n-\alpha|$, alors

$$e_{n+1} = |x_{n+1}-\alpha| = |g(x_n)-\alpha| \leq k\,|x_n-\alpha|$$

d'où

$$e_{n+1} \leq ke_n$$

Par récurrence, on obtient

$$e_n \leq k^n e_0$$

On conclut que plus k est petit, plus la convergence est rapide.

1.6 Méthode de Newton

Supposons que f admet une racine simple α et qu'elle est de classe C^2 au voisinage de α.

En faisant le developpement de Taylor d'ordre 2 de f au voisinage d'un point arbitraire x_n, on touve

$$f(x) = f(x_n) + (x - x_n)f'(x_n) + \frac{f''(\zeta)}{2}(x - x_n)^2$$

avec ζ entre x et x_n.

Comme $f(\alpha) = 0$, on suppose que x_{n+1} est une approximation de α et on néglige le reste $\frac{f''(\zeta)}{2}(x - x_n)^2$, on a

$$f(x_{n+1}) = f(x_n) + (x_{n+1} - x_n)f'(x_n) = 0$$

Supposant que $f'(x_n) \neq 0$, alors

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \tag{1.2}$$

en partant d'un point initial x_0.

Le schéma (1.2) s'appelle le procédé itératif de Newton.

De point de vue géométrique, x_{n+1} est l'abscisse du point d'intersection entre la tangeante à f au point $(x_n, f(x_n))$ et l'axe des abscisses.

Remarque 1.6.1 *La méthode de Newton est une méthode de point fixe associée à la fonction $g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$.*

Théorème 1.6.1 *(convergence locale) Supposons que f est de classe C^2 au voisinage de α avec $f'(\alpha) \neq 0$. La méthode de Newton converge au moins quadratiquement vers α pour un x_0 choisi assez proche de α.*

Preuve: On pose $g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$.

donc, $g'(x) = 1 - \frac{(f'(x))^2 - f(x)f''(x)}{(f'(x))^2}$.

Comme $f(\alpha) = 0$, alors $g'(\alpha) = 0$ et dela, $|g'(\alpha)| < 1$ au voisinage de α.

D'où la convergence locale est une conséquence du théorème 1.5.2.

Comme $g'(\alpha) = 0$, la méthode est au moins d'ordre 2. ■

Remarque 1.6.2 *L'inconvenient de ce résultat est de choisir x_0 assez proche de α, donc nous avons besoin d'informations précises sur f. Pour lever ce problème, on utilise un théorème globale assurant la convergence.*

Théorème 1.6.2 *(convergence globale) Soit $[a, b]$ un intervalle non vide tel que:*

$f \in C^2([a, b])$.

$f(a)f(b) < 0$.

$\forall x \in [a, b],\ f'(x) \neq 0$.

$\forall x \in [a, b],\ f''(x) \neq 0$.

Alors pour tout x_0 dans $[a, b]$ vérifiant $f(x_0)f''(x_0) > 0$, le procédé de Newton converge vers α, l'unique solution de $f(x) = 0$ dans $[a, b]$.

Preuve: Comme f est continue et elle change de signe sur $[a, b]$, donc il existe un unique α dans $[a, b]$ vérifiant $f(\alpha) = 0$.

On suppose que $f(x_0)f''(x_0) > 0$.

Puisque f'' garde un signe constant sur $[a, b]$, on distingue deux cas :

1er **cas:** $f''(x) > 0, \forall x \in [a, b]$

Si $f'(x) > 0, \forall x \in [a, b]$, on a:

$$\begin{cases} f(x) < 0, \forall x \in [a, \alpha[\\ f(x) > 0, \forall x \in]\alpha, b] \end{cases}$$

On en déduit que $x_0 \in]\alpha, b]$.

On pose $g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$. Comme $g'(x) = \frac{f(x)f''(x)}{(f'(x))^2} \geq 0$, $\forall x \in]\alpha, b]$, la fonction g est donc strictement croissante sur $]\alpha, b]$.

On en trouve que

$$\begin{cases} \alpha = g(\alpha) \leq g(x_0) = x_1 \\ x_1 = g(x_0) = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} < x_0 \end{cases}$$

Par récurrence, on montre que

$$x_{n+1} \leq x_n \leq x_{n-1} \leq ... \leq x_2 \leq x_1 < x_0$$

La suite (x_n) est décroissante et minorée, elle est donc convergente.

Comme g est continue, la relation $x_{n+1} = g(x_n)$ implique (x_n) converge vers α.

Si $f'(x) < 0, \forall x \in [a, b]$:

On montre par la même méthode précédente que la suite (x_n) et croissante est majorée.

2ème **cas:** $f''(x) < 0, \forall x \in [a, b]$

On remplace f par -f dans la preuve précédente. ■

Remarque 1.6.3 *Si la racine α est de multiplicité $m > 1$, la méthode de Newton n'est plus d'ordre 2.*

En posant $g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$, on montre que $g'(\alpha) = 1 - \frac{1}{m} \neq 0$.

On peut récupérer la convergence quadratique en considérant la méthode de Newton modifiée

$$x_{n+1} = x_n - m\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

1.7 Exercices

Exercice 1

Soit $f(x) = (x - 2)^2 + x - \frac{\exp(x)}{\pi}$.

1) Montrer que $f(x) = 0$ admet une unique solution réelle.

2) Localiser cette solution entre deux entiers consécutifs.

3) Calculer le nombre minimal d'itérations nécessaires pour estimer la solution à 10^{-3} près.

4) Estimer la solution à 10^{-3} près.

Exercice 2

Etant donné une fonction f définie par

$$f(x) = x^2 - \ln(x+1)$$

1) Montrer que $f(x) = 0$ admet deux olutions réelles.

2) On note par α la solution strictement positive, localiser α dans un intervalle de longueur un.

3) On veut approcher α en utilisant les deux procédés suivants:

$$x_{n+1} = \sqrt{\ln(x_n) + 1}, \;\; x_{n+1} = \exp(\; (x_n)^2 \;) - 1$$

Etudier la convergence des deux procédés.

4) Calculer le nombre minimal d'itérations nécessaires pour estimer la solution à 10^{-3} près.

4) Montrer que la méthode de Newton appliquée à $f(x) = 0$ converge vers α pour un x_0 choisi.

5) Estimer la solution à 10^{-3} en utilisant la méthode de Newton.

Exercice 3

Partie1:

Soit la fonction h définie par

$$h(x) = x\exp(x) - 1$$

1) Montrer que h admet une racine réelle que l'on note par r.

2) Localiser r entre deux entiers consécutifs.

3) Montrer que la procédure de Newton converge vers r pour un x_0 choisi.

4) Estimer r à 10^{-3} près en utilisant la méthode de Newton.

Partie2

Soit $f(x) = \exp(x)(x-1) - x$.

1) Séparer graphiquement les racines de f puis localier chaque racine dans un intervalle de longueur un.

2) On considère la méthode itérative:

$$x_{n+1} = g(x_n) = \exp(x_n)(x_n - 1)$$

Montrer que l'une des racine est un point fixe attractif de g est l'autre est répulsif.

3) En déduire la convergence de la suite (x_n).

4) Dans le cas où le procédé est convergent vers α, montrer que

$$|x_{n+1} - \alpha| \leq k\,|x_n - \alpha| \;\; pour \;\; k > 0.$$

5) Supposons que x_0 est tel que $|x_0 - \alpha| < 10^{-3}$:

Trouver le nombre minimal d'itérations nécessaires pour calculer α avec une précision de 10^{-6} près.

Exercice 4

1)Vérifier que $r = 3$ est un point fixe des deux fonctions

$$g_1(x) = \sqrt{2x+3}x, g_2(x) = \frac{(x^2-3)}{2}$$

2) Montrer que $r = 3$ est un point fixe attractif pour g_1 et répulsif pour g_2.

3) On considère la fonction

$$\phi(x) = \alpha g_1(x) + \beta g_2(x)$$

où α et β sont des paramètres réels.

Pour quelles valeurs de α et β la fonction ϕ admet r=3 comme un point fixe convergent aumoins à l'ordre 2?

3) Si r est un point fixe attractif pour g_1 et répulsif pour g_2 , r est il toujours un point fixe convergent aumoins à l'ordre 2 pour ϕ?

Exercice 5

Etant donné une fonction f définie par

$$f(x) = \ln(x) + x^2 + 2x - 5$$

1) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une seule racine α qu'on localisera dans un intervalle I du type $[n, n+1]$.

2) Etudier la convergence de la procédure $x_{n+1} = x_n - f(x_n)$, $x_0 \in I$.

3) Trouver toutes les valeurs de λ qui vérifient $|1 - \lambda f'(x)| < 1$.

4) Déterminer parmi ces valeurs , la valeur λ_0 qui asssure la convergence la plus rapide de la procédure $x_{n+1} = x_n - \lambda f(x_n)$, $x_0 \in I$.

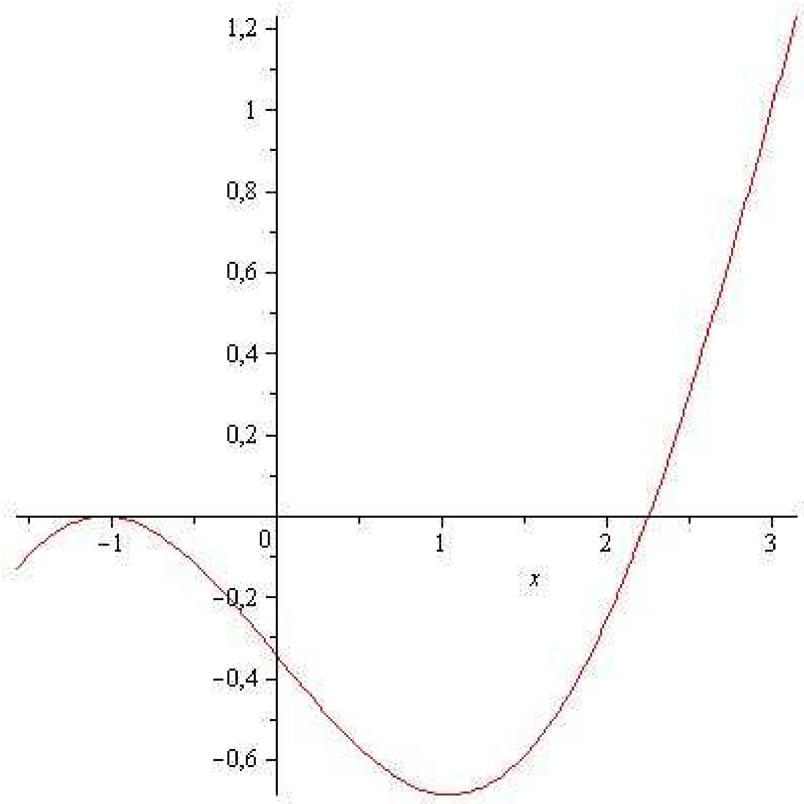
Exercice 6

Soit $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 telle que $\max\limits_{[a,b]} |g'(x)| = k < 1$.

Montrer par l'absurde que g admet un unique point fixe dans $[a, b]$.

Exercice 7

Le graphe de la fonction $f(x) = \frac{x}{2} - \sin(x) + \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{2}$ est illustré dans la figure suivante:



1) La méthode de Dichotomie est elle applicable pour trouver les racines de f ?

2) Pour chaque racine, déterminer l'ordre de convergence de la méthode de Newton.

3) Pour approcher la racine strictement positive, on considère la méthode de point fixe

$$x_{n+1} = \sin(x_n) + \frac{x_n}{2} - \frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Montrer que c'est un point fixe attractif dans l'intervalle $[\frac{2\pi}{3}\ ,\pi]$.

.

Exercice 8

On considère la fonction f définie par

$$f(x) = x^3 + 4x^2 - 10$$

1) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une seule racine α dans l'intervalle $[1, \frac{3}{2}]$.

2) Soient les méthodes d'approximations successives suivantes:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= g_1(x_n) = x_n - x_n^3 - 4x_n^2 + 10 \\ x_{n+1} &= g_2(x_n) = \frac{1}{2}(10 - x_n^3)^{\frac{1}{2}} \\ x_{n+1} &= g_3(x_n) = (\frac{10}{4 + x_n})^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Pour chaque méthode, montrer, soit la possibilité de convergence, soit la divergence de la suite (x_n).

3) Dans quel cas la convergence est-elle plus rapide que les autres?

4) Quel est l'ordre de convergence des méthodes associées à g_2 et g_3.

5) On suppose que $e_n = |g_3(x_{n-1}) - \alpha| = 10^{-3}$, donner une majoration de e_{n+1}.

Exercice 9

La fonction $f(x) = \exp(x-2) + x^2 - 3x + 1$ possède une racine $\alpha = 2$. On propose d'approcher α par la méthode de point fixe.

1) En choisissant x_0 dans un voisinage de α, vérifier si les méthodes de point fixe suivantes convergent .

$$\begin{aligned} x &= g_1(x) = \exp(x-2) + (x-1)^2 \\ x &= g_2(x) = 1 + \sqrt{x - \exp(x-2)} \\ x &= g_3(x) = 0.5\ln(3x - x^2 - 1) \end{aligned}$$

2) Soit $e_n = |x_n - \alpha| = |g_2(x_{n-1}) - \alpha|$ l'erreur qu'on obtient à à l'itération n.

a) Calculer $\lim\limits_{n\to\infty} e_n$, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{e_n}{e_{n-1}}$ et $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{e_n}{e_{n-1}^2}$.

b) Déduire que la méthode $x_{n+1} = g_2(x_n)$ est d'ordre 2.

Exercice 10

On considère la fonction f définie par

$$f(x) = \exp(x^2) - 4x^2$$

1) Séparer graphiquement les racines de f.

2) Soit la méthode de point fixe

$$\begin{cases} x_0 \in [0,1] \\ x_{n+1} = \frac{\sqrt{\exp(x_n^2)}}{2} \end{cases}$$

Etudier la convergence de cette méthode et préciser l'ordre de convergence.

3) Ecrire la méthode de Newton pour la recherche des zéros de f et préciser l'ordre de convergence.

4) Comparer la méthode de Newton et la méthode de point fixe.

Exercices supplémentaires :

Exercice 01

Soient g_1, g_2, g_3 et g_4 les fonctions définies par :
$g_1(x) = 2x - \sqrt{A}, g_2(x) = \frac{x(3A-x^2)}{2A}, g_3(x) = \frac{1}{2}(x + \frac{A}{x})$ et $g_4(x) = \frac{3A}{8x} + \frac{3x}{4} - \frac{x^3}{8A}$
.

1) Vérifier que les quatre fonctions admettent $\sqrt{A}$ comme point fixe.

2) Ecrire les formules de Taylor à l'ordre 3 au point $\sqrt{A}$ pour les quatre fonctions.

3) On considère les suites $(x_n), (y_n), (u_n)$ et (v_n) définies par:
$x_{n+1} = g_1(x_n), y_{n+1} = g_2(y_n), u_{n+1} = g_3(u_n)$ et $v_{n+1} = h(v_n)$ puis on pose :
$e_n = \sqrt{A} - x_n$, $\varepsilon_n = \sqrt{A} - y_n$, $d_n = \sqrt{A} - u_n$ et $\delta_n = \sqrt{A} - v_n$.

Trouver l'ordre de convergence et la constante d'erreur asymptotique dans chaque cas, c.a.d :
$\lim_{n\to\infty} \frac{|e_{n+1}|}{|e_n|^{p_1}} = C_1, \lim_{n\to\infty} \frac{|\varepsilon_{n+1}|}{|\varepsilon_n|^{p_2}} = C_2, \lim_{n\to\infty} \frac{|d_{n+1}|}{|d_n|^{p_3}} = C_3$ et $\lim_{n\to\infty} \frac{|\delta_{n+1}|}{|\delta_n|^{p_4}} = C_4$ où p_i et C_i sont des constantes positifs.

4) Conclure.

Exercice 02

On considère l'équation $f(x) = 0$ où f est une fonction de classe C^3 au voisinage d'une racine double r.

1) Montrer que la méthode de Newton pour la recherche de r est localement convergente et est d'ordre 1.

2) On propose de modifier la méthode de Newton en considérant la suite (x_n) définie par

$$x_{n+1} = x_n - 2\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

a) On pose $F(x) = 2f(x) - (x-r)f'(x)$. Montrer que
$F(x) = -\frac{(x-r)^2}{2}(c-r)f^3(c)$ où c est un réel compris entre r et x.

b) En déduire que la méthode de Newton ainsi modifiée est localement convergente et est d'ordre 1

1.8 Corrigé des exercices

Exercice 1:

Soit $f(x) = (x-2)^2 + x - \frac{\exp(x)}{\pi}$.

1) Montrer que $f(x) = 0$ admet une unique solution réelle.

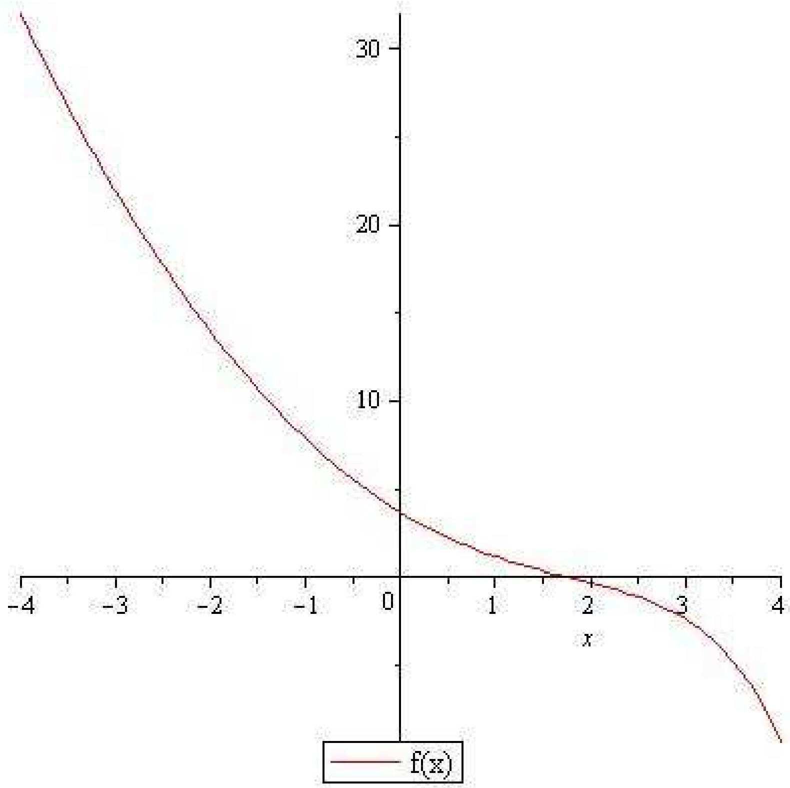
On fait l'étude de f sur $\mathbb{R}$.

$$f'(x) = 2(x-2) + 1 - \frac{\exp(x)}{\pi}, \; f''(x) = 2 - \frac{\exp(x)}{\pi}$$

Le tableau de variation de f est donné par :

x	$-\infty$		$\ln(2\pi)$		∞
$f''(x)$		$+$	0	$-$	
$f'(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	-1.32	$\searrow$	$-\infty$
$f(x)$	∞	$\searrow$	-0.13	$\searrow$	$-\infty$

Par conséquent, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$.
2) Localiser cette racine entre deux entiers consécutifs.
Pour localiser cette solution , on trace la courbe représentative de f .



Donc ,$\alpha \in [1, 2]$.

3) Calculer le nombre minimal d'itérations nécessaires pour estimer la solution à 10^{-3} près.

Il suffit de choisir n tel que

$$\frac{b-a}{2^{n+1}} < 10^{-3}$$

Pour $a = 1, b = 2$,on trouve

$$n \geq \frac{3\ln(10)}{\ln(2)} \simeq 8.96,$$

ce qui implique que le nombre minimal d'itérations nécessaires est $n = 9$.
4) Estimer la solution à 10^{-3} près.
Dans le tableau suivant, on fait un encadrement de la solution.

n	a_n	b_n	$c_n = \frac{a_n+b_n}{2}$	$f(a_n)$	$f(b_n)$	$f(c_n)$	$\|c_{i+1} - c_i\|$
0	1	2	1.5	$+$	$-$	$+$	
1	1.5	2	1.75	$+$	$-$	$-$	$0.25 > 10^{-3}$
2	1.5	1.75	1.625	$+$	$-$	$+$	$0.125 > 10^{-3}$
3	1.625	1.75	1.6875	$+$	$-$	$+$	$0.0625 > 10^{-3}$
4	1.6875	1.75	1.71875	$+$	$-$	$+$	$0.03125 > 10^{-3}$
5	1.71875	1.75	1.734375	$+$	$-$	$+$	$1.5625 \times 10^{-2} > 10^{-3}$
6	1.734375	1.75	1.7421875	$+$	$-$	$-$	$7.8125 \times 10^{-3} > 10^{-3}$
7	1.734375	1.7421875	1.73828125	$+$	$-$	$-$	$-3.9063 \times 10^{-3} > 10^{-3}$
8	1.734375	1.73828125	1.736328125	$+$	$-$	$-$	$-1.9531 \times 10^{-3} > 10^{-3}$
9	1.734375	1.736328125	1.735351563	$+$	$-$	$+$	$-9.7656 \times 10^{-4} > 10^{-3}$

La solution approchée est $c_9 = 1.735351563$.
Exercice 2:
On considère la fonction f définie par

$$f(x) = x^2 - \ln(x+1)$$

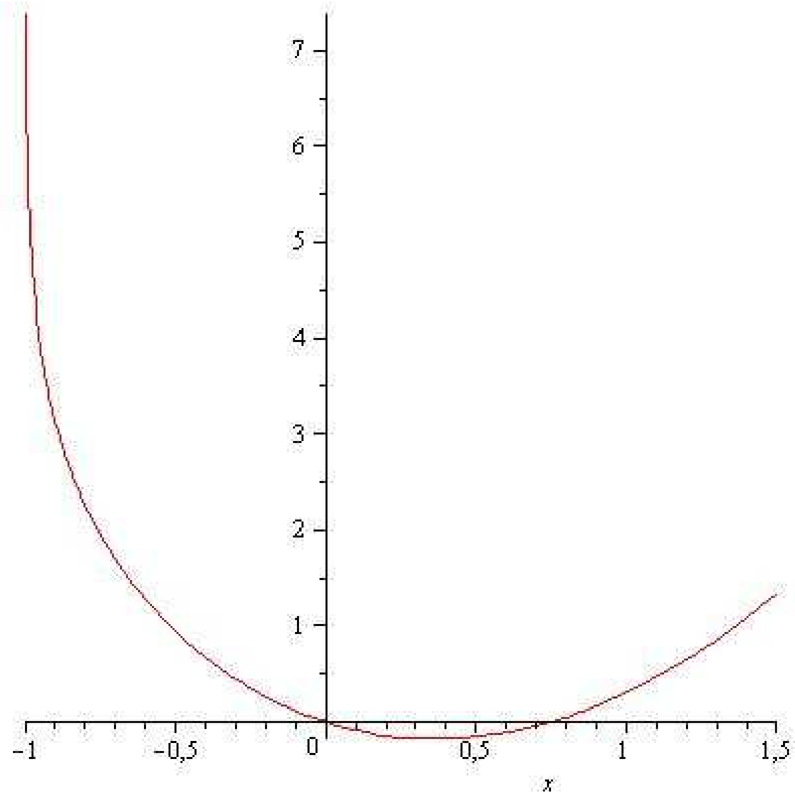
1) Montrer que $f(x) = 0$ admet deux racines réelles
La fonction f est définie et continue sur $]-1, \infty[$.

$$f'(x) = 2x - \frac{1}{1+x} = \frac{2x^2+2x-1}{1+x}, f''(x) = 2 + \frac{1}{(1+x)^2}.$$

Le tableau de variations de f est donné par

x	1		$(-1+\sqrt{3})/2$		∞
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	∞	$\searrow$	-0.17	$\nearrow$	∞

On conclut que f admet deux racines réelles.
2) Localiser la racine strictement positive dans un intervalle de longueur $\frac{1}{4}$.
La courbe représentative de f est donnée par



D'où, f admet deux racines, l'une est nulle et l'autre est strictement positive.
On montre analytiquement que $\alpha \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}]$.
On a:

$$f(0,5) = -0.15 \quad , f(0,75) = 2,28 * 10^{-3}$$

et $f'(x) > 0$ sur $[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}]$.

On déduit que f admet une unique racine α dans l'intervalle $[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}]$.
3) Etudier la convergence des deux procédés

$$x_{n+1} = \sqrt{\ln(x_n + 1)}, \;\; x_{n+1} = \exp(x_n^2) - 1$$

3-1) Convergence de procédé $x_{n+1} = \sqrt{\ln(x_n + 1)}$

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 \Leftrightarrow x^2 = \ln(x+1) \\ &\Leftrightarrow x = \sqrt{\ln(x+1)} \end{aligned}$$

On pose $g_1(x) = \sqrt{\ln(x+1)}$ et on vérifie que g_1 satisfait les propriétés du théorème du convergence.
Nous avons

$$g_1'(x) = \frac{1}{2(x+1)\sqrt{\ln(1+x)}}, g_1''(x) = -\frac{1}{4(\ln(x+1))^{\frac{3}{2}}(x+1)^2} - \frac{1}{2\sqrt{\ln(x+1)}(x+1)^2}$$

Le tableau de variations de g_1 est donné par

x	0.5	0.75
$g_1''(x)$	$-$	
$g_1'(x)$	0.52 $\searrow$	0.38
$g_1(x)$	0.63 $\nearrow$	0.74

En utilisant le tableau précédent, on s'assure que:
*$|g_1'(x)| \leq 0.52 < 1, \forall x \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}]$, donc g_1 est contractante sur $[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}]$.
*$\forall x \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}], g_1(x) \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}]$, d'où , l'intervalle $[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}]$ est stable par g_1.
Conclusion
La procédure $x_{n+1} = g_1(x_n)$ converge vers α.
3-2) Convergence de procédé $x_{n+1} = \exp({x_n}^2) - 1$

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 \Leftrightarrow x^2 = \ln(x+1) \\ &\Leftrightarrow \exp(x^2) = x+1 \\ &\Leftrightarrow x = \exp(x^2) - 1 \end{aligned}$$

On pose $g_2(x) = \exp(\ x^2) - 1$

$$g_2'(x) = 2x\exp(x^2), g_2''(x) = 2\exp(x^2)(1 + 2x^2)$$

Par la même méthode précédente, on s'assure si g_2 est est contractante sur $[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}]$.

x	0.5 $\qquad$ 0.75
$g_2''(x)$	$+$
$g_2'(x)$	$1.28 \nearrow 1.75$

On a

$$\forall x \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}], g_2'(x) > 1$$
$$\Longrightarrow g_2'(\alpha) > 1$$

Le théorème (1.5.3) implique que le procédé $x_{n+1} = g_2(x_n)$ diverge.

4) Montrer que la méthode de Newton converge pour x_0 choisi.

La fonction f est de classe C^2 sur l'intervalle $[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}]$.

Le tableau de variation de f implique que

$$\forall x \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}], f'(x) > 0, f''(x) > 0$$

On choisit $x_0 \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}]$ tel que $f(x_0)f''(x_0) > 0$, par exemple $x_0 = 0.75$.

Le théorème (1.6.2) implique que la procédure de Newton

$$\begin{cases} x_0 = 0.75 \\ x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - \ln(1+x_n)}{2x_n^2 - \frac{1}{1+x_n}} \end{cases}$$

converge vers α.

5) Estimer α à 10^{-3} en utilisant la méthode de Newton.

On utilise la procédure $\begin{cases} x_0 = 0.75 \\ x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - \ln(1+x_n)}{2x_n^2 - \frac{1}{1+x_n}} \end{cases}$, on trouve les itérations suivantes:

x_0	0.75	$\lvert x_{i+1} - x_i \rvert$
x_1	0.744789810	5.2102×10^{-3}
x_2	0.745861115	1.0713×10^{-3}
x_3	0.747600735	1.7396×10^{-3}
x_4	0.746385523	1.2152×10^{-3}
x_5	0.747229	8.4348×10^{-4}

On a $|x_5 - x_4| < 10^{-3} \Longrightarrow \alpha \simeq 0.747229$.

Exercice 3

Partie1:

Soit $h(x) = x\exp(x) - 1$

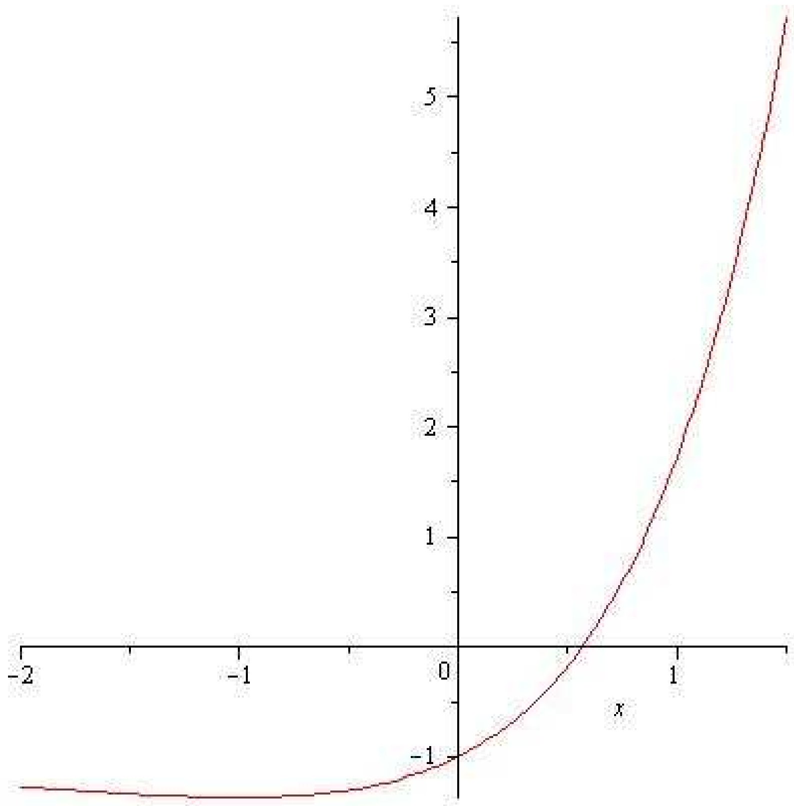
1) Montrer que h admet une seule racine réelle r.

On a $h'(x) = \exp(x)(x+1)$.

x	$-\infty$		-1		∞
$h'(x)$		$-$	0	$+$	
$h(x)$	-1	$\searrow$	1.36	$\nearrow$	∞

2) Localiser r entre deux entiers consécutifs

On a la courbe représentative de h



En déduit que $r \in [0, 1]$.

3) Montrer que la procédure de Newton converge vers r pour un x_0 choisi.

On a:
$h(1)h(0) < 0$.
La fonction h est de classe C^2 sur [0,1].
$h'(x) = \exp(x) + x\exp(x) > 0$ sur [0,1].
$h''(x) = \exp(x)(x+2) > 0$ sur [0,1].
On choisit $x_0 = 1$, on a $h(x_0)h''(x_0) > 0$.
Le théorème (1.6.2) implique que la procédure

$$\begin{cases} x_0 = 1 \\ x_{n+1} = x_n - \frac{h(x_n)}{h'(x_n)} \end{cases}$$

converge vers r.
4) Estimer r à 10^{-3} près
On utilise la procédure $\begin{cases} x_0 = 1 \\ x_{n+1} = x_n - \frac{x_n \exp(x_n) - 1}{\exp(x_n)(x_n+1)} \end{cases}$, on trouve les itérations suivantes

x_0	1
x_1	0.683939721
x_2	0.577454477
x_3	0.567 23
x_4	0.5671143297

On a $|x_4 - x_3| < 10^{-3} \Longrightarrow r \simeq 0.5671143297$.
Partie 2:
Etant donné la fonction f définie par $f(x) = \exp(x)(x-1) - x$.
1) Séparer graphiquement les racines de f.
On a

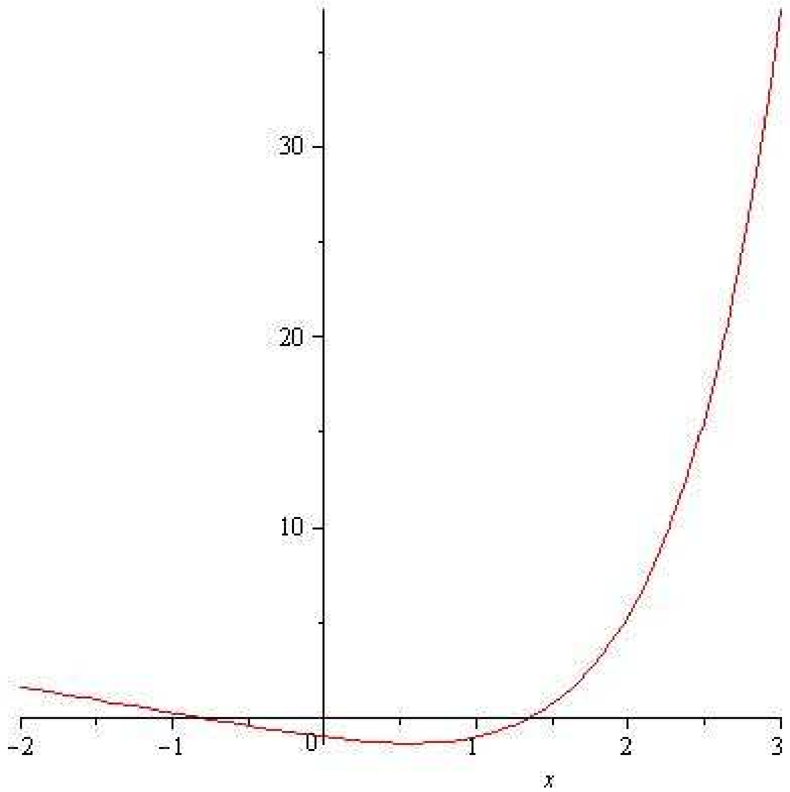
$$f'(x) = x\exp(x) - 1, f''(x) = \exp(x)(x+1).$$

On utilise les résultats de la partie 1, on trouve que $f'(x) = 0$ si $x = r = 0.56$.
D'où, le tableau de variation de f est donné par

x	$-\infty$		0.56		∞
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	∞	$\searrow$	-0.17	$\nearrow$	∞

On déduit que f admet deux racines α_1, α_2 avec $\alpha_1 < 0$ et $\alpha_2 > 0$.

En utilisant le tableau de variations ,on trace la courbe représentative de f.



On conclut que $\alpha_1 \in [-1, 0]$ et $\alpha_2 \in [1, 2]$.

2) Montrer que l'une des racines est un point fixe attractif de g est l'autre est répulsif

On a:

$$g(x) = \exp(x)(x - 1), g'(x) = x \exp(x), g''(x) = \exp(x)(x + 1).$$

Sur l'intervalle [-1,0], on a:

$|g'(x)| \leq \frac{1}{e} < 1, \forall x \in [-1, 0]$, donc $|g'(\alpha_1)| < 1$.

On déduit que α_1 est un point fixe attractif de g.

Sur l'intervalle [1,2], on a:

$|g'(x)| > 1, \forall x \in [1, 2]$, donc $|g'(\alpha_2)| > 1$.

On déduit que α_2 est un point fixe répulsif de g.

3) En déduire la convergence de la procédure $x_{n+1} = g(x_n)$

On a $|g'(x)| < 1$, $\forall x \in [-1, 0]$, par suite, g est contractante sur $[-1, 0]$.

Pour montrer la convergence globale, il suffit de montrer que g est stable sur $[-1, 0]$.

Donc, $\forall x \in [-1, 0], g(x) \in [-1, 0]$.De cela, g est stable sur $[-1, 0]$.

Conclusion

$x_{n+1} = g(x_n)$ converge vers α.
4) Montrer que $|x_{n+1} - \alpha| \leq k\,|x_n - \alpha|$ pour $k > 0$.
On applique le théorème des accroissements finis:

$$|x_{n+1} - \alpha| = |g(x_n) - g(\alpha)| \leq \max_{[-1,0]} |g'(x_n)|\,|x_n - \alpha| = \frac{1}{e}\,|x_n - \alpha|$$

5) Si x_0 est tel que $|x_0 - \alpha| < 10^{-3}$,trouver le nombre minimal d'itérations nécessaires pour calculer α avec une précision de 10^{-6} près.
On a

$$|x_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{e}\,|x_n - \alpha|$$

donc

$$|x_n - \alpha| \leq \frac{1}{e}\,|x_{n-1} - \alpha|$$

De proche en proche, on trouve:

$$|x_n - \alpha| \leq (\frac{1}{e})^n\,|x_0 - \alpha| < 10^{-3}(\frac{1}{e})^n.$$

Donc, pour estimer α avec une précision de 10^{-6} près, il suffit de choisir n tel que

$$\begin{aligned} 10^{-3}(\frac{1}{e})^n &< 10^{-6} \\ &\Longrightarrow (\frac{1}{e})^n < 10^{-3} \\ &\Longrightarrow n > 3\ln(10) \simeq 6.9 \end{aligned}$$

On prend n=7.
Exercice 4
1)Vérifier que $r = 3$ est un point fixe des deux fonctions

$$g_1(x) = \sqrt{2x+3}x, g_2(x) = \frac{(x^2-3)}{2}$$

On a

$$g_1(3) = 3, g_2(3) = 3$$

2) Montrer que $r = 3$ est un point fixe attractif pour g_1 et répulsif pour g_2.
On a

$$g_1'(3) = \frac{1}{3} < 1, g_2'(3) = 3 > 1.$$

3) On considère la fonction

$$\phi(x) = \alpha g_1(x) + \beta g_2(x)$$

où α et β sont des paramètres réels.

3) Pour quelles valeurs de α et β la fonction ϕ admet r=3 comme un point fixe convergent aumoins à l'ordre 2?

$r = 3$ est un point fixe d'ordre aumoins 2 pour ϕ si et seulement si

$$\begin{cases} \phi(3) = 3 \\ \phi'(3) = 0 \end{cases}$$

ce qui implique que

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 1 \\ \frac{\alpha}{3} + 3\beta = 0 \end{cases}$$

On trouve

$$\alpha = \frac{9}{8}, \beta = -\frac{1}{8}$$

4) Si r est un point fixe attractif pour g_1 et répulsif pour g_2 ,r est il toujours un point fixe convergent aumoins à l'ordre 2 pour ϕ?

Soit r un point fixe attractif pour g_1 et répulsif pour g_2,c'est à dire $g_1(r) = g_2(r) = r$ avec $|g_1'(r)| = |a| <$ et $|g_2'(r)| = |b| > 1$.

On cherche α et β tel que

$$\begin{cases} \alpha g_1(r) + \beta g_2(r) = r \\ \alpha g_1'(r) + \beta g_2'(r) = 0 \end{cases}$$

On trouve

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 1 \\ a\alpha + b\beta = 0 \end{cases}$$

Ce système linéaire admet une solution (α, β) car $a \neq b$, donc on peut toujours combiner g_1 et g_2 pour que r soit un point fixe convergent aumoins à l'ordre 2 pour ϕ.

Exercice 5

On a $f(x) = \ln(x) + x^2 + 2x - 5$

1) Montrer que $f(x) = 0$ admet une seule racine α.

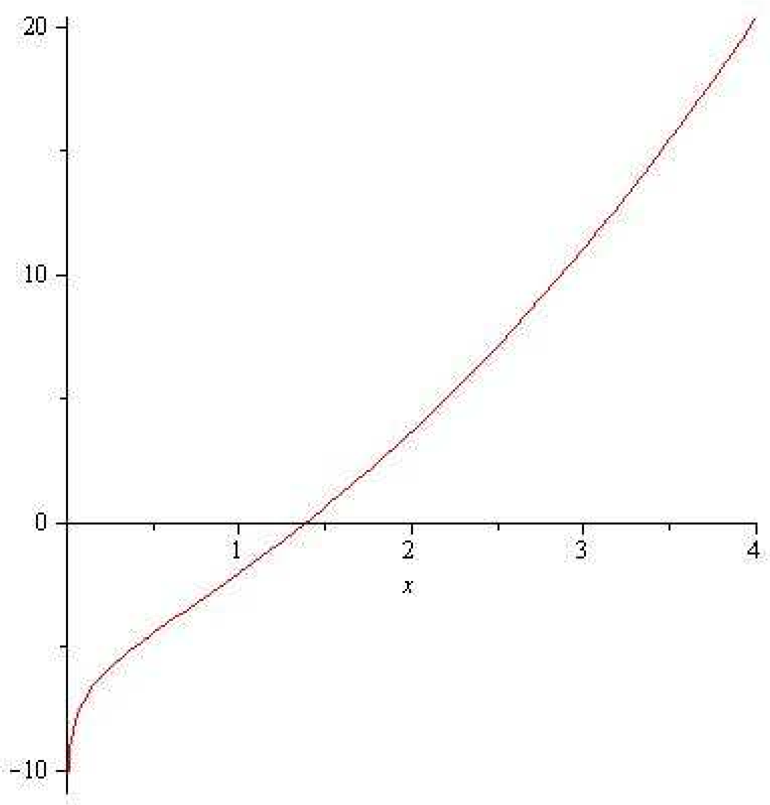
f est définie pour $x > 0$.

$f'(x) = \frac{1}{x} + 2x + 2 > 0$.

Le tableau de variations de f est donné par

x	$-\infty$	∞
$f'(x)$	$+$	
$f(x)$	$-\infty$ $\nearrow$	∞

Donc, il existe un unique $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $f(\alpha) = 0$.
Pour localiser α, on doit tracer la courbe représentative de f.



On conclut que $\alpha \in [1, 2]$.
2) Etudier la convergence de la procédure $x_{n+1} = x_n - f(x_n)$, $x_0 \in I$.
On pose $g(x) = x - f(x) = x - \ln(x) - x^2 - 2x + 5$.
$g'(x) = 1 - \frac{1}{x} - 2x - 2$
$g''(x) = \frac{1-2x^2}{x^2} < 0$ sur [1,2].

x	1	2
$g''(x)$	$-$	
$g'(x)$	-4 $\searrow$	-5.5

On remarque que $|g'(\alpha)| > 1$, donc la procédure ne converge pas.

3) Trouver toutes les valeurs de λ qui vérifient $|1 - \lambda f'(x)| < 1$.

On cherche λ tel que

$$\begin{aligned} -1 &< 1 - \lambda(\frac{1}{x} + 2x + 2) < 1, \\ &\Rightarrow -2 < -\lambda(\frac{1}{x} + 2x + 2) < 0, \text{ (donc } \lambda > 0) \\ &\Rightarrow \lambda < \frac{2x}{1 + 2x^2 + 2x}, \\ &\Rightarrow \lambda < \min_{[1,2]} \frac{2x}{1 + 2x^2 + 2x}. \end{aligned}$$

Puisque $\frac{2x}{1+2x^2+2x}$ est une fonction décroissante sur [1,2], alors $\min\limits_{[1,2]} \frac{2x}{1+2x^2+2x}$ est atteint au point $x = 2$.

On conclut que $\lambda < \frac{4}{13}$, par suite, $\lambda \in]0, \frac{4}{13}[$.

4) Trouver la valeur de λ_0 qui asssure la convergence la plus rapide de la procédure $x_{n+1} = x_n - \lambda f(x_n)$, $x_0 \in I$.

On pose $\phi(x) = x - \lambda f(x)$.

λ_0 qui asssure la convergence la plus rapide est tel que

$$k = \max_{[1,2]} |\phi'(x)|$$

soit minimal, car plus k est plus petit, plus la convergence est plus rapide.

On a

$$\begin{aligned} \phi'(x) &= 1 - \lambda(\frac{1}{x} + 2x + 2), \\ \phi''(x) &= -\lambda(-\frac{1}{x} + 2), \\ \phi'''(x) &= \frac{-2\lambda}{x^3} < 0. \end{aligned}$$

x	1	2
$\phi'''(x)$	$-$	
$\phi''(x)$	$-\lambda \longrightarrow$	$-\frac{7}{4}\lambda$
$\phi'(x)$	$1-5\lambda \longrightarrow$	$1-\frac{13}{2}\lambda$

On en conclut que

$$k = \max_{[1,2]} |\phi'(x)| = \max(|1-5\lambda|, \left|1-\frac{13}{2}\lambda\right|)$$

k soit minimal si

$$5\lambda - 1 = 1 - \frac{13}{2}\lambda.$$

Donc,

$$\lambda = \frac{4}{23}.$$

On montre la convergence de la procédure $x_{n+1} = \phi(x_n)$ pour $\lambda = \lambda_0 = \frac{4}{23}$.

De cela, on constate que pour $\lambda = \lambda_0 = \frac{4}{23}$, ϕ est stable et contractante sur [1,2]. Par suite, le théorème du point fixe implique que la procédure $x_{n+1} = \phi(x_n)$ converge.

Exercice 06

Supposant qu'ils existent deux points fixes distincts α_1 et α_2 dans [a,b].

Donc le théorème des accroissements finis donne

$$g(\alpha_1) - g(\alpha_2) = (\alpha_1 - \alpha_2)g'(\zeta)$$

où ζ est compris entre α_1 et α_2.

Comme

$$|g'(x)| \leq k < 1, \ \forall x \in [a,b],$$

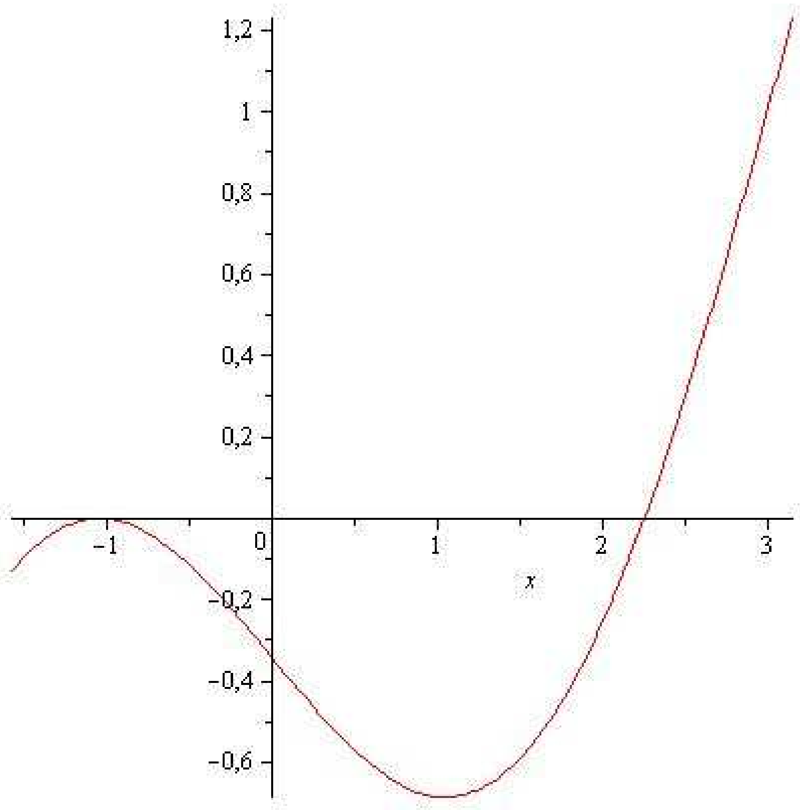
alors

$$|\alpha_1 - \alpha_2| = |g(\alpha_1) - g(\alpha_2)| = |\alpha_1 - \alpha_2| \, |g'(\zeta)| \leq k \, |\alpha_1 - \alpha_2| < |\alpha_1 - \alpha_2|$$

ce qui est absurde.

Exercice 07

Le graphe de la fonction $f(x) = \frac{x}{2} - \sin(x) + \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{2}$ est illustré dans la figure suivante:



On note par α_1 la racine négative et α_2 la racine positive.

1) La méthode de Dichotomie est elle applicable pour trouver les racines de f ?

On ne peut pas utiliser la méthode de Dichotomie pour approcher α_1 car f ne change pas de signe prés de cette racine.

2) Pour chaque racine, déterminer l'ordre de convergence de la méthode de Newton.

Pour la racine α_1, on a $f'(\alpha_1) = 0$, donc la convergence est linéaire.

Pour la racine α_2, on a $f'(\alpha_2) \neq 0$, donc la convergence est aumoins d'ordre 2.

3) Pour approcher la racine strictement positive, on considère la méthode de point fixe

$$x_{n+1} = \sin(x_n) + \frac{x_n}{2} - \frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Montrer que c'est un point fixe attractif dans l'intervalle $[\frac{2\pi}{3}\ ,\pi]$.

On pose $g(x) = \sin(x) + \frac{x}{2} - \frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{2}$, on a :

$$|g'(x)| = \left|\cos x + \frac{1}{2}\right| \leq \frac{1}{2}, \forall x \in [\frac{2\pi}{3}, \pi].$$

Exercice 08
On considère la fonction f définie par

$$f(x) = x^3 + 4x^2 - 10$$

1) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une seule racine α dans l'intervalle $[1, \frac{3}{2}]$.
On a $f(1).f(\frac{3}{2}) < 0$.
$f'(x) = 3x^2 + 8x > 0$ sur $[1, \frac{3}{2}]$, donc f est continue et strictement monotone sur $[1, \frac{3}{2}]$.
Par conséquent, le théorème des valeurs intermidiaires implique qu'il existe un unique $\alpha \in [1, \frac{3}{2}]$ tel que $f(\alpha) = 0$.
2) Soient les méthodes d'approximations successives suivantes:

$$\begin{aligned}
x_{n+1} &= g_1(x_n) = x_n - x_n^3 - 4x_n^2 + 10 \\
x_{n+1} &= g_2(x_n) = \frac{1}{2}(10 - x_n^3)^{\frac{1}{2}} \\
x_{n+1} &= g_3(x_n) = (\frac{10}{4 + x_n})^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

Pour chaque méthode, montrer, soit la possibilité de convergence, soit la divergence de la suite (x_n).
2-1) Convergence de procédé $x_{n+1} = g_1(x_n)$
On pose $g_1(x) = x - x^3 - 4x^2 + 10$

$$\begin{aligned}
f(\alpha) &= 0 \\
&\Leftrightarrow \alpha^3 + 4\alpha^2 - 10 = 0 \\
&\Leftrightarrow \alpha - (\alpha^3 + 4\alpha^2 - 10) = \alpha \\
&\Leftrightarrow g_1(\alpha) = \alpha
\end{aligned}$$

Nous avons

$$g_1'(x) = 1 - 3x^2 - 8x, g_1''(x) = -6x - 8 < 0 \text{ sur } [1, \frac{3}{2}].$$

Le tableau de variations de g_1 est donné par

x	1 $\qquad$ $\frac{3}{2}$
$g_1''(x)$	$-$
$g_1'(x)$	$-10 \searrow \frac{-71}{4}$

De cela, on obtient $|g_1'(x)| > 1, \forall x \in [1, \frac{3}{2}]$, donc $|g_1'(\alpha)| > 1$.
On déduit que la procédure $x_{n+1} = g_1(x_n)$ diverge.
2-3) Convergence de procédé $x_{n+1} = g_2(x_n)$
On pose $g_2(x) = \frac{1}{2}(10 - x^3)^{\frac{1}{2}}$.

$$\begin{aligned} f(\alpha) &= 0 \\ &\Leftrightarrow \alpha^3 + 4\alpha^2 - 10 = 0 \\ &\Leftrightarrow 4\alpha^2 = 10 - \alpha^3 \\ &\Leftrightarrow \alpha = \frac{1}{2}(10 - \alpha^3)^{\frac{1}{2}} \\ &\Leftrightarrow g_2(\alpha) = \alpha \end{aligned}$$

Nous avons

$$g_2'(x) = -\frac{3}{4}x^2(10-x^3)^{\frac{-1}{2}}, g_2''(x) = -\frac{3}{4}(2x(10-x^3)^{\frac{-1}{2}} + \frac{3}{2}x^4(10-x^3)^{\frac{-3}{2}}) < 0 \text{ sur } [1, \frac{3}{2}].$$

Le tableau de variations de g_2 est donné par

x	1 $\qquad$ $\frac{3}{2}$
$g_2''(x)$	$-$
$g_2'(x)$	-0.25 $\searrow$ -0.65
$g_2(x)$	1.5 $\searrow$ 1.48

De cela, on constate que g_2 est stable et contractante sur $[1, \frac{3}{2}]$.
On déduit que la procédure $x_{n+1} = g_2(x_n)$ converge.
2-3) Convergence de procédé $x_{n+1} = g_3(x_n)$
On pose $g_3(x) = (\frac{10}{4+x})^{\frac{1}{2}}$

$$\begin{array}{rcl} f(\alpha) & = & 0 \\ & \Leftrightarrow & \alpha^3 + 4\alpha^2 - 10 = 0 \\ & \Leftrightarrow & \alpha^2(1+\alpha) = 10 \\ & \Leftrightarrow & \alpha = (\dfrac{10}{1+\alpha})^{\frac{1}{2}} \\ & \Leftrightarrow & g_3(\alpha) = \alpha \end{array}$$

Nous avons

$$g_3'(x) = -\frac{\sqrt{10}}{2}(\frac{1}{4+x})^{\frac{3}{2}}, g_3''(x) = \frac{3\sqrt{10}}{4}(\frac{1}{4+x})^{\frac{5}{2}} > 0 \text{ sur } [1, \frac{3}{2}]. \; .$$

Le tableau de variations de g_3 est donné par

x	1 $\qquad\qquad$ $\frac{3}{2}$
$g_3''(x)$	$+$
$g_3'(x)$	$-0.14 \nearrow -0.12$
$g_3(x)$	$1.41 \searrow 1.34$

De cela, on constate que g_3 est stable et contractante sur $[1, \frac{3}{2}]$.
On déduit que la procédure $x_{n+1} = g_3(x_n)$ converge.
3) Dans quel cas la convergence est-elle plus rapide que les autres?
La suite $(g_3(x_n))$ converge plus rapide que la suite $(g_2(x_n))$.
4) Quel est l'ordre de convergence des méthodes associées à g_2 et g_3.
On a montré que $|g_3'(x)| < 1$ et $|g_2'(x)| < 1$ sur $[1, \frac{3}{2}]$, donc $|g_3'(\alpha)| \neq 0$ et $|g_2'(\alpha)| \neq 0$.
On conclut que les deux méthodes convergent à l'ordre 1.
5) On suppose que $e_n = |g_3(x_{n-1}) - \alpha| = 10^{-3}$, donner une majoration de e_{n+1}.
D'aprés la proposition 1.3.1, $e_{n+1} \simeq |g_3'(\alpha)|\, e_n$, donc $e_{n+1} \leq 0.1410^{-3}$.
Exercice 09

La fonction $f(x) = \exp(x-2) + x^2 - 3x + 1$ possède une solution $\alpha = 2$. On propose d'approcher α par la méthode de point fixe.

1) En choisissant x_0 dans un voisinage de α, vérifier si les méthodes de point fixe suivantes convergent .

$$\begin{aligned} x &= g_1(x) = \exp(x-2) + (x-1)^2 \\ x &= g_2(x) = 1 + \sqrt{x - \exp(x-2)} \\ x &= g_3(x) = 0.5 \ln(3x - x^2 - 1) \end{aligned}$$

On a:

$$g_1'(x) = \exp(x-2) + 2(x-1), g_1(2) = 2 \text{ et } |\ g_1'(2)| = 3 > 1,$$

donc la méthode associée à g_1 diverge.

$$g_2'(x) = \frac{1 - \exp(x-2)}{2\sqrt{x - \exp(x-2)}}, g_2(2) = 2 \text{ et } |g_2'(2)| = 0 < 1,$$

donc la méthode associée à g_2 converge.

$$g_3(2) = 0 \neq 2,$$

donc 2 n'est pas un point fixe de g_3.

2) Soit $e_n = |x_n - \alpha| = |g_2(x_{n-1}) - \alpha|$ l'erreur qu'on obtient à à l'itération n.

a) Calculer $\lim\limits_{n\to\infty} e_n$, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{e_n}{e_{n-1}}$ et $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{e_n}{e_{n-1}^2}$.

$$\lim_{n\to\infty} e_n = 0 \text{ car } x_{n+1} = g_2(x_n) \text{ converge.}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{e_n}{e_{n-1}} = g_2'(2) = 0.$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{e_n}{e_{n-1}^2} = \frac{1}{2} g_2''(2) = \frac{1}{2}\frac{1}{2} = \frac{1}{4}.\text{(voir la proposition 1.3.1)}$$

b) Déduire que la méthode $x_{n+1} = g_2(x_n)$ est d'ordre 2.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{e_n}{e_{n-1}^2} \neq 0,$$

donc la méthode est d'ordre 2.

Exercice 10

On considère la fonction f définie par

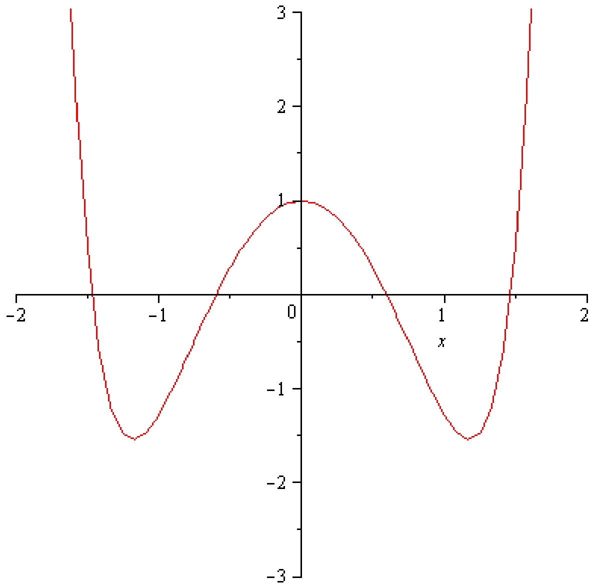
$$f(x) = \exp(x^2) - 4x^2$$

1) Séparer graphiquement les racines de f.
Puisque f est une fonction paire, on fait l'étude sur $[0,\infty[$.

$$f'(x) = 2x(\exp(x^2) - 4)$$

x	0		$\sqrt{ln(4)}$		∞
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	1	$\searrow$	$4(1-ln(4))$	$\nearrow$	∞

Le graphe de f est donc



La fonction f admet quatres racines $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ et α_4 avec:

$$\alpha_1 \in [0,1], \alpha_2 \in [1,2], \alpha_3 \in [-1,0], \alpha_4 \in [-2,-1]$$

2) Soit la méthode de point fixe

$$\begin{cases} x_0 \in [0,1] \\ x_{n+1} = \frac{\sqrt{\exp(x_n^2)}}{2} \end{cases}$$

Etudier la convergence de cette méthode et préciser l'ordre de convergence.
On a

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 \\ &\Leftrightarrow \exp(x^2) - 4x^2 \\ &\Leftrightarrow x^2 = \frac{\exp(x^2)}{4} \\ &\Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{\exp(x^2)}}{2} \end{aligned}$$

On pose $g(x) = \frac{\sqrt{\exp(x^2)}}{2}$.
Le tableau des variations de g est le suivant

x	0 $\qquad\qquad$ 1
$g''(x)$	$+$
$g'(x)$	$0 \longrightarrow \frac{\sqrt{e}}{2}$
$g(x)$	$\frac{1}{2} \longrightarrow \frac{\sqrt{e}}{2}$

Puisque g est stable et contractante sur $[0,1]$, la suite $x_{n+1} = g(x_n)$ converge vers $\alpha_1 \in [0,1]$.

Pour l'ordre , on a

$$g'(\alpha_1) = \frac{\alpha_1\sqrt{\exp(\alpha_1^2)}}{2} = \alpha_1 g(\alpha_1) = \alpha_1^2 \neq 0$$

donc la méthode de point fixe converge à l'ordre 1.

3) Ecrire la méthode de Newton pour la recherche des zéros de f et préciser l'ordre de convergence.

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{\exp(x_n^2) - 4x_n^2}{2x_n(\exp(x_n^2) - 4)}$$

Puisque α_1 est une racine simple de f, la méthode de Newton converge à l'ordre 2.

4) Comparer la méthode de Newton et la méthode de point fixe.

Comme la méthode de point fixe converge à l'ordre 1 et la méthode de Newton converge à l'ordre 2, la méthode de Newton est plus rapide que la méthode de point fixe.

Chapitre 2

Résolution des systèmes linéaires : Méthodes directes

2.1 Introduction

Dans ce chapitre, on s'intéresse à la résolution du système linéaire

$$Ax = b \tag{2.1}$$

où $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ est une matrice carrée inversible, $b \in \mathbb{R}^n$ est le second membre et $x \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur des inconnus.

La résolution de ce système par la méthode de Cramer nécessite $n!n^2$ opérations élémentaires. C'est une méthode trés couteuse à cause du calcul des déterminants et elle demande un temps de calcul évoluant de manière exponentielle avec n. Pour cette raison, on utilise d' autres méthodes directes qui déterminent la solution aprés un nombre fini d'opérations.

Parmi les méthodes directes de résolution du système (2.1), on a:

La méthode de Gauss.

La méthode LU.

La méthode de Cholesky

2.2 Méthode de Gauss

La méthode de Gauss consiste à transformer le système $Ax = b$ en un système $A'x = b'$ avec A' une matrice triangulaire supérieure puis à résoudre le nouveau système $A'x = b'$ par la méthode de remontée.

supposons $n = 4$.

On pose

$$(A,b) = (A^{(1)}, b^{(1)}) = \begin{pmatrix} a_{11}^1 & a_{12}^1 & a_{13}^1 & a_{14}^1 & b_1^1 \\ a_{21}^1 & a_{22}^1 & a_{23}^1 & a_{24}^1 & b_2^1 \\ a_{31}^1 & a_{32}^1 & a_{33}^1 & a_{34}^1 & b_3^1 \\ a_{41}^1 & a_{42}^1 & a_{43}^1 & a_{44}^1 & b_4^1 \end{pmatrix} \begin{array}{c} L_1^1 \\ L_2^1 \\ L_3^1 \\ L_4^1 \end{array}$$

Etape1
Si $a_{11}^1 \neq 0$, alors

$$L_i^2 \leftarrow L_i^1 - \frac{a_{i1}^1}{a_{11}^1} L_1^1, i = 2,3,4$$

On obtient alors

$$(A^{(2)}, b^{(2)}) = \begin{pmatrix} a_{11}^1 & a_{12}^1 & a_{13}^1 & a_{14}^1 & b_1^1 \\ 0 & a_{22}^2 & a_{23}^2 & a_{24}^2 & b_2^2 \\ 0 & a_{32}^2 & a_{33}^2 & a_{34}^2 & b_3^2 \\ 0 & a_{42}^2 & a_{43}^2 & a_{44}^2 & b_4^2 \end{pmatrix} \begin{array}{c} L_1^2 \\ L_2^2 \\ L_3^2 \\ L_4^2 \end{array}$$

Etape2
Supposons $a_{22}^2 = 0$, on permute les lignes L_2^2 et $L_p^2, p \in \{3,4\}$ avec $a_{p2}^2 \neq 0$, d'où

$$(A^{\tilde{(2)}}, b^{\tilde{(2)}}) = \begin{pmatrix} a_{11}^1 & a_{12}^1 & a_{13}^1 & a_{14}^1 & b_1^1 \\ 0 & a_{22}^{\tilde{2}} & a_{23}^{\tilde{2}} & a_{24}^{\tilde{2}} & b_2^{\tilde{2}} \\ 0 & a_{32}^{\tilde{2}} & a_{33}^{\tilde{2}} & a_{34}^{\tilde{2}} & b_3^{\tilde{2}} \\ 0 & a_{42}^{\tilde{2}} & a_{43}^{\tilde{2}} & a_{44}^{\tilde{2}} & b_4^{\tilde{2}} \end{pmatrix} \begin{array}{c} L_1^2 \\ L_2^2 \\ L_3^2 \\ L_4^2 \end{array}$$

avec $a_{22}^{\tilde{2}} \neq 0$.
Puis on fait les affectations suivantes:

$$L_i^3 \leftarrow L_i^2 - \frac{a_{i2}^{\tilde{2}}}{a_{22}^{\tilde{2}}} L_2^2, i = 3,4.$$

On obtient

$$(A^{(3)}, b^{(3)}) = \begin{pmatrix} a_{11}^1 & a_{12}^1 & a_{13}^1 & a_{14}^1 & b_1^1 \\ 0 & a_{22}^{\tilde{2}} & a_{23}^{\tilde{2}} & a_{24}^{\tilde{2}} & b_2^{\tilde{2}} \\ 0 & 0 & a_{33}^3 & a_{34}^3 & b_3^3 \\ 0 & 0 & a_{43}^3 & a_{44}^3 & b_4^3 \end{pmatrix} \begin{array}{c} L_1^2 \\ L_2^2 \\ L_3^3 \\ L_4^3 \end{array}$$

Etape3
On suppose que $a_{33}^3 \neq 0$, donc

$$L_4^4 \leftarrow L_4^3 - \frac{a_{43}^{\tilde{2}}}{a_{33}^3} L_3^3$$

$$(A^{(4)}, b^{(4)}) = \left(\underbrace{\begin{matrix} a_{11}^1 & a_{12}^1 & a_{13}^1 & a_{14}^1 \\ 0 & a_{22}^{\tilde{2}} & a_{23}^{\tilde{2}} & a_{24}^{\tilde{2}} \\ 0 & 0 & a_{33}^3 & a_{34}^3 \\ 0 & 0 & 0 & a_{44}^4 \end{matrix}}_{A'} \quad \underbrace{\begin{matrix} b_1^1 \\ b_2^{\tilde{2}} \\ b_3^3 \\ b_4^4 \end{matrix}}_{b'} \right)$$

On résout le système triangulaire supérieur $A'x = b'$.
Dans le cas général, l'algorithme de Gauss est donnée par

$$\begin{cases} a_{kj}^{(k+1)} = \frac{a_{kj}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}}, \quad k = \overline{1, n-1}, \quad j = \overline{k, n} \\ \\ a_{ij}^{(k+1)} = a_{ij}^{(k)} - a_{ik}^{(k)} a_{kj}^{(k+1)}, i = \overline{1, n}, \quad j = \overline{k+1, n} \\ \\ b_k^{(k+1)} = \frac{b_k^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}} \\ \\ b_i^{(k+1)} = b_i^{(k)} - a_{ik}^{(k)} b_k^{(k+1)}, \quad i = \overline{1, n}, \quad i \neq k \end{cases}$$

Stratégie de pivot partiel

Pour cette méthode, à l'étape k, parmi les coefficients $a_{k,k}^{(k)}, a_{k+1,k}^{(k)}, a_{nk}^{(k)}$, on choisit celui dont le module est le plus grand, c'est à dire ,$\max\limits_{k \leq i \leq n}(\left| a_{ik}^k \right|)$.

2.3 Méthode de Gauss-Jordan

La méthode de Gauss-Jordan est une variante de la méthode de Gauss, son principe est de transformer la matrice A en matrice identité, d'où

$$\begin{aligned} Ax &= b \\ &\Leftrightarrow Ix = b' \\ &\Leftrightarrow x = b' \end{aligned}$$

On suppose que $n = 3$: .
On pose

$$(A, b) = (A^{(1)}, b^{(1)}) = \begin{pmatrix} a_{11}^1 & a_{12}^1 & a_{13}^1 & b_1^1 \\ a_{21}^1 & a_{22}^1 & a_{23}^1 & b_2^1 \\ a_{31}^1 & a_{32}^1 & a_{33}^1 & b_3^1 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1^1 \\ L_2^1 \\ L_3^1 \end{matrix}$$

Etape1

Si $a_{11}^1 \neq 0$, on fait les affectations suivantes

$$\begin{array}{rcl} L_1^2 & \leftarrow & \dfrac{1}{a_{11}^1} L_1^1 \\ L_2^2 & \leftarrow & L_2^1 - a_{21}^1 L_1^2 \\ L_3^2 & \leftarrow & L_3^1 - a_{31}^1 L_1^2 \end{array}$$

On obtient alors

$$(A^{(2)}, b^{(2)}) = \begin{pmatrix} 1 & a_{12}^2 & a_{13}^2 & b_1^2 \\ 0 & a_{22}^2 & a_{23}^2 & b_2^2 \\ 0 & a_{32}^2 & a_{33}^2 & b_3^2 \end{pmatrix} \begin{array}{c} L_1^2 \\ L_2^2 \\ L_3^2 \end{array}$$

Etape2

Suppsons que $a_{22}^2 \neq 0$, on fait les affectations suivantes

$$\begin{array}{rcl} L_2^3 & \leftarrow & \dfrac{1}{a_{22}^2} L_2^2 \\ L_1^3 & \leftarrow & L_1^2 - a_{12}^2 L_2^3 \\ L_3^3 & \leftarrow & L_3^2 - a_{32}^2 L_2^3 \end{array}$$

$$(A^{(3)}, b^{(3)}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a_{13}^3 & b_1^3 \\ 0 & 1 & a_{23}^3 & b_2^3 \\ 0 & 0 & a_{33}^3 & b_3^3 \end{pmatrix} \begin{array}{c} L_1^3 \\ L_2^3 \\ L_3^3 \end{array}$$

Etape3

On suppose que $a_{33}^3 \neq 0$, donc on fait les affectations suivantes

$$\begin{array}{rcl} L_3^4 & \leftarrow & \dfrac{1}{a_{33}^3} L_3^3 \\ L_1^4 & \leftarrow & L_1^3 - a_{13}^3 L_3^4 \\ L_2^4 & \leftarrow & L_2^3 - a_{23}^3 L_3^4 \end{array}$$

$$(A^{(4)}, b^{(4)}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & b_1^4 \\ 0 & 1 & 0 & b_2^4 \\ 0 & 0 & 1 & b_3^4 \end{pmatrix}$$

La solution est donc $x = \begin{pmatrix} b_1^4 \\ b_2^4 \\ b_3^4 \end{pmatrix}$.

2.4 Décomposition LU: méthode de Gauss

La méthode LU consiste à décomposer la matrice A en produit de deux matrices $A = LU$ où L est une matrice triangulaire inférieure unitaire et U est une matrice triangulaire supérieure.

D'où,

$$Ax = b \Leftrightarrow L\underbrace{Ux}_{y} = b$$

La résolution du système $Ax = b$ se ramène donc à la résolution de deux systèmes triangulaires

$$\begin{cases} Ly = b \\ Ux = y \end{cases}$$

2.4.1 Existence d'une décomposition LU

Définition 2.4.1 *Soit $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$. Les mineurs principaux $\triangle_k$ $(k = \overline{1,n})$ de A sont les déterminants des sous matrices carrées de A formées par les k premières lignes et les k premières colonnes de A.*

$$\triangle_k = \begin{vmatrix} a_{11} & .. & a_{1k} \\ a_{21} & .. & a_{2k} \\ a_{k1} & .. & a_{kk} \end{vmatrix}, \ k = \overline{1,n}$$

Le théorème suivant donne une condition suffisante sur la matrice A pour qu'il n'y aura pas de permutations des lignes au cours de l'élimination de Gauss.

Théorème 2.4.1 *Soit A une matrice carrée d'ordre n telle que tous ses mineurs principaus d'ordre k $(1 \leq k \leq n)$ sont non nuls, alors il existe une matrice triangulaire inférieure L avec $l_{ii} = 1$ et une matrice triangulaire supérieure U telles que $A = LU$.*

Remarque 2.4.1 *La décomposition LU est intéressante dans le cas où le système $Ax = b$ doit être résolu pour plusieurs second membres b car la décomposition LU s'effectue une fois pour toute, alors que par la méthode de Gauss, les étapes d'élimination seront faites pour chaque vecteur b.*

2.4.2 Méthode de construction

La méthode LU peut se calculer à partir de la méthode de Gauss .

On suppose que $n = 4$.

Le théorème précédent implique que pour l'élimination de Gauss, dans chaque étape, $(\mathrm{a}_{ii}^{i}) \neq 0, i = \overline{1,4}$, donc on peut effectuer l'algorithme de Gauss sans pivot.

Par la méthode de Gauss, on obtient

$$Ax = b \Leftrightarrow A'x = b'$$

avec

$$A' = \begin{pmatrix} a_{11}^1 & a_{12}^1 & a_{13}^1 & a_{14}^1 \\ 0 & a_{22}^2 & a_{23}^2 & a_{24}^2 \\ 0 & 0 & a_{33}^3 & a_{34}^3 \\ 0 & 0 & 0 & a_{44}^4 \end{pmatrix}$$

On pose

$$U = A' = \begin{pmatrix} a_{11}^1 & a_{12}^1 & a_{13}^1 & a_{14}^1 \\ 0 & a_{22}^2 & a_{23}^2 & a_{24}^2 \\ 0 & 0 & a_{33}^3 & a_{34}^3 \\ 0 & 0 & 0 & a_{44}^4 \end{pmatrix}$$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 & 0 \\ l_{41} & l_{42} & l_{43} & 1 \end{pmatrix}$$

Donc $LU = A$ implique

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 & 0 \\ l_{41} & l_{42} & l_{43} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11}^1 & a_{12}^1 & a_{13}^1 & a_{14}^1 \\ 0 & a_{22}^2 & a_{23}^2 & a_{24}^2 \\ 0 & 0 & a_{33}^3 & a_{34}^3 \\ 0 & 0 & 0 & a_{44}^4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}^1 & a_{12}^1 & a_{13}^1 & a_{14}^1 \\ a_{21}^1 & a_{22}^1 & a_{23}^1 & a_{24}^1 \\ a_{31}^1 & a_{32}^1 & a_{33}^1 & a_{34}^1 \\ a_{41}^1 & a_{42}^1 & a_{43}^1 & a_{44}^1 \end{pmatrix}$$

Par identification on trouve:

$$\begin{aligned} a_{11}^1 &= a_{11}^1 \\ l_{21}a_{11}^1 &= a_{21}^1 \\ l_{31}a_{11}^1 &= a_{31}^1 \\ l_{41}a_{11}^1 &= a_{41}^1 \\ l_{31}a_{12}^1 + l_{32}a_{22}^2 &= a_{32}^1 \\ l_{41}a_{12}^1 + l_{42}a_{22}^2 &= a_{42}^1 \\ l_{41}a_{13}^1 + l_{42}a_{23}^2 + l_{43}a_{33}^3 &= a_{43}^1 \end{aligned}$$

Ainsi, en utilisant l'algorithme de Gauss, on obtient

$$\begin{aligned}
l_{21} &= \frac{a_{21}^1}{a_{11}^1} \\
l_{31} &= \frac{a_{31}^1}{a_{11}^1} \\
l_{41} &= \frac{a_{41}^1}{a_{11}^1} \\
l_{32} &= \frac{a_{32}^1 - l_{31}a_{12}^1}{a_{22}^2} = \frac{a_{32}^2}{a_{22}^2} \\
l_{42} &= \frac{a_{42}^1 - l_{41}a_{12}^1}{a_{22}^2} = \frac{a_{42}^1}{a_{22}^2} \\
l_{43} &= \frac{a_{43}^1 - l_{41}a_{13}^1 - l_{42}a_{23}^2}{a_{33}^3} \\
&= \frac{a_{43}^1 - \frac{a_{41}^1}{a_{11}^1}a_{13}^1 - \frac{a_{42}^1}{a_{22}^2}a_{23}^2}{a_{33}^3} \\
&= \frac{a_{43}^2 - \frac{a_{42}^1}{a_{22}^2}a_{23}^2}{a_{33}^3} = \frac{a_{43}^3}{a_{33}^3}
\end{aligned}$$

Pour A quelconque, nous avons

$$l_{ik} = \frac{a_{ik}^k}{a_{kk}^k}, k = \overline{1, n-1}, i = \overline{k+1, n}.$$

2.4.3 Décomposition LU et permutation de lignes

On suppose que la condition du Théorème 2.4.1 n'est pas vérifiée, alors lors de la décomposition de Gauss, on trouve (a_{ii}^i)=0 pour un certain i (la factorisation LU n'existe pas), dans ce cas, on utilise le théorème suivant.

Théorème 2.4.2 *Soit $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ une matrice carrée inversible.Il existe une matrice P telle que $PA = LU$ où L est une matrice triangulaire inférieure unitaire et U est une matrice triangulaire supérieure.*

On en déduit que

$$\begin{aligned}
Ax &= b \Leftrightarrow PAx = Pb \\
&\Leftrightarrow L\underbrace{Ux}_{y} = Pb \\
&\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} Ly = Pb \\ Ux = y \end{array} \right.
\end{aligned}$$

Déterminant

La factorisation LU permet de calculer le déterminant de A car

$$\det(A) = \det(L)\det(U) = \det(U)$$

2.5 La méthode de Cholesky

La méthode de Cholesky consiste à décomposer A sous la forme $A = LL^t$ où L est une matrice triangulaire inférieure de coefficients diagonaux strictement positifs.

D'où,

$$Ax = b \Leftrightarrow L\underbrace{L^t x}_{y} = b$$

.

La résolution du système $Ax = b$ se ramène donc à la résolution de deux systèmes triangulaires

$$\begin{cases} Ly = b \\ L^t x = y \end{cases}$$

Théorème 2.5.1 *Une matrice A est définie positive si et seulement si tous ses mineurs principaux sont strictement positifs.*

Théorème 2.5.2 *Si A est symétrique et définie positive, alors il exixte une matrice L triangulaire inférieure telle que $A = LL^t$. Si de plus $l_{ii} > 0, i = \overline{1, n}$, alors L est unique.*

Algorithme

Soit A une matrice symétrique et définie positive, donc $A = LL^t$.

Par identification, on obtient

$$\begin{cases} a_{ii} = l_{i1}^2 + l_{i2}^2 + .. + l_{ii}^2 \\ a_{ij} = l_{i1}l_{j1} + l_{i2}l_{j2} + .. + l_{ij}l_{jj}, i > j \\ l_{ij} = 0, i < j \end{cases}$$

L'algorithme de Cholesky est donnée par

$$\begin{cases} l_{11} = \sqrt{a_{11}} \\ \\ l_{i1} = \frac{a_{i1}}{l_{11}}, i = \overline{2, n} \\ \\ l_{ii} = \sqrt{a_{ii} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik}} \\ \\ l_{ij} = \frac{a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik}l_{jk}}{l_{jj}}, i > j \\ \\ l_{ij} = 0, i < j \end{cases}$$

2.6 Exercices

Exercice 1

On considère le système linéaire $Ax = b$,où $\alpha \in \mathbb{R}$ et

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & 3 \\ -6 & 4 & 2 & -4 \\ -3 & 2 & 0 & -2 \\ -3 & -1 & \alpha & 3 \end{pmatrix}, \ b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

1) Résoudre le système $Ax = b$ en utilisant la méthode de Gauss. En déduire le déterminant de A.

2) Pour quelles valeurs de α la matrice A admet une décomposition LU ? Déterminer cette décomposition.

3) Résoudre le système $Ax = b$ en utilisant la factorisation trouvée.

Suggestion: utiliser le théorème 2.3.1.

Exercice 2

On considère le système linéaire $Ax = b$, où

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 4 \\ -4 & -2 & 3 & -7 \\ 4 & 1 & -2 & 8 \\ 0 & -3 & -12 & -1 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 10 \end{pmatrix}$$

1) Résoudre le système $Ax = b$ en utilisant la méthode de Gauss.

2) Montrer que la matrice A n'admet pas de factorisation LU.

3) Trouver une permutation des lignes de A pour avoir une matrice M qui admet une décomposition LU.

4) Calculer la décomposition LU de M.

5) Utiliser cette décomposition pour résoudre le système $Ax = b$.

Suggestion: utiliser le théorème 2.3.2.

Exercice 3

On considère le système linéaire $Ax = b$, où

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -4 \\ 3 & 3 & -5 \\ 4 & 5 & -2 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 8 \\ 14 \\ 16 \end{pmatrix}$$

1) Montrer que la matrice A est inversible.

2) En utilisant la méthode de Gauss-Jordan, calculer la solution du système $Ax = b$ ainsi que A^{-1}.

Exercice 4

On considère le système linéaire $Ax = b$,où

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

1)Montrer que la matrice A est symétrique définie positive.

2) Résoudre le système $Ax = b$ par la méthode de Cholesky.

Suggestion: utiliser le théorème (2.4.1) et (2.4.2).

Exercice 5

On considère le système linéaire $Ax = b$,où

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & \alpha & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

pour $\alpha \in \mathbb{R}$.

1) la résolution de ce système peut être ramenée à celle d'un système linéaire de dimension 3.

Donner ce système que l'on notera

$$A'x = b', \ (2)$$

2) Pour quelles valeurs de α le système (2) admet une solution unique?

3) Pour quelles valeurs de α la matrice A' admet une décomposition LU ?

4) calculer la décomposition LU de A'.

Exercice 6

On considère le système linéaire $Ax = b$, où

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 6 & -5 \\ 1 & -2 & 7 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \tag{2.2}$$

1) Montrer que le système (2.2) admet une solution unique.

2) Résoudre le système (2.2) par l'algorithme de Gauss. En déduire A^{-1}.

3) Montrer que A admet une unique factorisation LU puis calculer cette factorisation

On choisit $b_1 = 1, b_2 = -1, b_3 = 2$.

a) Résoudre le système (2.2) par l'algorithme de Gauss avec pivot partiel.

On note par P la matrice de permutations effectuées dans l'algotithme de Gauss avec pivot partiel.

b) Calculer la factorisation LU de PA puis résoudre le système (2.2) en utilisant cette factorisation.

2.7 Corrigé des Exercices

Exercices 1

1) Résoudre le système Ax=b par la méthode de Gauss

On regroupe A et b :

$$(A,b)=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ -6 & 4 & 2 & -4 & 0 \\ -3 & 2 & 0 & -2 & 0 \\ -3 & -1 & \alpha & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{matrix}$$

On effectue l'élimination de Gauss, on obtient successivement:

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 4 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & \alpha+1 & 6 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ L_2 \leftarrow L_2+2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3+L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4+L_1 \end{matrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 4 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha+2 & \frac{13}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ L_3 \leftarrow L_3-\frac{1}{2}L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4+\frac{1}{4}L_2 \end{matrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 4 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{13}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ L_4 \leftarrow L_4+(\alpha+2)L_3 \end{matrix}$$

On est ramené à résoudre le système triangulaire supérieur

$$\begin{cases} 3x_1+x_3+x_4=1 \\ 4x_2+4x_3+2x_4=2 \\ -x_3=0 \\ \frac{13}{2}x_4=\frac{3}{2} \end{cases}$$

On résout ce système par remontée, on trouve successivement

$$x_4=\frac{3}{13}, x_3=0, x_2=\frac{5}{13}, x_1=\frac{4}{39}$$

On déduit que $\det(A)=-78$.

2) Pour quelles valeurs de α la matrice A admet une décomposition LU ? Déterminer cette décomposition.

D'aprés le théorème 2.3.1, une condition suffisante est que tous les mineurs principaux de A sont non nuls.

Les mineurs principaux de la matrice A sont :

$$\triangle_1 = 3, \triangle_2 = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ -6 & 4 \end{vmatrix} = 12, \triangle_3 = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -6 & 4 & 2 \\ -3 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -12, \triangle_4 = \det(A) = -78$$

Donc, $\forall\alpha \in \mathbb{R}$, on peut factoriser A sous la forme LU.

Déterminer la décomposition LU de A:

D'aprés la première question, U est obtenue par l'élimination de Gauss

$$U = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{13}{2} \end{pmatrix}$$

Pour construire $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 & 0 \\ l_{41} & l_{42} & l_{43} & 1 \end{pmatrix}$, on utilise l'algorithme de la factorisation LU en reprenant les étapes de l'élimination de Gauss:

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 4 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & \alpha+1 & 6 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{c} L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1, l_{21} = -2 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_1, l_{31} = -1 \\ L_4 \leftarrow L_4 + L_1, l_{41} = 1 \end{array}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 4 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha+2 & \frac{13}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \quad \begin{array}{c} L_3 \leftarrow L_3 - \frac{1}{2}L_2, l_{32} = \frac{1}{2} \\ L_4 \leftarrow L_4 + \frac{1}{4}L_2, l_{42} = \frac{-1}{4} \end{array}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 4 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{13}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \quad L_4 \leftarrow L_4 + (\alpha+2)L_3, l_{43} = -(\alpha+2)$$

$$\begin{cases} l_{21} = \frac{-6}{3} = -2 \\ l_{31} = \frac{-3}{3} = -1 \\ l_{41} = \frac{3}{3} = 1 \\ l_{32} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \\ l_{42} = \frac{-1}{4} \\ l_{43} = -(\alpha+2) \end{cases}$$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ -1 & -\frac{1}{4} & -(\alpha+2) & 1 \end{pmatrix}$$

3) Résoudre le système $Ax = b$ en utilisant la factorisation trouvée.

$Ax = b \Leftrightarrow L\underbrace{Ux}_{y} = b \Leftrightarrow \begin{cases} Ly = b \\ Ux = y \end{cases}$

Résoudre le système $Ly = b$

$$Ly = b \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 = 1 \\ -2y_1 + y_2 = 0 \\ -y_1 + \frac{1}{2}y_2 + y_3 = 0 \\ -y_1 - \frac{1}{4}y_2 - (\alpha+2)y_3 + y_4 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y_1 = 1 \\ y_2 = 2 \\ y_3 = 0 \\ y_4 = \frac{3}{2} \end{cases}$$

Donc

$$y = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

Résoudre le sysème $Ux = y$

$$Ux = y \Leftrightarrow \begin{cases} 3x_1 + x_3 + 3x_4 = 1 \\ 4x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 2 \\ -x_3 = 0 \\ \frac{13}{2}x_4 = \frac{3}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{4}{39} \\ x_2 = \frac{5}{13} \\ x_3 = 0 \\ x_4 = \frac{3}{13} \end{cases}$$

La solution est

$$x = \begin{pmatrix} \frac{4}{39} \\ \frac{5}{13} \\ 0 \\ \frac{3}{13} \end{pmatrix}$$

Exercice 2

1) Résoudre le système $Ax = b$ en utilisant la méthode de Gauss.

$$(A, b) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 4 & 1 \\ -4 & -2 & 3 & -7 & 0 \\ 4 & 1 & -2 & 8 & -2 \\ 0 & -3 & -12 & -1 & 10 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -2 & 0 & -4 \\ 0 & -3 & -12 & -1 & 10 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & -3 & -12 & -1 & 10 \\ 0 & -1 & -2 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & -3 & -12 & -1 & 10 \\ 0 & 0 & 2 & \frac{1}{3} & \frac{-22}{3} \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & -3 & -12 & -1 & 10 \\ 0 & 0 & 2 & \frac{1}{3} & \frac{-22}{3} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 13 \end{pmatrix}$$

On résout :

$$Ax = b \Leftrightarrow x = \begin{pmatrix} \frac{-123}{2} \\ 20 \\ -8 \\ 26 \end{pmatrix}$$

2) Montrer que la matrice A n'admet pas de factorisation LU.
On calcule les mineurs principaux de A, on trouve

$$\triangle_1 = 2, \triangle_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -2 \end{vmatrix} = 0$$

3) Trouver une permutation des lignes de A pour avoir une matrice M qui admet une décomposition LU.

En permutant les lignes 2 et 4 on obtient:

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & -3 & -12 & -1 \\ 4 & 1 & -2 & 8 \\ -4 & -2 & 3 & -7 \end{pmatrix}$$

Les mineurs principaux de M sont

$$\triangle_1 = 2, \triangle_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} = -6, \triangle_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -12 \\ 4 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -12, \triangle_4 = -\det(A) = 6$$

4) Calculer la décomposition LU de M.
On pose

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 0 & 0 \\ l_{41} & l_{42} & l_{43} & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} M &= \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & -3 & -12 & -1 \\ 4 & 1 & -2 & 8 \\ -4 & -2 & 3 & -7 \end{pmatrix} \\ &\rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & -3 & -12 & -1 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}, l_{21} = 0, l_{31} = 2, l_{41} = -2 \end{aligned}$$

Ici, on utilise directement la première question , on trouve

$$U = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & -3 & -12 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, l_{32} = \frac{1}{3} = 0, l_{42} = 0, l_{43} = \frac{3}{2}$$

Donc

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & \frac{1}{3} & 1 & 0 \\ -2 & 0 & \frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

5) Utiliser la décomposition $M = LU$ pour résoudre le système $Ax = b$.

$$\begin{aligned} Ax &= b \Longleftrightarrow Mx = b^{'} \text{ avec } b' = \begin{pmatrix} 1 \\ 10 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\Longleftrightarrow \begin{cases} Ly = b' \\ Ux = y \end{cases} \end{aligned}$$

$$Ly = b' \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & \frac{1}{3} & 1 & 0 \\ -2 & 0 & \frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 10 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow y = \begin{pmatrix} 1 \\ 10 \\ \frac{-22}{3} \\ 13 \end{pmatrix}$$

Finalement, on résout:

$$Ux = y \Longleftrightarrow x = \begin{pmatrix} \frac{-123}{2} \\ 20 \\ -8 \\ 26 \end{pmatrix}$$

Exercice 3

On considère le système linéaire $Ax = b$, où

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -4 \\ 3 & 3 & -5 \\ 4 & 5 & -2 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 8 \\ 14 \\ 16 \end{pmatrix}$$

1) Montrer que la matrice A est inversible.

$\det(A) = 12 \neq 0$, donc A est inversible.

2) En utilisant la méthode de Gauss-Jordan, calculer la solution du système $Ax = b$ ainsi que A^{-1}.

$$(A, b, I) = \left(\begin{array}{cccc|ccc} 2 & 1 & -4 & 8 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & -5 & 14 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & -2 & 16 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} L_1 \leftarrow \frac{1}{2}L_1 \\ L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 4L_1 \end{array}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{cccc|ccc} 1 & \frac{1}{2} & -2 & 4 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -2 \\ 0 & \frac{3}{2} & 1 & 2 & \frac{-3}{2} & \frac{3}{2} & 1 \\ 0 & 3 & 6 & 0 & -2 & 3 & 6 \end{array}\right) \begin{array}{c} L_1 \leftarrow L_1 - \frac{1}{2}L_2 \\ L_2 \leftarrow \frac{2}{3}L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_2 \end{array}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 0 & \frac{-7}{3} & \frac{10}{3} & 1 & \frac{-1}{3} & \frac{-7}{3} \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & \frac{4}{3} & -1 & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 4 & 4 & 1 & -2 & 4 \end{array}\right) \begin{array}{c} L_1 \leftarrow L_1 + \frac{7}{3}L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 - \frac{2}{3}L_3 \\ L_3 \leftarrow \frac{1}{4}L_3 \end{array}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc c|c} 1 & 0 & 0 & \underbrace{\begin{matrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{matrix}}_{x} & \underbrace{\begin{matrix} \frac{19}{12} & \frac{-3}{2} & \frac{7}{12} \\ \frac{-7}{6} & 1 & \frac{-1}{6} \\ \frac{1}{4} & \frac{-1}{2} & \frac{1}{4} \end{matrix}}_{A^{-1}} \\ 0 & 1 & 0 & & \\ 0 & 0 & 1 & & \end{array}\right)$$

Exercice 4

On considère le système linéaire $Ax = b$,où

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

1) Montrer que la matrice A est symétrique définie positive.

$$A^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} = A$$

donc A est symétrique.

Montrer que A est définie positive

$$\triangle_1 = 3, \triangle_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1, \triangle_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 1$$

Puisque les mineurs principaux sont strictement positifs, A est définie positive.

2) Résoudre le système $Ax = b$ par la méthode de Cholesky.

Comme A est une matrice symétrique définie positive, il existe une matrice L triangulaire inférieure telle que $A = LL^t$.

On pose

$$L = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & 1_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{pmatrix}$$

On utilise l'algorithme de Cholesky, on trouve

$$\begin{cases} l_{11} = \sqrt{a_{11}} = 1 \\ l_{21} = \frac{a_{21}}{l_{11}} = 1 \\ l_{31} = \frac{a_{31}}{l_{11}} = 1 \\ l_{22} = \sqrt{a_{22} - l_{21}^2} = 1 \\ l_{32} = \frac{a_{32} - l_{31} l_{21}}{l_{22}} = -1 \\ l_{33} = \sqrt{a_{33} - l_{31}^2 - l_{32}^2} = 1 \end{cases}$$

donc

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Maintenant, on résout le système $Ax = b$:

$$Ax = b \Leftrightarrow L\underbrace{L^t x}_{y} = b$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} Ly = b \\ L^t x = y \end{cases}$$

$$\begin{aligned} Ly &= b \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow \quad & y = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Finalement on résout :

$$\begin{aligned} L^t x &= y \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \\ \Longleftrightarrow \quad & x = \begin{pmatrix} -6 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Exercice 5

On considère le système linéaire $Ax = b$,où

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & \alpha & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

pour $\alpha \in \mathbb{R}$.

1) la résolution de ce système peut être ramenée à celle d'un système linéaire de dimension 3, or, l'inconnu x_4 étant facile à déterminer car on a :

$$3x_4 = 2 \Rightarrow x_4 = \frac{2}{3}$$

De cela,

$$Ax = b \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ 2x_1 + \alpha x_2 + x_3 + 2 = 5 \\ 3x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 2 = 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ 2x_1 + \alpha x_2 + x_3 = 3 \\ 3x_1 + 3x_2 + 6x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ 2x_1 + \alpha x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$$

Donc

$$A'x = b' \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & \alpha & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

2) Pour quelles valeurs de α le système $A'x = b'$ admet une solution unique?

Le système $A'x = b'$ admet une solution unique si $\det(A') = -\alpha - 1 \neq 0$, donc si $\alpha \neq -1$.

3) Pour quelles valeurs de α la matrice A' admet une décomposition LU ?

La matricce A' admet une décomposition LU si tous les mineurs principaux sont non nuls, on a

$$\triangle_1 = 1, \triangle_2 = \alpha - 4, \triangle_3 = -\alpha - 1$$

donc $A' = LU$ si $\alpha \in \mathbb{R} \backslash \{-1, 4\}$.

4) calculer la décomposition LU de A'.

On pose $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned} A' &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & \alpha & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & \alpha - 4 & -5 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}, l_{21} = 2, l_{31} = 1 \\ &\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & \alpha - 4 & -5 \\ 0 & 0 & -\frac{\alpha+1}{\alpha-4} \end{pmatrix}, l_{32} = \frac{-1}{\alpha - 4} \end{aligned}$$

On obtient alors:

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & \alpha - 4 & -5 \\ 0 & 0 & -\frac{\alpha+1}{\alpha-4} \end{pmatrix}, L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & \frac{-1}{\alpha-4} & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 6

On a

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 6 & -5 \\ 1 & -2 & 7 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \tag{2.2}$$

1) Montrer que le système (2.2) admet une solution unique.

$det(A) = 24 \neq 0$, donc A est inversible.

2) Résoudre le système (2.2) par l'algorithme de Gauss. En déduire A^{-1}.

$$(A,b)=\begin{pmatrix}1&2&3&b_1\\2&6&-5&b_2\\1&-2&7&b_3\end{pmatrix}\begin{array}{c}\\L_2\leftarrow L_2-2L_1\\L_3\leftarrow L_3-L_1\end{array}$$

$$\rightarrow\begin{pmatrix}1&2&3&b_1\\0&2&1&b_2-2b_1\\0&-4&10&b_3-b_1\end{pmatrix}\begin{array}{c}\\\\L_3\leftarrow L_3+2L_2\end{array}$$

$$\rightarrow\begin{pmatrix}1&2&3&b_1\\0&2&1&b_2-2b_1\\0&0&12&-5b_1+2b_2+b_3\end{pmatrix}$$

On résout le système triangulaire supérieur

$$\begin{cases}x_1+2x_2+3x_3=b_1\\2x_2+x_3=b_2-2b_1\\12x_3=-5b_1+2b_2+b_3\end{cases}$$

La solution est donc

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{4}{3}b_1-\frac{1}{3}b_2+\frac{1}{3}b_3\\\frac{-19}{24}b_1+\frac{5}{12}b_2-\frac{1}{24}b_3\\\frac{-5}{12}b_1+\frac{1}{6}b_2+\frac{1}{12}b_3\end{pmatrix}$$

En déduire A^{-1}

$$\begin{aligned}Ax&=b\Leftrightarrow x=A^{-1}b\\&=\begin{pmatrix}\frac{4}{3}b_1-\frac{1}{3}b_2+\frac{1}{3}b_3\\\frac{-19}{24}b_1+\frac{5}{12}b_2-\frac{1}{24}b_3\\\frac{-5}{12}b_1+\frac{1}{6}b_2+\frac{1}{12}b_3\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}\frac{4}{3}&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\\\frac{-19}{24}&\frac{5}{12}&\frac{1}{24}\\\frac{-5}{12}&\frac{1}{6}&\frac{1}{12}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}\end{aligned}$$

Conclusion

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{4}{3}&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\\\frac{-19}{24}&\frac{5}{12}&\frac{1}{24}\\\frac{-5}{12}&\frac{1}{6}&\frac{1}{12}\end{pmatrix}$$

3) Montrer que A admet une unique factorisation LU puis calculer cette factorisation

Une condition suffisante est que les mineurs principaux de A sont non nuls, (voir théorème 2.3.1), on a

$$\triangle_1 = 1 \neq 0, \triangle_2 = 2 \neq 0, \triangle_3 = 24 \neq 0$$

On choisit $b_1 = 1, b_2 = -1, b_3 = 2$.
a) Résoudre le système (2.2) par l'algorithme de Gauss avec pivot partiel.

$$(A, b) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 6 & -5 & -1 \\ 1 & -2 & 7 & 2 \end{pmatrix}$$

Etape 1:
max(1,2,1)=2, donc on permute la ligne 1 et 2:

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 6 & -5 & -1 \\ 1 & 2 & -3 & 1 \\ 1 & -2 & 7 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 - \frac{1}{2}L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - \frac{1}{2}L_1 \end{matrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 6 & -5 & -1 \\ 0 & -1 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & -5 & \frac{19}{2} & \frac{5}{2} \end{pmatrix}$$

Etape2:
max(1,5)=5, donc on permute la ligne 2 et 3

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 6 & -5 & -1 \\ 0 & -5 & \frac{19}{2} & \frac{5}{2} \\ 0 & -1 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \quad L_3 \leftarrow L_3 - \frac{1}{5}L_2$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 6 & -5 & -1 \\ 0 & -5 & \frac{19}{2} & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{12}{5} & 1 \end{pmatrix}$$

On est ramené à résoudre le système trangulaire supérieur

$$\begin{pmatrix} 2 & 6 & -5 \\ 0 & -5 & \frac{19}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{12}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{5}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

On trouve $x = (\frac{7}{3}, \frac{-31}{24}, \frac{-5}{12})^t$.

On note par P la matrice de permutations effectuées dans l'algotithme de Gauss avec pivot partiel.

b) Calculer la factorisation LU de PA puis résoudre le système (2.2) en utilisant cette factorisation.

En utilisant les étapes de l'algotithme de Gauss avec pivot partiel ci dessus, en déduire que

$$U = \begin{pmatrix} 2 & 6 & -5 \\ 0 & -5 & \frac{19}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{12}{5} \end{pmatrix}, L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{5} & 1 \end{pmatrix}$$

On a $P = P_2P_1$ où P_1 et P_2 sont les matrices de permutations effectuées à chaque étape de l'algotithme de Gauss avec pivot partiel.

Pour obtenir P_1 et P_2, il suffit de faire à partir de I chaque parmutation élémentaire.

Etape1

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad L_2 \leftrightarrow L_1 \quad \rightarrow P_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Etape2

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad L_2 \leftrightarrow L_3 \quad \rightarrow P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$P = P_2P_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Résoudre maintenant le système $Ax = b$ en utilisant la factorisation $PA = LU$.

$$\begin{aligned} Ax &= b \Leftrightarrow PAx = Pb \\ &\Leftrightarrow L\underbrace{Ux}_{y} = Pb \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} Ly = Pb \\ Ux = y \end{cases} \end{aligned}$$

On trouve $y = (-1, \frac{5}{2}, 1)^t$ et $x = (\frac{7}{3}, -\frac{31}{24}, \frac{-5}{12})^t$.

Chapitre 3

Résolution des systèmes linéaires : Méthodes itératives

3.1 Principe des méthodes itératives

On considère le système linéaire

$$Ax = b \tag{3.1}$$

où $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ est une matrice carrée inversible, $b \in \mathbb{R}^n$.

Le principe des méthodes itératives pour résoudre $Ax = b$ est de construire une suite de vecteurs (x_k) qui converge vers x, la solution exacte du système (3.1).

Pour construire cette suite, on décompose la matrice A sous la forme
$A = M - N$ telle que M soit inversible.

Donc

$$\begin{aligned} Ax &= b \\ &\Leftrightarrow (M-N)x = b \\ &\Leftrightarrow Mx = Nx + b \\ &\Leftrightarrow x = M^{-1}Nx + M^{-1}b \end{aligned}$$

Posons $M^{-1}N = C$ et $M^{-1}b = b^*$, nous avons

$$Ax = b \Leftrightarrow x = Cx + b^*$$

Cette forme permet de voir la solution du système $Ax = b$ comme un point fixe de la fonction $Cx + b^*$.

D'où, la suite (x_k) est obtenue à partir du schéma itérative

$$\begin{cases} x^{(0)} \text{ donné} \\ x^{(k+1)} = Cx^{(k)} + b^* \end{cases} \tag{3.2}$$

Définition 3.1.1 *La méthode (3.2) est dite convergente si pour tout* $x^{(0)}$, $\lim\limits_{k\to\infty} x^k = x$. *Si cette limite* x *existe, elle vérifie* $x = Cx + b^*$

3.2 Définitions et propriétés

Dans cette partie, on rappelle quelques notions et propriétés générales qui seront utilisées dans la suite.

Théorème 3.2.1 *Pour* $1 \leq p < \infty$, *l'application définit sur* $\mathbb{R}^n$ *par*

$$\|x\|_p = (\sum_{i=1}^n |x_i|^p)^{\frac{1}{p}}, \forall x \in \mathbb{R}^n$$

est une norme appelée norme de Holder.

En particulier, on définit les normes suivantes:

Définition 3.2.1

$$\begin{aligned} \|x\|_1 &= \sum_{i=1}^n |x_i| \\ \|x\|_2 &= (\sum_{i=1}^n |x_i|^2)^{\frac{1}{2}} \\ \|x\|_\infty &= \max_{1\leq i\leq n}(|x_i|) \end{aligned}$$

Définition 3.2.2 *Soit* $\|\|$ *une norme vectorielle sur* $\mathbb{R}^n$. *Pour toute matrice* $A \in M_n(\mathbb{R})$, *on définit la norme matricielle*

$$\|A\|_M = \sup\{\|Ax\|, x \in \mathbb{R}^n, \|x\| = 1\}$$

$\|A\|_M$ *est dite norme matricielle subordonnée à la norme vectorielle* $\|\|$.

Définition 3.2.3 *Soit* $A \in M_n(\mathbb{R})$.

On appelle rayon spectral de A *la quantité*

$$\rho(A) = \max\{|\lambda|, \lambda \in \mathbb{C}, \lambda \textit{ valeur propre de } A\}$$

Proposition 3.2.1 *Soit* $A = (a_{ij})_{1\leq i;j\leq n} \in M_n(\mathbb{R})$.

1) On munit $\mathbb{R}^n$ *de la norme vectorielle* $\|\|_1$. *La norme matricielle subordonnée à la norme* $\|\|_1$ *est définit par*

$$\|A\|_1 = \max_{1\leq j\leq n}(\sum_{i=1}^n |a_{ij}|)$$

2) On munit $\mathbb{R}^n$ *de la norme vectorielle* $\|\|_\infty$. *La norme matricielle subordonnée à la norme* $\|\|_\infty$ *est définie par*

$$\|A\|_\infty = \max_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1}^n (|a_{ij}|)$$

Proposition 3.2.2 *Le rayon spectral d'une matrice carrée* A *vérifie*

$$\rho(A) \leq \|A\|$$

Preuve: Soit λ une valeur propre de A et x un vecteur propre associé.

On a

$$Ax = \lambda x$$

Passant à la norme dans chaque coté, on obtient

$$\|Ax\| = |\lambda| \, \|Ax\| \leq \|A\| \, \|x\| \, .$$

Ceci implique que pour toute valeur propre λ, on a

$$|\lambda| \leq \|A\|$$

Par définition de $\rho(A)$, on conclut de la relation précédente que

$$\rho(A) \leq \|A\|$$

■

Théorème 3.2.2 *Soit A une matrice carrée. Les propositions suivantes sont équivalentes*

i) $\lim\limits_{k\to\infty} A^k = 0.$

ii) $\lim\limits_{k\to\infty} A^k v = 0$ *pour tout vecteur v.*

iii) $\rho(A) < 1.$

iν) Il existe une norme matricielle subordonnée telle que $\|A\| < 1.$

Preuve: Montrons que (i) implique (ii).

Soit $\|\|$ une norme vectorielle et $\|\|$ la norme matricielle subordonnée correspondante, donc

$$\left\|A^k v\right\| \leq \left\|A^k\right\| \|v\|$$

Puisque $\lim\limits_{k\to\infty} A^k = 0$, donc $\lim\limits_{k\to\infty} A^k v = 0$.

Montrons que (ii) implique (iii).

Par contraposée, supposons $\rho(A) \geq 1$, alors il existe une valeur propre λ telle que

$$Av = \lambda v \text{ avec } v \neq 0 \text{ et } |\lambda| \geq 1$$

Puisque $A^k v = \lambda^k v$ et $|\lambda| \geq 1$, la suite $A^k v$ ne converge pas vers 0.

Montrons que (iii) implique (iν).

On utilise directement le résultat du théorème précédent.

Montrons que (iν) implique (i).

La norme matricielle vérifie

$$\left\|A^k\right\| \leq \|A\|^k \, , \forall k \in \mathbb{N}.$$

Si $\|A\| < 1$, alors $\lim\limits_{k\to\infty} \|A\|^k = 0$ et par suite $\lim\limits_{k\to\infty} \left\|A^k\right\| = 0.$ ■

3.3 Convergence des méthodes itératives

On considère la méthode itérative

$$\begin{cases} x^{(0)} \text{ donné} \\ x^{(k+1)} = Cx^{(k)} + b^* \end{cases}$$

Théorème 3.3.1 ***(condition nécessaire et suffisante de convergence)*** *la suite $(x^{(k)})$ est convergente si et seulement si $\rho(C) < 1$.*

Preuve: Soit x la solution dy système $Ax = b$, donc elle vérifie $x = Cx + b^*$.

Comme $x^{(k+1)} = Cx^{(k)} + b^*$, alors $x^{(k+1)} - x = C(x^{(k)} - x)$ et par récurrence sur k , on trouve

$$x^{(k)} - x = C^k(x^{(0)} - x) \tag{3.3}$$

Montrons que si la suite $(x^{(k)})$ est convergente, alors $\rho(C) < 1$.

Par contraposée, On suppose que $\rho(C) > 1$. D'aprés le théorème 3.2.2, il existe $y \in \mathbb{R}^n$ tel que $\lim\limits_{k\to\infty} C^k y \neq 0$.

On choisit $x^{(0)} = x + y$, l'égalité (3.3) implique que $x^{(k)} - x = C^k y$ qui ne converge pas vers 0.

Supposons que $\rho(C) < 1$ et montrons que la méthode converge.

On a $x^{(k)} - x = C^k(x^{(0)} - x)$, puisque $\rho(C) < 1$, le théorème 3.2.2 implique que $\lim\limits_{k\to\infty} C^k = 0$.

On conclut que $x^{(k)} - x = C^k(x^{(0)} - x) \to 0$ quand $k \to \infty$. ■

Théorème 3.3.2 *Les propositions suivantes sont équivalentes*

La suite $(x^{(k)})$ est convergente.

$\rho(C) < 1$.

Il existe une norme matricielle subordonnée telle que $\|C\| < 1$.

Preuve: On applique les résultats des théorèmes 3.2.2 et 3.2.3. ■

Théorème 3.3.3 *(**condition suffisante de convergence**) S'il existe une norme matricielle $\|\|$ telle que $\|C\| < 1$, alors la suite $(x^{(k)})$ est convergente.*

Théorème 3.3.4 *Soit A une matrice symétrique définie positive telle que $A = M - N$ et M inversible. Si la matrice $M^t + N$ est symétrique définie positive, alors $\rho(M^{-1}N) < 1$.*

Définition 3.3.1 *On appelle erreur de la méthode itérative $x^{(k+1)} = C^{(k)}x + b^*$ à la $k^{ième}$ itération la quantité $e^{(k)} = x^{(k)} - x$ avec $e^{(0)} = x^{(0)} - x$.*

Proposition 3.3.1 *Supposons $\|C\| < 1$, alors*

$$\left\|x^{(k)} - x\right\| \leq \frac{\|C\|^k \left\|x^{(1)} - x^{(0)}\right\|}{1 - \|C\|}$$

Preuve: Soit $k \in \mathbb{N}$ et $p \in \mathbb{N}^*$.

On a

$$\begin{aligned}
x^{(k+2)} - x^{(k+1)} &= C(x^{(k+1)} - x^{(k)}) \\
x^{(k+3)} - x^{(k+2)} &= (Cx^{(k+2)} + b^*) - ((Cx^{(k+1)} + b^*) \\
&= C(x^{(k+2)} - x^{(k+1)}) \\
&= C^2(x^{(k+1)} - x^{(k)})
\end{aligned}$$

Dans le cas général, on a

$$x^{(k+p)} - x^{(k+p-1)} = C^{p-1}(x^{(k+1)} - x^{(k)})$$

Par la même méthode , on trouve

$$x^{(k+1)} - x^{(k)} = C^k(x^{(1)} - x^{(0)}) \tag{3.4}$$

On a

$$\left\|x^{(k+p)} - x^{(k)}\right\| =$$

$$\left\|x^{(k+p)} - x^{(k+p-1)} + x^{(k+p-1)} - x^{(k+p-2)} + x^{(k+p-2)} - ... - x^{(k+2)} + x^{(k+2)} - x^{(k+1)} + x^{(k+1)} - x^{(k)}\right\|$$

$$\begin{aligned}
\leq\ & \left\|x^{(k+p)} - x^{(k+p-1)}\right\| + \left\|x^{(k+p-1)} - x^{(k+p-2)}\right\| + ... + \left\|x^{(k+3)} - x^{(k+2)}\right\| + \left\|x^{(k+2)} - x^{(k+1)}\right\| \\
& + \left\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\right\|
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
=\ & \left\|C^{p-1}(x^{(k+1)} - x^{(k)})\right\| + \left\|C^{p-2}(x^{(k+1)} - x^{(k)})\right\| + ... + \left\|C^2(x^{(k+1)} - x^{(k)})\right\| \\
& + \left\|C(x^{(k+1)} - x^{(k)})\right\| + \left\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\right\| \\
\leq\ & \|C\|^{p-1} \left\|(x^{(k+1)} - x^{(k)})\right\| + \|C\|^{p-2} \left\|(x^{(k+1)} - x^{(k)})\right\| + ... + \|C\|^2 \left\|(x^{(k+1)} - x^{(k)})\right\| + \\
& \|C\| \left\|(x^{(k+1)} - x^{(k)})\right\| + \left\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\right\| \\
=\ & \left\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\right\| (1 + \|C\| + \|C\|^2 + ... \|C\|^{p-2} + \|C\|^{p-1}) \\
=\ & \frac{1 - \|C\|^p}{1 - \|C\|} \left\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\right\|
\end{aligned}$$

Puisque $\|C\| < 1$, lorsque p$\to \infty$, on trouve

$$\left\|x^{(k)} - x\right\| \leq \frac{1}{1 - \|C\|} \left\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\right\|$$

En utilisant (3.4), on trouve

$$\left\|x^{(k)} - x\right\| \leq \frac{\|C\|^k}{1 - \|C\|} \left\|x^{(1)} - x^{(0)}\right\|$$

■

Remarque 3.3.1 *Si $x^{(0)} = b^*$, alors $x^{(1)} - x^{(0)} = Cb^* + b^* - b^* = Cb^*$ et par suite*

$$\left\|x^{(k)} - x\right\| \leq \frac{\|C\|^{k+1}\|b^*\|}{1 - \|C\|}$$

Proposition 3.3.2 $\left\|e^{(k)}\right\| \leq \rho(C)^k \left\|e^{(0)}\right\|$. *La méthode itérative (3.2) est plus rapide lorsque $\rho(C)$ est plus petit.*

Preuve: On a

$$\begin{aligned}
\left\|e^{(k)}\right\| &= \left\|x^{(k)} - x\right\| \\
&= \left\|C^k(x^{(0)} - x\right\| \\
&\leq \left\|C^k\right\| \left\|(x^{(0)} - x)\right\| \\
&\leq \|C\|^k \left\|(x^{(0)} - x)\right\| \\
&\leq \rho(C)^k \left\|(x^{(0)} - x)\right\| \\
&= \rho(C)^k \left\|e^{(0)}\right\|
\end{aligned}$$

■

Remarque 3.3.2 *Pour comparer deux méthodes itératives convergentes, la méthode la plus rapide est celle ayant le plus petit rayon spectral.*

Remarque 3.3.3 *Si $\left\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\right\| \leq \varepsilon$, alors la solution exacte du système $Ax = b$ est approchée par $x^{(k+1)}$.*

3.4 Méthode de Jacobi, Gauss Seidel et de relaxation

3.4.1 Méthode de Jacobi

On considère le système linéaire $Ax = b$ telle que $(a_{ii}) \neq 0, i = \overline{1,n}$.

Pour la méthode de Jacobi , on décompose la matrice A sous la forme

$$A = M - N = D - (E + F)$$

où
D: La matrice des éléments diagonaux de A.
$-E$: La matrice des éléments sous diagonaux de A.
$-F$: La matrice des éléments sur diagonaux de A.
D'où

$$Ax = b \Leftrightarrow x = D^{-1}(E + F)x + D^{-1}b$$

Définition 3.4.1 *La matrice $J = D^{-1}(E+F)$ s'appelle la matrice de Jacobi associée à A.*

Le schéma itératif de Jacobi est donné par

$$\begin{cases} x^{(0)} \text{ donné} \\ x^{(k+1)} = Jx^{(k)} + D^{-1}b \end{cases}$$

D'aprés ce qui précéde, on a:

Théorème 3.4.1 *Si $\|J\| < 1$, alors la méthode de Jacobi converge.*

$\rho(J) < 1$ si et seulement si la méthode de Jacobi converge.

Définition 3.4.2 *Soit $A = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$.*

A est dite à diagonale strictement dominante si

$$\begin{cases} \forall i \in \{1,..,n\} : |a_{ii}| > \sum_{j=1 \atop ,j\neq i}^{n} |a_{ij}| \\ \text{oubien} \\ \forall j \in \{1,..,n\} : |a_{jj}| > \sum_{i=1 \atop i\neq j}^{n} |a_{ij}| \end{cases}$$

Théorème 3.4.2 *Si A est une matrice à diagonale strictement dominante, alors la méthode de Jacobi converge.*

Preuve: Supposons que A est strictement dominante par les lignes, donc pour $i = 1,..,n$, elle vérifie $|a_{ii}| > \sum_{j=1 \atop ,j\neq i}^{n} |a_{ij}|$.

Par suite , $r = \max\limits_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1 \atop ,j\neq i}^{n} \frac{|a_{ij}|}{|a_{ii}|} < 1$.

Puisque la matrice de Jacobi $J = \begin{pmatrix} 0 & \frac{-a_{12}}{a_{11}} & \dots \\ & \ddots & \\ \frac{-a_{n1}}{a_{nn}} & \dots & 0 \end{pmatrix}$, alors $\|J\|_\infty = r < 1$.

On conclut que la méthode de Jacobi converge.

On fait la même méthode si A est stritement dominante par les colonnes. ■

Algorithme de Jacobi

$$\begin{cases} x^{(0)} \text{ donné} \\ x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}}(b_i - \sum_{j<i} a_{ij}x_j^{(k)} - \sum_{j>i} a_{ij}x_j^{(k)}), i = \overline{1,n} \end{cases}$$

3.4.2 Méthode de Gauss Seidel

Pour cette méthode, on décompose la matrice A sous la forme

$$A = M - N = (D-E) - F$$

D'où

$$Ax = b \Leftrightarrow x = (D-E)^{-1}Fx + (D-E)^{-1}xb$$

Définition 3.4.3 *La matrice $G = (D - E)^{-1}F$ s'appelle la matrice de Gauss Seidel associée à A.*

Le schéma itératif de Gauss Seidel est:

$$\begin{cases} x^{(0)} \text{ donné} \\ x^{(k+1)} = (D-E)^{-1}Fx^{(k)} + (D-E)^{-1}b \end{cases} \tag{3.5}$$

Le schéma (3.5) peut être écrit sous la forme

$$(D-E)^{-1}x^{(k+1)} = Fx^{(k)} + b$$

Donc

$$Dx^{(k+1)} = Ex^{(k+1)} + Fx^{(k)} + b$$

On trouve que

$$x^{(k+1)} = D^{-1}Ex^{(k+1)} + D^{-1}Fx^{(k)} + D^{-1}b \tag{3.6}$$

Le schéma (3.6) implique qu'on peut utiliser les composantes de l'itéré $x^{(k+1)}$ dès qu'il est effectué. En faite, l'algorithme de Gauss Seidel modifie l'algorithme de Jacobi pour utiliser à chaque itération les valeurs x_i^{k+1} déja calculées.

Algorithme de Gauss Seidel

$$\begin{cases} x^{(0)} \text{ donné} \\ x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}}(b_i - \sum_{j<i} a_{ij}x_j^{(k+1)} - \sum_{j>i} a_{ij}x_j^{(k)}), i = \overline{1,n} \end{cases}$$

Convergence de la méthode de Gauss Seidel

Théorème 3.4.3 *Si $\|G\| < 1$, alors la méthode de Gauus Seidel converge.*
$\rho(G) < 1$ si et seulement si la méthode de Gauus Seidel converge.

Il y a des conditions de convergence liées à A:

Théorème 3.4.4 *Si A est une matrice à diagonale strictement dominante, alors la méthode de Gauss Seidel converge.*

Preuve: Supposons que A est strictement dominante par les lignes, donc pour $i = 1,..,n$, elle vérifie $|a_{ii}| > \sum_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{ij}|$.

Par suite , $r = \max_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1, j\neq i}^{n} \frac{|a_{ij}|}{|a_{ii}|} < 1.$

D'aprés l'algorithme de Gauss Seidel, l'erreur à l'itération k vérifie

$$\begin{aligned} e_i^{(k+1)} &= x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)} \\ &= -\sum_{j=1}^{i-1} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} e_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} e_j^{(k)}, i = \overline{1,n}. \end{aligned}$$

Pour montrer que la méthode de Gauss Seidel converge, il suffit de montrer que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \left\|e^{(k+1)}\right\|_\infty \leq r \left\|e^{(k)}\right\|_\infty$$

On va raisonner par récurrence sur $e_i^{(k+1)}, 1 \leq i \leq n$.

Pour $i = 1$, on a

$$e_1^{(k+1)} = -\sum_{j=2}^{n} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} e_j^{(k)}$$

Donc

$$\left|e_1^{(k+1)}\right| \leq r \left\|e^{(k)}\right\|_\infty$$

Supposons que pour $j = 1, .., i-1$, on a

$$\left|e_j^{(k+1)}\right| \leq r \left\|e^{(k)}\right\|_\infty$$

Par suite ,

$$\begin{aligned}
\left|e_i^{(k+1)}\right| &\leq \sum_{j=1}^{i-1} \left|\frac{a_{ij}}{a_{ii}}\right| \left|e_j^{(k+1)}\right| + \sum_{j=i+1}^{n} \left|\frac{a_{ij}}{a_{ii}}\right| \left|e_j^{(k)}\right| \\
&\leq \left\|e^{(k)}\right\|_\infty (\sum_{j=1}^{i-1} \left|\frac{a_{ij}}{a_{ii}}\right| + \sum_{j=i+1}^{n} \left|\frac{a_{ij}}{a_{ii}}\right|) \\
&\leq r \left\|e^{(k)}\right\|_\infty
\end{aligned}$$

Maintenant, par récurrence sur k, on trouve

$$\left\|e^{(k+1)}\right\|_\infty \leq r \left\|e^{(k-1)}\right\| \leq \ldots \leq r^k \left\|e^{(0)}\right\|_\infty$$

Comme $r < 1$, on conclut que $\lim\limits_{k\to\infty} \left\|e^{(k+1)}\right\|_\infty = 0$ et par suite la méthode de Gauss Seidel converge.

On fait la même méthode si A est strictement dominante par les colonnes. ■

3.4.3 Méthode de Relaxation

Soit ω un paramètre réel non nul.

On pose $A = M - N = D - E - F = (\frac{D}{\omega} - E) - (\frac{1-w}{\omega} D + F)$.

D'où

$$Ax = b \Leftrightarrow x = (\frac{D}{\omega} - E)^{-1}(\frac{1-\omega}{\omega} D + F) + (\frac{D}{\omega} - E)^{-1} b$$

Le schéma itératif de relaxation s'écrit:

$$\left\{ \begin{array}{c} x^{(0)} \text{ donné} \\ x^{(k+1)} = (\frac{D}{\omega} - E)^{-1}(\frac{1-\omega}{\omega} D + F) x^{(k)} + (\frac{D}{\omega} - E)^{-1} b \end{array} \right.$$

Définition 3.4.4 *La matrice* $\mathcal{L}_\omega$=$(\frac{D}{\omega} - E)^{-1}(\frac{1-\omega}{\omega}D + F)$ *s'appelle la matrice de relaxation associée à* A.

Pour $\omega = 1$, on trouve la méthode de Gauss Seidel.

Convergence de la méthode de relaxation

Théorème 3.4.5 *La méthode de relaxation converge si et seulement si* $\rho(\mathcal{L}_\omega) < 1$.

Théorème 3.4.6 *Si* $\rho(\mathcal{L}_\omega) < 1$, *alors* $\omega \in]0, 2[$.

Si A *est une matrice symétrique définie positive, alors la méthode de relaxation converge si et seulement si* $\in \omega]0, 2[$.

Preuve: On a $\mathcal{L}_\omega$=$(\frac{D}{\omega} - E)^{-1}(\frac{1-\omega}{\omega}D + F)$.

$(\frac{D}{\omega} - E)$ est une matrice triangulaire inférieure, donc

$$\det((\frac{D}{\omega} - E)) = \frac{1}{\omega^n}\det(D).$$

$(\frac{1-\omega}{\omega}D + F)$ est une matrice triangulaire supérieure, donc

$$\det(^{-1}(\frac{1-\omega}{\omega}D + F)) = (\frac{1-\omega}{\omega})^n \det(D)$$

.

On déduit que

$$\det(\mathcal{L}_\omega) = \frac{\det((\frac{1-\omega}{\omega}D + F))}{\det((\frac{D}{\omega} - E))} = \frac{(\frac{1-\omega}{\omega})^n \det(D)}{\frac{1}{\omega^n}\det(D)} = (1-\omega)^n$$

De plus , $\det(\mathcal{L}_\omega)$ n'est autre que le produit des valeurs propres de $\mathcal{L}_\omega$ comptées avec leurs multiplicités algébriques, d'où

$$|\det(\mathcal{L}_\omega)| = |(1-\omega)^n| \leq (\rho(\mathcal{L}_\omega))^n$$

Par suite,

$$|(1-\omega)| \leq \rho(\mathcal{L}_\omega)$$

et si $\rho(\mathcal{L}_\omega) < 1$, alors $\omega \in]0, 2[$.

Supposons maintenant que la matrice A est symétrique définie positive et que $0 < \omega < 2$.

Comme A est symétrique , alors $E^t = F$.

Pour appliquer le théorème 3.2.7, il suffit de montrer que $M^t + N$ est une matrice symétrique définie positive.

On a

$$\begin{aligned} M^t + N &= (\frac{D}{\omega} - E)^t + (\frac{1-\omega}{\omega} D + F) \\ &= \frac{D}{\omega} - F + \frac{1-\omega}{\omega} D + F \\ &= \frac{2-\omega}{\omega} D \end{aligned}$$

On conclut que $M^t + N = \frac{2-\omega}{\omega} D$ est bien une matrice symétrique définie positive. ■

Remarque 3.4.1 *On déduit que si A est une matrice symétrique définie positive, alors la méthode de Gauss Seidel converge.*

Théorème 3.4.7 *Le rayon spectral de $\mathcal{L}_\omega$ est tel que $\rho(\mathcal{L}_\omega) \geq |1-\omega|$.*

On déduit de ces théorèmes que si $\rho(\mathcal{L}_w) < 1$, alors $w \in]0,2[$.
Ainsi, si $w \notin]0,2[$, la méthode de relaxation ne converge pas.
L'objectif de la méthode de relaxation est de trouver la valeur optimal w_0 telle que la vitesse de convergence soit la meilleure possible . Ainsi,

$$\rho(\mathcal{L}_{w_0}) = \min_{w \in]0,2[} \rho(\mathcal{L}_w)$$

Cas des matrices tridiagonales:

Théorème 3.4.8 *Soit A une matrice tridiagonale, alors*

$$\rho(G) = \rho(J)^2$$

Les méthode de Jacobi et de Gauss Seidel convergent ou divergent simultanément.

Preuve: Soit μ un paramètre réel non nul et $A(\mu)$ une matrice tridiagonale définit par

$$A(\mu) = \begin{pmatrix} a_1 & \mu^{-1}c_1 & 0 & \dots & 0 \\ \mu b_2 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \mu^{-1}c_n \\ 0 & \cdots & 0 & \mu b_n & a_n \end{pmatrix} \tag{3.7}$$

et soit la matrice $Q(\mu)$ définit par

$$Q(\mu) = \begin{pmatrix} \mu & & & \\ & \mu^2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mu^n \end{pmatrix}$$

On peut remarquer facilement que

$$A(\mu) = Q(\mu)A(1)Q(\mu)^{-1}$$

et donc

$$\det(A(\mu)) = \det(A(1)). \tag{3.8}$$

La matrice de Jacobi est $J = D^{-1}(E + F)$ et les valeurs propres de J sont les racines de polynôme caractéristique $P_J(\lambda)$ avec

$$\begin{aligned} P_J(\lambda) &= \det(J - \lambda id) = \det(D^{-1}(E + F) - \lambda id) \\ &= \det(-D^{-1}(\lambda D - (E + F))) \\ &= \det(-D^{-1})\det(\lambda D - E - F) \end{aligned}$$

La matrice de Gauss Seidel est $G = (D - E)^{-1}F$ et les valeurs propres de G sont les racines de polynôme caractéristique $P_G(\lambda)$ avec

$$\begin{aligned} P_G(\lambda) &= \det(G - \lambda id) = \det((D - E)^{-1}F - \lambda id) \\ &= \det((D - E)^{-1})\det(\lambda D - \lambda E - F) \end{aligned}$$

De cette dernière formule on trouve,

$$P_G(\lambda^2) = \det((D - E)^{-1})\det(\lambda^2 D - \lambda^2 E - F)$$

Puisque A est ne matrice tridiagonale, alors la matrice $A(\mu) = \lambda^2 D - \mu\lambda^2 E - \mu^{-1}F$ est de la forme (3.7).

Appliquant la relation (3.8) avec $\mu = \lambda^{-1}$, on trouve:

$$\begin{aligned} \det(A(\mu)) &= \det(\lambda^2 D - \mu\lambda^2 E - \mu^{-1}F) \\ &= \det(\lambda^2 D - \lambda^2 E - F) \\ &= \lambda^n \det(\lambda D - E - F) \\ &= \frac{\det(-D)}{\det(E - D)}\lambda^n P_J(\lambda) \\ &= \lambda^n P_J(\lambda) \end{aligned}$$

On conclut que $P_G(\lambda^2) = \lambda^n P_J(\lambda)$ et par suite, pour λ non nul, λ^2 est une valeur propore de G si et seulement si $+\lambda$ ou -λ est une valeur propre de J.

Ainsi, $\rho(G) = \rho(J)^2$. ■

Théorème 3.4.9 *Soit A une matrice tridiagonale telle que toutes les valeurs propres de la matrice de Jacobi associée soient réelle, alors les méthodes de Jacobi et de relaxation convergent ou divergent simultanément pour $w \in]0, 2[$.*

Lorsqu'elles convergent, on peut déterminer une valeur optimale w_0 telle que

$$w_0 = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - \rho(J)^2}}, \rho(\mathcal{L}_{w_0}) = \min_{w \in]0,2[} \rho(\mathcal{L}_w) = |w_0 - 1|$$

3.5 Exercices

Exercice 1

On considère le système linéaire

$$\begin{cases} 1.02x_1 - 0.05x_2 - 0.1x_3 = 0.795 \\ -0.11x_1 + 1.03x_2 - 0.05x_3 = 0.849 \\ -0.11x_1 - 0.12x_2 + 1.04x_3 = 1.398 \end{cases}$$

1) Ecrire la procédure de Jacobi associée à ce système.

2) En utilisant une norme matricielle, montrer que la méthode de Jacobi converge.

3) Calculer le nombre minimal d'itérations nécessaire pour estimer la solution avec une précision 10^{-3}.

4) Estimer la solution à 10^{-3} près.

Suggestion: Utiliser le théorème 3.3.1 et la formule du théorème 3.2.2.

Exercice 2

On considère le système linéaire $Ax = b$ où

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

1) Donner la matrice de Jacobi associée à A.

2) Donner la matrice de Gauss-Seidel associée à A.

3) Montrer que la méthode de Jacobi diverge alors que celle de Gauss Seidel converge

4) Estimer le nombre minimal d'itérations nécessaires pour que l'erreur à l'étape k soit telle que $\left\|x^{(k)} - x^*\right\| \leq 10^{-3} \left\|x^{(0)} - x^*\right\|$.

5) Calculer trois itérations de Gauss Seidel.

Suggestion: Utiliser le théorème 3.2.3 et la proposition 3.2.4.

Exercice 3

On considère le système linéaire $Ax = b$ où

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & -\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\beta & \alpha & 1 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

1) Ecrire la matrice de la méthode de Jacobi associée à A.

2) Pour quelles valeurs de α et β cette méthode converge -t-elle?

3) On choisit $\alpha = \beta = 2$ et $x^{(0)} = (2, 2, 2)^t$.

3-1) La méthode de Jacobi est elle convergente?

3-2) Montrer que $x^{(k)} = (1, 1, 1)^t$, $\forall k \geq 1$.

3-3) Que peut on conclure?

4) On suppose α =0 et $\beta = \frac{1}{2}$ et $x^{(0)} = (2,2,2)^t$.

Quel est le nombre minimal d'itérations nécessaires à effectuer pour avoir $e^{(k)} \leq 10^{-3}$?

5) Ecrire la matrice de la méthode de Gauss Seidel associée à A.

6) Pour quelles valeurs de α et β cette méthode converge -t-elle?

Exercice 4

On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & \alpha & 0 \\ \alpha & 2 & \alpha \\ 0 & \alpha & 2 \end{pmatrix}, \alpha \in \mathbb{R}$$

1) Calculer les valeurs propres de A.

2) Pour quelles valeurs de α la matrice A est -elle-définie positive?

3) Ecrire la matrice de Jacobi associée à A. En déduire $\rho(J)$.

4) Pour quelles valeurs de α la méthode de Jacobi converge -t-elle?

5) Pour quelles valeurs de α la méthode de Gauss Seidel converge -t-elle?

6) Montrer que $\rho(G) = \rho(J)^2$.

7) Soit $\omega \in]0,2[$, pour quelles valeurs de α la méthode de relaxation converge -t-elle? Déterminer ω_o.

Suggestion: Utiliser la remarque 3.3.1, le théorème 3.3.1 et le théorème 3.3.9.

Exercice 5

On considère le système linéaire $Ax = b$ où

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

1) Montrer que les méthodes itératives de Jacobi et de Gauss Seidel sont convergentes.

2) Montrer que A est définie positive.

3) Que peut on dire sur la convergence de la méthode de relaxation pour $\omega \in]0,2[$?

Suggestion: utiliser les théorèmes 3.2.2, 3.3.4 et 3.3.6.

Exercice 6

On considère le système linéaire $Ax = b$ où

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

1) Calculer la matrice de la méthode de relaxation.

2) Pour Quelles valeurs de ω cette méthode est elle convergente?

3) Trouver le ω_o qui assure la convergence la plus rapide de cette méthode.
Suggestion: utiliser le théorème 3.3.5.
Exercice 7
Soit A une matrice carrée d'ordre 3 telle que $A = I_3 - E - F$ avec

$$E = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, F = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

1) Montrer que A est inversible.
2) Soit $0 < \omega < 2$. Montrer que la matrice $\frac{1}{\omega}I_3 - E$ est inversible si et seulemnet si $\omega \neq \frac{\sqrt{2}}{2}$.
3) Pour $0 < \omega < 2, \omega \neq \frac{\sqrt{2}}{2}$, on considre pour la résolution de Ax=b, la méthode itérative définie par

$$\begin{cases} x^{(0)} \in \mathbb{R}^3 \\ (\frac{1}{\omega}I_3 - E)x^{(k+1)} = (F + \frac{1-\omega}{\omega}I_3)x^{(k)} + b \end{cases}$$

et on pose $\mathcal{L}_\omega = (\frac{1}{\omega}I_3 - E)^{-1}(F + \frac{1-\omega}{\omega}I_3)$. Calculer en fonction de ω, les valeurs propres de $\mathcal{L}_\omega$ et son rayon spectral.
4) Pour quelles valeurs de ω cette méthode converge-t-elle?
5) Déterminer $\omega_o \in]0, 2[$ vérifiant $\rho(\mathcal{L}_{\omega_o}) = \min\{\rho(\mathcal{L}_\omega), \omega \in]0, 2[, \omega \neq \frac{\sqrt{2}}{2}\}$.
Exercice 8
Soient A et B deux matrices de $M_n(\mathbb{R})$ et a, b deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$.
On considère la méthode itérative suivante:

$$\begin{cases} (x^0, y^0) \text{ donné} \\ x^{(k+1)} = By^{(k)} + a \\ y^{(k+1)} = Ax^{(k)} + b \end{cases} \tag{3.9}$$

1) Montrer que la suite $(x^{(k)})$ est convergente si et seulement si $\rho(BA) < 1$.
2) Montrer que la suite $(y^{(k)})$ est convergente si et seulement si $\rho(AB) < 1$.
3) Soit $z^{(k)} = (x^{(k)}, y^{(k)})^t \in \mathbb{R}^{2n}$. Montrer que la méthode (3.9) peut s'écrire sous la forme

$$z^{(k+1)} = Cz^{(k)} + c$$

où C est une matrice d'ordre $2n$. Expliciter C et c.
4) Montrer que si λ est une valeur propre non nul de C, alors λ^2 est une valeur propre de AB.
5) Montrer que si α est une valeur propre de AB, alors β telle que $\beta = \alpha^2$ est une valeur propre de C
5) Déduire que $\rho(C)^2 = \rho(AB)$.
6) On considère maintenant la méthode itérative suivante

$$\begin{cases} (x^0, y^0) \text{ donné} \\ x^{(k+1)} = By^{(k)} + a \\ y^{(k+1)} = Ax^{(k+1)} + b \end{cases} \tag{3.10}$$

Donner une condition nécessaire et suffisante de convergence.

7) Montrer que la méthode (3.10) est équivalente à

$$z^{(k+1)} = Dz^{(k)} + d$$

où D est une matrice d'ordre $2n$.

8) Montrer que $\rho(D) = \rho(AB)$.

9) Comparer la vitesse de convergence des méthodes (3.9) et (3.10).

Exercice 9

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice inversible telle que $(a_{ii}) \neq 0, i = \overline{1,n}$ et $b \in \mathbb{R}^n$.

Pour résoudre le système linéaire $Ax = b$, on propose la méthode itérative suivante:

$$\begin{cases} x^0 \text{ donné} \\ x^{(k+1)} = (I - \alpha D^{-1}A)x^{(k)} + \alpha D^{-1}b \end{cases}$$

où α est un réel non nul.

1) Montrer que si la suite $(x^{(k)})$ converge vers x, alors x est la solution du système $Ax = b$.

2) On pose $M = I - \alpha D^{-1}A$. Exprimer les coefficients de la matrice M en fonction des coefficients de la matrice A.

3) On suppose que A est une matrice à diagonale strictement dominante en lignes . Montrer que $\|M\|_\infty < 1$ et déduire que la suite $(x^{(k)})$ converge.

4) On suppose que $\alpha = 1$. Quelle méthode itérative retrouve-t-on?

Exercice 10

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique définie positive et $b \in \mathbb{R}^n$.

Pour résoudre le système linéaire $Ax = b$, on propose la méthode itérative suivante:

$$\begin{cases} x^0 \text{ donné} \\ x^{(k+1)} = \alpha(b - Ax^{(k)}) + x^{(k)} \end{cases}$$

où $\alpha \in \mathbb{R}$.

On suppose que les valeurs propres de A sont rangées par ordre croissant $0 < \lambda_1 < ... < \lambda_n$.

1) Montrer que cette méthode converge si et seulemnt si $0 < \alpha < \frac{2}{\rho(A)}$.

2) On suppose que α_0 est tel que $\rho(id - \alpha_0 A) = \min\{\rho(id - \alpha A), \alpha \in \mathbb{R}\}$.

Montrer que $\alpha_0 = \frac{1}{\lambda_1 + \lambda_n}$.

3.6 Corrigé des exercices

Exercice 1

On considère le système linéaire

$$\begin{cases} 1.02x_1 - 0.05x_2 - 0.1x_3 = 0.795 \\ -0.11x_1 + 1.03x_2 - 0.05x_3 = 0.849 \\ -0.11x_1 - 0.12x_2 + 1.04x_3 = 1.398 \end{cases}$$

1) Ecrire la procédure de Jacobi associée à ce système.

$$\begin{cases} 1.02x_1 - 0.05x_2 - 0.1x_3 = 0.795 \\ -0.11x_1 + 1.03x_2 - 0.05x_3 = 0.849 \\ -0.11x_1 - 0.12x_2 + 1.04x_3 = 1.398 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 0.049x_2 - 0.098x_3 + 0.7794 \\ x_2 = 0.1068x_1 + 0.0485x_3 + 0.8243 \\ x_3 = 0.1058x_1 + 0.1154x_2 + 1.3442 \end{cases}$$

D'où la procédure de Jacobi s'écrit sous la forme discrète:

$$\begin{cases} x_1^{(k+1} = 0.049x_2^{(k)} - 0.098x_3^{(k)} + 0.7794 \\ x_2^{(k+1)} = 0.1068x_1^{(k)} + 0.0485x_3^{(k)} + 0.8243 \\ x_3^{(k+1)} = 0.1058x_1^{(k)} + 0.1154x_2^{(k)} + 1.3442 \end{cases}$$

On en déduit que la matrice de Jacobi est

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 0.049 & 0.098 \\ 0.1068 & 0 & 0.0485 \\ 0.1058 & 0.1154 & 0 \end{pmatrix}$$

2) En utilisant une norme matricielle, montrer que la méthode de Jacobi converge

$$. \left\|J\right\|_\infty = \max(0.147, 0.1553, 0.2212) = 0.2212 < 1$$

donc ,la méthode de Jacobi converge.3) Calculer le nombre minimal d'itérations nécessaire pour estimer la solution avec une précision 10^{-3}.On applique la formule du théorème 3.2.2, on a:

$$\left\|x^{(k)} - x^*\right\|_\infty \leq \frac{\left\|J\right\|_\infty^{k+1} \left\|b^*\right\|_\infty}{1 - \left\|J\right\|_\infty}$$

Pour estimer la solution à ε près, il suffit de choisir k tel que

$$\frac{\left\|J\right\|_\infty^{k+1} \left\|b^*\right\|_\infty}{1 - \left\|J\right\|_\infty} \leq \varepsilon$$

D'où

$$k \geq \frac{\ln(\frac{1-\|J\|_\infty}{\|b^*\|_\infty}\varepsilon)}{\ln(\|J\|_\infty)} - 1$$

avec

$$b^* = D^{-1}b = \begin{pmatrix} 1.02 & 0 & 0 \\ 0 & 1.03 & 0 \\ 0 & 0 & 1.04 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0.795 \\ 0.849 \\ 1.398 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.7794 \\ 0.8243 \\ 1.3442 \end{pmatrix}$$

$\|b^*\|_\infty = 1.3442$

Donc pour $x^{(0)} = b^*$, on a $k \geq 3.94$. On prend k=4.

4) Estimer la solution à 10^{-3} près.

Si $\left\|x^{(k)} - x^{(k-1)}\right\|_\infty \leq \varepsilon$, alors la solution exacte du système $Ax = b$ est approchée par $x^{(k)}$.

On regroupe les résultats dans le tableau qui suit:

k	X^k	$\left\|x^{(k)} - x^{(k-1)}\right\|_\infty$
0	$(0.7794, 0.8243, 1.3442)^T$	
1	(0.9516,0.9728, 0.5218)	$\left\|x^{(1)} - x^{(0)}\right\|_\infty = 0.1775 > 10^{-3}$
2	$(0.9763, 0.9998, 1.5571)^T$	$\left\|x^{(2)} - x^{(1)}\right\|_\infty = 0.053 > 10^{-3}$
3	$(0.9811, 1.0041, 1.5629)^T$	$\left\|x^{(3)} - x^{(2)}\right\|_\infty = 0.0057$
4	$(0.9819, 1.0049, 1.5639)^T$	$\left\|x^{(4)} - x^{(3)}\right\|_\infty = 0.001$

Ainsi, $x^{(4)}$ est la solution approchée du sustème $Ax = b$.

Exercice 2

On considère le système linéaire $Ax = b$ où

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

1) Donner la matrice de Jacobi associée à A.

$$Ax = b \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 1 \\ -x_1 - x_2 + 2x_3 = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{2} \\ x_2 = -x_1 - x_3 + \frac{1}{2} \\ x_3 = \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2} \end{cases}$$

D'où le procédé de Jacobi:

$$\begin{cases} x_1^{(k+1} = \frac{1}{2}x_2^{(k)} - \frac{1}{2}x_3^{(k)} + \frac{1}{2} \\ x_2^{(k+1)} = -x_1^{(k)} - x_3^{(k)} + \frac{1}{2} \\ x_3^{(k+1)} = \frac{1}{2}x_1^{(k)} + \frac{1}{2}x_2^{(k)} + \frac{1}{2} \end{cases}$$

On en déduit que la matrice de Jacobi est donnée par

$$J = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -1 & 0 & -1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

2) Donner la matrice de Gauss-Seidel associée à A.

Puisque l'algorithme de Gauss Seidel modifie l'algorithme de Jacobi, on en déduit que le schéma itératif de Gauss Seidel satisfait

$$\left\{\begin{array}{c} x_1^{(k+1} = \frac{1}{2}x_2^{(k)} - \frac{1}{2}x_3^{(k)} + \frac{1}{2} \\ x_2^{(k+1)} = -x_1^{(k+1)} - x_3^{(k)} + \frac{1}{2} \\ x_3^{(k+1)} = \frac{1}{2}x_1^{(k+1)} + \frac{1}{2}x_2^{(k+1)} + \frac{1}{2} \end{array}\right.$$

Ce qui implique que

$$\left\{\begin{array}{c} x_1^{(k+1} = \frac{1}{2}x_2^{(k)} - \frac{1}{2}x_3^{(k)} + \frac{1}{2} \\ x_2^{(k+1)} = -\frac{1}{2}x_2^{(k)} - \frac{1}{2}x_3^{(k)} \\ x_3^{(k+1)} = -\frac{1}{2}x_3^{(k)} + \frac{3}{4} \end{array}\right.$$

Donc la matrice de Gauss Seidel est donnée par

$$G = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

3) Montrer que la méthode de Jacobi diverge alors que celle de Gauss Seidel converge.

$$\begin{aligned} \det(J - \lambda I) &= \begin{vmatrix} -\lambda & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -1 & -\lambda & -1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\lambda \end{vmatrix} \\ &= -\lambda(\lambda^2 + \frac{5}{4}) \end{aligned}$$

L'ensemble des valeurs propres est $\{0, i\frac{\sqrt{5}}{2}, -i\frac{\sqrt{5}}{2}\}$ et $\rho(J) = \frac{\sqrt{5}}{2}$.

Puisque $\rho(J) > 1$, la méthode de Jacobi diverge.

Pour la méthode de Gauss Seidel, on a

$$\begin{aligned} \det(G - \lambda I) &= \begin{vmatrix} -\lambda & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} - \lambda & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} - \lambda \end{vmatrix} \\ &= -\lambda(\lambda + \frac{1}{2})^2 \end{aligned}$$

L'ensemble des valeurs propres est $\{0, \frac{-1}{2}, \frac{-1}{2}\}$ et $\rho(G) = \frac{1}{2}$.

Puisque $\rho(G) < 1$, la méthode de Gauss Seide converge.

4) Estimer le nombre minimal d'itérations nécessaires pour que l'erreur à l'étape k soit telle que $\left\|x^{(k)} - x^*\right\| \leq 10^{-3} \left\|x^{(0)} - x^*\right\|$

$e^{(k)} = \left\| x^{(k)} - x^* \right\|$, d'aprés la proposition 3.2.3, on a $\left\| e^{(k)} \right\| \leq (\rho(G))^k \left\| e^{(0)} \right\|$ donc il suffit de choisir k tel que

$$\rho(G)^k \leq 10^{-3}$$

Ce qui implique que

$$k \geq 9.96$$

On prend $k = 10$.

5) Calculer trois itérations de Gauss Seidel.

$x^{(0)}$	$x^{(1)}$	$x^{(2)}$	$x^{(3)}$
0.5	0.125	0.1250	0.2188
0	-0.3750	0	-0.2813
0.75	0.3750	0.5625	0.4688

Exercice 3

On considère le système linéaire $Ax = b$ où

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & -\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\beta & \alpha & 1 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

1) Ecrire la matrice de la méthode de Jacobi associée à A.

$$Ax = b \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + \alpha x_2 - \beta x_3 = 1 \\ x_2 = 1 \\ -\beta x_1 + \alpha x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -\alpha x_2 + \beta x_3 + 1 \\ x_2 = 1 \\ x_3 = \beta x_1 - \alpha x_2 + 1 \end{cases}$$

D'où le procédé de Jacobi:

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = -\alpha x_2^{(k)} + \beta x_3^{(k)} + 1 \\ x_2^{(k+1)} = 1 \\ x_3^{(k+1)} = \beta x_1^{(k)} - \alpha x_2^{(k)} + 1 \end{cases}$$

On en déduit que la matrice de Jacobi est donnée par

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha & \beta \\ 0 & 0 & 0 \\ \beta & -\alpha & 0 \end{pmatrix}$$

2) Pour quelles valeurs de α et β cette méthode converge -t-elle?

$$\begin{aligned}\det(J-\lambda I) &= \begin{vmatrix} -\lambda & -\alpha & \beta \\ 0 & -\lambda & 0 \\ \beta & -\alpha & -\lambda \end{vmatrix} \\ &= -\lambda(\lambda^2-\beta^2)\end{aligned}$$

L'ensemble des valeurs propres est $\{0, \beta, -\beta\}$ et $\rho(J) = |B|$.

La méthode de Jacobi converge si et seulement si $|B| < 1$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, donc $-1 < \beta < 1$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

3) On choisit $\alpha = \beta = 2$ et $x^{(0)} = (2,2,2)^t$.

3-1) La méthode de Jacobi est elle convergente?

Si $\alpha = \beta = 2$, $\rho(J) = |B| = 2 > 1$, donc la méthode de Jacobi diverge.

3-2) Montrer que $x^{(k)} = (1,1,1)^t$, $\forall k \geq 1$.

Si $\alpha = \beta = 2$ et $x^{(0)} = (2,2,2)^t$, on trouve

$$\begin{aligned}
x^{(1)} &= \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\
x^{(2)} &= \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\
x^{(3)} &= \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&\cdots
\end{aligned}$$

3-3) Que peut on conclure?

$x = (1,1,1)^t$ est la solution exacte du système Ax=b, donc si on choisit $x^{(0)} = (1,1,1)^t$, alors la méthode de jacobi converge.

4) On suppose α =0 et $\beta = \frac{1}{2}$ et $x^{(0)} = (2,2,2)^t$.

Quel est le nombre minimal d'itérations nécessaires à effectuer pour avoir $\left\|x^{(k)} - x^*\right\|_2 \leq 10^{-3}$?

On pose

$$\left\|x^{(k)} - x^*\right\|_2 \leq \frac{\|J\|_2^k \left\|x^{(1)} - x^0\right\|_2}{1 - \|J\|_2} \leq \epsilon \tag{3.11}$$

Comme J $= \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est symétrique, alors $\|J\|_2 = \sqrt{\rho(J^tJ)} = \sqrt{\rho(J)^2} = \rho(J) = \frac{1}{2}$.

On trouve $x^{(1)} = (2,1,0)^t$, $x^{(1)} - x^0 = (0-1,0)$ et $\left\|x^{(1)} - x^0\right\|_2 = 1$.

De l'inégalité (3.11), on a

$$k \geq \frac{\ln(\frac{1-\|J\|_2}{\|x^{(1)}-x^0\|_2}\varepsilon)}{\ln(\|J\|_2)} = 10.96$$

On prend k=11.
5) Ecrire la matrice de la méthode de Gauss Seidel associée à A.
L'algorithme de Gauss Seidel:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x_1^{(k+1)} & = & -\alpha x_2^{(k)} + \beta x_3^{(k)} + 1 \\ x_2^{(k+1)} & = & 1 \\ x_3^{(k+1)} & = & \beta x_1^{(k+1)} - \alpha x_2^{(k+1)} + 1 \end{array} \right.$$

Ce qui implique que

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x_1^{(k+1)} & = & -\alpha x_2^{(k)} + \beta x_3^{(k)} + 1 \\ x_2^{(k+1)} & = & 1 \\ x_3^{(k+1)} & = & -\alpha\beta x_2^{(k)} + \beta^2 x_3^{(k)} + 1 + \beta - \alpha \end{array} \right.$$

On déduit que

$$G = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha & \beta \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\alpha\beta & \beta^2 \end{pmatrix}$$

6) Pour quelles valeurs de α et β cette méthode converge -t-elle?

$$\begin{array}{rcl} \det(G-\lambda I) & = & \begin{vmatrix} -\lambda & -\alpha & \beta \\ 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & -\alpha\beta & \beta^2-\lambda \end{vmatrix} \\ & = & -\lambda^2(\beta^2-\lambda) \end{array}$$

L'ensemble des valeurs propres est $\{0, 0, \beta^2\}$ et $\rho(G) = \beta^2$.

La méthode de Gauss Seidel converge si et seulemnet si $\beta^2 < 1$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, donc $|\beta| < 1$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

Exercice 4

On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & \alpha & 0 \\ \alpha & 2 & \alpha \\ 0 & \alpha & 2 \end{pmatrix}, \alpha \in \mathbb{R}$$

1) Calculer les valeurs propres de A.

$$\begin{aligned}\det(A-\lambda I) &= \begin{vmatrix} 2-\lambda & \alpha & 0 \\ \alpha & 2-\lambda & \alpha \\ 0 & \alpha & 2-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (2-\lambda)((2-\lambda)^2-2\alpha^2)\end{aligned}$$

L'ensemble des valeurs propres est $\{2, 2+\alpha\sqrt{2}, 2-\alpha\sqrt{2}\}$.

2) Pour quelles valeurs de α la matrice A est -elle-définie positive?

A est une matrice symétrique, elle est définie positive si et seulement si toutes ses valeurs propres sont strictement positives.

Par conséquent

$$\begin{aligned} & \begin{cases} 2+\alpha\sqrt{2} > 0 \\ 2-\alpha\sqrt{2} > 0 \end{cases} \\ \Rightarrow & \begin{cases} \alpha < \sqrt{2} \\ \alpha > -\sqrt{2} \end{cases} \\ \Rightarrow & \ |\alpha| < \sqrt{2} \end{aligned}$$

3) Ecrire la matrice de Jacobi associée à A.

$$\begin{aligned} J &= D^{-1}(E+F) \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -\alpha & 0 \\ -\alpha & 0 & -\alpha \\ 0 & -\alpha & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & \frac{-\alpha}{2} & 0 \\ \frac{-\alpha}{2} & 0 & \frac{-\alpha}{2} \\ 0 & \frac{-\alpha}{2} & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

En déduire $\rho(J)$.

$$\det(J-\lambda I) = -\lambda(\lambda^2 - \frac{\alpha^2}{2})$$

L'ensemble des valeurs propres est $\{0, \frac{|\alpha|}{\sqrt{2}}, -\frac{|\alpha|}{\sqrt{2}}\}$ et $\rho(J) = \frac{|\alpha|}{\sqrt{2}}$.

4) Pour quelles valeurs de α la méthode de Jacobi converge -t-elle?

La méthode de Jacobi converge si et seulement si $\frac{|\alpha|}{\sqrt{2}} < 1$

Par conséquent

$$|\alpha| < \sqrt{2}$$

5) Pour quelles valeurs de α la méthode de Gauss Seidel converge -t-elle?

A est une matrice symétrique définie positive si et seulement si $|\alpha| < \sqrt{2}$. Donc ,si $|\alpha| < \sqrt{2}$, la méthode de Gauss Seidel converge.

6) Montrer que $\rho(G) = \rho(J)^2$.

Puisque A est une matrice tridiagonale, alors $\rho(G) = \rho(J)^2 = \frac{\alpha^2}{2}$, donc la méthode de Gauss Seidel converge si et seulement si $|\alpha| < \sqrt{2}$.

7) Soit $\omega \in]0,2[$, pour quelles valeurs de α la méthode de relaxation converge -t-elle? Déterminer ω_o.

Puisque les valeurs propres de J sont réelles, alors les méthodes de Jacobi et de relaxation converge simultanément.

On conclut que la méthode de relaxation converge si $|\alpha| < \sqrt{2}$.

$$\omega_o = \frac{2}{1+\sqrt{1-\rho(J)^2}} = \frac{2}{1+\sqrt{1-\frac{\alpha^2}{2}}}$$

Exercice 5

On considère le système linéaire $Ax = b$ où

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

1) Montrer que les méthodes itératives de Jacobi et de Gauss Seidel sont convergentes.

Puisque A est une matrice à diagonale strictement dominante, alors les méthodes itératives de Jacobi et de Gauss Seidel sont convergentes.

2) Montrer que A est définie positive.

On calcule les mineurs principaux de A ,on trouve

$$\triangle_1 = 3, \triangle_2 = 6, \triangle_3 = 16$$

Puisque tous les mineurs principaux de A sont strictement positifs, alors A est définie positive.

3) Que peut on dire sur la convergence de la méthode de relaxation pour $\omega \in]0,2[$?

la méthode de relaxation converge pour tout $\omega \in]0,2[$ car A est une matrice symétrique définie positive.

Exercice 6

On considère le système linéaire $Ax = b$ où

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

1) Calculer la matrice de la méthode de relaxation.

$$A = D - E - F = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{L}_\omega = (\frac{D}{\omega} - E)^{-1}(\frac{1-\omega}{\omega}D + F)$$

$$(\frac{D}{\omega} - E) = \begin{pmatrix} \frac{2}{\omega} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{\omega} & 0 \\ -1 & 0 & \frac{2}{\omega} \end{pmatrix}$$

Pour calculer $(\frac{D}{\omega} - E)^{-1}$, on résout le système $(\frac{D}{\omega} - E)x = y$.

$$\begin{aligned} (\frac{D}{\omega} - E)x &= y \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2}{\omega}x_1 = y_1 \\ \frac{2}{\omega}x_2 = y_2 \\ -x_1 + \frac{2}{\omega}x_3 = y_3 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{\omega}{2}y_1 \\ x_2 = \frac{\omega}{2}y_2 \\ x_3 = \frac{\omega^2}{4}y_1 + \frac{\omega}{2}y_3 \end{cases} \end{aligned}$$

$$(\frac{D}{\omega} - E)x = y \Leftrightarrow x = (\frac{D}{\omega} - E)^{-1}y = \begin{pmatrix} \frac{\omega}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\omega}{2} & 0 \\ \frac{\omega^2}{4} & 0 & \frac{\omega}{2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\omega &= (\frac{D}{\omega} - E)^{-1}(\frac{1-\omega}{\omega}D + F) \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\omega}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\omega}{2} & 0 \\ \frac{\omega^2}{4} & 0 & \frac{\omega}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2\frac{1-\omega}{\omega} & 1 & 0 \\ 0 & 2\frac{1-\omega}{\omega} & 0 \\ 0 & 0 & 2\frac{1-\omega}{\omega} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1-\omega & \frac{\omega}{2} & 0 \\ 0 & 1-\omega & 0 \\ \frac{\omega(1-\omega)}{2} & \frac{\omega^2}{4} & 1-\omega \end{pmatrix} \end{aligned}$$

2) Pour Quelles valeurs de ω cette méthode est elle convergente?

$$\det(\mathcal{L}_\omega - \lambda I) = ((1-\omega) - \lambda)^3$$

L'ensemble des valeurs propres est $\{1-\omega, 1-\omega, 1-\omega\}$ et $\rho(\mathcal{L}_\omega) = |1-\omega|$.

La méthode de relaxation converge si et seulement si $|1-\omega| < 1$,donc $0 < \omega < 2$.

3) Trouver le ω_o qui assure la convergence la plus rapide de cette méthode.

$\rho(\mathcal{L}_\omega) = |1-\omega|$, $\min\limits_{\omega \in]0,2[} \rho(\mathcal{L}_\omega) = \rho(\mathcal{L}_1) = 0.$

Donc $\omega_o = 1$.
Exercice 7
Soit A une matrice carrée d'ordre 3 telle que $A = I_3 - E - F$ avec

$$E = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, F = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

1) Montrer que A est inversible.

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ \det(A) &= -1 \neq 0 \end{aligned}$$

2) Soit $0 < \omega < 2$. Montrer que la matrice $\frac{1}{\omega} I_3 - E$ est inversible si et seulemnet si $\omega \neq \frac{\sqrt{2}}{2}$.

$$\begin{aligned} \frac{1}{\omega} I_3 - E &= \begin{pmatrix} \frac{1}{\omega} & 2 & 0 \\ 1 & \frac{1}{\omega} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\omega} \end{pmatrix} \\ \det(\frac{1}{\omega} I_3 - E) &= \frac{1}{\omega}(\frac{1}{\omega^2} - 2) \\ \det(\frac{1}{\omega} I_3 - E) &\neq 0 \text{ si } \omega \neq \frac{\sqrt{2}}{2}. \end{aligned}$$

3) Pour $0 < \omega < 2, \omega \neq \frac{\sqrt{2}}{2}$, on considre pour la résolution de Ax=b, la méthode itérative définie par

$$\begin{cases} x^{(0)} \in \mathbb{R}^3 \\ (\frac{1}{w} I_3 - E)x^{(k+1)} = (F + \frac{1-\omega}{\omega} I_3)x^{(k)} + b \end{cases}$$

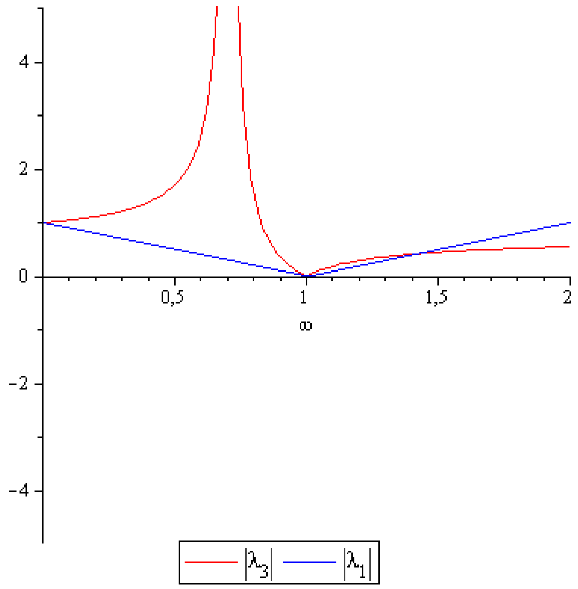
et on pose $\mathcal{L}_\omega = (\frac{1}{\omega} I_3 - E)^{-1}(F + \frac{1-\omega}{\omega} I_3)$. Calculer en fonction de ω, les valeurs propres de $\mathcal{L}_\omega$ et son rayon spectral.

$$(\frac{1}{\omega} I_3 - E)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{-\omega}{2\omega^2-1} & \frac{2\omega^2}{2\omega^2-1} & 0 \\ \frac{\omega^2}{2\omega^2-1} & \frac{-\omega}{2\omega^2-1} & 0 \\ 0 & 0 & \omega \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\omega &= \begin{pmatrix} \frac{-\omega}{2\omega^2-1} & \frac{2\omega^2}{2\omega^2-1} & 0 \\ \frac{\omega^2}{2\omega^2-1} & \frac{-\omega}{2\omega^2-1} & 0 \\ 0 & 0 & \omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1-\omega}{\omega} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1-\omega}{\omega} & 0 \\ -1 & -1 & \frac{1-\omega}{\omega} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\omega-1}{2\omega^2-1} & \frac{2\omega(1-\omega)}{2\omega^2-1} & 0 \\ \frac{\omega(1-\omega)}{2\omega^2-1} & \frac{\omega-1}{2\omega^2-1} & 0 \\ -\omega & -\omega & 1-\omega \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\det(\mathcal{L}_\omega - \lambda I) = (1-\omega-\lambda)[(\frac{\omega-1}{2\omega^2-1}-\lambda)^2 - \frac{2\omega^2(1-\omega)^2}{(2\omega^2-1)^2}]$$

L'ensemble des valeurs propres est $\{\lambda_1 = 1-\omega, \lambda_2 = \frac{1-\omega}{1+\sqrt{2}\omega}, \lambda_3 = \frac{1-\omega}{1-\sqrt{2}\omega}\}$.
On a $|\lambda_1| > |\lambda_2|$ car $|1+2\omega| > 1, \forall\omega \in]0,2[$.
Pour comparer $|\lambda_1|$ et $|\lambda_3|$, on trace la courbe représentative de $|\lambda_1|$ et $|\lambda_3|$.



On conclut que

$$\begin{cases} \rho(\mathcal{L}_\omega) = |\lambda_3| = \left|\frac{1-\omega}{1-\sqrt{2}\omega}\right| \text{ si } \omega \in]0,\sqrt{2}] \\ \rho(\mathcal{L}_\omega) = |\lambda_1| = |1-\omega| \text{ si } \omega \in [\sqrt{2}, 2[. \end{cases}$$

4) Pour quelles valeurs de ω cette méthode converge-t-elle?
La méthode converge si $\rho(\mathcal{L}_\omega) < 1$.
Si $\omega \in [\sqrt{2}, 2[, \rho(\mathcal{L}_\omega) = |1-\omega| = \omega - 1 < 1$.
si $\omega \in]0,\sqrt{2}], \rho(\mathcal{L}_\omega) = \left|\frac{1-\omega}{1-\sqrt{2}\omega}\right| < 1$ si $\omega > 2\sqrt{2}-2$.

5) Déterminer $\omega_o \in]0,2[$ vérifiant $\rho(\mathcal{L}_{\omega_o}) = \min\{\rho(\mathcal{L}_\omega), \omega \in]0,2[, \omega \neq \frac{\sqrt{2}}{2}\}$.
Remarquons le graphe de $|\lambda_1|$ et $|\lambda_3|$, on déduit que le minimum de $\rho(\mathcal{L}_{\omega_o})$ est atteint pour $\omega = 1$.

Exercice 8

Soient A et B deux matrices de $M_n(\mathbb{R})$ et a, b deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$.

On considère la méthode itérative suivante:

$$\begin{cases} (x_0, y_0) \text{ donné} \\ x^{(k+1)} = By^{(k)} + a \\ y^{(k+1)} = Ax^{(k)} + b \end{cases}$$

1) Montrer que la suite $(x^{(k)})$ est convergente si et seulement si $\rho(BA) < 1$.
On a

$$\begin{aligned} x^{(k+1)} &= By^{(k)} + a \\ &= B(Ax^{(k-1)} + b) + a \\ &= BAx^{(k-1)} + Bb + a \end{aligned}$$

Donc $(x^{(k)})$ ssi $\rho(BA) < 1$.
2) Montrer que la suite $(y^{(k)})$ est convergente si et seulement si $\rho(AB) < 1$.
On a

$$\begin{aligned} y^{(k+1)} &= Ax^{(k)} + b \\ &= A(By^{(k-1)} + a) + b \\ &= ABy^{(k-1)} + Aa + b \end{aligned}$$

Donc $(y^{(k)})$ converge ssi $\rho(AB) < 1$.
3) Soit $z^{(k)} = (x^{(k)}, y^{(k)})^t \in \mathbb{R}^{2n}$. Montrer que la méthode (3.9) peut s'écrire sous la forme

$$z^{(k+1)} = Cz^{(k)} + c$$

où C est une matrice d'ordre $2n$. Expliciter C et c.

$$\begin{aligned} z^{(k+1)} &= \begin{pmatrix} x^{(k+1)} \\ y^{(k+1)} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} By^{(k)} + a \\ Ax^{(k)} + b \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & B \\ A & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^{(k)} \\ y^{(k)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Donc

$$C = \begin{pmatrix} 0 & B \\ A & 0 \end{pmatrix}, c = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

4) Montrer que si λ est une valeur propre non nul de C, alors λ^2 est une valeur propre de AB.

Soit λ une valeur propre non nul de C et z un vecteur propre associé, nous avons :

$$\begin{aligned} Cz &= \lambda z \Leftrightarrow \begin{cases} By = \lambda x \\ Ax = \lambda y \end{cases} \\ By &= \lambda x \Rightarrow ABy = \lambda Ax = \lambda^2 y \end{aligned}$$

On déduit que λ^2 est une valeur propre de AB.

5) Montrer que si α est une valeur propre de AB, alors β telle que $\beta = \alpha^2$ est une valeur propre de C.

Soit α une valeur propre de AB associée à un vecteur propre non nul u, cela implique que

$$ABu = \alpha u$$

On pose

$$x = Bu, y = \beta u$$

alors

$$\begin{aligned} C\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= C\begin{pmatrix} Bu \\ \beta u \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & B \\ A & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Bu \\ \beta u \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \beta Bu \\ ABu \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \beta Bu \\ \alpha u \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \beta Bu \\ \beta^2 u \end{pmatrix} \\ &= \beta\begin{pmatrix} Bu \\ \beta u \end{pmatrix} \\ &= \beta\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Comme $C\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \beta\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, β est une valeur propre de C.

5) Déduire que $\rho(C)^2 = \rho(AB)$.

D'aprés les questions (3) et (4), on conclut que (spectre(C))^2 =spectre(AB) , donc $\rho(C)^2 = \rho(AB)$.

6) On considère maintenant la méthode itérative suivante

$$\begin{cases} (x_0, y_0) \text{ donné} \\ x^{(k+1)} = By^{(k)} + a \\ y^{(k+1)} = Ax^{(k+1)} + b \end{cases}$$

Donner une condition nécessaire et suffisante de convergence.
On a
$$\begin{cases} x^{(k+1)} = BAx^{(k)} + BA + a \\ y^{(k+1)} = ABy^{(k)} + Ab + b \end{cases}$$
donc $(x^{(k)})$ converge ssi $\rho(BA) < 1$ et $(y^{(k)})$ converge ssi $\rho(AB) < 1$.
7) Montrer que la méthode (3.10) est équivalente à
$$z^{(k+1)} = Dz^{(k)} + d$$
où D est une matrice d'ordre $2n$.

$$\begin{aligned} z^{(k+1)} &= \begin{pmatrix} x^{(k+1)} \\ y^{(k+1)} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} BAx^{(k)} + BA + a \\ ABy^{(k)} + Ab + b \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & B \\ 0 & AB \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^{(k)} \\ y^{(k)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} BA + a \\ Ab + b \end{pmatrix} \end{aligned}$$
Par suite
$$D = \begin{pmatrix} 0 & B \\ 0 & AB \end{pmatrix}, d = \begin{pmatrix} BA + a \\ Ab + b \end{pmatrix}$$
8) Montrer que $\rho(D) = \rho(AB)$.
Soit λ une valeur propre de D associée à un vecteur propre non nul $(x, y)^t$,
$$\begin{aligned} D\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &\Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & B \\ 0 & AB \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &\Rightarrow \begin{pmatrix} By \\ ABy \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &\Rightarrow ABy = \lambda y \end{aligned}$$
On conclut que λ est une valeur propre de AB.
Soit α une valeur propre de AB associée à un vecteur propre non nul u, cela implique que
$$ABu = \alpha u$$
On pose
$$x = Bu, y = \alpha u$$

$$\begin{aligned} D\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} By \\ ABy \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \alpha Bu \\ \alpha ABu \end{pmatrix} \\ &= \alpha \begin{pmatrix} Bu \\ ABu \end{pmatrix} \\ &= \alpha \begin{pmatrix} Bu \\ \alpha u \end{pmatrix} \\ &= \alpha \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Donc α est une valeur propre de D.

On conclut que spectre(D)=spectre(AB) et par suite $\rho(D) = \rho(AB)$.

9) Comparer la vitesse de convergence des méthodes (3.9) et (3.10).

On montré que $\rho(D) = \rho(AB)$ et $\rho(C) = \sqrt{\rho(AB)}$.

Comme $\rho(D) < \rho(C)$, la méthode (3.10) converge plus vite que la méthode (3.9).

Exercice 10

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice inversible telle que $(a_{ii}) \neq 0, i = \overline{1,n}$ et $b \in \mathbb{R}^n$.

Pour résoudre le système linéaire $Ax = b$, on propose la méthode itérative suivante:

$$\begin{cases} x^0 \text{ donné} \\ x^{(k+1)} = (I - \alpha D^{-1}A)x^{(k)} + \alpha D^{-1}b \end{cases}$$

où α est un réel non nul.

1) Montrer que si la suite $(x^{(k)})$ converge vers x, alors x est la solution du système $Ax = b$.

A la limite, on trouve

$$x = (I - \alpha D^{-1}A)x + \alpha D^{-1}b$$

D'où

$$\alpha D^{-1}Ax = \alpha D^{-1}b$$

Comme α est non nul, on trouve

$$Ax = b$$

2) On pose $M = I - \alpha D^{-1}A$. Exprimer les coefficients de la matrice M en fonction des coefficients de la matrice A.

$$m_{i;j} = \begin{cases} 1 - \alpha \text{ si } i = j \\ -\alpha \frac{a_{i,j}}{a_{ii}} \text{ si } i \neq j \end{cases}$$

3) On suppose que A est une matrice à diagonale strictement dominante en lignes. Montrer que $\|M\|_\infty < 1$ et déduire que la suite $(x^{(k)})$ converge.

On a

$$\|M\|_\infty = \max_{1\leq i\leq n}(1-\alpha+\frac{\alpha}{a_{ii}}\sum\nolimits_{j=1,j\neq i}^{n} a_{i,j})$$

Comme A est une matrice à diagonale strictement dominante, alors

$$\sum\nolimits_{j=1,j\neq i}^{n} a_{i,j} < a_{ii}, i=\overline{1,n}$$

par suite

$$\|M\|_\infty < 1-\alpha+\alpha = 1.$$

On a $\|M\|_\infty$, on conclut que cette méthode itérative converge.
4) On suppose que $\alpha = 1$. Quelle méthode itérative retrouve-t-on?
Si $\alpha = 1$, alors

$$\begin{aligned} x^{(k+1)} &= (I-D^{-1}A)x^{(k)} + D^{-1}b \\ &= (I-D^{-1}(D-E-F)x^{(k)} + D^{-1}b \\ &= D^{-1}(E+F) + D^{-1}b \end{aligned}$$

donc on retrouve la méthode de Jacobi.
Exercice 11
Pour résoudre le système linéaire $Ax = b$, on propose la méthode itérative suivante:

$$\begin{cases} x^0 \text{ donné} \\ x^{(k+1)} = \alpha(b-Ax^{(k)}) + x^{(k)} \end{cases}$$

On suppose que les valeurs propres de A sont rangées par ordre croissant $0 < \lambda_1 < ... < \lambda_n$.
1) Montrer que cette méthode converge si et seulemnt si $0 < \alpha < \frac{2}{\rho(A)}$.

$$x^{(k+1)} = (id-\alpha A)x^{(k)} + \alpha b$$

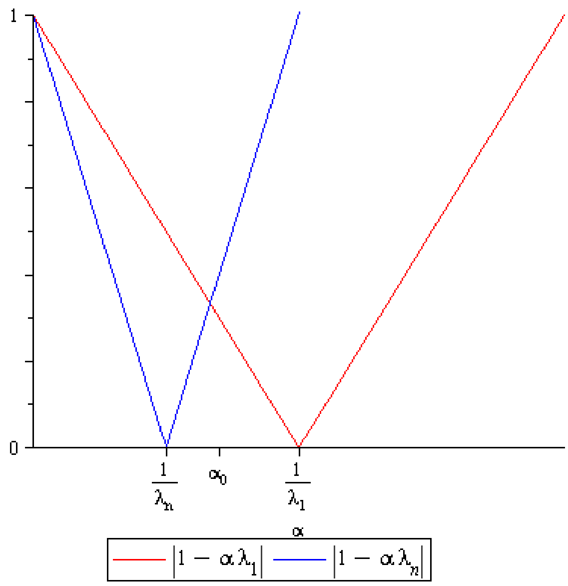
La méthode converge si et seulement $\rho(id-\alpha A) < 1$. Comme les valeurs propres de $id-\alpha A$ sont de la forme $1-\alpha\lambda_i, \forall i = 1,...,n$, alors

$$\begin{aligned} \rho(id-\alpha A) &< 1 \\ &\Leftrightarrow -1 < 1-\alpha\lambda_i < 1, \forall i=1,...,n \\ &\Leftrightarrow 0 < \alpha < \frac{2}{\lambda_i}, \forall i = 1,...,n \\ &\Leftrightarrow 0 < \alpha < \frac{2}{\lambda_n} \\ &\Leftrightarrow 0 < \alpha < \frac{2}{\rho(A)} \end{aligned}$$

2) On suppose que α_0 est tel que $\rho(id-\alpha_0 A) = \min\{\rho(id-\alpha A), \alpha\in\mathbb{R}\}$.
Montrer que $\alpha_0 = \frac{1}{\lambda_1+\lambda_n}$.

$$\rho(id - \alpha A) = \max_{1 \leq i \leq n} (|1 - \alpha\lambda_i|)$$

Comme $0 < \lambda_1 < ... < \lambda_n$, alors $\rho(id - \alpha A) = \max(|1 - \alpha\lambda_1|, |1 - \alpha\lambda_n|)$.



Le minimum de $\rho(id - \alpha A)$ est obtenu donc pour α_0 tel que

$$1 - \alpha_0\lambda_1 = \alpha_0\lambda_n - 1$$

On conclut que $\alpha_0 = \frac{1}{\lambda_1 + \lambda_n}$.

Bibliographie

[1] A.Fortin, Analyse numérique pour ingénieurs, EPM, 2008.

[2] R.Herbin, Cours d'Analyse Numérique, Université Aix Marseille, 2006.

[3] G.Legendre, Méthodes Numériques, Introduction à l'analyse numérique et au calcul scientifique, Dauphine, 2009.

[4] A.Quarteroni, F.Saleri, P.Gervasio, Calcul Scientifique, Springer, 2010.

[5] A.Quarteroni, R.Sacco, F.Saleri, Méthodes numériques, Algorithmes, analyse et applications, Springer, 2006.