

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

MINISTRY OF HIGHER EDUCATION
AND SCIENTIFIC RESEARCH

HIGHER SCHOOL IN APPLIED SCIENCES
--T L E M C E N--



المدرسة العليا في العلوم التطبيقية
École Supérieure en
Sciences Appliquées

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

المدرسة العليا في العلوم التطبيقية
-تمسان-

Mémoire de fin d'étude

Pour l'obtention du diplôme de Master

Filière : Electrotechnique
Spécialité : Energie et environnement

Présenté par : BELKHIR Chaimaa

Thème

**Modélisation et simulation
du pantographe**

Soutenu publiquement, le 27 / 09 / 2020, devant le jury composé de :

M Abdellaoui. G	MCB	ESSA. Tlemcen	Président
Mme Sebbagh. H	MCB	ESSA. Tlemcen	Directeur de mémoire
Mme Chakroune. S	MCA	UAB. Tlemcen	Co- Directeur de mémoire
M Rimouche. A	MCB	ESSA. Tlemcen	Examinateur 1
M Megnafi.H	MCB	ESSA. Tlemcen	Examinateur 2

Année universitaire : 2019 /2020



Dédicace :

Je dédie ce travail :

*À la prunelle de mes yeux, À vous : « Mes chers
parents ».*

*À celle qui m'a donné la vie, qui a bercé mes nuits, à mon
soleil qui brille, le symbole de tendresse, à ma chère
mère : « Fatima »*

*À celui qui a épuisé sa jeunesse et sa vie, qui n'a vécu que
pour me voir un jour réussir, À mon premier encadrant
depuis ma naissance, À mon cher père : « Mohammed »*

*À toutes mes sœurs et mon frère, à qui je souhaite
beaucoup de réussite et de bonheur.*

*À celui qui ont été toujours prêt à mon appel, qui ont
sacrifié leur temps et leurs efforts à mon secours, À mes
encadrants « Mme. Sebbagh.H » et « Mme. Chakroune.S »*

Chaimaa



Remerciements:

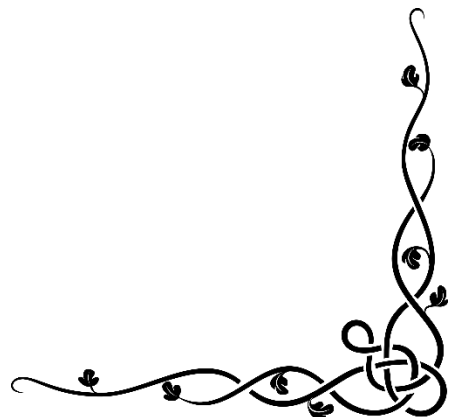
*Nous remercions ALLAH le clément le miséricordieux
De nous avoir donné, toujours la patience et la foi pour atteindre nos buts.*

Nous tenons à exprimer notre gratitude envers nos encadrants "Mme Sebbagh.H" et "Mme Chaïroune.S" pour leur grande disponibilité et encouragements tout au long de l'élaboration de ce mémoire

Nos remerciements vont également à tous les enseignants de l'ESSA de Tlemcen, qui ont contribué à notre formation.

Nous remercions monsieur "Abdellaoui.G", monsieur "Rimouche.A" et monsieur "Megnafi.H" pour avoir accepté d'examiner ce travail.

Enfin, nous remercions tous ceux qui nous ont aidés de près ou de loin dans ce projet de fin d'études.



Résumé

Dans la grande majorité des réseaux ferroviaires (le tramway dans notre cas), l'énergie électrique est fournie aux rames par le système pantographe-caténaire.

Le système pantographe-caténaire est un lien vital de la chaîne de transmission d'énergie électrique aux moteurs de traction électrique, il est donc nécessaire de bien modéliser le système pantographe. Dans ce travail de recherche, le pantographe asymétrique est modélisé par l'utilisation du modèle masse en bloc (modèle à deux masses), l'équation issue de la modélisation mathématique est une équation différentielle ordinaire. Par la suite, l'équation obtenue est traitée numériquement et analytiquement en utilisant la technique de décomposition d'Adomian qui a pour but de linéariser le terme non linéaire, dont la solution est écrite sous forme d'une série.

La comparaison entre les résultats obtenus montre un excellent accord entre la solution exacte et la solution approchée, justifiant ainsi l'efficacité et la grande précision de la méthode de décomposition d'Adomian.

Mots clés : Pantographe ; traction électrique ; modélisation ; équation différentielle ; décomposition d'Adomian.

Abstract

In the vast majority of rail networks (the tram in our case), electrical energy is supplied to the trains by the pantograph-catenary system.

The pantograph-catenary system is a vital link in the chain of transmission of electrical energy to the electric traction motors, so it is necessary to model the pantograph system properly. In this research work, the asymmetric pantograph is modeled by the use of the block mass model (two mass model), the equation resulting from the mathematical modeling is an ordinary differential equation. Subsequently, the resulting equation is processed numerically and analytically using the Adomian decomposition technique which aims to linearize the nonlinear term, whose solution is written as a series.

The comparison between the results obtained shows an excellent agreement between the exact solution and the approximate solution, thus justifying the efficiency and the high precision of Adomian's decomposition method.

Keywords: Pantograph; modelisation; electrical traction; differential equation; adomian decomposition.

ملخص

في الغالبية العظمى من شبكات السكك الحديدية (الترام في حالتنا)، يتم توفير الطاقة الكهربائية للقطارات عن طريق نظام البانتوجراف.

يعد نظام البانتوجراف رابطاً حيويًا في سلسلة نقل الطاقة الكهربائية إلى محركات الجر الكهربائية، لذلك من الضروري نمذجة البانتوجراف بشكل صحيح. في هذا البحث، تم نمذجة البانتوجراف غير المتماثل باستخدام نموذج الكتلة (نموذج الكتلتين)، والمعادلة الناتجة عن النمذجة الرياضية هي معادلة تفاضلية عادية. بعد ذلك، تتم معالجة المعادلة الناتجة عدديًا وتحليليًا باستخدام تقنية التحلل Adomian التي تهدف إلى جعل المصطلح غير الخطي خطيًا، والذي يتم كتابة حله كسلسلة.

أظهرت المقارنة بين النتائج التي تم الحصول عليها وجود اتفاق ممتاز بين الحل الدقيق والحل التقريبي، مما يبرر الكفاءة والدقة العالية لطريقة التحلل Adomian .

الكلمات المفتاحية: البانتوجراف ، طاقة الجر ، النمذجة ، معادلة تفاضلية ، تحليل أدوميان.

Table des matières

Résumé	vii
Abstract	vii
Résumé en arabe	vii
Table des Figures	viii
Liste des tableaux	ix
Introduction générale	1
1 Pantographe	3
Introduction	3
1.1 Système d'alimentation du tramway	3
1.1.1 Système caténaire	4
1.1.2 Pantographe	5
1.2 Les types de pantographe	5
1.2.1 Pantographe symétrique polygonal	5
1.2.2 Pantographe polygonal à double étage	6
1.2.3 Pantographe asymétrique	7
1.2.4 Pantographe asymétrique à double étage	8
1.3 Caractéristiques des pantographes	9
1.4 Matériaux utilisés	10
1.5 Modèles du pantographe	10
1.5.1 le modèle multi-corps	10
1.5.2 Modèle masse en bloc	11
1.6 Modèle mathématique du pantographe	14
1.6.1 Différentes formes de l'équation du pantographe	14
Conclusion	15

2 La méthode décompositionnelle d'Adomian	17
Introduction	17
2.1 Description de la méthode	17
2.2 Principe de la méthode d'Adomian (ADM)	18
2.3 Polynômes d'Adomian	19
2.4 Convergence de la méthode d'Adomian	20
2.5 Exemples d'équations différentielles	22
Conclusion	25
3 Résolution numérique de l'équation du pantographe	26
Introduction	26
3.1 La décomposition d'Adomian	26
3.2 Étude de la convergence	27
3.3 Application numérique	30
3.3.1 Exemple 2	35
Conclusion	41
Conclusion et perspectives	43
References	43
A Annexe A	45
A.1 RENFE :	45
A.2 UNE-EN 50318 :	45
B Annexe B	46
C Annexe C	47
Résumé	48
Abstract	48
Résumé en arabe	48

Table des figures

1.1	Système d'alimentation du tramway	4
1.2	<i>Système caténaire</i>	4
1.3	Pantographe symétrique polygonal	6
1.4	<i>Pantographe polygonal à double étage</i>	6
1.5	Pantographe asymétrique	7
1.6	<i>Vue latérale des composants du pantographe.</i>	7
1.7	Vue de face du pantographe.	8
1.8	Pantographe asymétrique à double étage	9
1.9	Modèle masse en bloc à deux masses	12
1.10	Modèle masse en bloc à trois masse	12
1.11	Modèle masse en bloc à quatre masses :	13
3.1	<i>Tracé de la solution exacte $(u(t))$ et la solution approximative $\Phi_n(t)$ pour $n = 3$</i>	33
3.2	<i>Tracé de la fonction d'erreur $u(t) - \Phi_n(t)$ pour $n = 3$</i>	33
3.3	<i>Tracé de la solution exacte et la solution approximative $\Phi_n(t)$ pour $n = 4$</i>	35
3.4	<i>Tracé de la fonction d'erreur $u(t) - \Phi_n(t)$ pour $n = 4$</i>	35
3.5	<i>Tracé de la solution exacte et la solution approximative $\Phi_n(t)$ pour $n = 3$</i>	38
3.6	<i>Tracé de la fonction d'erreur $u(t) - \Phi_n(t)$ pour $n = 3$</i>	38
3.7	<i>Tracé de la solution exacte et la solution approximative $\Phi_n(t)$ pour $n = 4$</i>	40
3.8	<i>Tracé de la fonction d'erreur $u(t) - \Phi_n(t)$ pour $n = 4$</i>	40

Liste des tableaux

1.1	Paramètres du modèle à trois masses	13
1.2	Paramètres du modèle à quatre masses	14
3.1	La solution approximative Φ_n et l'erreur absolue $ u(t) - \Phi_n(t) $ pour $n=3$	32
3.2	La solution exacte, la solution approximative et l'erreur absolue $ u(t) - \Phi_n(t) $ pour $n=4$	34
3.3	La solution approximative et l'erreur absolue $ u(t) - \Phi_n(t) $ pour $n=3$.	37
3.4	La solution approximative et l'erreur absolue $ u(t) - \Phi_n(t) $ pour $n=4$.	39

Introduction générale

Pour les tramways, la collecte du courant est assurée par un pantographe, une structure tubulaire articulée. L'objectif du pantographe est de suivre la hauteur de la caténaire sans aucun choc afin de maintenir un contact permanent.

Pour mieux comprendre l'interaction dynamique de ces systèmes, les chercheurs ont développé des modèles mathématiques qui sont utilisés pour prédire les performances. Alors que les modèles caténaux sont généralement assez complexes, la plupart des modèles de pantographes ont une simple représentation de masse groupée.

L'objectif de ce travail est de modéliser le système du pantographe et donner une simulation. Tout d'abord, un modèle typique de pantographe à deux masses est considéré. Ensuite, une formulation simplifiée de l'ensemble du problème est dérivée. Dans la procédure de résolution de ce problème, les chercheurs sont tombés sur une équation différentielle à retard spéciale, ce type d'équation différentielle est appelé équation du pantographe. Au cours des années suivantes, l'équation du pantographe est devenue un excellent exemple d'équation différentielle.

Dans cette étude, l'équation du pantographe est étudiée en utilisant la décomposition d'Adomian. Cette méthode a été introduite par George Adomian au début des années quatre-vingt pour résoudre des équations fonctionnelles linéaires et non linéaires de différents types (algébriques, différentielles, aux dérivées partielles, intégrales, intégro-différentielles, etc.).

Le mémoire est divisé en trois chapitres :

Dans le premier chapitre, on va étudier le pantographe en ce qui concerne ses composants et ses principales caractéristiques structurelles. Ensuite, les deux types de modélisation de pantographe sont introduits. A la fin donnera une description du modèle mathématique du pantographe en précisant l'équation sur laquelle notre travail est basé.

Dans le deuxième chapitre, on présentera la méthode de décomposition d'Adomian ainsi que quelques résultats spécifiques de convergence de cette méthode.

Le dernier chapitre comprend la résolution numérique de l'équation non homogène du pantographe avec la méthode d'Adomian (ADM) dont une étude de convergence sera faite, des tests numériques ont été effectués sur des exemples dont on connaît la solution exacte afin de comparer cette dernière avec la solution approchée.

On terminera ce travail par une conclusion générale et quelques perspectives de recherche envisagées.

Pantographe

Introduction

Dans la grande majorité des réseaux ferroviaires (le tramway dans notre cas), l'énergie électrique est fournie aux rames par le système pantographe-caténaire. La caractéristique la plus importante de ce système est la qualité du contact entre le (s) fil (s) de contact de la caténaire et le pantographe.

Il est donc nécessaire d'arriver à une modélisation correcte et plus précise du pantographe par l'identification des modèles de pantographe virtuels afin qu'ils représentent une réponse dynamique similaire à celle du modèle réel.

Dans ce chapitre, on va décrire le système d'alimentation du tramway, une description détaillée du pantographe et on terminera par la modélisation numérique.

1.1 Système d'alimentation du tramway

La puissance des tramways circulant sur des chemins de fer électrifiés provient entièrement du système électrique. Plus précisément, l'énergie électrique est transmise aux tramways via les sous-stations de traction et les lignes de transmission aériennes.

La sous-station de traction est distribuée le long de la ligne du chemin de fer, qui convertit l'électricité au niveau de tension requise, puis alimente le tramway électrifié par le pantographe et le système caténaire. Le courant de charge du tramway, passant par le contact du pantographe avec la caténaire aérienne, s'écoule vers le point de contact de la roue avec la voie et enfin retourne au poste de traction par le circuit de reflux, complétant le processus de transmission de l'énergie électrique.

La collecte du courant est assurée par un pantographe, une structure tubulaire articulée. L'objectif du pantographe est de suivre la hauteur de la caténaire sans aucun choc afin de maintenir un contact permanent [1].

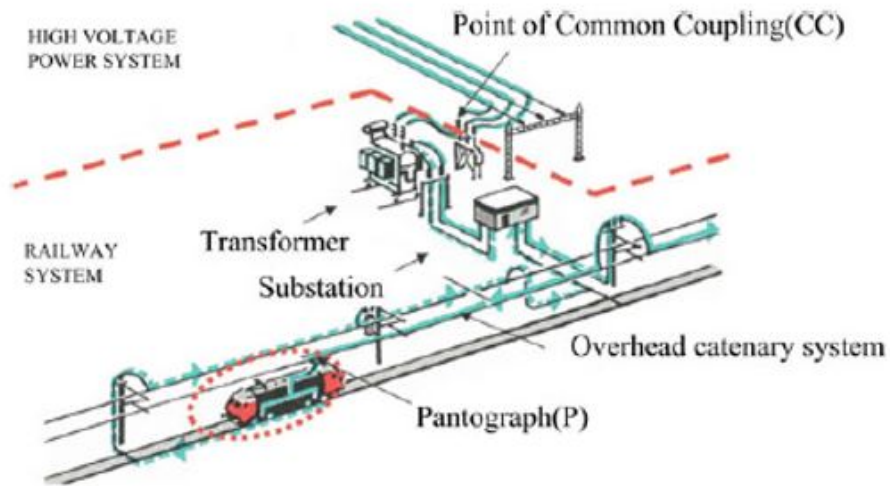


FIGURE 1.1: Système d'alimentation du tramway

1.1.1 Système caténaire

Le système caténaire est un réseau de fils aériens utilisé pour fournir de l'électricité aux tramways, adapté sur les voies ferrées. La fonction de base de la caténaire est de transmettre la puissance électrique du poste de traction au tramway. Le fil de contact est non seulement le principal transporteur du courant de traction mais également le glissement du pantographe [1].

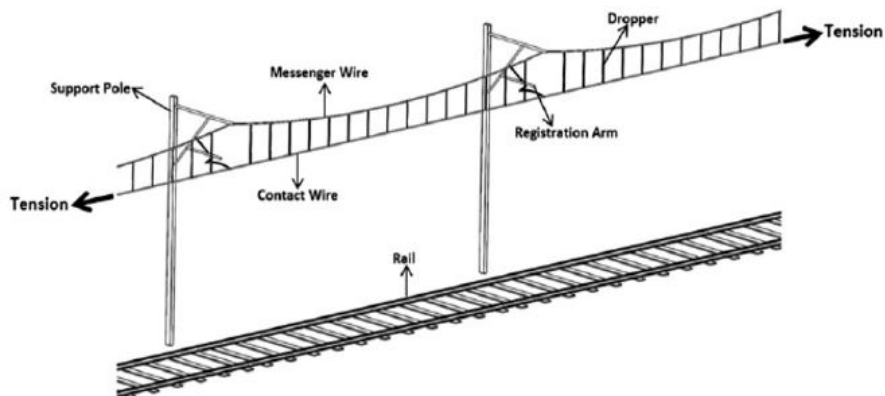


FIGURE 1.2: Système caténaire

1.1.2 Pantographe

Le pantographe est un système mécanique monté sur le toit du tramway qui est automatiquement relevé à la hauteur de la caténaire pour collecter l'énergie électrique via le contact mécanique entre ses bandes de contact et le fil de contact de la caténaire. Bien qu'il existe plusieurs types de pantographes, ils partagent les mêmes principes de fonctionnement.

Le fonctionnement doit être régulier sans perte de contact ou sans induire une force de contact excessive dans le fil de contact. Le système doit également répondre de manière dynamique aux fréquences avec lesquelles il est excité, non seulement pour éviter une usure excessive ou un manque de contact, mais aussi pour répondre au changement de hauteur de la caténaire lors du passage dans des tunnels, des viaducs ou d'autres endroits spéciaux.

Le pantographe est un élément d'une importance vitale et doit donc répondre à une série de critères garantissant un comportement optimal, comme une structure adaptée à l'installation, c'est-à-dire adaptée aux variations et aux contraintes typiques de chaque ligne, un bon comportement et une bonne résistance aux conditions de ligne et d'environnement, ainsi qu'un entretien facile qui n'implique pas de dépenses inutiles ou excessives.

1.2 Les types de pantographe

1.2.1 Pantographe symétrique polygonal

Les premiers pantographes utilisés avaient une structure symétrique polygonale, ils sont également appelés pantographes G. le pantographe symétrique polygonal figure (1.3) est constitué d'un archet supérieur sur lequel sont placés les deux bandes de frottement pour maintenir le contact avec la caténaire et en bas se trouvent les isolants électriques pour l'isoler du toit des unités ferroviaires.

Ils ont permis d'atteindre des vitesses maximales de 120km/h en raison du poids élevé de l'ensemble mécanique. De plus, il a également pu absorber les déplacements transversaux dus par exemple à l'action du vent lors de la marche. C'est un modèle qui a été utilisé pendant des décennies sans pratiquement aucune modification.

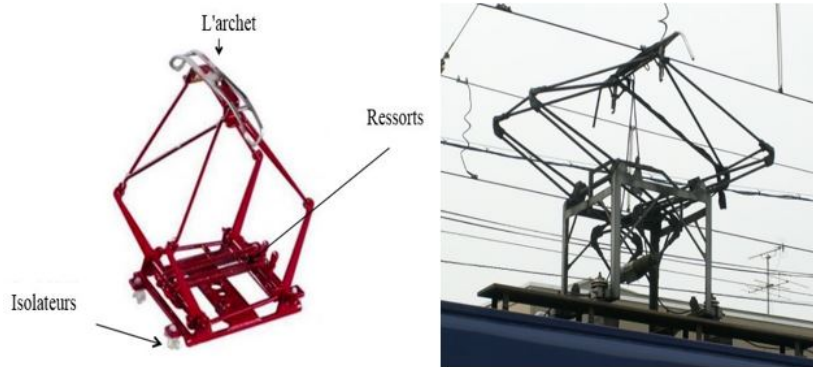


FIGURE 1.3: Pantographe symétrique polygonal

1.2.2 Pantographe polygonal à double étage

Le pantographe polygonal à double étage a été construit en 1969 en France par la SNCF¹ pour résoudre le problème de la collecte du courant à grande vitesse, en remplaçant l'archet et les bandes de frottement d'un pantographe polygonal par un pantographe asymétrique.

La nouvelle incorporation absorbant la plupart des vibrations, puisque la structure de base reste pratiquement constante.



FIGURE 1.4: *Pantographe polygonal à double étage*

1. Société Nationale des Chemins de Fer

1.2.3 Pantographe asymétrique

Les pantographes asymétriques, également appelés pantographes Z ou demi-pantographes (Figure 1.5), ont amélioré les caractéristiques au niveau du captage de courant avec leur masse réduite. Il s'agit d'une avancée majeure pour les vitesses élevées atteintes. Aujourd'hui, ils sont utilisés dans la plupart des locomotives.



FIGURE 1.5: Pantographe asymétrique

Les figures (1.6) et (1.7) montrent les principales composantes des pantographes asymétriques.

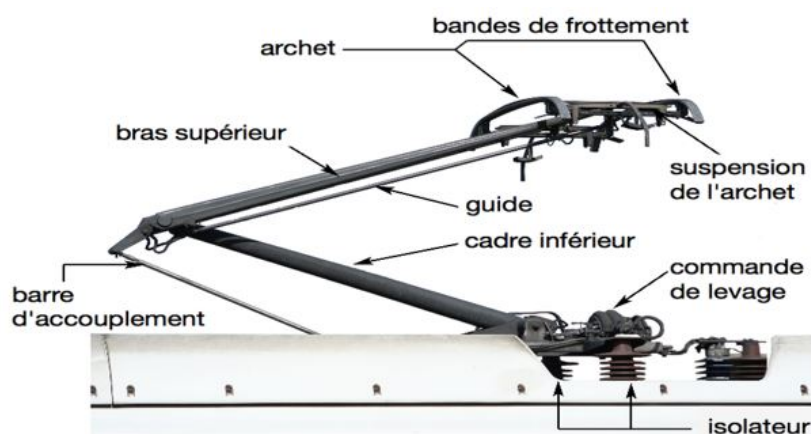


FIGURE 1.6: *Vue latérale des composants du pantographe.*

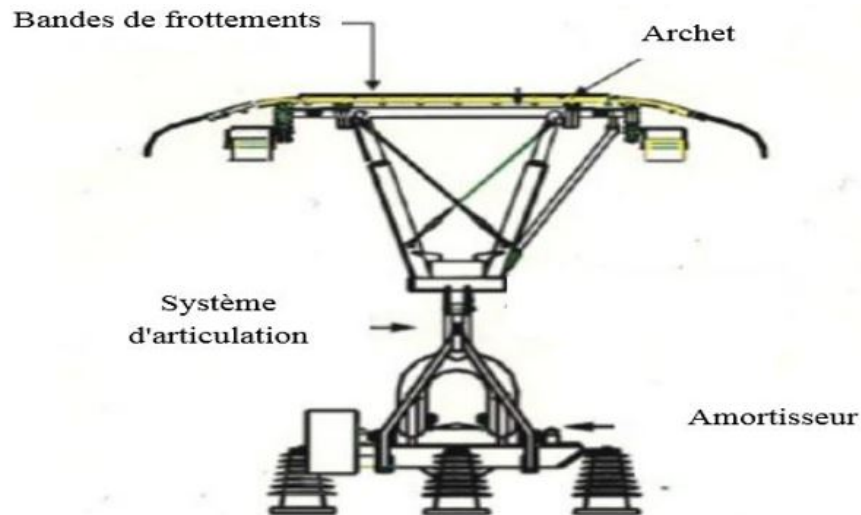


FIGURE 1.7: Vue de face du pantographe.

Les principaux avantages des pantographes asymétriques sont :

- Capter l'électricité sans interruption (décollages) à des vitesses proches de 200 km/h .
- Un nombre réduit de barres permet une réduction de la masse et de l'inertie.
- Le système d'entraînement pneumatique corrige les déviations géométriques produites lors de la montée et de la descente du pantographe.
- Réduit les coûts de maintenance et de production.

1.2.4 Pantographe asymétrique à double étage

Le pantographe asymétrique à double étage se caractérise par un meilleur contact avec la caténaire. Il se compose de deux pantographes asymétriques simples : Le petit est situé à l'extrémité du grand pantographe et fonctionne à 400 mm maximum et sert à compenser la déformation sinusoïdale du fil de contact et le grand est un pantographe classique sans dispositif de frottement qui absorbe les différences de hauteur des fils de contact. Le petit pantographe.



FIGURE 1.8: Pantographe asymétrique à double étage

1.3 Caractéristiques des pantographes

Il est important de connaître les paramètres dimensionnels qui régissent leur comportement, en particulier les longueurs caractéristiques [2].

Les longueurs et les distances caractéristiques du pantographe sont :

- **Développement du pantographe** : Trajet parcouru par le pantographe depuis la position de repos jusqu'à la hauteur maximale qu'il peut atteindre au contact de la caténaire. Le développement minimum du pantographe est de 1700 mm .
- **Hauteur minimale de captage** : Distance minimale à laquelle le pantographe capte l'énergie en toute sécurité. La valeur minimale établie par la RENFE A.1 est de 4600 mm
- **Hauteur maximale de captage** : La distance maximale à laquelle le pantographe peut tirer du courant en toute sécurité. La valeur établie par la RENFE (annexe A.1) est de 6000 mm

Plus la hauteur du fil de contact est constante, plus les conditions de captage du courant sont bonnes. Sur les lignes conventionnelles, la hauteur du fil de contact varie. Dans ce cas, le pantographe doit avoir une force statique pour soulever l'archet et il ne doit pas y avoir de trous dans le contact.

1.4 Matériaux utilisés

Afin de choisir les matériaux à utiliser, les principaux aspects à prendre en compte sont la vitesse de la locomotive et le captage de courant. Lorsque l'acier a été utilisé dans la structure et dans les bras du pantographe, des faibles vitesses sont atteintes, ce matériau a donc été remplacé par l'aluminium. Lorsque l'aluminium est utilisé, il est possible de réduire la masse et l'inertie de tous les éléments structurels en plus d'obtenir des vitesses plus élevées et une plus grande intensité du courant capté. Le bon fonctionnement du pantographe dépend des bandes de contact. Ils sont situés dans l'archet et en contact avec la caténaire, ce sont les éléments qui captent le courant. Les matériaux utilisés pour les bandes de contact sont basés sur le captage de courant. Parmi eux :

- Le cuivre.
- L'acier.
- L'aluminium.
- Le graphite.
- Le graphite imprégné de cuivre.

Actuellement, le matériau le plus couramment utilisé pour un bon captage de courant est le graphite imprégné de métal.

1.5 Modèles du pantographe

Deux types de modèles de pantographes sont identifiés, l'objectif étant d'avoir des modèles numériques ayant des réponses dynamiques similaires à celles des pantographes physiques, l'un étant désigné comme multicorps et l'autre comme masse agrégée.

1.5.1 le modèle multi-corps

Un modèle multi-corps typique est défini comme une collection de corps rigides ou flexibles dont le mouvement relatif est contraint par des articulations cinématiques et est soumis à des forces externes. Les forces appliquées sur les composants du système peuvent être le résultat de ressorts, amortisseurs, actionneurs ou forces appliquées externes décrivant les forces gravitationnelles, de contact / d'impact ou autres.

les composants mobiles du pantographe ont un certain niveau de flexibilité dans ce modèle, ils sont représentés comme des corps rigides reliés par des articulations

cinématiques parfaites. Ces articulations cinématiques sont chargées de contrôler le mouvement relatif entre les différents éléments du pantographe. Des éléments déformables, tels que des ressorts et des amortisseurs, sont utilisés pour modéliser les forces internes pertinentes qui représentent les interactions entre les corps rigides du système [2].

1.5.2 Modèle masse en bloc

Le deuxième type de modèles de pantographes, c'est-à-dire la masse en bloc est utilisé pour de multiples pratiques dans l'industrie, même si le système mécanique du pantographe est plus complexe que celui d'un modèle constitué de simples corps ponctuels couplés par des ressorts et des amortisseurs. Ce type de modèle peut être considéré comme une boîte noire, représentant une fonction de transfert qui relie une entrée à une sortie. Dans ce type de modèle, on distingue trois configurations différentes [3]

a- **Modèle à deux masses :**

C'est le modèle le plus utilisé. Le pantographe est modélisé par des masses m_1 et m_2 reliées par un ressort de module k_1 et un amortisseur de vitesse de coefficient μ_1 (figure 1.9), la masse inférieure étant en outre actionnée par un amortisseur de vitesse de coefficient μ_2 et une force ascendante constante G_0 . Cette force constante représente l'action d'un ressort rigide fixé entre le bras inférieur du pantographe et le toit du train. Le ressort est incliné et ne subit que de petits déplacements.

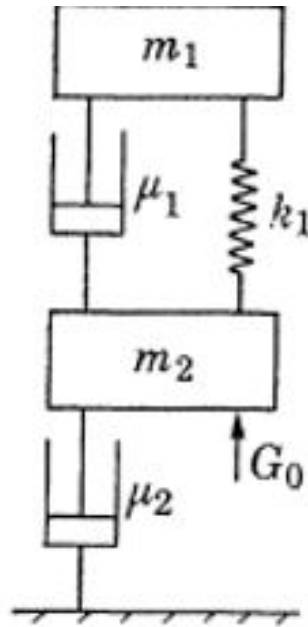


FIGURE 1.9: Modèle masse en bloc à deux masses

b- **Modèle à trois masses :**

Ce modèle correspond au modèle de référence spécifié dans la norme UNE-EN 50318 A.2 :

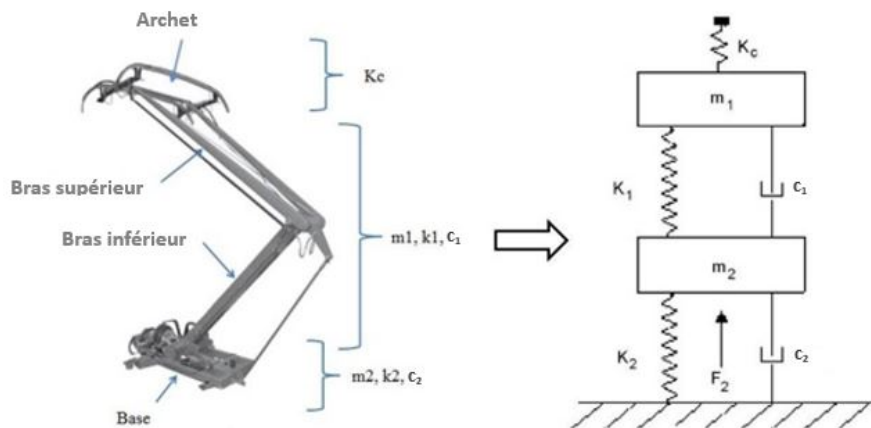


FIGURE 1.10: Modèle masse en bloc à trois masse

La masse inférieure m_0 est équivalente à la base, la masse intermédiaire m_2 correspond à la structure des bras articulés et la masse supérieure m_1 représente l'archet des pantographes. Le ressort k_c représente le ressort de contact. Comme tous les ressorts doivent avoir un point de départ et un point d'arrivée, une quatrième masse de valeur proche de 0 kg est définie à l'endroit où l'extrémité libre du ressort sera fixée. Les valeurs des différents paramètres impliqués dans le modèle sont reflétées dans le tableau 1.1.

La seule force externe appliquée sur le système est la force verticale F_2 sur le bas du corps. Selon UNE-EN 50318, la force exercée par le mécanisme de levage doit assurer une force de contact proche de la valeur optimale pour la collecte de courant.

TABLE 1.1: Paramètres du modèle à trois masses

Désignation du corps	Masse dynamique efficace (kg)	Rigidité (N/m)	Amortissement (Ns/m)
Ressort de contact	$m_c = 0$	$k_c = 50000$	-
Tête de captage	$m_1 = 7.2$	$k_1 = 4200$	$c_1 = 10$
Cadre d'articulation	$m_2 = 15$	$k_2 = 50$	$c_2 = 90$
Base	$m_0 = 10$	-	-

c- Modèle à quatre masses

Ce modèle comprend une masse plus que la précédente, modélisant avec différents corps les bras inférieur et supérieur du pantographe.

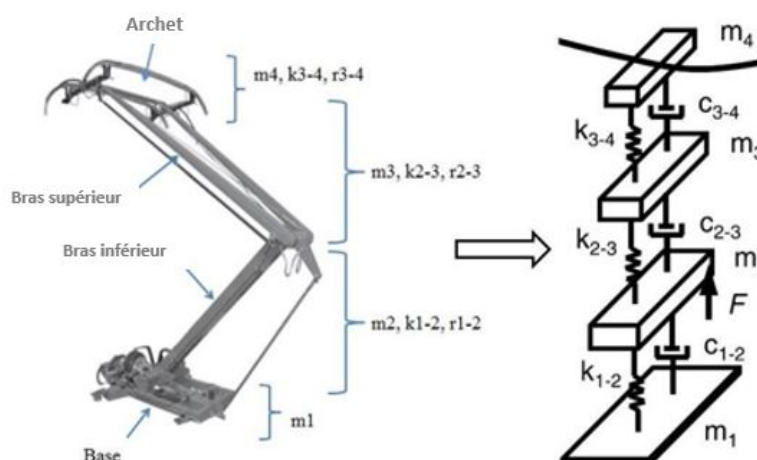


FIGURE 1.11: Modèle masse en bloc à quatre masses :

Le tableau 1.2 présente les paramètres nécessaires pour caractériser le modèle :

TABLE 1.2: Paramètres du modèle à quatre masses

Désignation du corps	Masse dynamique efficace (kg)	Rigidité (N/m)	Amortissement (Ns/m)
Base	$m_1 = 1$	$k_{1-2} = 1$	$c_{1-2} = 32$
Bras inférieur	$m_2 = 4.8$	$k_{2-3} = 5400$	$c_{2-3} = 5$
Bras supérieur	$m_3 = 4.63$	$k_{3-4} = 6045$	$c_{3-4} = 10$
L'archet	$m_4 = 8.5$	-	-

1.6 Modèle mathématique du pantographe

Après avoir modélisé le problème, l'objectif est de trouver une solution pour le déplacement du pantographe.

Le processus de recherche de la solution pose un problème de résolution d'un système de quatre équations différentielles linéaires incluant un terme avec un argument étiré, qui est une sorte d'équation différentielle à retard. L'équation du pantographe est [4] :

$$y'(t) = ay(t) + by(\lambda t) \quad (1.1)$$

Où :

a et b sont réels et $0 < \lambda < 1$ pour $\lambda \in \mathbb{R}$.

1.6.1 Différentes formes de l'équation du pantographe

Ces dernières années, de nombreuses recherches ont porté sur l'équation du pantographe et différentes formes de cette équation ont vu le jour :

1. L'équation du pantographe non autonome :

$$\begin{cases} y'(t) = a(t)y(t) + b(t)y(\lambda t), & t \geq 0 \\ y(0) = \bar{y}, \end{cases} \quad (1.2)$$

Où :

$a(t)$ et $b(t)$ sont des fonctions continues à valeurs complexes et $\lambda \in (0, 1)$ est une constante fixe [5].

Nous étendons également notre analyse à l'équation neutre

$$y'(t) = a(t)y(t) + by(\lambda t) + c(t)$$

Où :

$c(t)$ est également une fonction continue à valeurs complexes.

2. L'équation de pantographe de second ordre :

$$y''(z) - ay'(z) - by(z) + \lambda y(\alpha z) = 0 \quad (1.3)$$

Où :

z est complexe, $\alpha > 0$, $a > 0$ et $b > 0$ sont des constantes et $\lambda \neq 0$ est un paramètre réel ou complexe [6].

3. L'équation multi-pantographe :

$$\begin{cases} u'(t) = \lambda u(t) + \sum_{i=1}^n \mu_i u(q_i t) \\ u(0) = u_0 \end{cases} \quad (1.4)$$

Où :

$0 < q_n < q_{n-1} < \dots < q_1 < 1$ et $\lambda, \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n, u_0 \in \mathbb{C}$ [7].

4. L'équation du pantographe non homogène :

$$\begin{cases} u'(t) = \sum_{i=1}^m \lambda_i(t) u(q_i t) + f(t), \quad t \in [0, T], \\ u(0) = 0, \end{cases} \quad (1.5)$$

Où :

$0 < q_i \leq 1$ et λ_i sont des fonctions continues sur $[0, T]$ pour $i = 1, \dots, m$ et f est intégrable au sens de Riemann [8].

conclusion

Le pantographe est un système articulé, qui possède sa propre dynamique. Dans le but d'obtenir des modèles fiables de ce système pour une analyse numérique précise, une identification des modèles de pantographes a été présentée dans ce chapitre.

Le modèle mathématique de ce système comprend la dynamique du pantographe. Dans le processus de recherche de la solution, une équation différentielle à retard a été produite, ce type d'équation différentielle à retard est connu sous le nom d'équation du pantographe.

Notre travail se porte sur la résolution numérique de l'équation du pantographe non homogène (1.5).

La méthode décompositionnelle d'Adomian

Introduction

La modélisation mathématique des systèmes physiques ou autres, conduit à de nombreuses équations différentielles non linéaires. La résolution de telles équations par les méthodes dites classiques, telle que les méthodes des éléments finis, des différences finis et des volumes finis, donnent des approximations de la solution en des points discrets. En outre, ces méthodes font appel à des techniques de discrétisation de l'espace et du temps et elle linéarisent souvent les équations.

Dans le début des années quatre vingt, George Adomian a présenté et développé une méthode de résolution des systèmes linéaires et non linéaires appelée méthode de décomposition d'Adomian (ADM). Elle a pour but de trouver les solutions approximatives pour une large classe d'équations différentielles ordinaires, équations aux dérivées partielles et équations intégro différentielles, en évitant la linéarisation et la discrétisation de l'espace et du temps [9] [10] [11].

Dans ce chapitre, on va décrire la méthode, étudier sa convergence et donner ensuite quelques exemples d'applications de cette méthode.

2.1 Description de la méthode

La décomposition d'Adomian est une méthode semi-analytique, elle consiste à décomposer l'opérateur non-linéaire en série dans lequel les termes sont calculés de façon récursive. L'avantage de cette méthode est qu'elle permet de résoudre par un schéma direct le problème considéré.

2.2 Principe de la méthode d'Adomian (ADM)

Considérons l'équation non linéaire sous la forme :

$$A(u) = f \quad (2.1)$$

où A est un opérateur non linéaire [annexeB] (contenant des termes linéaire et des termes non linéaires). Le terme linéaire de l'opérateur A est décomposé en $L + R$ où L est un opérateur différentiel inversible et R le résidu de l'opérateur linéaire. Le terme non linéaire de A est noté par N .

L'équation (2.1) s'écrit alors :

$$L(u) + R(u) + N(u) = f \quad (2.2)$$

Si L^{-1} est l'inverse de l'opérateur L , on a l'expression :

$$L^{-1}L(u) = L^{-1}(f) - L^{-1}R(u) - L^{-1}N(u)$$

À titre d'exemple, on prend L un opérateur différentiel d'ordre comme suit :

$$L(u) = \frac{\partial u}{\partial t}, L^{-1}(u) = \int_0^t u dt$$

On obtient :

$$L^{-1}L(u) = u - u(0)$$

Alors

$$u = u(0) + L^{-1}(f) - L^{-1}R(u) - L^{-1}N(u) \quad (2.3)$$

La méthode d'Adomian consiste à calculer la solution sous forme d'une série

$$u = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \quad (2.4)$$

En remplaçant l'équation (2.4) dans (2.3) on obtient

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = u(0) + L^{-1}(f) - L^{-1}R\left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right) - L^{-1}N\left(\sum_{n=0}^n u_n\right) \quad (2.5)$$

En utilisant la formule (2.5), on trouve :

$$\left\{ \begin{array}{l} u_0(t) = u(0) + L^{-1}(f), \\ u_1(t) = -L^{-1}R(u_0) - L^{-1}N(u_0), \\ u_2(t) = -L^{-1}R(u_1) - L^{-1}N(u_1), \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ u_{n+1}(t) = -L^{-1}R(u_n) - L^{-1}N(u_n) \end{array} \right. \quad (2.6)$$

Ainsi, La solution de (2.2) est déterminée. Pour calculer facilement les termes de $(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n)$, on utilise l'approximation [12] :

$$\Phi_n = \sum_{i=0}^{n-1} u_i, n \geq 1, \text{ avec } u = \lim_{n \rightarrow +\infty} \Phi_n(t)$$

2.3 Polynômes d'Adomian

L'étape la plus importante dans la méthode est celle du calcul des polynômes d'Adomian. On décompose le terme non linéaire

$$N(u) = N\left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right)$$

En écrivant $N(u)$ sous forme d'une série de polynômes, appelés polynômes d'Adomian. On obtient donc

$$N(u) = \sum_{i=0}^{+\infty} A_n$$

où A_n sont les polynômes d'Adomian.

Définition 2.3.1 Les polynômes d'Adomian sont définis par [11] :

$$\begin{cases} A_0(u_0) = N(u_0) \\ A_n(u_0, u_1, \dots, u_n) = \frac{1}{n!} \left[\frac{d^n}{d\lambda^n} N\left(\sum_{i=0}^n \lambda^i u_i\right) \right]_{\lambda=0} \end{cases}$$

Alors

$$A_0(u_0) = N(u_0)$$

$$A_1(u_0, u_1) = u_1 \frac{\partial}{\partial u} N(u_0)$$

$$A_2(u_0, u_1, u_2) = u_2 \frac{\partial}{\partial u} N(u_0) + \frac{1}{2!} u_1^2 \frac{\partial^2}{\partial u^2} N(u_0)$$

$$A_3(u_0, u_1, u_2, u_3) = u_3 \frac{\partial}{\partial u} N(u_0) + u_1 u_2 \frac{\partial^2}{\partial u^2} N(u_0) + \frac{1}{3!} u_1^3 \frac{\partial^3}{\partial u^3} N(u_0)$$

.

.

.

2.4 Convergence de la méthode d'Adomian

Les fondements mathématiques de la méthode sont dus au professeur Y. Cherruault et à son équipe de recherche [12] [13].

D'importants théorèmes ont été donnés impliquant des conditions suffisantes de convergence.

On considère l'équation fonctionnelle générale :

$$u - N(u) = f \quad (2.7)$$

l'équation (2.7) s'appelle la forme canonique, u est la solution recherchée, N est l'opérateur non linéaire et f une fonction donnée.

Nous savons que la méthode décompositionnelle consiste à chercher la solution u sous la forme :

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} u_n$$

Le terme non linéaire est décomposé sous la forme

$$N(u) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n$$

L'équation (2.7) s'écrit alors :

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = f + \sum_{n=0}^{\infty} A_n$$

$$\left\{ \begin{array}{l} u_0 = f \\ u_1 = A_0 \\ u_2 = A_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ u_{n+1} = A_n \end{array} \right. \quad (2.8)$$

D'après la relation (2.8) on déduit :

Théorème 2.4.1 [14] *Si la série $\sum_{n=0}^{\infty} A_n$ converge, alors la série $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ converge et la réciproque est vraie.*

Les premières preuves de convergence ont été précisées par Yves Cherruault. Elles sont basées sur la méthode du point fixe.

Notons d'abord que la méthode appliquée à (2.7) se ramène à la recherche d'une suite définie par :

$$\begin{cases} S_0 = 0 \\ S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n \end{cases}$$

et vérifiant la relation récurrente suivante :

$$S_{n+1} = N(u_0 + S_n), S_0 = 0, \quad u_0 = f, n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.9)$$

D'où le théorème suivant.

Théorème 2.4.2 [15] *Si l'opérateur N est une application contractante ($\|N\| < \delta < 1$) alors la suite $(S_n)_n$ converge vers S où S est la solution de l'équation*

$$S_{n+1} = N(u_0 + S_n)$$

Preuve De la relation (2.9) on a :

$$\begin{aligned} \|S_{n+1} - S\| &= \|N(u_0 + S_n) - N(u_0 + S)\| \\ &\leq \|N\| \|S_n - S\| \\ &\leq \delta \|S_n - S\| \\ &\leq \delta^n \|S_1 - S\| \end{aligned}$$

D'où la convergence de la suite $(S_n)_{n_n}$

Par ailleurs, on a

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n = \sum_{n=0}^{\infty} u_n$$

Comme la série $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ est convergente d'après le théorème (2.5.1), alors on a le résultat suivant

Corollaire 2.4.3 *Si N est un opérateur contractant, alors les séries des u_n et des A_n sont convergentes.*

De plus $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ est solution de l'équation canonique (2.7).

2.5 Exemples d'équations différentielles

Exemple 2.5.1 Soit l'équation [16]

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} + u^2 = -1 \\ u(0) = 0 \end{cases} \quad (2.10)$$

Que l'on écrit sous la forme

$$\begin{cases} L(u) + N(u) = f \\ u(0) = 0 \end{cases} \quad (2.11)$$

Avec

$$L(\cdot) = \frac{d(\cdot)}{dt}, \quad L^{-1}(\cdot) = \int_0^t (\cdot) ds, \quad N(u) = u^2, \quad f(t) = -1$$

Comme

$$Lu = f - N(u)$$

Alors

$$L^{-1}L(u) = L^{-1}(f) - L^{-1}N(u),$$

Où

$$L^{-1}L(u) = u - u(0)$$

On cherche la solution sous la forme

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} u_n$$

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} u_n = u(0) + L^{-1}(f) - L^{-1} \left(\sum_{n=0}^{\infty} A_n \right)$$

C'est à dire

$$\begin{cases} u_0 = u(0) - L^{-1}(f) \\ u_{n+1} = -L^{-1}A_n, \quad n \geq 0 \end{cases}$$

où

$$A_n(u_0, u_1, \dots, u_n) = \frac{1}{n!} \left[\frac{d^n}{d\lambda^n} N \left(\sum_{i=0}^n \lambda^i u_i \right) \right]_{\lambda=0}$$

Alors par identification, on obtient :

$$\begin{cases} u_0 = u(0) - L^{-1}(f) = -t \\ u_1 = -L^{-1}A_0 = -L^{-1}(t^2) = -\frac{t^3}{3} \\ u_2 = -L^{-1}A_1 = -L^{-1}(2u_0u_1) = -\frac{2t^5}{15} \\ u_3 = -L^{-1}A_2 = -L^{-1}(u_1^2 + 2u_0u_2) = -\frac{17t^7}{315} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{cases}$$

La solution est donc

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} u_n = - \left[t + \frac{t^3}{3} + \frac{2t^5}{15} + \frac{17t^7}{315} + \dots \right]$$

On remarque que l'expression

$$- \left[t + \frac{t^3}{3} + \frac{2t^5}{15} + \frac{17t^7}{315} + \dots \right]$$

est le développement limité de la fonction $u(t) = -\tan(t)$

Donc la solution exacte est

$$u = -\tan(t)$$

Exemple 2.5.2 Soit l'équation [17]

$$\begin{cases} u'(x) - u(x) = x^2 \\ u(0) = -2 \end{cases} \quad (2.12)$$

On a

$$Lu = u'(x),$$

$$R(u) = -u(x),$$

$$N(u) = 0$$

$$f(x) = x^2$$

Le problème (2.12) est équivalent au problème suivant :

$$\begin{cases} Lu = R(u) + f \\ u(0) = -2 \end{cases} \quad (2.13)$$

Où

$$L^{-1}(\cdot) = \int_0^t (\cdot) ds$$

Alors

$$L^{-1}Lu = L^{-1}R(u) + L^{-1}f$$

Donc

$$u = \sum_{n \geq 0} u_n = u(0) + L^{-1}x^2 - L^{-1} \sum_{n \geq 0} u_n$$

Cela veut dire que

$$\begin{cases} u_0 = u(0) - L^{-1}(f) \\ u_{n+1} = L^{-1}u_n, \quad n \geq 0 \end{cases}$$

Par identification on obtient :

$$\begin{cases} u_0 = u(0) + L^{-1}x^2 = -2 + \frac{x^3}{3} \\ u_1 = L^{-1}(u_0) = -2x + \frac{x^4}{12} \\ u_2 = L^{-1}(u_1) = -x^2 + \frac{x^5}{60} \\ u_3 = L^{-1}(u_2) = -\frac{x^3}{3} + \frac{x^6}{360} \\ \cdot \\ \cdot \\ u_n = -2\frac{x^n}{n!} + 2\frac{x^{n+3}}{(n+3)!} \end{cases}$$

D'où :

$$u = \sum_{n \geq 0} u_n = -2 - 2x - x^2$$

Qui est la solution exacte de cette équation différentielle.

Exemple 2.5.3 Soit l'équation différentielle non linéaire suivante [17] :

$$\begin{cases} u'(x) - e^{u(x)} = 0 \\ u(0) = 0 \end{cases} \quad (2.14)$$

L'équation (2.14) est équivalente à

$$\begin{cases} Lu = N(u) \\ u(0) = 0 \end{cases}$$

Où

$$Lu = u'(x), \quad N(u) = e^{u(x)}$$

Alors

$$L^{-1}Lu = L^{-1}(e^u)$$

On a

$$\sum_{n \geq 0} u_n = u(0) + L^{-1} \left(\sum_{n \geq 0} A_n = 0 + L^{-1} \sum_{n \geq 0} A_n \right)$$

Les polynômes d'Adomian et les termes de la solution sont :

$$u_0 = 0$$

$$A_0 = N(u_0) = e^{u_0} = 1$$

$$u_1 = L^{-1}(A_0) = x$$

$$A_1 = u_1 N^{(1)}(u_0) = u_1 = x$$

$$u_2 = L^{-1}(A_1) = \frac{x^2}{2}$$

$$A_2 = u_2 N^{(1)}(u_0) + \frac{1}{2!} u_1^2 N^{(2)}(u_0)$$

$$A_2 = u_2 + \frac{1}{2} u_1^2 = \frac{x^2}{2} + \frac{x^2}{2} = x^2$$

$$u_3 = L^{-1}(A_2) = \frac{x^3}{3}$$

$$A_3 = u_3 N^{(1)}(u_0) + u_1 u_2 N^{(2)}(u_0) + \frac{1}{3!} u_1^3 N^{(3)}(u_0) = x^3$$

$$u_4 = L^{-1}(A_3) = \frac{x^4}{4}$$

.

.

.

Alors la solution est donnée par :

$$u = \sum_{n \geq 0} u_n = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} \dots$$

Conclusion

La méthode de décomposition d'Adomian permet de résoudre des équations différentielles linéaires et non linéaires et elle permet aussi de donner la solution sous forme d'une série avec des composants faciles à calculer.

L'utilisation de cette méthode se faisait assez difficilement du fait de la difficulté de l'obtention des polynômes dans le cas où le terme non linéaire dépend de plusieurs variables. Le manque de logiciels informatiques calculant les polynômes d'Adomian (même pour le cas d'une variable) handicapait fortement la méthode.

Le chapitre suivant est consacré à la résolution numérique de l'équation du pantographe par la méthode d'Adomian (ADM).

Résolution numérique de l'équation du pantographe

Introduction

L'équation du pantographe est une équation différentielle qui se pose dans des différents domaines des mathématiques pures et appliquées, comme les systèmes dynamiques, la probabilité, la mécanique et l'électrodynamique.

Dans ce chapitre, on va étudier l'équation du pantographe non homogène en utilisant la méthode de décomposition d'Adomian. Cette dernière est basée sur la recherche d'une solution sous la forme d'une série avec des composants faciles à calculer.

Ensuite, on va montrer que la suite Φ_n obtenue par cette méthode converge vers la résolution exacte de notre équation.

A la fin, on donnera quelques exemples avec des solutions analytiques et une simulation numérique pour montrer l'efficacité de la méthode décrite dans la section précédente pour résoudre notre problème.

3.1 La décomposition d'Adomian

Soit l'équation du pantographe non homogène suivante :

$$u'(t) = \sum_{i=1}^m \lambda_i(t)u(q_i t) + f(t), u(0) = 0, t \in [0, T], \quad (3.1)$$

L'équation (3.1) est équivalente à l'équation suivante :

$$L(u(t)) = \sum_{i=1}^m \lambda_i(t)u(q_it) + f(t) \quad (3.2)$$

On applique l'opérateur inverse L^{-1} des deux côtés de l'équation (3.2), on obtient :

$$L^{-1}(Lu(t)) = L^{-1}\left(\sum_{i=1}^m \lambda_i(t)u(q_it)\right) + L^{-1}(f(t)) \quad (3.3)$$

Alors

$$u(t) = u(0) + L^{-1}\left(\sum_{i=1}^m \lambda_i(t)u(q_it)\right) + L^{-1}(f(t)) \quad (3.4)$$

La solution recherchée de l'équation (3.1) s'écrit sous la forme de série :

$$u(t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(t) \quad (3.5)$$

En remplaçant (3.5) dans (3.4), on obtient :

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(t) = u(0) + L^{-1}\left(\sum_{i=1}^m \lambda_i(t)u(q_it)\right) + L^{-1}(f(t)) \quad (3.6)$$

Maintenant, en utilisant la procédure de la décomposition d'Adomian, on obtient les composants u_n par la relation de récurrence suivante :

$$u_0(t) = u(0) + L^{-1}(f(t)), \quad (3.7)$$

$$u_n(t) = L^{-1}\left(\sum_{i=1}^m \lambda_i(t)u(q_it)\right), \quad n \geq 0 \quad (3.8)$$

L'approximation à n termes de la solution est définie par

$$\Phi_n(t) = \sum_{k=0}^n u_k(t) \text{ et } u = \lim_{n \rightarrow +\infty} \Phi_n(t)$$

Dans la section suivante, on va étudier la convergence de la méthode de décomposition d'Adomian pour résoudre l'équation (3.1).

3.2 Étude de la convergence

Dans cette section, on va montrer que la suite de fonctions $(\Phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ obtenue par la méthode de décomposition d'Adomian converge vers le solution exacte de l'équation (3.1).

En utilisant la définition (3.7), on a

$$|u_0(t)| \leq R, t \in [0, T] \quad (3.9)$$

$$|\lambda_i(t)| \leq L_i, t \in [0, T], 1 \leq i \leq m \quad (3.10)$$

Maintenant, on a le résultat suivant :

Théorème 3.2.1 *La suite de fonctions $(\Phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[0, T]$ vers une fonction $u(t)$ pour laquelle l'équation (3.1) est satisfaite. De plus, l'estimation de l'erreur est donnée par : [8]*

$$|u(t) - \Phi_n(t)| \leq \frac{R(mLtq^{n/2})^{n+1} \exp(mLtq^{n/2})}{(n+1)!} \quad (3.11)$$

où

$$q = \max\{q_1, \dots, q_m\}, L = \max\{L_1, \dots, L_m\} \text{ et } n \leq 0$$

Preuve La preuve de ce théorème se fait en trois étapes.

Étape 1 : Montrons que $\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in [0, T]$, on a

$$|u_n(t)| \leq R(mL)^n \frac{t^n}{n!} q^{n(n-1)/2}$$

Pour $n = 0$, par (3.7), on a

$$|u_0(t)| \leq R, t \in [0, T]$$

Supposons que pour n fixé on a

$$|u_n(t)| \leq R(mL)^n \frac{t^n}{n!} q^{n(n-1)/2}$$

et montrons que

$$|u_{n+1}(t)| \leq R(mL)^{n+1} \frac{t^{n+1}}{(n+1)!} q^{n(n+1)/2}$$

Soit $t \in [0, T]$, alors par (3.8), on a

$$u_{n+1}(t) = \int_0^t \left(\sum_{i=1}^m \lambda_i(s) u(q_i s) \right) ds$$

Ce qui implique que

$$\begin{aligned} |u_{n+1}(t)| &\leq R(mL)^n n! q^{n(n-1)/2} \int_0^t s^n ds \\ &\leq R(mL)^n n! q^{n(n-1)/2} mL q^n \int_0^t s^n ds \end{aligned}$$

$$\leq R(mL)^{n+1} \frac{t^{n+1}}{(n+1)!} q^{n(n+1)/2}$$

Par conséquent, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in [0, T], |u_n(t)| \leq R(mL)^n \frac{t^n}{n!} q^{n(n-1)/2}$$

On a $0 \leq q_i \leq 1$, donc $|u(t)| \leq \frac{R(mLt)^n}{n!} \leq \frac{R(mLT)^n}{n!}$. Puisque $\sum_{n=0}^{\infty} R \frac{(mLT)^n}{n!}$ est convergent vers $R \exp^{mLT}$. D'après l'étape 1 et en utilisant le test de Weierstrass, la suite $\sum_{n=0}^{\infty} u_n(t)$ est uniformément convergente sur $[0, T]$.

On peut poser par définition

$$u(t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(t)$$

Étape 2 : Montrons maintenant que $u(t)$ est la solution de l'équation (3.1).

En utilisant l'équation (3.7) et (3.8), on a

$$u'_0(t) = f(t),$$

et

$$u'_n(t) = \sum_{i=1}^m \lambda_i(t) u_{n-1}(q_i t), \quad n \geq 1. \quad (3.12)$$

Par l'égalité (3.12), la convergence uniforme de $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ implique la convergence uniforme de $\sum_{n=0}^{\infty} u'_n(t)$. On a

$$\begin{aligned} u'(t) &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n(t) \right)' = \sum_{n=0}^{\infty} u'_n(t) \\ &= f(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^m \lambda_i(t) u_{n-1}(q_i t) \\ &= f(t) + \sum_{i=1}^m \lambda_i(t) \sum_{n=0}^{\infty} u_n(q_i t) \\ &= f(t) + \sum_{i=1}^m \lambda_i(t) u(q_i t). \end{aligned}$$

et puisque, $u_0(0) = u_0$ et $u_n(0) = 0$ pour $n \geq 1$, alors la condition $u(0) = u_0$ est satisfaite. donc $u(t)$ est la solution du problème (3.1).

Étape 3 : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in [0, T]$, on a

$$\begin{aligned}
 |u(t) - \Phi_n(t)| &= \left| \sum_{k=0}^{\infty} u_k(t) - \sum_{k=0}^n u_k(t) \right| = \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(t) \right| \\
 &\leq R \sum_{k=n+1}^{\infty} m^k L^k q^{k(k-1)/2} \frac{t^k}{k!} \\
 &\leq R \sum_{k=n+1}^{\infty} m^k L^k q^{kn/2} \frac{t^k}{k!} \\
 &\leq R \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(mLtq^{n/2})^k}{k!}
 \end{aligned}$$

Cependant, en utilisant le théorème de Taylor [annexe C], il existe $\xi \in [0, t]$ tel que

$$Re^{mLtq^{n/2}} = R \sum_{k=0}^n \frac{(mLtq^{n/2})^k}{k!} + R \frac{(mLtq^{n/2})^{n+1} e^{mL\xi q^{n/2}}}{(n+1)!}$$

Or

$$R \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(mLtq^{n/2})^k}{k!} = R \sum_{k=0}^n \frac{(mLtq^{n/2})^k}{k!} + R \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(mLtq^{n/2})^k}{k!}$$

ainsi on a

$$\begin{aligned}
 R \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(mLtq^{n/2})^k}{k!} &= R \frac{(mLtq^{n/2})^{n+1} e^{mL\xi q^{n/2}}}{(n+1)!} \\
 &\leq R \frac{(mLtq^{n/2})^{n+1} e^{mLq^{n/2}}}{(n+1)!}
 \end{aligned}$$

d'où

$$|u(t) - \Phi_n(t)| \leq \frac{R(mLtq^{n/2})^{n+1} \exp(mLtq^{n/2})}{(n+1)!}$$

3.3 Application numérique

Dans cette section, on va donner quelques exemples pour résoudre l'équation (3.1) avec des solutions analytiques et numériques pour montrer l'efficacité de la méthode .

Exemple 3.3.1 *Considérons l'équation (3.1) avec [8]*

$$\begin{cases} m = 3, \\ \lambda_1(t) = 1, \quad \lambda_2(t) = -2\cos(t/3) \quad \lambda_3 = 2\sin(t/3), \\ q_1 = 1/3, \quad q_2 = 1/6, \quad q_3 = 1/6, \\ f(t) = \cos(2t) - \sin(2t) - (1/2)\sin(2/3) + (1/2)\cos((2/3)t) \end{cases}$$

Et la condition initiale :

$$u(0) = 1/2$$

La solution exacte de cette équation est

$$u(t) = \frac{1}{2} (\cos(2t) + \sin(2t))$$

En utilisant les équation (3.7) et (3.8), on obtient

$$\begin{aligned} u_0(t) &= u(0) + L^{-1}(f(t)), \\ &= \frac{1}{2} + \int_0^t \left(\cos(2s) - \sin(2s) - \frac{1}{2} \sin\left(\frac{2}{3}s\right) + \frac{1}{2} \cos\left(\frac{2}{3}s\right) \right) ds, \\ &= \cos(t)(\sin(t) + \cos(t)) + \left(\frac{3}{4}\right) \cos\left(\frac{2}{3}t\right) + \left(\frac{3}{4}\right) \sin\left(\frac{2}{3}t\right) - \frac{5}{4} \end{aligned}$$

et

$$u_n(t) = \int_1^t \left(u_{n-1}\left(\frac{1}{3}\right) s - 2\cos\left(\frac{s}{3}\right) u_{n-1}\left(\frac{s}{6}\right) + 2\sin\left(\frac{s}{3}\right) u_{n-1}\left(\frac{s}{6}\right) \right) ds$$

Calculons maintenant u_n pour obtenir les n approximations Φ_n .

Résultat 3.3.2 Pour $n = 3, 4$, les résultats numériques obtenus par ces approximations sont résumés dans les tableaux (3.1) et (3.2).

1. Pour $n=3$:

Le tableau suivant présente la solution exacte $u(t)$, la solution approximative $\Phi_n(t)$ et l'erreur absolue $|u(t) - \Phi_n(t)|$.

TABLE 3.1: La solution approximative Φ_n et l'erreur absolue $|u(t) - \Phi_n(t)|$ pour $n=3$

t	$u(t)$	Φ_n	$ u(t) - \Phi_n(t) $
0.05	0.54741879096	0.547418790962500	$7.2608585810E - 14$
0.10	0.58936795431	0.589367954320484	$2.3325785747E - 12$
0.15	0.62542834789	0.625428347911253	$1.7779777650E - 11$
0.20	0.65523966815	0.655239668230975	$7.5206729732E - 11$
0.25	0.67850405024	0.678504050477672	$2.3038437824E - 10$
0.30	0.69498904415	0.694989044727815	$5.7545779252E - 10$
0.35	0.70452993726	0.704529938509651	$1.2485616984E - 9$
0.40	0.70703140012	0.707031402567001	$2.4436570544E - 9$
0.45	0.70246843894	0.702468443369672	$4.4205983318E - 9$
0.50	0.69088664533	0.690886652853453	$7.5154346079E - 9$
0.55	0.67240174074	0.672401752894456	$1.2150949912E - 8$
0.60	0.64719842022	0.647198439069398	$1.8847448046E - 8$
0.65	0.61552850702	0.615528535254678	$2.8233787308E - 8$
0.70	0.57770843644	0.577708477503019	$4.1058668465E - 8$
0.75	0.53411609413	0.534116152338058	$5.8202179298E - 8$
0.80	0.48518704037	0.485187121057711	$8.0687602765E - 8$
0.85	0.43141015807	0.431410267771962	$1.0969348973E - 7$
0.90	0.37332276809	0.373322914658554	$1.4656599955E - 7$
0.95	0.31150526041	0.311505453243470	$1.9283151420E - 7$
1.00	0.24657529513	0.246575545348795	$2.5020952565E - 7$

Les approximations Φ_n et l'erreur $|u(t) - \Phi_n(t)|$ pour $n = 3$ sont tracées dans les figures (3.1) et (3.2).

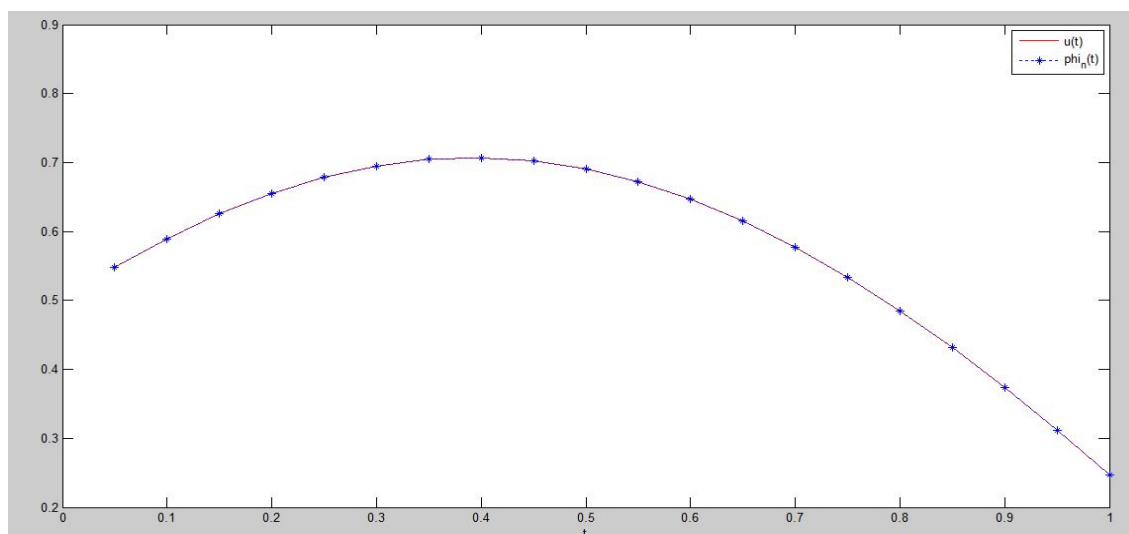


FIGURE 3.1: Tracé de la solution exacte $(u(t))$ et la solution approximative $\Phi_n(t)$ pour $n = 3$

la superposition des deux graphes $u_n(t)$ et $\Phi_n(t)$ montre clairement que les deux solutions (exacte et approximative) sont presque égales, d'où l'efficacité de la méthode.

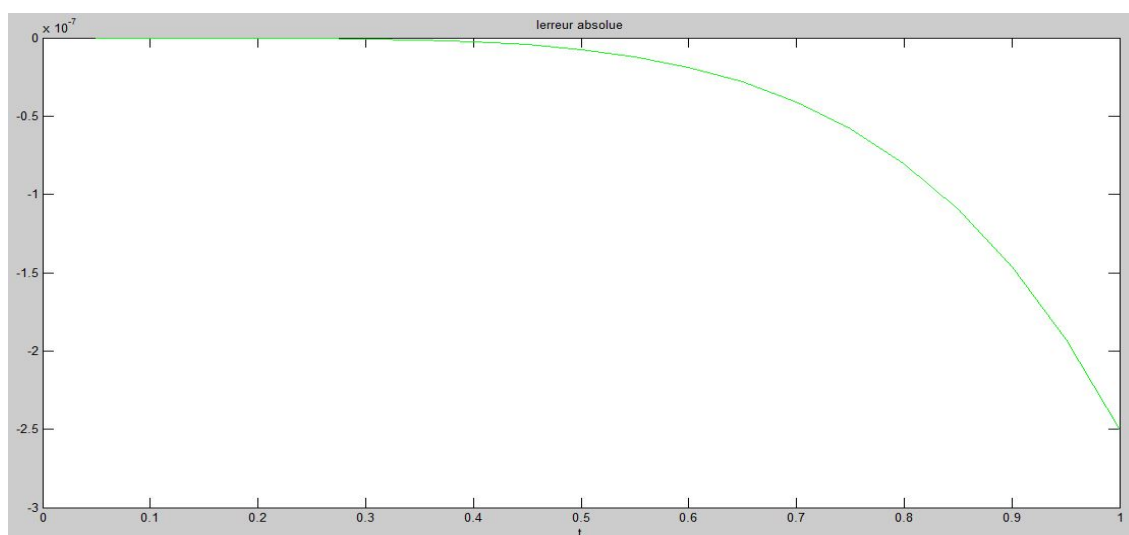


FIGURE 3.2: Tracé de la fonction d'erreur $|u(t) - \Phi_n(t)|$ pour $n = 3$

La figure (3.2) montre que l'erreur $|u(t) - \Phi_n(t)|$ est petite et inférieure à 10^{-7} .

2. Pour $n=4$:

De même que pour $n=3$, la solution exacte $u(t)$, la solution approximative Φ_n

et l'erreur absolue $|u(t) - \Phi_n(t)|$ sont montrés dans le tableau (3.2).

TABLE 3.2: La solution exacte, la solution approximative et l'erreur absolue $|u(t) - \Phi_n(t)|$ pour $n=4$

t	$u(t)$	Φ_n	$ u(t) - \Phi_n(t) $
0.05	0.54741879096	0.547418790962427	$2.427E - 16$
0.10	0.58936795431	0.589367954318152	$1.11022302462516E - 16$
0.15	0.62542834789	0.625428347893474	$1.66533453693773E - 15$
0.20	0.65523966815	0.655239668155777	$9.54791801177635E - 15$
0.25	0.67850405024	0.678504050247325	$3.67483821150927E - 14$
0.30	0.69498904415	0.694989044152467	$1.09912079437891E - 13$
0.35	0.70452993726	0.704529937261367	$2.77777800761214E - 13$
0.40	0.70703140012	0.707031400123964	$6.20059559253150E - 13$
0.45	0.70246843894	0.702468438950334	$1.25977006604217E - 12$
0.50	0.69088664533	0.690886645340394	$2.37576625039537E - 12$
0.55	0.67240174074	0.672401740747724	$4.21795931515589E - 12$
0.60	0.64719842022	0.647198420229075	$7.12496728283440E - 12$
0.65	0.61552850702	0.615528507032433	$1.15426557201204E - 11$
0.70	0.57770843644	0.577708436462396	$1.80456760645598E - 11$
0.75	0.53411609413	0.534116094163238	$2.73597811073500E - 11$
0.80	0.48518704037	0.485187040410496	$4.03879152344189E - 11$
0.85	0.43141015807	0.431410158136708	$5.82364712009564E - 11$
0.90	0.37332276809	0.373322768174799	$8.22450996196267E - 11$
0.95	0.31150526041	0.311505260525974	$1.14018128272164E - 10$
1.00	0.24657529513	0.246575295294728	$1.55458007577991E - 10$

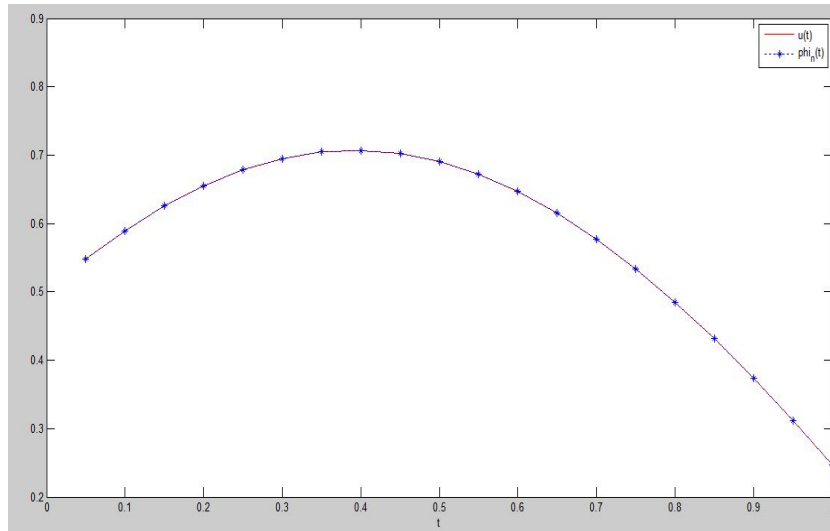


FIGURE 3.3: Tracé de la solution exacte et la solution approximative $\Phi_n(t)$ pour $n = 4$

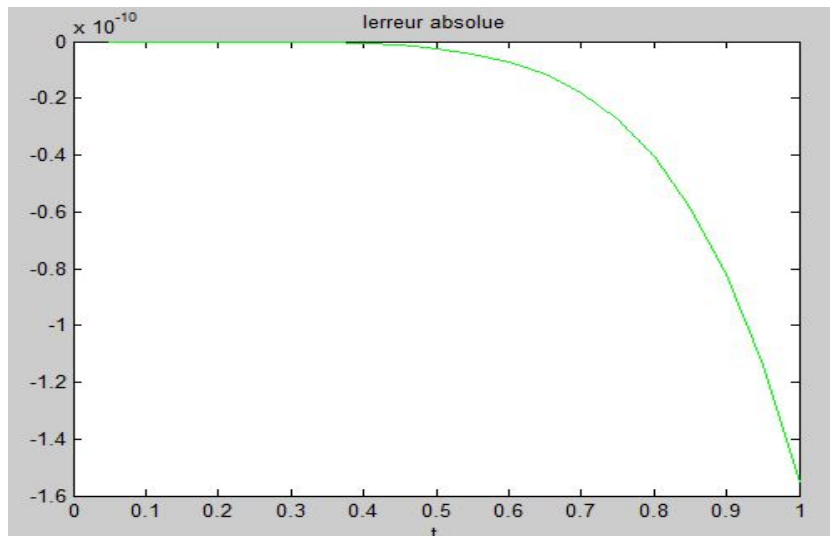


FIGURE 3.4: Tracé de la fonction d'erreur $|u(t) - \Phi_n(t)|$ pour $n = 4$

3.3.1 Exemple 2

Dans cet exemple [8], supposons l'équation (3.1) avec :

$$\begin{cases} m = 4, \\ \lambda_1 = 3e^{-(\frac{5}{6})t}, \quad \lambda_2 = 2e^{-(\frac{2}{3})t}, \quad \lambda_3 = 2e^{-(\frac{1}{2})t}, \quad \lambda_4 = -3e^{-(\frac{3}{4})t} \\ q_1 = \frac{1}{6}, \quad q_2 = \frac{1}{3}, \quad q_3 = \frac{1}{2}, \quad q_4 = \frac{1}{4} \\ f(t) = -\frac{1}{144}e^{-t}(197t^2 - 12t - 144) \end{cases}$$

Et la condition initiale est

$$u(0) = 0,$$

Pour lequel la solution exacte est

$$u(t) = (t^2 + t)e^{-t}.$$

Nous appliquons maintenant la décomposition d'Adomian pour résoudre l'équation (3.1). En utilisant les équations (3.7) et (3.8), on obtient

$$u_0(t) = \int_0^t \left(-\frac{1}{144} e^{-s} (197s^2 - 12s - 144) \right) ds,$$

$$u_n(t) = \int_0^t \left(3e^{-(\frac{5}{6})s} u_{n-1} \left(\frac{1}{6}s \right) + 2e^{-(\frac{2}{3})s} u_{n-1} \left(\frac{1}{3}s \right) + 2e^{-(\frac{1}{2})s} u_{n-1} \left(\frac{1}{2}s \right) - 3e^{-(\frac{3}{4})s} u_{n-1} \left(\frac{1}{4}s \right) \right) ds$$

Résultat 3.3.3 Similaire à l'exemple 1, les résultats numériques obtenus par ces approximations sont résumés dans les tableaux (3.3) et (3.4). Aussi les approximations Φ_n et l'erreur $|u(t) - \Phi_n(t)|$ pour $n = 3, 4$ sont tracées.

1. Pour $n=3$:

TABLE 3.3: La solution approximative et l'erreur absolue $|u(t) - \Phi_n(t)|$ pour $n=3$

t	$u(t)$	Φ_n	$ u(t) - \Phi_n(t) $
0.05	0.04993954478	0.0499395447753193	$1.0968143060E - 11$
0.10	0.09953211598	0.0995321156448047	$3.3915084629E - 10$
0.15	0.14847212593	0.148472123444593	$2.4887293337E - 9$
0.20	0.19649538073	0.196495370603843	$1.0134872635E - 8$
0.25	0.24337524470	0.243375214819265	$2.9890549368E - 8$
0.30	0.28891910606	0.288919034183176	$7.1882693741E - 8$
0.35	0.33296512239	0.332964972229664	$1.5016242810E - 7$
0.40	0.37537922577	0.375378942808342	$2.8297161613E - 7$
0.45	0.41605236893	0.416051876047406	$4.9288580133E - 7$
0.50	0.45489799478	0.454897187932927	$8.0685154857E - 7$
0.55	0.49184971334	0.491848457215019	$1.2561343454E - 6$
0.60	0.52685917065	0.526857294458746	$1.8761915193E - 6$
0.65	0.55989409557	0.559891389093119	$2.7064830709E - 6$
0.70	0.59093651151	0.590932721279868	$3.7902319095E - 6$
0.75	0.61998110047	0.619975926328899	$5.1741436831E - 6$
0.80	0.64703370832	0.647026800233579	$6.9080952201E - 6$
0.85	0.67210998048	0.672100935689839	$9.0447995340E - 6$
0.90	0.69523411815	0.695222478702055	$1.1639454369E - 5$
0.95	0.71643774594	0.716422996569073	$1.4749380390E - 5$
1.00	0.73575888234	0.735740448688567	$1.8433654317E - 5$

La figure (3.5) nous donne les deux courbes qui représentent la solution exacte $u_n(t)$ et la solution approximative $\Phi_n(t)$ et la figure (3.6) présente l'erreur absolue $|u(t) - \Phi_n(t)|$.

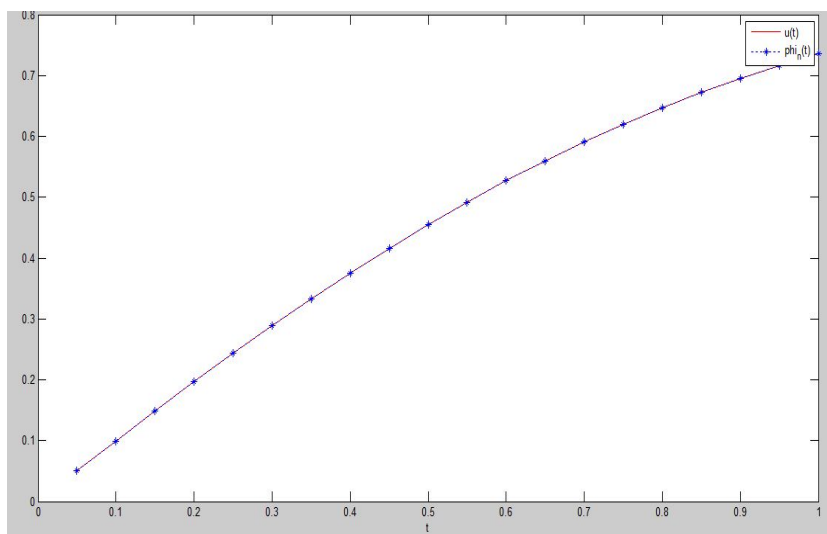


FIGURE 3.5: *Tracé de la solution exacte et la solution approximative $\Phi_n(t)$ pour $n = 3$*

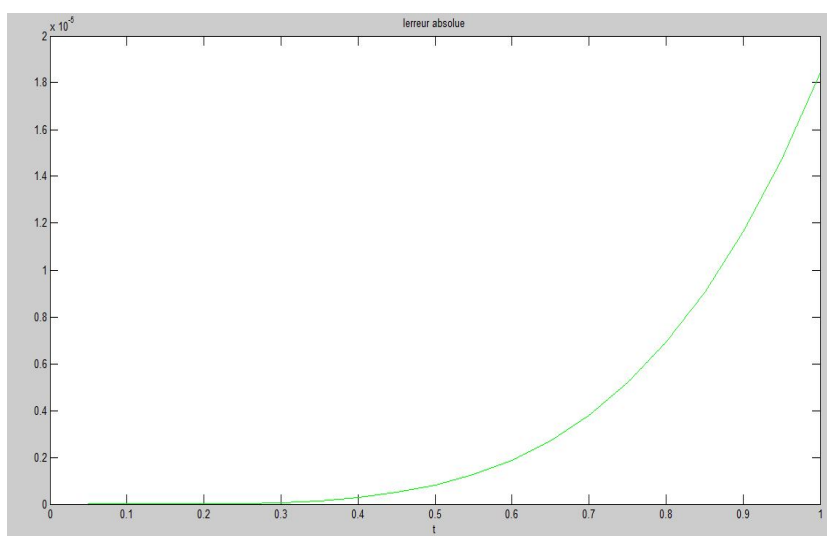


FIGURE 3.6: *Tracé de la fonction d'erreur $|u(t) - \Phi_n(t)|$ pour $n = 3$*

2. Pour n=4 :

TABLE 3.4: La solution approximative et l'erreur absolue $|u(t) - \Phi_n(t)|$ pour $n=4$

t	$u(t)$	Φ_n	$ u(t) - \Phi_n(t) $
0.05	0.04993954478	0.0499395447862841	$3.37230243729891E - 15$
0.10	0.09953211598	0.0995321159837476	$2.07903139148868E - 14$
0.15	0.14847212593	0.148472125931039	$2.28378427280518E - 12$
0.20	0.19649538073	0.196495380726341	$1.23742127655646E - 11$
0.25	0.24337524470	0.243375244664291	$4.55225579454321E - 1$
0.30	0.28891910606	0.288919105934777	$1.31092803279387E - 10$
0.35	0.33296512239	0.332965122073276	$3.18816140154610E - 10$
0.40	0.37537922577	0.375379225094804	$0.685154488699879E - 10$
0.45	0.41605236893	0.416052367593481	$1.33972627436307E - 9$
0.50	0.45489799478	0.454897992352890	$2.43158515544906e - 9$
0.55	0.49184971334	0.491849709194182	$4.15518297547379E - 9$
0.60	0.52685917065	0.526859163894380	$6.75588518461723E - 9$
0.65	0.55989409557	0.559894085041254	$1.05349359236229E - 8$
0.70	0.59093651151	0.590936495657979	$1.58537983852014E - 8$
0.75	0.61998110047	0.619981077334763	$2.31378192161458E - 8$
0.80	0.64703370832	0.647033675449616	$3.28791828207997E - 8$
0.85	0.67210998048	672109934850231	$4.56391420211588e - 8$
0.90	0.69523411815	0.695234056106900	$6.20495246295150E - 8$
0.95	0.71643774594	0.716437663135941	$8.28135224839599E - 8$
1.00	0.73575888234	0.735758773637096	$1.08705788703922E - 7$

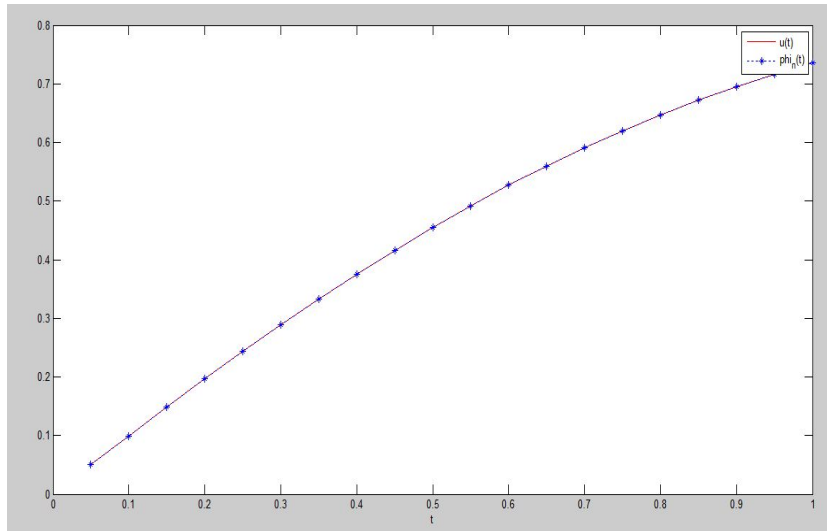


FIGURE 3.7: Tracé de la solution exacte et la solution approximative $\Phi_n(t)$ pour $n = 4$

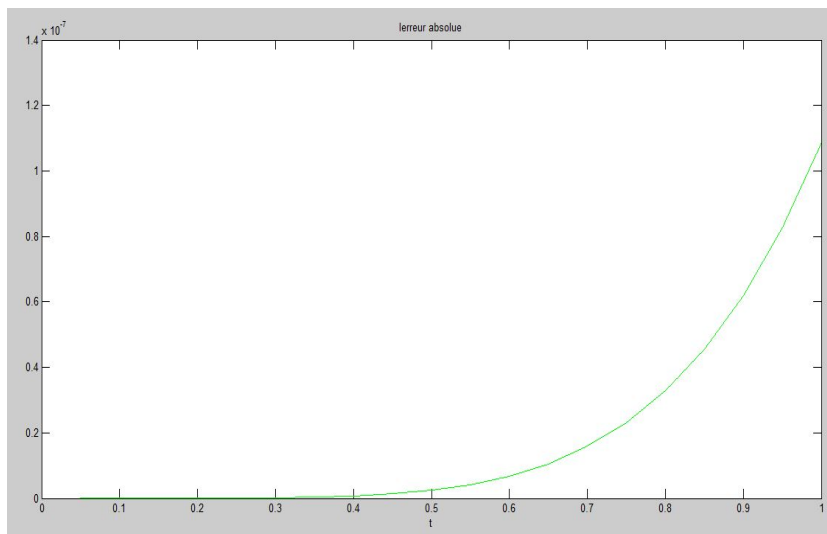


FIGURE 3.8: Tracé de la fonction d'erreur $u(t) - \Phi_n(t)$ pour $n = 4$

On remarque que l'erreur $|u(t) - \Phi_n(t)|$ est inférieure à 10^{-5} au bout des premières itérations. Si on veut augmenter la précision il faut donc prendre plusieurs termes de la série $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Conclusion

Dans ce chapitre, la méthode de décomposition d'Adomian a été appliquée pour résoudre l'équation du pantographe. Les résultats numériques obtenus sont approximatifs à la solution exacte. Cela montre que l'approche est efficace et présente des résultats assez prometteurs et elle donne un haut degré de précision avec seulement quelques itérations.

CONCLUSION ET PERSPECTIVES

Après avoir récapitulé toutes les informations rédigées au chapitre 1 sur les différents types de pantographes qui ont été utilisés, l'utilisation du pantographe asymétrique se démarque en Algérie. C'est pourquoi, parmi tous les mécanismes existants, le pantographe asymétrique est choisi comme mécanisme d'étude.

Dans ce travail de recherche, Le pantographe a été étudié. En effet, l'équation différentielle issue de la modélisation mathématique, a été résolue numériquement et analytiquement. La solution numérique a été obtenue par la méthode de décomposition d'Adomian (ADM).

La méthode que nous avons utilisée est puissante et simple à mettre en oeuvre. C'est une méthode itérative considérablement améliorée par la décomposition de l'opérateur non linéaire sous formes d'une série dont les éléments sont les polynômes d'Adomian. L'avantage de la méthode est qu'elle ne modifie pas la nature du problème puisque on n'effectue aucune linéarisation.

À titre de perspectives, ce travail de recherche nous a permis d'explorer des thèmes importants. Il serait donc souhaitable d'étendre le domaine d'études à :

- la modélisation du pantographe par le modèle multicorps ;
- Modélisation du comportement dynamique du couple pantographe-caténaire (Application à la détection de défauts dans la caténaire) ;
- L'amélioration de la qualité du captage du courant par le pantographe.

Bibliographie

- [1] W. W. Z. Y. Guangning Wu, Guoqiang Gao, *The Electrical Contact of the Pantograph-Catenary System*, 1st ed. Springer Singapore, **2019**.
- [2] M. J. D. Barbado Esteban, F. Rauter, "Modélisation multicorps de pantographes pour l'interaction pantographe-caténaire," *IUTAM BOOKSERIES*, vol. **1**, pp. **205–226**, **2006**.
- [3] D. Esteban, "Modèles de simulation pour l'étude du système caténaire rigide : Comportement de la structure et interaction dynamique pantographe-caténaire," **2017**.
- [4] A. B. T. John R. Ockendon, "La dynamique d'un système de collecte de courant pour une locomotive électrique," *Proceedings of the Royal Society A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, vol. **322**, p. **447–468**, Mai **1971**.
- [5] M. N. Guglielmi, "Stability of one-leg 2-methods for the variable coefficient pantograph equation on the quasi-geometric mesh," vol. **23**, pp. **38–421**, **2003**.
- [6] G. W. J. C. Marshall, B. van-Brunt, "A natural boundary for solutions to the second order pantograph equation," *Journal d'analyse et d'applications mathématiques*, vol. **299**, pp. **21–314**, **2004**.
- [7] L. D. S. Liu M Z, "Propriétés de la solution analytique et de la solution numérique de l'équation multi-pantographe," *Mathématiques appliquées et calcul*, vol. **155**, pp. **853–71**, **2004**.
- [8] F. M. Dehghan, "L'utilisation de la procédure de décomposition d'adomian pour résoudre une équation différentielle de retard apparaissant en électrodynamique," *Journal phys scr*, vol. **78**, p. **8**, Décembre, **2008**.
- [9] G. Adomian, *Solving Frontier Problems of Physics : The Decomposition Method //*. Kluwer Academic Publishers, **1994**.
- [10] G. Adomian, "A review of the decomposition method and some recent results for nonlinear equations," *Mathematical and Computer Modelling*, vol. **13**, p. **27**, **1990**.
- [11] G. Adomian, *Nonlinear stochastic operator equations*. Academic Press, **1986**.

-
- [12] G. A. Y. Cherruault, "Decomposition methods : A new proof of convergence," *Mathematical and Computer Modelling*, vol. **18**, p. **4**, **1993**.
- [13] B. S. Y. Cherruault, G. Saccomandi, "New results for convergence of adomian's method applied to integral equations," *Mathematical and Computer Modelling*, vol. **16**, p. **9**, **1992**.
- [14] H. S. M. D.DJAROU, S.HAMIDI, "Méthode de décomposition et contrôlabilité d'un système non linéaire," **2017**.
- [15] I.ACHOUR, "Application des polynômes dadomian," **2019**.
- [16] M. F.Hadidi, "Calcul par décomposition d'adomain de quelques modèles des ondes," **2013**.
- [17] M. CHÉRIF, "Comparaison des méthodes numériques de résolution des équations différentielles d'ordre fractionnaire," **2012**.

Annexe A

A.1 RENFE :

Norme technique de maintenance, (Pantographe)

A.2 UNE-EN 50318 :

Applications ferroviaires - Systèmes de captage du courant - Validation des simulations de l'interaction dynamique entre le pantographe et la caténaire.

La présente norme européenne spécifie les prescriptions fonctionnelles relatives à la validation des méthodes de simulation pour assurer l'acceptation mutuelle des paramètres de sortie et d'entrée ; d'un standard de résultats d'essais pour l'évaluation des méthodes de simulation de la comparaison avec des mesures ; de la comparaison entre les méthodes de simulation.

La présente norme s'applique au captage du courant d'une caténaire par les pantographes des véhicules ferroviaires.

La présente norme ne s'applique pas aux trolleybus.

Annexe B

Définition d'un opérateur

Proposition B.0.1 Soit H un espace de Hilbert et $A : H \mapsto H$ une application linéaire. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :

1. A est continue.
2. A est continue en 0.
3. Il existe $x \in H$ tel que A est continue en x .
4. Il existe une constante $c > 0$ telle que $\|Ah\| \leq c\|h\|$ pour tout $h \in H$.

Définition B.0.2 On appelle **opérateur** sur H une application linéaire continue de H dans H . On note $L(H)$ l'ensemble des opérateurs sur H . Si $A \in L(H)$, on définit sa **norme opérateur** par

$$\|A\| = \sup\{\|Ah\| : h \in H, \|h\| < 1\}$$

Annexe C

Formule de Taylor

Si une fonction $f(x)$ est définie et continue sur $[a, b]$, ainsi que ses premières dérivées, et si elle admet dans l'intervalle $]a, b[$ une dérivée d'ordre $n + 1$, alors il existe une valeur $c \in]a, b[$ pour laquelle

$$f(b) = f(a) + (b - a)f'(a) + \frac{(b - a)^2}{2!}f''(a) + \dots + \frac{(b - a)^n}{n!}f^{(n)}(a) + \frac{(b - a)^{n+1}}{(n + 1)!}f^{(n+1)}(c) \quad (\text{C.1})$$

Résumé

Dans la grande majorité des réseaux ferroviaires (le tramway dans notre cas), l'énergie électrique est fournie aux rames par le système pantographe-caténaire.

Le système pantographe-caténaire est un lien vital de la chaîne de transmission d'énergie électrique aux moteurs de traction électrique, il est donc nécessaire de bien modéliser le système pantographe. Dans ce travail de recherche, le pantographe asymétrique est modélisé par l'utilisation du modèle masse en bloc (modèle à deux masses), l'équation issue de la modélisation mathématique est une équation différentielle ordinaire. Par la suite, l'équation obtenue est traitée numériquement et analytiquement en utilisant la technique de décomposition d'Adomian qui a pour but de linéariser le terme non linéaire, dont la solution est écrite sous forme d'une série.

La comparaison entre les résultats obtenus montre un excellent accord entre la solution exacte et la solution approchée, justifiant ainsi l'efficacité et la grande précision de la méthode de décomposition d'Adomian.

Mots clés : Pantographe ; traction électrique ; modélisation ; équation différentielle ; décomposition d'Adomian.

Abstract

In the vast majority of rail networks (the tram in our case), electrical energy is supplied to the trains by the pantograph-catenary system.

The pantograph-catenary system is a vital link in the chain of transmission of electrical energy to the electric traction motors, so it is necessary to model the pantograph system properly. In this research work, the asymmetric pantograph is modeled by the use of the block mass model (two mass model), the equation resulting from the mathematical modeling is an ordinary differential equation. Subsequently, the resulting equation is processed numerically and analytically using the Adomian decomposition technique which aims to linearize the nonlinear term, whose solution is written as a series.

The comparison between the results obtained shows an excellent agreement between the exact solution and the approximate solution, thus justifying the efficiency and the high precision of Adomian's decomposition method.

Keywords: Pantograph; modelisation; electrical traction; differential equation; adomian decomposition.

ملخص

في الغالبية العظمى من شبكات السكك الحديدية (الترام في حالتنا)، يتم توفير الطاقة الكهربائية للقطارات عن طريق نظام البانتوجراف.

يعد نظام البانتوجراف رابطاً حيويًا في سلسلة نقل الطاقة الكهربائية إلى محركات الجر الكهربائية، لذلك من الضروري نمذجة البانتوجراف بشكل صحيح. في هذا البحث، تم نمذجة البانتوجراف غير المتماثل باستخدام نموذج الكتلة (نموذج الكتلتين)، والمعادلة الناتجة عن النمذجة الرياضية هي معادلة تفاضلية عادية. بعد ذلك، تتم معالجة المعادلة الناتجة عدديًا وتحليليًا باستخدام تقنية التحلل Adomian التي تهدف إلى جعل المصطلح غير الخطي خطيًا، والذي يتم كتابة حله كسلسلة.

أظهرت المقارنة بين النتائج التي تم الحصول عليها وجود اتفاق ممتاز بين الحل الدقيق والحل التقريبي، مما يبرر الكفاءة والدقة العالية لطريقة التحلل Adomian .

الكلمات المفتاحية: البانتوجراف ، طاقة الجر ، النمذجة ، معادلة تفاضلية ، تحليل أدوميان.