REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

ECOLE SUPERIEURE DES SCIENCES APPLIQUEES
--T L E M C E N--

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

المدرسة العليا في العلوم التطبيقية
-تلمسان-

DÉPARTEMENT DE LA FORMATION PRÉPARATOIRE

PREMIÈRE ANNÉE

Probabilité 1

Rappel de cours et exercices corrigés

Dr. Kada Kloucha M.

Dr. Belkheir N.

Table des matières

Introduction

Ce polycopié est destiné aux étudiants de la première année des classes préparatoires des grandes écoles et première année licence Mathématique (LMD), il comporte le module de Probabilité I. Il contient l'essentiel du cours avec des exemples. Des exercices d'applications sont proposés avec des solutions en fin de chaque chapitre pour permettre à l'étudiant de tester ses connaissances et de se préparer aux tests et aux examens finaux.
D'après nos expériences, lors de l'enseignement de ce module durant quelques années à l'école supérieure en sciences appliquées de Tlemcen (E.S.S.A.T), nous avons décidé de préparer ce polycopié qui contient toutes les notions fondamentales liées à ce module.
Vu le programme proposé par le ministère : Ce mansucrit comprend sept chapitres qui couvrent le programme du semèstre deux du programme du module Probabilité I :
Nous avons commencé la présentation de cet ouvrage par un rappel sur l'analyse combinatoire. Ensuite, nous avons présenté le reste des chapitres programmés du module Probabilité I, en respectant le contenu et l'ordre des chapitres suivant le canevas donné par le ministère.
Enfin, vu les erreurs répétées souvent dans les copies des examens de ce module, nous avons constaté que la majorité des étudiants ne donnent pas l'importance au cours et ils font des exercices en se basant directement sur les corrigés. Nous conseillons alors les étudiants de lire d'abord le cours attentivement, de faire tous les exemples cités après chaque résultat donné et enfin de passer à résoudre les exercices proposé sans retourner au corrigé. Les solutions des exercices sont utiles uniquement pour tester le niveau des efforts fournis par l'étudiant.
Finalement, nous espérons que ce document peut aider les étudiants qui veulent maîtriser bien cette partie de Probabilité.
Comme tout travail le notre reste bien évidemment perfectible, c'est pourquoi, nous saurions gré à tout lecteur de bien vouloir nous faire parvenir toute remarque ou suggestion pour améliorer notre document.

Chapitre 1

Introduction sur l'analyse combinatoire

L'analyse combinatoire traite, principalement, des problèmes de dénombrement sur des ensembles finis (E, $CardE < +\infty$), avec :
Dénombrer, c'est calculer le nombre de possibilités de grouper un certain nombre d'éléments de l'ensemble E.
Il existe divers types de groupement selon qu'on utilise tout ou une partie des éléments, qu'on considère ou non l'ordre dans lequel on les choisit, qu'on puisse ou non réutiliser les mêmes éléments.

1.1 Rappels sur les opérations sur les ensembles

1.1.1 Réunion et intersection

Définition 1.1.1. *Soient E un ensemble, A, B deux sous ensemble de E :*

1. *La réunion de deux ensembles A et B est l'ensemble des éléments appartenant à A ou B.*

$$A \cup B = \{x / x \in A \text{ ou } x \in B\}.$$

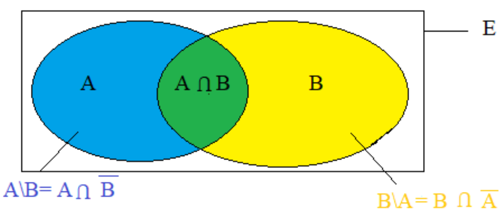

FIGURE 1.1 –

2. *L'intersection de deux ensembles A et B est l'ensemble des éléments appartenant à A et B.*
3. *A et B , sont disjoints si $A \cap B = \varnothing$.*
4. *A est une partie de l'ensemble E, le complémentaire de A dans E est l'ensemble des éléments de E qui n'appartiennet pas à A :*

$$\overline{A} = \{x \in E / x \notin A\}$$

5. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.
6. $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

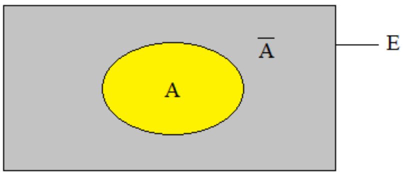

FIGURE 1.2 –

1.1.2 Produit cartésien

— Le produit cartésien des ensembles E et F est défini par

$$E \times F = \{(x, y)/x \in E \text{ et } y \in F\}$$

1.2 Cardinal

Définition 1.2.1. *On appelle cardinal d'un ensemble fini E le nombre d'éléments de E, et on le note Card(E)*

Exemple 1.2.1. *Soit E un ensemble à 4 éléments : $E = \{a, b, c, d\}$.*

$$Card(E) = 4$$

Proposition 1.2.1. *Soient E et F deux ensembles finis, alors*

1. $E \subset F \Rightarrow Card(E) \leq Card(F)$ *(* $Card(E) = Card(F)$ *si* $E = F$*)*
2. *Cardinal d'un produit cartésien :*
$$Card(E \times F) = Card(E) \times Card(F).$$
3. *Cardinal d'une réunion :*
$$Card(E \cup F) = Card(E) + Card(F) - Card(E \cap F).$$
4. *Cardinal d'une différence :*
$$Card(E \backslash F) = Card(E \cap \overline{F}) = Card(E) - Card(E \cap F).$$
5. *On note par $P(E)$ l'ensemble ayant pour éléments tous les sous-ensembles ou parties d'un ensemble E.*
$$Card(P(E)) = 2^{Card(E)}.$$

Exemple 1.2.2. *Dans l'exemple précédent (1.2.1)*

$$E = \{a, b, c, d\}$$

$$P(E) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{c, d\}, \{a, b, c\}, \{a, b, d\}, \{b, c, d\}, \{a, c, d\}, \{a, b, c, d\}\}$$

$$Card\,(P(E)) = 2^{card(E)} = 2^4 = 16.$$

1.3 Arrangement

Définition 1.3.1. *Soit n un entier naturel non nul, on appelle factorielle de n le nombre :*

$$n! = 1 \times 2 \times ... \times n.$$

Remarque 1.3.1. $0! = 1$.

Définition 1.3.2. *On appelle arrangement de p éléments parmi n éléments distincts de E($p \leq n$), tout agencement (suite ordonnée) de p éléments de E parmi n (sans répétition).*
On désigne par A_n^p le nombre de ces arrangements.

Remarque 1.3.2. *Un arrangement de E peut être interprété comme un tirage avec ordre et sans remise des éléments de E.*

Exemple 1.3.1.

1. *Une urne contenant six boules numérotées de 1 à 6. On tire* ***successivement*** *et* ***sans remise*** *deux boule de cette urne.*
   On a $E = \{B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6\}$, alors (B_1, B_2), (B_4, B_6) et (B_3, B_5), sont trois arrangements de deux éléments de E (ce sont deux 2-arrangements de E).
2. *On dispose d'un groupe de 5 personnes E = { Mohammed, Omar, Yassine, Sara, Amina} , on veut former un comité comprenant un président, un secrétaire et un trésorier.*
   Alors (Mohammed , Omar, Yassine), (Omar, Mohammed, Yassine), (Sara, Mohammed, Yassine) et (Sara, Yassine, Mohammed) sont quatre arrangements de trois éléments de E (ce sont quatre 3-arrangements de E).

Proposition 1.3.1. *Le nombre d'arragement de p éléments de E parmi n($p \leq n$), est égal à :*

$$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$$

Preuve

Pour calculer le nombre de p-arrangements de E, on a n choix pour le premier élément, $n-1$ choix pour le second, ... , $n-p+1$ choix pour le $p^{\text{ième}}$, ainsi, le nombre de $p-$arrangements de E est égal à

$$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$$

■

Exemple 1.3.2. *Si on reprend les exemples précédents , avec la question "déterminer le nombre d'arrangements possible", dans ce cas la réponse est :*

1. $A_6^2 = \frac{6!}{(6-2)!} = 120.$
2. $A_5^3 = \frac{5!}{(5-3)!} = 60.$

Définition 1.3.3. *On appelle arrangement* **avec repetition** *de p éléments parmi n toute suite ordonnée de p éléments de E parmi n.*

Proposition 1.3.2. *Le nombre d'arrangement* **avec repetition** *de p éléments parmi n , noté $\tilde{A}_n{}^p$, est égal à*

$$\tilde{A}_n{}^p = n^p.$$

Preuve

Pour calculer le nombre de p-arrangements avec repetition de E, on a n choix pour le premier élément, n choix pour le second, ..., n choix pour le $p-$ième, ainsi, le nombre de $p-$arrangements avec repetition de E est égal à

$$\tilde{A_n}^p = n^p.$$

■

Exemple 1.3.3. *Une urne contenant six boules numérotées de 1 à 6. On tire* ***successivement*** *et* ***avec remise*** *deux boule de cette urne.*
On a $E = \{B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6\}$*, alors le nombre des tirage possibles est égal à :*

$$\tilde{A_6}^2 = 6^2 = 36.$$

1.4 Permutation de n objets distincts

Définition 1.4.1. *On appelle permutation de n objets tout agencement (suite ordonnée) différent de n objets.*
On désigne par P_n *le nombre de ces permutations.*

Remarque 1.4.1. *On appelle permutation de n élément de E (* $CardE = n$*), tout arrangement de n élément de E parmi n*

Proposition 1.4.1. *Le nombre de permutation de E, est égal à*

$$P_n = A_n^n = n!.$$

Exemple 1.4.1. *On dispose d'un groupe de 3 personnes pour former un comité comprenant un président, un secrétaire et un trésorier.*
Combien de comités différents peut-on former ? réponse : $P_3 = 3! = 6$.

1.5 Combinaisons (sans répétition)

Définition 1.5.1. *On appelle combinaison de p éléments parmi n éléments* <u>*distincts*</u> *de E(* $p \leq n$ *), tout sous ensemble (ou toute partie) de E à p éléments .*

Remarque 1.5.1. *Si dans le choix de p éléments parmi n , l'ordre n'est pas important, il s'agit de combinaison.*

Proposition 1.5.1. *Le nombre de combinaison de p éléments parmi n noté* C_n^p*, est égal à :*

$$C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

Preuve

Chaque combinaison de p éléments pris parmi n éléments engendre $p!$ arragements de p éléments pris parmi n éléments.
Il résulte alors la relation suivante :

$$A_n^p = p! \times C_n^p$$

D'où le résultat

$$C_n^p = \frac{A_n^p}{p!} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

■

Exemple 1.5.1. *Si on reprend le premier exemple de (1.3.1) :*
Une urne contenant six boules numérotées de 1 à 6. On tire ***simultanément*** *deux boule de cette urne.*
Le nombre de tirages possible, dans ce cas, est égal à

$$C_6^2 = \frac{6!}{2!(6-2)!} = 15$$

Proposition 1.5.1. ***Propriétés des combinaisons :***

1. $C_n^p = C_n^{n-p}$.
2. $C_n^0 = 1$, $C_n^1 = n$, $C_n^n = 1$
3. $C_n^p = C_{n-1}^p + C_{n-1}^{p-1}$.
4. ***Formule du binôme de Newton :***

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k}$$

Preuve

1. $C_n^p = C_n^{n-p}$ car à chaque choix d'un sous ensemble de p éléments , il y a un choix d'un sous ensemble de $(n-p)$ éléments.

$$C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!} = C_n^{n-p}$$

2.

$$\begin{aligned} C_n^0 &= \frac{n!}{0!n!} = 1 \\ C_n^1 &= \frac{n!}{1!(n-1)!} = n \\ C_n^n &= \frac{n!}{n!0!} = 1. \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned} C_{n-1}^p + C_{n-1}^{p-1} &= \frac{(n-1)!}{p!(n-1-p)!} + \frac{(n-1)!}{(p-1)!(n-1-p+1)!} \\ &= \frac{(n-1)!(n-p)}{p!(n-p)(n-1-p)!} + \frac{p(n-1)!}{p(p-1)!(n-p)!} \\ &= \frac{(n-1)!(n-p) + p(n-1)!}{p!(n-p)!} \\ &= \frac{n!}{p!(n-p)!} \\ &= C_n^p. \end{aligned}$$

4. **Formule du binôme de Newton :** se démontre facilement par récurence

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k}$$

■

Le triangle de PASCAL La formule (3), permet de calculer les nombres C_n^p de proche en proche en formant le tableau suivant appelé triangle de Pascal :

n p	0	1	2	3	4	5	6
0	1						
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3	3	1			
4	1	4	6	4	1		
5	1	5	10	10	5	1	
6	1	6	15	20	15	6	1

Remarque 1.5.1. — *C_n^p n'est défini que pour $p \leq n$, on ne remplit donc pas les cases situées au-dessus de la diagonale.*

— *Tous les nombres de la diagonale sont obtenus en utilisant le résultat $C_n^n = 1$.*

— *Tous les nombres de la première colonne sont obtenus en utilisant la formule $C_n^0 = 1$*

— *Tous les autres nombres sont obtenus en utilisant La formule (3) : $C_n^p = C_{n-1}^p + C_{n-1}^{p-1}$. (exemple de calcul : $C_3^2 = C_2^2 + C_2^1 = 1 + 2 = 3$.*

Exemple 1.5.2. ‘

— *Calcul de $(a + b)^6$*
En ulisant les valeurs des coefficients dans la ligne numéro 6 du triangle de Pascal, on obtient :

$$(a + b)^6 == a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6.$$

La somme des exposants de a et b dans chaque terme est toujours égale à 6 .

— *Lorsque $a = b = 1$, on a pour tout entier n non nul : $2^n = (1 + 1)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k$*

1.6 Enoncés des exercices

Exercice 1 :
Une course de chevaux regroupe 6 éléments.

1. *Combient y-a-t-il de classements possibles ?*
2. *Combien y-a-t-il de*
   a) *Tiercés gagnants ?*
   b) *Tiercés dans le désordre ?*

Exercice 2 :
Pour accéder à un service sur Internet, vous devez taper un mot de passe de 4 caractères (lettres choisies de à z(26 caractères) ou des chiffres de 0 à 9).

1. *Combien de mots de passe peut-on créer ?*
2. *Combien de mots de passe de 2 lettres distinctes et deux chiffres différents peut-on créer ?*
3. *Combien de mots de passe de 2 lettres distinctes suivies d'un nombre de deux chiffres différents peut-on créer ?*

Exercice 3 :
Pour constituer une équipe de football, on a le choix entre 20 postulants, En supposant que chaque joueur est polyvalent.

1. *Si on considère simplement le choix des joueurs sans attribution de places sur le terrain*
   (a) *Combien peut-on constituer d'équipes différentes ?*
   (b) *Parmi les 20 postulants, 17 sont joueurs de champ et 3 sont gardiens. Combien d'équipes distinctes peut-on alors constituer ?*
2. *Reprendre les même questions, dans le cas où on attribue les également les places sur le terrain*

Exercice 4 :
Un étudiant doit répondre à 8 des 10 questions d'un examen.

1. *De combien de manières peut-il les choisir ?*
2. *Même question s'il est obligé de choisir au moins 3 des 5 premières questions.*

Exercice 5 :
De combien de façons peut-on placer 4 dossiers différents dans 15 casiers différents :

1. *à raison d'un dossier par casier*
2. *quel que soit le nombre de dossiers par casier*

Exercice 6 :
Une équipe de 6 personnes est amenée à occuper 6 postes de travail distincts.

1. *Combien peut-on envisager de répartitions distinctes des 6 personnes.*
2. *La quantité de travail à faire ayant diminué, on n'a besoin que de 4 personnes.*
   De combien de manières peut-on les choisir ?
3. *Dans cette équipe de 4 personnes, chacun est affecté à une tâche particulière mais peut occuper n'importe quel poste.*
   De combien de manières peut-on choisir 4 personnes parmi les 6 personnes en les affectant à un travail précis.

Exercice 7 :
Une délégation de 5 syndicalistes doit être choisie pour représenter l'usine à un congrès. Treize membres étant éligibles, de combien de manières peut-on former la délégation sachant que

1. *deux membres se refusent à participer au congrès*

2. *deux membres exigent d'être ensemble s'ils sont élus .*

Exercice 8 :

Calculer les sommes suivantes :

$$A = \sum_{k=0}^{n} (2k+1)C_n^k \; et \; B = \sum_{k=1}^{n} (k^2 - 2k)C_n^k$$

1.7 Solutions des exercices

Exercice 1 :

1. *Ici l'ordre joue un rôle, il s'agit donc de permutations.*
   D'où le nombre de classements possibles est égale à $P_6 = 6! = 720$.
2. a) *Il s'agit d'un classement (ordre) des trois premiers*

$$A_6^3 = \frac{6!}{(6-3)!} = 120$$

   b) *Ici l'ordre ne joue aucun rôle , donc le nombre de tiercés possibles est égale à*

$$C_6^3 = \frac{6!}{3!(6-3)!} = 20$$

Exercice 2 :

1. *l'ordre est important , donc il s'agit d'un arrangement avec répétition, d'où la réponse :*

$$\tilde{A}_{36}^4 = 36^4.$$

2. $P_4 \times C_{26}^2 \times C_{10}^2 = 4!\frac{26!}{2!24!} \times \frac{10!}{2!8!}$.
3. $A_{26}^2 \times A_{10}^2 = (26 \times 25) \times (10 \times 9)$.

Exercice 3 :

1. (a) *Si tous les joueurs sont polyvalents, la question revient à choisir 11 joueurs parmi 20.*

$$C_{20}^{11} = 167960 \textit{ équipes possibles .}$$

   (b) *dans ce cas il se ramène simplement à choisir 10 joueurs parmi les 17 joueurs de champ et 1 gardien parmi les 3 possibles. Il y a donc*

$$C_{17}^{10} + C_3^1 = 58344 \textit{ équipes possibles.}$$

2. *il ne s'agit plus de choisir 11 joueurs parmi 20 mais en même temps d'attribuer à chacun des joueurs choisis une place.*
   (a) *On a ici une injection de l'ensemble des places dans l'ensemble des joueurs (pour chaque place, on choisit un joueur).*
   On a ainsi :

$$A_{20}^{11} = 6704425728000 \textit{ équipes possibles .}$$

   (b)

$$A_{17}^{10} \times A_3^1 = 211718707200 \textit{ équipes possibles .}$$

Exercice 4 :

1. $C_{10}^8 = 45$
2. $C_5^3 \times C_7^5 = 10 \times 21 = 210$

Exercice 5 :

1. *C'est un arrangement sans répétition de 4 éléments parmi 15, donc c'est*

$$A_{15}^{4} = 32760 \, façons.$$

2. *C'est un arrangement avec répétition de 4 éléments parmi 15, donc c'est*

$$\tilde{A}_{15}^{4} = 15^4 = 50625 \, façons.$$

Exercice 6 :

1. *Le nombre de répartitions distinctes correspond à toutes les permutations possibles portant sur l'ensemble des 6 personnes, Le résultat est donc*

$$6! = 720$$

2. *Il s'agit de choisir 4 personnes parmi 6, sans répétition et sans ordre, le résultat est donc*

$$C_6^4 = 15$$

3. *On choisit à nouveau 4 personnes parmi 6, sans répétition mais avec ordre (ici l'ordre est l'affectation à une tâche précise), le résultat est donc*

$$A_6^4 = \frac{6!}{2!} = 360$$

Exercice 7 :

Il s'agit de choisir 5 personnes parmi 13, sans répétition et sans ordre, la réponse est donc

1. $C_{11}^5 = 462$.
2. $C_{11}^5 + \left(C_2^2 \times C_{11}^3\right) = 462 + 165 = 627$.

Exercice 8 :

1.

$$\begin{aligned}
A &= \sum_{k=0}^{n} (2k+1) * C_n^k \\
&= 2\sum_{k=0}^{n} k * C_n^k + \sum_{k=0}^{n} C_n^k \\
&= 2\sum_{k=1}^{n} k * \frac{n!}{k!\,(n-k)!} + 2^n \textit{(par la formule du binome de Newton } \sum_{k=0}^{n} C_n^k = 2^n \textit{)} \\
&= 2n \sum_{k=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-1-(k-1))!} + 2^n \\
&= 2n \sum_{k=1}^{n} C_{n-1}^{k-1} + 2^n.
\end{aligned}$$

Posons $m = k - 1$

$$\begin{aligned}
A &= 2n \sum_{m=0}^{n-1} C_{n-1}^{k-1} + 2^n. \\
&= 2n2^{n-1} + 2^n \textit{ (par la formule du binôme de Newton)} \\
&= (n+1)2^n.
\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} B &= \sum_{k=1}^{n}(k^2-2k)C_n^k \\ &= \sum_{k=1}^{n} k(k-2)C_n^k \\ &= \sum_{k=1}^{n} k(k-1-1)C_n^k \\ &= \sum_{k=1}^{n} k(k-1)C_n^k - \sum_{k=1}^{n} kC_n^k \\ &= B_1 + B_2. \end{aligned}$$

Avec

$$\begin{aligned} B_1 &= \sum_{k=1}^{n} k(k-1)C_n^k \\ &= 0 + \sum_{k=2}^{n} k(k-1)C_n^k \\ &= \sum_{k=2}^{n} k(k-1)\frac{n!}{k!\,(n-k)!} \\ &= \sum_{k=2}^{n} \frac{n!}{(k-2)!\,(n-2-(k-2))!} \\ &= n(n-1)\sum_{k=2}^{n} \frac{(n-2)!}{(k-2)!\,(n-2-(k-2))!}. \end{aligned}$$

On pose $l = k-2$

$$\begin{aligned} B_1 &= n(n-1)\sum_{l=0}^{n-2} \frac{(n-2)!}{l!\,(n-2-l)!} \\ &= n(n-1)\sum_{l=0}^{n-2} C_{n-2}^l \\ &= n(n-1)2^{n-2} \textit{ (par la formule du binôme de Newton).} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_2 &= \sum_{k=1}^{n} kC_n^k \\ &= \sum_{k=1}^{n} k\frac{n!}{k!\,(n-k)!} \\ &= n\sum_{k=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-1-(k-1))!} \\ &= n\sum_{k=1}^{n} C_{n-1}^{k-1}. \end{aligned}$$

Posons $s = k-1$

$$\begin{aligned} B_2 &= n\sum_{l=0}^{n-1} C_{n-1}^s \\ &= n2^{n-1} \textit{ (par la formule du binôme de Newton).} \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} B &= B_1 - B_2 = n(n-1)2^{n-2} - n2^{n-1} \\ &= n2^{n-2}\,(n-1-2) \\ &= n(n-3)2^{n-2}. \end{aligned}$$

Chapitre 2

Calcul de probabilité

Dans ce paragraphe nous allons définir les outils mathémamatiques dont nous aurons besoin pour élaborer une étude probabiliste.

2.1 Expérience aléatoire- Epreuve et évènements

Dans ce qui suit on utilisera le terme expérience, au sens physique du terme (les probabilités étaient au début considérées comme étant une science physique), est dite aléatoire, ce qui signifie que les résultats possibles sont imprévisibles.

Exemple 2.1.1. — *Lancement d'une pièce de monnaie.*

— *Durée de vie d'une lampe.*

Définition 2.1.1. *On appelle* ***ensemble fondamental*** *d'une expérience aléatoire, noté* Ω*, l'ensemble des résultats possibles de cette expérience.*

Exemple 2.1.2. — *Lancement d'un dé :* $\Omega = \{1, 2, ..., 6\}$.

— *Nombre d'accidents par jour :* $\Omega = \mathbb{N}$.

— *Durée de vie d'une lampe :* $\Omega = \mathbb{R}^+$

Remarque 2.1.1. *L'ensemble fondamental* Ω *peut être fini, infini dénombrable ou infini non dénombrable.*

Définition 2.1.2. — ***Une épreuve*** *ou* ***évènement élémentaire*** *est un résultat de l'expérience aléatoire.*

— *On désigne par* ***événement*** *un fait observable ou une propriété liée à l'expérience aléatoire (i.e. sous-ensemble de ω) , en d'autre termes, étant donnée une expérience aléatoire toute épreuve détermine la réalisation ou non d'un évènement (ou certains évènements). Soit A un événement, on identifie :*

$$A = \{\omega \in \Omega, \omega \text{ réalise } A\}$$

— Ω *s'appelle l'****évènement certain*** *et* $\emptyset$ *s'appelle l'****évèement impossible****.*

Exemple 2.1.3. *On lance un dé équilibré à six faces,*

— *L'ensemble des résultats possibles :* *(l'ensemble fondamental)*

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

— *Soient les évènements*

— *A=" Avoir un chiffre* ≥ 4 *"*
— *B=" Avoir un chiffre* ≤ 3 *"*
— *C=" Avoir un chiffre* ≥ 1 *"*
— *D=" Avoir un chiffre* ≤ 0 *"*
— *E=" Obtenir un multiple de 3 ou de 5".*

D'après l'identification :

— $A = \{4, 5, 6\}$
— $B = \{1, 2, 3\}$
— $C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
— $D = \emptyset$
— $E = \{3, 5, 6\}$.

Définition 2.1.3. *Deux événement sont dits incompatibles si la réalisation de l'un entraine la non réalisation de l'autre et inversement, c'est-à-dire si et seulement si*

$$A \cap B = \emptyset$$

Exemple 2.1.4. *Dans l'exemple précèdent, les évènements A et B sont incompatibles.*

Définition 2.1.4. *Un évènement est dit contraire d'un évènement A si sa réalisation implique la non réalisation de A, cet évènement est noté* $\overline{A} = C_\Omega A$.

Remarque 2.1.2. — *On a* $A \cap \overline{A} = \emptyset$ *et* $A \cup \overline{A} = \Omega$.

— $A \cap B$ *correspond à la réalisation de A et de B au même temps.*
— $A \cup B$ *correspond à la réalisation soit de A soit de B.*
— $A \backslash B$ *correspond à la réalisation de A et la non réalisation de B .*

2.2 Probabilité d'un évènement

Définition 2.2.1. ***La probabilité*** *d'un événement est un nombre compris entre 0 et 1 qui mesure la chance que cet événement se réalise.*
Un évènement qui ne peut pas se réaliser s'appelle évènement impossible, sa probabilité est égale à 0.
Un évènement qui se réalisera obligatoirement s'appelle évènement certain, sa probabilité est égale à 1.

Exemple 2.2.1.
1. *La probabilité d'obtenir un chiffre supérieur à 7, en lançant un dé à six faces, est égale à 0 (événement impossible).*
2. *La probabilité d'obtenir un chiffre supérieur à 0, en lançant un dé à six faces, est égale à 1 (événement certain).*

2.2.1 Etude du cas de l'équiprobabilité

Dans ce paragraphe on considère un univers Ω *fini à n éléments :* $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_\}$.

Définition 2.2.2. *On dit qu'il y a une* ***équiprobabilité*** *si toutes les évènements élémentaire d'une expérience aléatoire ont la même chance (probabilité) de se réaliser.*
Ainsi

$$P(\omega_1) = P(\omega_2) = \ldots = P(\omega_n) = \frac{1}{n}$$

Exemple 2.2.2.
1. *On choisit au hasard une personne parmi 10 (tous les choix sont équiprobables).*
2. *On lance un dé (ou une pièce de monnaie) non truqué(e) (ou bien équilibré(e)) signifie que chacune des faces possède la même probabilité d'apparaître.*
3. *Une urne contient des boules indiscernables au toucher signifie que toutes les boules ont la même probabilité d'être tirées.*

Définition 2.2.3. *Dans le cas d'une expérience aléatoire dans laquelle il y a une équiprobabilité, on définit la probabilité de réalisation d'un événement A, notée $P(A)$, par la formule suivante*

$$P(A) = \frac{Nombre\ de\ cas\ favorables}{Nombre\ de\ cas\ possibles} = \frac{Card(A)}{Card(\Omega)}$$

Exemple 2.2.3. *Une urne contient 10 boules indiscernables au toucher : 5 sont blanches, 2 sont rouges et 3 sont noires,*
on tire une boule au hasard. Quelle est la probabilité que cette boule soit blanche ? ***La réponse :***

- *On est en situation d'équiprobabilité.*
- *On note par A l'événement :"la boule tirée est blanche"*
- *Il y a 5 boules blanches donc 5 cas favorables , et il y a 10 boules donc 10 cas possibles. La probabilité demandée est donc :*

$$P(A) = \frac{Nombre\ de\ cas\ favorables}{Nombre\ de\ cas\ possibles} = \frac{5}{10} = 0,5.$$

2.2.2 Notions de probabilités pour Ω quelconque

Définition 2.2.4. *Soit Ω un ensemble, on appelle tribu de parties de Ω tout ensemble $\mathcal{A}$ de parties de Ω tel que :*

- $\Omega \in \mathcal{A}$
- $\forall A \in \mathcal{A}, \overline{A} \in \mathcal{A}$.
- *Pour toute famille finie ou dénombrable $(A_i)_{i\in I}$ d'éléments de $\mathcal{A}$, $\cup_i A_i \in \mathcal{A}$.*

On dit alors que $(\Omega, \mathcal{A})$ est un espace probabilisable.

Remarque 2.2.1. *L'ensemble des événements (lié à une expérience aléatoire) forme une tribu, cette tribu coincide avec $P(\Omega)$ (l'ensemble des parties de Ω).*

Définition 2.2.5. *Soit $(\Omega, \mathcal{A})$ un espace probabilisable. On appelle probabilité sur cet espace toute application P de $\mathcal{A}$ dans $[0, 1]$ vérifiant les deux axiomes suivants :*

1. $P(\Omega) = 1$.
2. *Si $(A_i)_i$ est une famille d'évènements 2 à 2 incompatibles, alors :*

$$P(\cup_{i=1} A_i) = \sum_{i=1} P(A_i).$$

On dit alors que $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ est un espace probabilisé, et pour tout A de $\mathcal{A}$, $P(A)$ est la probabilité de l'événement A.

Remarque 2.2.2. *On peut remarquer que l'équiprobabilité vérifie ces conditions générales.*

Proposition 2.2.1. *Soit P une probabilité sur un espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{A})$, alors on a*

1. $P(\emptyset) = 0$,

2. $\forall A \in \mathcal{A} : P(\overline{A}) = 1 - P(A)$,
3. $\forall A \in \mathcal{A}, \forall B \in \mathcal{A} : P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.
4. *Soient A et B deux événements :*

$$A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B).$$

Preuve

1. *On a* $\Omega = \Omega \cup \emptyset$, *comme* Ω *et* $\emptyset$ *sont incompatibles ,alors*

$$P(\Omega) = P(\Omega \cup \emptyset) = P(\Omega) + P(\emptyset),$$

d'où

$$P(\emptyset) = 0.$$

2. *Soit* $A \in \mathcal{A}$ *: On a* $\Omega = A \cup \overline{A}$, *A et* $\overline{A}$ *étant incompatibles ,alors*

$$P(\Omega) = P(A \cup \overline{A}) = P(A) + P(\overline{A}),$$

d'où

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A).$$

3. *SoientA et B deux éléments de* $\mathcal{A}$, *on a :*

$$\begin{aligned} A \cup B &= (A \cup B) \cap \Omega \\ &= (A \cup B) \cap \left(A \cup \overline{A}\right) \\ &= ((A \cup B) \cap A) \cup \left((A \cup B) \cap \overline{A}\right) \\ &= A \cup \left(B \cap \overline{A}\right). \end{aligned}$$

A et $\left(B \cap \overline{A}\right)$ *sont incompatibles, d'où*

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B \cap \overline{A}). \tag{2.1}$$

D'autre part

$$B = B \cap \Omega = B \cap \left(A \cup \overline{A}\right) = (B \cap A) \cup \left(B \cap \overline{A}\right)$$

et par l'incompatibilité de ces deux événements , on en déduit que

$$P(B) = P(B \cap A) + P\left(B \cap \overline{A}\right) \tag{2.2}$$

les équations (2.1) et (2.2) impliquent

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(B \cap A).$$

4. *On a*

$$B = B \cap \Omega = B \cap \left(A \cup \overline{A}\right) = (B \cap A) \cup \left(B \cap \overline{A}\right)$$

or par hypothèse $A \subset B$ *donc* $A \cap B = A$, *par suite*

$$B = A \cup \left(B \cap \overline{A}\right)$$

de plus A et $\left(B \cap \overline{A}\right)$ *sont incompatibles, d'où*

$$P(B) = P(A) + P\left(B \cap \overline{A}\right).$$

Comme $P\left(B \cap \overline{A}\right) \geq 0$ *on a alors* $P(B) \geq P(A)$.

■

Corollaire :

Deux évènement A et B sont incompatibles si et seulement si $P(B \cap A) = 0$.

Exemple d'application : *Dans une classe, on peut pratiquer deux sports, le tennis et le basket.* 35% *des élèves jouent au tennis,* $\frac{1}{5}$ *des élèves jouent au basket et* 60% *ne pratiquent aucun sport.*
On choisit un élève au hasard, quelle est la probabilité qu'il joue au tennis et au basket ?
Solution :
On note :
$B =$ *" l'éléve joue au basket " et* $T =$ *" l'éléve joue au tennis".*
On cherche à déterminer $P(B \cap T)$.
Par hypothèse

— $P(T) = 0,35$

— $P(B) = \frac{1}{5} = 0,2$

— $P\left(\overline{B \cup T}\right) = 0,6.$

Donc

$$P(B \cup T) = 1 - P\left(\overline{B \cup T}\right) = 1 - 0,6 = 0,4.$$

or

$$P(B \cup T) = P(B) + P(T) - P(B \cap T).$$

D'où

$$\begin{aligned} P(B \cap T) &= P(B) + P(T) - P(B \cup T) \\ &= 0,2 + 0,35 - 0,4 \\ &= 0,15. \end{aligned}$$

La probabilité que l'élève choisi au hasard, joue au tennis et au basket est de $0,15$.

2.2.3 Notions de probabilités pour $\Omega = I$ intervalle

Dans ce paragraphe on supposera que $\Omega = I \subseteq \mathbb{R}$

Notion de densité de probabilité

Définition 2.2.6. *Toute fonction* $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, *vérifiant*

1. f *admet un nombre fini de points de discontinuité.*
2. $\forall x \in \Omega, \quad f(x) \geq 0.$
3. $\int_\Omega f(x)dx = 1$

est dite densité de probabilité sur Ω.

Construction d'une probabilité

Définition 2.2.7. *Soit* $(\Omega, \mathcal{A}_\mathbb{R})$ *un espace probabilisable.*
L'application

$$\begin{aligned} P : \mathcal{A}_\mathbb{R} &\longrightarrow [0,1] \\ A &\longrightarrow P(A) = \int_A f(x)dx. \end{aligned}$$

est une probabilité sur Ω *de densité de probabilité* f.

Exemple 2.2.4. *Soit la probabilité P de densité de probabilité* f *:*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & si\ 0 < x < 2 \\ 0 & sinon \end{cases}$$

Calculer $P\left(]-\infty,1]\right)$.
Réponse :
D'après la définition de la probabilité à densité

$$\begin{aligned}
P\left(]-\infty,1]\right) &= \int_{-\infty}^{1} f(x)dx \\
&= \int_{-\infty}^{0} 0dx + \int_{0}^{1} \frac{1}{2}dx \\
&= 0 + \left[\frac{1}{2}x\right]_0^1 \\
&= \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

2.3 Enoncés des exercices

Exercice1

Soient A, B et C trois événements quelconques.
Ecrire les événements suivants en fonction de A, Bet C.

— D : *"Seul l'événement A se réalise."*
— E : *"Un seul événement se réalise."*
— F : *"Aucun événement ne se réalise "*
— G : *"Les trois événements se réalise"*
— H : *"Au plus deux événements se réalise"*
— I : *"Au moins un événement se réalise"*

Exercice2

Lors d'un jet de deux dés cubiques, on s'intéresse aux événements suivants :

— A : *"La somme obtenue est au moins égale à 5 ".*
— B : *"La somme obtenue est au plus égale à 5 ".*
— C : *"La somme obtenue est strictement inférieure à 3 ".*

1. *A et B sont-ils contraires ?*
2. *$\overline{B}$ et C sont-ils incompatibles ?*
3. *Traduire par une phrase $\overline{C}$.*
4. *A et $\overline{C}$ sont-ils incompatibles ?*

Exercice3

Une urne contient trois boules blanches , deux boules noires et cinq boules rouges.
On tire deux boules sans remise. Calculer la probabilité des événements suivants :

1. *A="Tirer deux boules blanches".*
2. *B="Tirer au plus une boule blanche".*
3. *C="Tirer deux boules de couleurs différentes".*
4. *D="Tirer une boule blanche ou une boule noire".*
5. *E="Tirer au plus une boule blanche"*

Exercice4

On dispose de deux dés cubiques A et B.
Le dé A porte sur deux faces le nombre 6 *et sur les quatre autres les nombres* $0, 1, 2$ *et* 3*. Toutes les faces ont la même probabilité d'apparition.*
Le dé pipé B porte les nombres $1, 2, 3, 4, 5$ *et* 6*, de façon que la probabilité d'apparition d'une face n est* $p_n = \frac{k}{n}, (k \in \mathbb{R})$.

1. *Déterminer la probabilité d'apparition de chaque face du dé B.*
2. *On lance simultanément les deux dés.*
   Calculer la probabilité des événements suivants :
   $$E_1 : \text{'' Amener deux 6.''}$$
   $$E_2 : \text{'' Amener un 1 et un 2.''}$$
3. *Calculer la probabilité pour que la somme de faces soit égale à 6.*

Exercice5

On jette une pièce de monnaie 3 fois de suite.

1. *Donner la liste de tous les résultats possibles en notant P pour Pile et F pour Face.*
2. *Donner la probabilité des événements suivants :*
   — A : *"le tirage ne comporte que des Piles".*
   — B : *"le tirage comporte au moins une fois Face ".*

2.4 Solutions des exercices

Exercice1

$D = A \cap \overline{B} \cap \overline{C}$; $E = \left(A \cap \overline{B} \cap \overline{C}\right) \cup \left(\overline{A} \cap B \cap \overline{C}\right) \cup \left(\overline{A} \cap \overline{B} \cap C\right)$
$F = \overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}$; $G = A \cap B \cap C$;
$H = E \cup \left(A \cap B \cap \overline{C}\right) \cup \left(A \cap \overline{B} \cap C\right) \cup \left(\overline{A} \cap B \cap C\right)$;
$J = (A \cup B \cup C)$.

Exercice2

1. *On a $A \cap \overline{A} = \emptyset$, ainsi A n'est pas le contraire de B , car*
   $A \cap B$: *"La somme obtenue est égale à 5" est non vide* ($(4, 1) \in A \cap B$, *par exemple*).
   Remarque

   $$A \cap B = \emptyset \nRightarrow A \text{est le contraire de} B$$

2. *$\overline{B}$ et C sont incompatibles si et seulement si $\overline{B} \cap C = \emptyset$*
   Or $\overline{B}$:"La somme obtenue est strictement supérieur à 5" et C :"La somme obtenue est strictement inférieure à 3 ".
   Donc $\overline{B} \cap C = \emptyset$, par suite $\overline{B}$ et C sont incompatibles
3. *$\overline{C}$:"La somme obtenue est supérieur ou égale à 3 " .*
4. *A et $\overline{C}$ ne sont pas incompatibles , car $A \cap \overline{C} \neq \emptyset$.*

Exercice3

1. *Tirage simultané :*
   (a) $P(A) = \frac{C_3^2}{C_{10}^2} = \frac{3}{45}$
   (b) $P(B) = \frac{C_7^2+\left(C_2^1\times C_7^1\right)}{C_{10}^2} = \frac{21+14}{45} = \frac{35}{45}$
   (c) $P(C) = \frac{\left(C_3^1\times C_2^1\right)+\left(C_3^1\times C_5^1\right)+\left(C_2^1\times C_5^1\right)}{C_{10}^2} = \frac{6+15+10}{45} = \frac{31}{45}$
   (d) $P(D) = \frac{\left(C_3^1\times C_7^1\right)+\left(C_2^1\times C_8^1\right)-\left(C_3^1\times C_2^1\right)}{C_{10}^2} = \frac{21+16-6}{45} = \frac{31}{45}$
2. *Tirage successif :*
   (a) $P(A) = \frac{A_3^2}{A_{10}^2} = \frac{6}{90} = \frac{3}{45}$
   (b) $P(B) = \frac{A_7^2+\left(P_2C_2^1\times C_7^1\right)}{A_{10}^2} = \frac{42+28}{90} = \frac{35}{45}$
   (c) $P(C) = \frac{\left(P_2C_3^1\times C_2^1\right)+\left(P_2C_3^1\times C_5^1\right)+\left(P_2C_2^1\times C_5^1\right)}{A_{10}^2} = \frac{12+30+20}{90} = \frac{31}{45}$
   (d) $P(D) = \frac{\left(P_2C_3^1\times C_7^1\right)+\left(P_2C_2^1\times C_8^1\right)-\left(P_2C_3^1\times C_2^1\right)}{A_{10}^2} = \frac{42+32-12}{90} = \frac{31}{45}$

Exercice4

On dispose de deux dés cubiques A et B.
Le dé A porte sur deux faces le nombre 6 *et sur les quatre autres les nombres* 0, 1, 2 *et* 3. *Toutes les faces ont la même probabilité d'apparition.*
Le dé pipé B porte les nombres 1, 2, 3, 4, 5 *et* 6, *de façon que la probabilité d'apparition d'une face n est* $p_n = \frac{k}{n}$, $(k \in \mathbb{R})$.

1. *par hypothèse, on a et puisque* $\sum P\{\omega_i\} = 1$, *on obtient*

ω_i	1	2	3	4	5	6
$P\{\omega_i\}$	k	$\frac{k}{2}$	$\frac{k}{3}$	$\frac{k}{4}$	$\frac{k}{5}$	$\frac{k}{6}$

$$k+\frac{k}{2}+\frac{k}{3}+\frac{k}{4}+\frac{k}{5}+\frac{k}{6}=1 \quad \Rightarrow \quad \frac{49k}{20}=1$$
$$\Rightarrow \quad k=\frac{20}{49}.$$

d'où la probabilité d'apparition de chaque face du dé B :

ω_i	1	2	3	4	5	6
$P\{\omega_i\}$	$\frac{20}{49}$	$\frac{10}{49}$	$\frac{20}{147}$	$\frac{5}{49}$	$\frac{4}{49}$	$\frac{10}{147}$

2. *On lance simultanément les deux dés.*

$$P(E_1)=P\{(6,6)\}=\frac{2}{6}\times\frac{10}{147}\simeq 0,023.$$
$$P(E_2)=P\{(1,2);(2,1)\}=\left(\frac{1}{6}\times\frac{10}{49}\right)+\left(\frac{1}{6}\times\frac{20}{49}\right)\simeq 0,1.$$

3. *La probabilité de lévènement E_3 : "la somme de faces soit égale à 6" :*

$$P(E_3)=P\{(0,6);(1,5);(2,4);(3,3)\}=\left(\frac{1}{6}\times\frac{10}{147}\right)+\left(\frac{1}{6}\times\frac{4}{49}\right)+\left(\frac{1}{6}\times\frac{5}{49}\right)+\left(\frac{1}{6}\times\frac{20}{147}\right)\simeq 0,064.$$

Exercice5

On jette une pièce de monnaie 3 fois de suite.

1. *on a Card$\Omega = 2^3 = 8$, l'ensemble de résultats possibles :*

$$\Omega=\{PPP, PPF, PFF, PFP, FPP, FPF, FFF, FFP\}$$

2. *La probabilité des événements A, B :*
   - A : *"le tirage ne comporte que des Piles" :*

$$A = PPP \Longrightarrow P(A)=\frac{1}{8}$$

   - B : *"le tirage comporte au moins une fois Face " :*

$$B=\{FPP, PFP, PPF, FFP, FPF, PFF, FFF\} \Longrightarrow P(B)=\frac{7}{8}$$

   2ème ***Méthode***

   $B=\overline{A} \Longrightarrow P(B)=1-P(A)=1-\frac{1}{8}=\frac{7}{8}$

Exercice6

On tire au hasard un nombre entier strictement positif. On suppose que la probabilité d'obtenir n vaut $\frac{1}{2^n}$. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on note A_k l'évènement "n est un multiple de k".

1. *Il suffit de vérifier que la série $\sum_{n\geq 1} P(\{n\})$ est convergente et que sa somme vaut 1. Mais puisque $\sum_{n\geq1} P(\{n\}) = \sum_{n\geq1}\frac{1}{2^n}$, on a une somme des termes d'une suite géométrique de raison 1/2 :*

$$\begin{aligned}\sum_{n\geq1} P(\{n\}) &= \sum_{n\geq1}\frac{1}{2^n}\\ &= \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2}\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}\\ &= 1.\end{aligned}$$

2. $\forall k \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned} P(A_k) &= \sum_{m\geq 1} \frac{1}{2^{mk}} \\ &= \lim_{m\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{mk}}{1-\left(\frac{1}{2}\right)^k} \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^k \frac{1}{1-\left(\frac{1}{2}\right)^k} \\ &= \frac{1}{2^k-1}. \end{aligned}$$

3. *On a*

$$P(A_2 \cup A_3) = P(A_2) + P(A_3) - P(A_2 \cap A_3).$$

et un entier est dans $(A_2 \cup A_3)$ *si et seulement s'il est divisible par* 2 *et par* 3*, c'est à dire, si et seulement s'il est divisible par* 6*, donc, si et seulement s'il appartient à* A_6*.*
D'où

$$\begin{aligned} P(A_2 \cup A_3) &= \frac{1}{2^k-1} + \frac{1}{2^k-1} - \frac{1}{2^k-1} \\ &= \frac{1}{3} + \frac{1}{7} - \frac{1}{63} = \frac{29}{63}. \end{aligned}$$

4. *Notons m le ppcm de p et q. Alors* $A_p \cap A_q = A_m$*.*
Montrer que $\forall p, q \geq 2$ A_p *et* A_q *ne sont pas indépendants.*
Par absurde :
supposons que $\forall p, q \geq 2$ A_p *et* A_q *sont indépendants.*
c'est à dire

$$P\left(A_p \cap A_q\right) = P(A_m) = P\left(A_p\right) \times P\left(A_q\right)$$

et donc

$$\frac{1}{2^m-1} = \frac{1}{2^p-1}\frac{1}{2^q-1}$$

par suite

$$2^m = 2^{p+q} - 2^p - 2^q + 2.$$

Or, le membre de gauche est divisible par 4*, par contre le membre de droite n'est pas (tous les termes à droite sont divisibles par 4, sauf 2...). On a donc une contradiction.*

Chapitre 3

Probabilité conditionnelle- Evènement indépendants

Définition 3.0.1. *Soit* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *un espace probabilisé, A et B étant deux événements telque* $P(A) \neq 0$.
La probabilité conditionnelle *que l'événement B se réalise sachant que l'événement A est réalisé, se note* $P_A(B)$ *(et parfois* $P(B/A)$*), est définie par :*

$$P_A(B) = P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}.$$

Exemple 3.0.1. *Une urne contient 3 boules blanches et 4 boules rouges indiscernables au toucher.*
On tire successivement 2 boules sans remise On note :

- A_1 *l'événement "la première boule tirée est blanche"*
- A_2 *l'événement "la seconde boule tirée est blanche"*

Calculer la probabilité que la seconde boule soit blanche sachant que la première était blanche.
Solution

$$P(A_2/A_1) = \frac{P(A_1 \cap A_2)}{P(A_1)}$$

On est dans le cas équiprobable, en utilisant la définition $P(A) = \frac{\text{Nombre de cas favorables}}{\text{Nombre de cas possibles}}$, *on a*

$$P(A_1) = \frac{3}{7}$$

$$P(A_1 \cap A_2) = \frac{A_3^2}{A_7^2} = \frac{6}{42} = \frac{1}{7}$$

d'où

$$\begin{aligned} P(A_2/A_1) &= \frac{P(A_1 \cap A_2)}{P(A_1)} = \frac{\frac{1}{7}}{\frac{3}{7}} \\ &= \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Propriété
Soient A et B deux événements, tels que $P(A) \neq 0$ *et* $P(B) \neq 0$, *alors*

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B/A) = P(B) \times P(A/B)$$

Proposition 3.0.1. *Soient* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *un espace probabilisé, B un événement tel que* $P(B) \neq 0$.
L'application P_B *:*

$$\begin{aligned} P_B : \mathcal{A} &\rightarrow [0,1] \\ A &\rightarrow P_B(A) = P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}. \end{aligned}$$

est une probabilité sur Ω.

Preuve

D'aprés la définition(2.2.5) :

$P_B : \mathcal{A} \rightarrow [0,1]$ *est une probabilité si et seulement si*

1. $P_B(\Omega) = 1$
2. *si* $(A_i)_i$ *est une famille d'événements 2 à 2 incompatibles, alors :*

$$P_B\left(\cup_{i=1}^{+\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{+\infty} P_B\left(A_i\right).$$

On a

1. $P_B(\Omega) = \frac{P(\Omega \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B)}{P(B)} = 1.$
2.

$$\begin{aligned} P_B\left(\cup_{i=1}^{+\infty} A_i\right) &= \frac{P(\left(\cup_{i=1}^{+\infty} A_i\right) \cap B)}{P(B)} \\ &= \frac{P\left(\cup_{i=1}^{+\infty}(A_i \cap B)\right)}{P(B)} \\ &= \sum_{i=1}^{n} fracP\left((A_i \cap B)\right)P(B)\left(car \; \forall i \neq j \quad ((A_i \cap B)) \cap \left((A_j \cap B)\right) = \emptyset\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} P\left(A_i/B\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} P_B\left(A_i\right). \end{aligned}$$

■

Remarque 3.0.1. P_B *est une probabilité sur* Ω, *implique*

$$P_B(\overline{A}) = 1 - P_B(A)$$

c'est-à-dire

$$P(\overline{A}/B) = 1 - P(A/B)$$

3.0.1 Indépendance de deux événements

Définition 3.0.2. *Deux événements A et B sont dits indépendants si et seulement si*

$$P\left(A \cap B\right) = P(A) \times P(B)$$

ce qui peut encore s'écrire, si $P(A) \neq 0, \quad P(B/A) = P(B)$.

Proposition 3.0.2. *Si A et B sont deux événements indépendants, alors A et* $\overline{B}$ *le sont également.*

Preuve

On a $P(B) = P(B \cap A) + P(B \cap \overline{A})$ *donc* $P(B) - P(B \cap A) = P(B \cap \overline{A})$
et si A et B sont indépendants , on obtient : $P(B) - (P(B) \times P(A)) = P(B \cap \overline{A})$
c'est-à-dire $P(B)\left(1 - P(A)\right) = P(B \cap \overline{A})$ *ou encore* $P(B) \times P(\overline{A}) = P(B \cap \overline{A})$ *donc B et* $\overline{A}$ *sont indépendants.* ■

Remarque 3.0.2. *Si A et B sont indépendants alors* $\overline{A}$ *et* $\overline{B}$ *le sont aussi et donc A et* $\overline{B}$ *également.*

3.0.2 Loi des probabilités totales

Définition 3.0.3. ***Partition*** *Soit n un entier supérieur ou égal à 2,* $A_1, A_2, ..., A_n$ *forment une partition (un système complet d'événements) de* Ω *si et seulement si*

1. $\cup_i A_i = \Omega$
2. $\{A_1, A_2, ..., A_n\}$ *un ensemble d'événements de probabilités non nulles, deux à deux incompatibles* $((\forall i \neq j) A_i \cap A_j = \emptyset)$.

Remarque 3.0.3. — *Un événement A de probabilité non nulle et son événement contraire* $\overline{A}$ *forment une partition de* Ω.
— *Si* $A_1, A_2, ..., A_n$ *forment une partition de* Ω, *alors* $\sum_{i=1}^{n} P(A_i) = 1$.

Théorème 3.0.1. ***Théorème de probabilités totales*** *Soit* $\{A_1, A_2, ..., A_n\}$ *une partition de* Ω *alors pour tout événement B de* Ω *:*

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(B \cap A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(B/A_i)P(A_i)$$

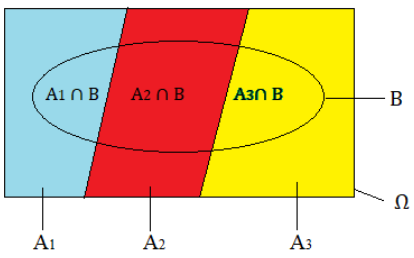

FIGURE 3.1 –

Preuve
$\{A_1, A_2, ..., A_n\}$ *est une partition de* $\Omega \Rightarrow \cup_i A_i = \Omega$ *d'où*

$$\begin{aligned} B &= B \cap \Omega \\ &= B \cap (A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n) \\ &= (B \cap A_1) \cup (B \cap A_2) \cup ... \cup (B \cap A_n)\,. \end{aligned}$$

Comme les événements $(B \cap A_i)_{i=\overline{1:n}}$ *sont incompatibles deux à deux, alors*

$$\begin{aligned} P(B) &= P\left(B \cap A_1\right) \cup \left(B \cap A_2\right) \cup ... \cup \left(B \cap A_n\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} P\left(B \cap A_i\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} P(B/A_i)P(A_i). \end{aligned}$$

■

Théorème 3.0.2. ***Formule de Bayes***
Soit $\{A_1, A_2, ..., A_n\}$ *une partition de* Ω *alors pour tout événement B de* Ω *tel que* $P(B) \neq 0$ *:*
$\forall j \in \{1, 2, ..., n\}$, *on a*

$$P(A_j/B) = \frac{P(B/A_j)P(A_j)}{\sum_{i=1}^{n} P(B/A_i)P(A_i)}$$

Preuve

Par définition, on a

$$P(A_j/B) = \frac{A_j \cap B}{P(B)} \tag{3.1}$$

et d'aprés le théorème de probabilirés totales (théorème(3.0.1)) :

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(B/A_i)P(A_i) \tag{3.2}$$

D'autre part

$$P\left(A_j \cap B\right) = P(B/A_j)P(A_j) \tag{3.3}$$

les équations (3.1), (3.2) et (3.3) impliquent le résultat voulu :

$$P(A_j/B) = \frac{P(B/A_j)P(A_j)}{\sum_{i=1}^{n} P(B/A_i)P(A_i)}.$$

■

Exemple 3.0.2. *Le gérant d'un magasin d'informatique a reçu un lot de clés USB,* 5% *des boites sont abîmées.*
Le gérant estime que :

— 60% *des boites abîmées contiennent au moins une clé défectueuse.*

— 98% *des boites non abîmées ne contiennent aucune clé défectueuse.*

Un client achète une boite du lot.
On désigne par

— *A l'événement "la boite est abîmée"*

— *D l'événement "la boite achetée contient au moins une clé défectueuse".*

1. *Donner les probabilités de* $P(A), P(\overline{A}), P(D/A), P(D/\overline{A}), P(\overline{D}/A)$ *et* $P(\overline{D}/\overline{A})$.
2. *En déduire la probabilité de D.*
3. *Le client constate qu'une des clés achetées est défectueuse. Quelle est la probabilité pour qu'il ait acheté une boite abîmée ?*

Solution

1. *Par hypothèse, on a*
   $P(A) = 0,05$ *d'où* $P(\overline{A}) = 0,95$.
   $P(D/A) = 0,6$ *et* $P(\overline{D}/\overline{A}) = 0,98$. *On en déduit :*
   $$P(\overline{D}/A) = 1 - P(D/A) = 0,4.$$
   $$P(D/\overline{A}) = 1 - P(\overline{D}/\overline{A}) = 0,02.$$
2. *D'après la formule des probabilités totales (3.0.1) :*
   $$P(D) = P(A)P(D/A) + P(\overline{A})P(D/\overline{A}) = 0,049.$$
3. *On obtient* $P(A/D)$ *grâce à la formule de Bayes :*
   $$P(A/D) = \frac{P(A \cap D)}{P(D)} = \frac{P(D/A)P(A)}{P(D)} \simeq 0,61.$$

3.1 Enoncés des exercices

Exercice 1

Au cours d'une épidémie de grippe, on vaccine $\frac{1}{3}$ de la population. On a constaté qu'un malade sur 10 est vacciné et que la probabilité qu'une personne choisie au hasard soit grippée est de 0,2.
Quelle est la probabilité pour un individu vacciné d'être grippé malgré tout.

Exercice 2

Une grande entreprise se divisent en deux catégories "cadres et ouvriers".
On sait que cette entreprise emploie 60% d'hommes et 40% de femmes. De plus, parmi les hommes 63% sont cadres alors que parmi les femmes 48% sont cadres.
On choisit au hasard une personne de l'entreprise.
On note

- F *:" la personne choisie soit une femme"*
- C *:" la personne choisie soit cadre"*

1. *Quelle est la probabilité que la personne choisie soit une femme ?*
2. *Quelle est la probabilité que la personne choisie soit une femme cadre ?*
3. *On choisit au hasard une femme de l'entreprise.*
   Quelle est la probabilité que cette femme soit cadre ?
4. *Quelle est la probabilité que la personne choisie soit cadre ?*
5. *On choisit au hasard un cadre de l'entreprise.Quelle est la probabilité que cette personne soit femme ?*

Exercice 3

Dans un lycée, 200 élèves sont dans la filiére Sciences, 50 sont dans la filiére langues étrangères et 100 dans la filière lettres arabes. On estime le taux de reussite au BAC à 50% en Sciences, 60% en langues étrangères et 30% en lettres arabes.
On choisit un élève au hasard. Quelle est la probabilité :

1. *Que cet élève obtienne son BAC.*
2. *Que cet élève n'ait pas été en Sciences, s'il n'a pas obtenu son BAC.*

Exercice 4

Dans une population donnée, 84% des personnes possèdent un téléphone portable et 75% des personnes possèdent un ordinateur. De plus, 60% des personnes de cette population déclarent posséder les deux. On rencontre au hasard une personne de cette population.On considère les événements
T *: "la personne rencontrée possède un téléphone portable" et* O *: "la personne rencontrée possède un ordinateur".*

1. *Traduire les données de l'énoncé par des probabilités.*
2. *Calculer la probabilité conditionnelle de* O *sachant* T*.*
3. *Déterminer la probabilité que la personne rencontrée possède un téléphone portable sachant qu'elle a un ordinateur.*

3.2 Solutions des exercices

Exercice 1

On considère les événements :
A : " l'individu est vacciné ",
B : " l'individu est grippé ".
On a donc
$P(A) = \frac{1}{3}$, $P(A/B) = \frac{1}{10}$, $P(B) = 0,2$.
et on cherche à calculer $P(B/A)$.
Par définition

$$P(B/A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}. \tag{3.4}$$

d'autre part

$$labelpa/bP(A/B) = \frac{P(B \cap A)}{P(B)} \Longrightarrow P(B \cap A) = P(A/B)P(B) = \frac{1}{10} \times 0,2 = 0,02. \tag{3.5}$$

Ainsi

$$P(B/A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{0,02}{\frac{1}{3}} = 0,06.$$

Exercice 2

Les employés d'une grande entreprise se divisent en deux catégories "cadres et ouvriers".
On sait que cette entreprise emploie 60% d'hommes et 40% de femmes. De plus, parmi les hommes 63% sont cadres alors que parmi les femmes 48% sont cadres.
On choisit au hasard une personne de l'entreprise.
On note

— *F :" la personne choisie soit une femme"*
— *H :" la personne choisie soit un homme"*
— *C :" la personne choisie soit cadre"*

par hypothèse, on a $P(F) = 0,4$ *;* $P(H) = 0,6$ *;* $P(C/H) = 0,63$ *;* $P(C/F) = 0,48$

1. *La probabilité que la personne choisie soit une femme :*

$$P(F) = 0,4$$

2. *La probabilité que la personne choisie soit une femme cadre :*

$$P(F \cap C) = P(C/F) \times P(F) = 0,48 \times 0,4 = 0,192$$

3. *la probabilité que cette femme choisie soit cadre :*

$$\begin{aligned} P(C/F) &= \frac{P(F \cap C)}{P(F)} \\ &= \frac{0,192}{0,4} = 0,48. \end{aligned}$$

4. *La probabilité que la personne choisie soit cadre :*
les deux événements F et H forme une partition de Ω*, donc d'aprés le théoréme de probabilités totales :*

$$\begin{aligned} P(C) &= (P(C/F) \times P(F)) + (P(C/H) \times P(H)) \\ &= (0,48 \times 0,4) + (0,63 \times 0,6) \\ &= 0,57. \end{aligned}$$

5. *la probabilité que ce cadre choisie soit femme :*
   D'après le théorème de Bayes

$$\begin{aligned} P(F/C) &= \frac{P(C/F)\times P(F)}{P(C)} \\ &= \frac{0,192}{0,57} \simeq 0,34. \end{aligned}$$

<u>Exercice 3</u>

On note
S :"L'élève choisi est dans la branche Scientifique"
L :"L'élève choisi est dans la branche des langues étrangères"
A :"L'élève choisi est dans la branche des lettres arabes"
B :"L'élève choisi a obtenu son BAC."
Par hypothèse

$$\begin{aligned} &P(S) = \frac{200}{350} \simeq 0,57 \quad ; \quad P(L) = \frac{50}{350} \simeq 0,14 \\ &P(A) = \frac{100}{350} \simeq 0,28 \quad ; \quad P(B/S) = 0,5 \\ &P(B/L) = 0,6 \quad ; \& P(B/A) = 0,3. \end{aligned}$$

1. *S, L, A forme une partition de Ω , donc d'après le théorème de probabilités totales*

$$\begin{aligned} P(B) &= P(B/S)P(S) + P(B/L)P(L) + P(B/A)P(A) \\ &= (0,5\times 0,57) + (0,6\times 0,14) + (0,3\times 0,28) \\ &= 0,453. \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} P\left(\overline{S}/\overline{B}\right) &= \frac{P\left(\overline{S}\cap\overline{B}\right)}{P(\overline{B})} \\ &= \frac{P\left(\overline{S\cup B}\right)}{P(\overline{B})} \\ &= \frac{1-P(S\cup B)}{1-P(B)} \\ &= \frac{1-(P(S)+P(B)-P(S\cap B))}{1-P(B)} \\ &= \frac{1-P(S)-P(B)+(P(B/S)\times P(S))}{1-P(B)} \\ &= \frac{1-0,57-0,453+(0,5\times 0,57)}{1-0,453} \\ &\simeq 0,48. \end{aligned}$$

<u>Exercice 4</u>

1. *Par hypothèse, on a $P(T) = 0,84$; $P(O) = 0,75$; $P(T\cap O) = 0,6$.*
2.

$$\begin{aligned} P(O/T) &= \frac{P(O\cap T)}{P(T)} \\ &= \frac{0,6}{0,84} \\ &= 0,71. \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned} P(T/O) &= \frac{P(O \cap T)}{P(O)} \\ &= \frac{0,6}{0,75} \\ &= 0,8. \end{aligned}$$

Chapitre 4

Variables aléatoires

4.1 Notion de variables aléatoires réelles

On dispose d'un espace probabilisé (Ω, ξ, P) *et d'un espace probabilisable* $(\mathbb{R}, B_{\mathbb{R}})$; $B_{\mathbb{R}}$ *étant la tribu borélienne.*

4.1.1 Définition et notation

Variable aléatoire réelle

Définition 4.1.1. *On appelle variable aléatoire réelle, notée v.a.r, toute application* $X : \Omega \to \mathbb{R}$ *telle que :*

$$\forall B \in B_{\mathbb{R}} \qquad X^{-1}(B) \in \xi.$$

— *Les valeurs de la variable X sont dites réalisations de X.*
— *L'ensemble de ces réalisations est noté* $X(\Omega)$.

Probabilités induites

Théorème 4.1.1. *L'application* P_X *définie par :*

$$\begin{array}{rcl} P_X : B_{\mathbb{R}} & \to & [0,1] \\ B & \to & P_X(B) = \mathbb{P}(X^{-1}(B)) \end{array}$$

est une probabilité sur $(\mathbb{R}, B_{\mathbb{R}})$ *.*

Preuve
pour montrer que P_X *est une probabilité sur* $(\mathbb{R}, B_{\mathbb{R}})$ *il faut montrer les point suivants :*

$$\begin{cases} P_X(\mathbb{R}) = 1 \\ P_X\left(\underset{i\geq 1}{\cup} B_i\right) = \sum\limits_{i\geq 1} P_X(B_i) \ \forall (B_i)_i \text{ une suite de boréliens deux à deux incompatibles.} \end{cases}$$

1. Il est évident que P_X *est une application à valeur dans* $[0,1]$ *.*
2. $P_X(\mathbb{R}) = P\left(X^{-1}(\mathbb{R})\right) = P(\Omega) = 1$
3. Soit $(B_i)_i$ *une suite de boréliens deux à deux incompatibles. Alors on a*

$$\begin{aligned} P_X\left(\underset{i\geq 1}{\cup} B_i\right) &= P\left(X^{-1}(\underset{i\geq 1}{\cup} B_i)\right) = P\left(\underset{i\geq 1}{\cup} X^{-1}(B_i)\right) \\ &= \sum_{i\geq 1} P\left(X^{-1}(B_i)\right) = \sum_{i\geq 1} P_X(B_i) \end{aligned}$$

■

4.1.2 Fonction de répartition d'une variable aléatoire

Définition 4.1.2. *On appelle fonction de répartition d'une v.a.r X, la fonction F définie par :*

$$F_X(x) = P(X \leq x).$$

Propriétés d'une fonction de répartition
Si F est la fonction de répartition d'une v.a.r X alors :

1) $\forall x \in \mathbb{R}, 0 \leq F(x) \leq 1.$
2) *F est une fonction croissante.*
3) *F est continue à droite.*
4) $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1$ *et* $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0.$

Remarque 4.1.1. *L'importance pratique de la fonction de répartition est qu'elle permet de calculer la probabilité de tout intervalle dans* $\mathbb{R}$ *:*
$\forall a, b \in \mathbb{R}, a < b$:

$$\mathbb{P}(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a)$$

4.2 Variable aléatoire discrète

4.2.1 Notion de variable aléatoire discrète

Définition 4.2.1. *Une variable aléatoire discrète est une variable qui prend ses valeurs dans un sous ensemble de* $\mathbb{R}$ *fini ou infini dénombrable :*

$$X(\Omega) = \{x_i\}_{i \in I} \text{ où } I \subseteq \mathbb{N} \text{ (} I \text{ est un ensemble fini ou infini dénombrable)}$$

Remarque 4.2.1. *Dans la suite, nous supposons que les valeurs prises par la v.a. X puissent s'écrire dans l'ordre croissant :*

$$x_1 < x_2 < x_3 < ..... < x_n < .....$$

Exemple 4.2.1. 1) *On jette un dé cubique et on s'intèresse au jeu suivant :*

si on obtient un numéro ≤ 4 *on perd 1 point , sinon on gagne 2 points.*
L'application X qui à tout tirage associe le gain obtenu (une perte est un gain négatif) est une variable aléatoire discrète .
On a

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \text{ et } X(\Omega) = \{-1, 2\}.$$

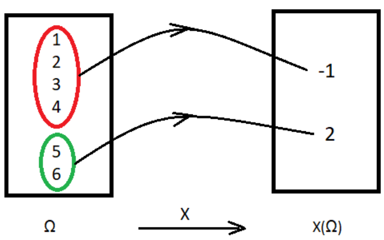

FIGURE 4.1 –

2) *On jette une pièce de monnaie jusqu'à ce que le côté Pile apparaisse et on s'intéresse au jeu suivant :*

Si on obtient face au $i^{ième}$ lancer on gagne 2^i points.

L'application X qui à tout tirage associe le gain obtenu est une variable aléatoire (discrète prenant un nombre infini dénombrable de valeurs).
On a

$$\Omega = \{P, FP, FFP, ...\} \text{ et } X(\Omega) = \{2, 4, 8, 16, ...\}.$$

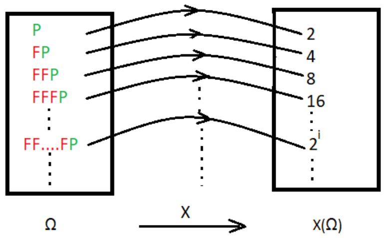

FIGURE 4.2 –

4.2.2 Loi de probabilité d'une v.a.r discrète X

Définition 4.2.2. *La loi de probabilité d'une v.a.r discrète X, notée par P_X, appellée "la fonction de masse" est définie par*

$$\begin{array}{rcl} P_X : X(\Omega) & \rightarrow & [0,1] \\ P_X(x_i) & = & P(X = x_i) = \mathbb{P}(X^{-1}(x_i)), \ \forall i \in I \end{array}$$

Proposition 4.2.1. *une application $P : X(\Omega) \to [0,1]$ est dite la fonction de masse d'une v.a. discrète X si et seulement si*

1) $P_X(x_i) \geq 0 \forall x_i \in X(\Omega)$
2) $\sum_{x_i \in X(\Omega)} P_X(x_i) = 1$

Exemple 4.2.2. *reprenons les exemples 1 et 2 du premier paragraphe (4.2.1)*

1) *Le tableau suivant nous donne la loi de probabilité P_X de X :*

x_i	-1	2
$P_X(x_i)$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$

TABLE 4.1 –

exemple de calcul :

$$P_X(-1) = \mathbb{P}(X^{-1}(-1)) = P(1) + P(2) + P(3) + P(4) = \frac{4}{6}.$$

2) *pour le deuxième exemple $X(\Omega) = \{2, 4, 8, 16, ...\}$, et $\forall k \in X(\Omega)$*

$$P_X(k) = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{k}{2}}$$

exemple de calcul :

$$P_X(4) = P_X(2^2) = P(X^{-1}(4)) = P(PF) = \frac{1}{2}.\frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^2.$$

4.2.3 Fonction de répartition d'une v.a.r discrète X

La fonction de répartition d'une v.a.r. discrète X est donnée par

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \sum_{i \in I; x_i \leq x} P_X(x_i)$$

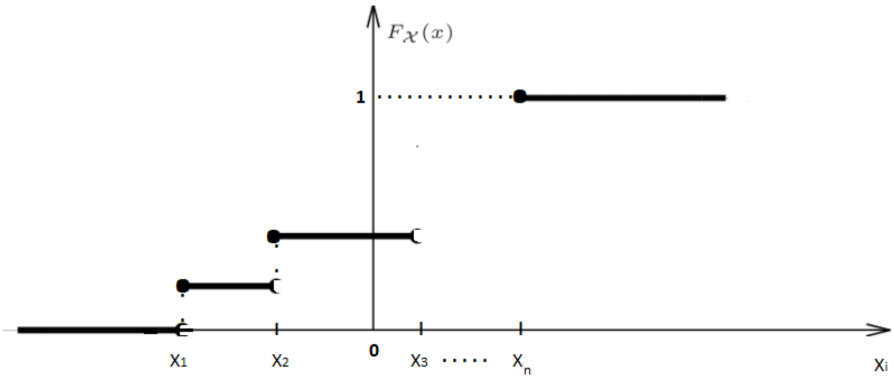

FIGURE 4.3 – Exemple de fonction de répartition d'une v.a. réelle discrète.

Remarque 4.2.2. *1) F_X a alors l'allure d'une fonction en escalier (ou étagée) continue à droite.*

2) La fonction de masse en x_i représente le saut de la fonction de répartition en ce point.

3) Il existe un nombre fini ou dénombrable de points où la fonction de masse est non nulle. Cela signifie que F est continue sauf en un nombre fini ou dénombrable de points.

Propriétés

Pour le cas discret, une fonction de répartition F vérifie les importantes propriétés suivantes :

— $0 \leq F(x) \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}$.

— *F est croissante.*

— $\lim_{x \longrightarrow -\infty} F(x) = 0$ *et* $\lim_{x \longrightarrow +\infty} F(x) = 1$.

— *F est continue en tout point* $x \in \mathbb{R} \backslash X(\Omega)$

— *F est continue à droite en tout point* $x_i \in X(\Omega)$

$$\lim_{x \longrightarrow x_i^+} F(x) = F(x_i)$$

$$\lim_{x \longrightarrow x_i^-} F(x) = P(X < x_i) = F(x_{i-1})$$

Exemple 4.2.3. *Soit X la variable aléatoire définie dans le premier exemple 4.2.1, de loi de probabilité résumée dans le tableau 2 :*

x_i	-1	2
$P_X(x_i)$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$

TABLE 4.2 –

Les valeurs de la fonction de répartition F_X sont décrites dans le tableau suivant :

x_i	$F_X(x) = P(X \leq x)$
$x < -1$	0
$-1 \leq x < 2$	$\frac{2}{3}$
$2 \leq x$	1

Table 4.3 –

4.2.4 Moments d'une v.a.r discrète X

Espérance mathématique d'une v.a.r discrète X

Considérons une v.a. discrète X prenant les valeurs x_i avec les probabilités p_i où $i \in I$ (I un ensemble fini ou infini dénombrable).
L'espérance de X est la moyenne des valeurs que peut prendre cette variable, pondérées par les probabilités.

Définition 4.2.3. *On appelle espérance mathématique d'une v.a.r discrète X le nombre, quand il existe, notée $E(X)$ défini par*

$$E(X) = \sum_{i \in I} x_i P_X(x_i)$$

Remarque 4.2.3. *l'espérance mathématique d'une v.a.r discrète X existe ssi $\sum_{i\in I} |x_i|\, p_i < \infty$*

Exemple 4.2.4. *Dans les exemples précédents 4.2.1*

1) $X(\Omega) = \{-1, 2\}$ *et* $, P_X(-1) = \frac{2}{3}, P_X(2) = \frac{1}{3}$ *d'où*

x_i	-1	2
$P_X(x_i)$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$

Table 4.4 –

$$\begin{aligned} E(X) = \sum_{i \in I} x_i P_X(x_i) &= -1 \times P_X(-1) + 2 \times P_X(2) \\ &= -1 \times \frac{2}{3} + 2 \times \frac{1}{3} = 0. \end{aligned}$$

2) $X(\Omega) = \{2, 4, 8, 16, ...\}$ *et* $\forall k \in X(\Omega), P_X(k) = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{k}{2}}$,
puisque

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} 2^k P_X(2^k) &= \lim_{n \longrightarrow +\infty} \sum_{k=1}^{n} 2^k \frac{1}{2^k} \\ &= \lim_{n \longrightarrow +\infty} n = +\infty. \end{aligned}$$

Alors l'espérance mathématique de cette v.a. n'existe pas.

Théorème 4.2.1. *Soit X une v.a. discrète , g une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et $Y = g(X)$, alors si $\sum_{i\in I} |g(x_i)|\, p_i < \infty$, l'espérance de la v.a. Y existe et on peut la calculer par la formule suivante*

$$E(g(X)) = \sum_{i \in I} g(x_i) P_X(x_i) \tag{4.1}$$

Proposition 4.2.2. ***Linéarité de l'espérance***
Soit X une variable alétoire et k une constante réelle, on a :

a) $E(kX) = kE(X)$.

b) $E(k) = k$

c) $E(X + k) = E(X) + k$.

Preuve

a) *d'après le théorème précédent 4.1 :*

$$E(kX) = \sum_{i \in I} k x_i P_X(x_i) = k \sum_{i \in I} x_i P_X(x_i) = kE(X)$$

b) $E(k) = \sum_{i\in I} (k)\, P_X(x_i) \; = \sum_{i\in I} k P_X(x_i) = k \sum_{i\in I} P_X(x_i) = k$

c) *En utilisant encore une fois le théorème 4.1, on a*

$$E(X + k) = \sum_{i \in I} (x_i + k)\, P_X(x_i) \; = \sum_{i \in I} x_i P_X(x_i) + k \sum_{i \in I} P_X(x_i) = E(X) + k$$

■

Propriété *(L'espérance de la somme de deux variables aléatoires)*
Soit X et Y deux variables aléatoires discrètes.
L'espérance de la somme de X et Y est égale à la somme des espérances de X et Y, c'est-à-dire

$$E(X + Y) = E(X) + E(Y)$$

Ceci se généralise à une somme de n variables aléatoires $X_1, X_2, ..., X_n$.

$$E(X_1 + X_2 + ... + X_n) = E(X_1) + E(X_2) + ... + E(X_n)$$

Variance d'une v.a.r discrète X

La variance représente la moyenne des carrés des écarts entre les valeurs de X et l'espérance E(X), elle mesure la dispersion des valeurs prises par la variable aléatoire X autour de son espérance E(X).

Définition 4.2.4. *La variance d'une v.a.r discrète X est le nombre positif, lorsqu'il existe, défini par*

$$Var(X) = E(X - E(X))^2 = \sum_{i \in I} (x_i - E(X))^2\, P_X(x_i) \tag{4.2}$$

Proposition 4.2.3. ***(théorème de Koenig)***
La formule de la variance de X 4.2 peut être développer pour donner

$$Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2 \tag{4.3}$$

Preuve
d'après le théorème 4.1 :

$$\begin{aligned} Var(X) &= \sum_{i \in I} (x_i - E(X))^2\, P_X(x_i) = \sum_{i \in I} \left(x_i^2 - 2x_i E(X) + (E(X)\right)^2) P_X(x_i) \\ &= \sum_{i \in I} x_i^2 P_X(x_i) - 2E(X) \sum_{i \in I} x_i P_X(x_i) + (E(X))^2 \sum_{i \in I} P_X(x_i) \\ &= E(X^2) - (E(X))^2 . \end{aligned}$$

■

Proposition 4.2.4. *Soit X une variable aléatoire et k une constante réelle, on a :*

a) $Var(kX) = k^2 Var(X)$.

b) $Var(k) = 0$.

c) $Var(X + k) = Var(X)$.

Preuve

a)

$$\begin{aligned} Var(kX) &= E(k^2X^2) - (E(kX))^2 = k^2E(X^2) - (kE(X))^2 \\ &= k^2\left(E(X^2) - (E(X))^2\right) = k^2Var(X) \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} Var(k) &= E(k^2) - (E(k))^2 = k^2 - k^2 \\ &= 0. \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} Var(X + k) &= E((X + k)^2) - (E(X + k))^2 \\ &= E(X^2) + 2kE(X) + k^2 - (E(X) + k)^2 \\ &= E(X^2) - (E(X))^2 = Var(X). \end{aligned}$$

■

Définition 4.2.5. *On appelle écart quadratique moyen ou écart-type le nombre noté σ_X défini par la formule suivante :*

$$\sigma_X = \sqrt{Var(X)}.$$

Remarque 4.2.4.

— *Un jeu est considéré équitable, lorsque l'on a $E(X) = 0$.*

— *Par définition la variance et l'écart type sont nécessairement des valeurs positives.*

— *L'écart type mesure la dispersion : plus l'écart type est faible, plus les valeurs sont regroupées autour de l'espérance, on dit aussi plus la série de valeurs est homogène.*

Moments d'ordre k d'une v.a.r. discrète

On appelle moment d'ordre k d'une v.a.r. discrète X le nombre, lorsqu'il existe, noté m_k défini par :

$$m_k = E(X^k) = \sum_{i \in I} x_i^k P_X(x_i).$$

Ainsi on a

$$Var(X) = m_2 - m_1^2.$$

4.2.5 Fonction génératrice des moments

La fonction génératrice des moments notée par $G_X(t)$ est définie par

$$G_X(t) = E(e^{tX}) = \sum_{i \in I} e^{tx_i} P_X(x_i).$$

Cette fonction n'est définie que pour les valeurs de t où la série est convergente.

Relation entre la fonction génératrice des moments et le moment d'ordre k

$\forall k \in \mathbb{N}$, *on a*

$$G_X^{(k)}(O) = m_k,$$

où $G_X^{(k)}(0)$ *représente la* $k^{ième}$ *dérivée de la fonction* $G_X(t)$ *au point* $t = 0$.

4.2.6 Transformation d'une v.a.r discrète

Soient X *une v.a.r. discrète de fonction de masse* P_X , $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *une application mesurable, on cherche à déterminer la loi de la variable aléatoire* $Y = g(X)$.
On a $Y(\Omega) \subset g\,(X(\Omega))$ *et la loi de* Y *est donnée par les formules suivantes :*

1) si g ***est bijective sur*** $X(\Omega)$

$$P_Y(y_i) = P_X(x_i).$$

2) Si g ***n'est pas bijective sur*** $X(\Omega)$

$$P_Y(y_i) = \sum_{i;g(x_i)=y_i} P_X(x_i).$$

Exemple 4.2.5. *Soit* X *une v.a.r. discrète de loi de probabilité donnée par le tableau suivant*

x_i	-1	0	1
$P_X(x_i)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

Déterminer les lois de probabilité des deux v.a suivantes $Y = X + 1$ *et* $Z = X^2$.

<u>Solution</u>

1) La fonction $f(x) = x + 1$ *est bien définie et bijective sur* $\mathbb{R}$, *d'où elle est bijective sur* $X(\Omega) = \{-1, 0, 1\}$ *par suite* $P_Y(y_i) = P_X(x_i)$, $\forall i \in \{1, 2, 3\}$,
la loi de Y *est, donc, résumée par le tableau suivant :*

y_i	0	1	2
$P_Y(y_i)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

2) La fonction $g(x) = x^2$ *n'est pas bijective sur* $X(\Omega) = \{-1, 0, 1\}$ *et* $Z(\Omega) = \{0, 1\}$

$$P_Z 0 = P_X 0 = \frac{1}{2} \text{ et } P_Z 1 = P_X {-1} + P_X 1 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

d'où la loi de Z *est donnée par le tableau suivant :*

z_i	0	1
$P_Z(z_i)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

4.3 Variable aléatoire absolument continue

Définition 4.3.1. *Une variable aléatoire continue est une variable qui prend ses valeurs dans un intervalle de* $\mathbb{R}$

$$X(\Omega) = I \subseteq \mathbb{R} \text{ où } I \text{ est un intarvalle}$$

Exemple 4.3.1. — *La variable X correspondant à la surface d'un train.*
— *La variable Y correspondant à la durée de vie d'une ampoule.*

4.3.1 Densité de probabilité

Définition 4.3.2. *On appelle densité de probabilité sur un intervalle I et on note par d.d.p toute fonction* f *définie sur I et vérifiant les propositions suivantes :*

1) $f(x) \geq 0 \ \ \forall x \in I$
2) f *admet un nombre fini de points de discontinuité*
3) $\int_{D_f} f(x)dx = 1$, *autrement dit l'aire sous la courbe C de* f *est égale à* 1.

Définition 4.3.3. *Soit X une variable aléatoire continue sur I, alors, il existe sur I une densité de probabilité* f *associée à X et pour tout intervalle J inclus dans I, la probabilité que x appartien à J est donnée par la formule suivante :*

$$P(X \in J) = \int_J f(x)dx$$

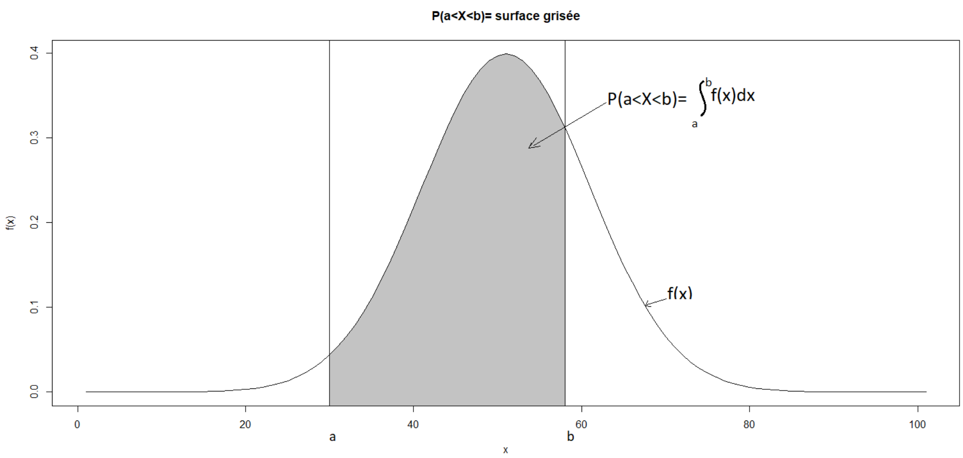

FIGURE 4.4 –

Remarque 4.3.1.

1) *Dans le cas continu on a* $P(X = x) = 0$ *(On dit que X ne charge pas les points)*
2) *Par abus de langage la densité de probabilité est appelée loi de la v.a X.*

4.3.2 Fonction de répartition d'une v.a.r continue X

Dans le cas continu, la fonction de répartition est donnée par

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$

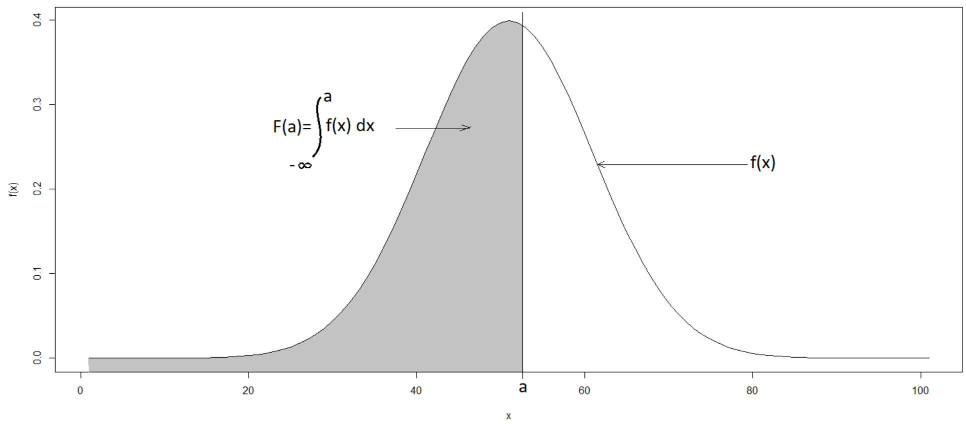

FIGURE 4.5 –

Remarque 4.3.2. *$\forall a, b \in \mathbb{R}$, on a*

1) $P(a < X \leq b) = F_X(b) - F_X(a) = \int_a^b f(t)dt.$
2) $P(a < X \leq b) = P(a \leq X \leq b) = P(a < X < b) = P(a \leq X < b)$ *car* $P(X = a) = 0.$
3) *La densité de probabilité égale la dérivée de la fonction de répartition :*

$$f_X(x) = F'_X(x).$$

4.3.3 Moments d'une v.a.r continue X

Dans ce qui suit nous généralisons les définitions données pour l'espérance mathématique, la variance et le moment d'ordre k d'une v.a.r. continue. Ainsi on a

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_{D_f} xf(x)dx \\ V(X) &= E(X - E(X))^2 = \int_{D_f} (x - E(X))^2 f(x)dx \\ m_k &= E(X^k) = \int_{D_f} x^k f(x)dx \end{aligned}$$

Remarque 4.3.3.

1) *La variance vérifie les mêmes propriétés que dans le cas discret du fait de la linéarité du signe "$\int$".*
2) *l'espérance mathématique d'une fonction g d'une v.a.r continue X est définie par*

$$E(g(X)) = \int_{D_f} g(x) f_X(x)dx$$

Fonction génératrice des moments

La fonction génératrice des moments notée par $G_X(t)$ est définie par

$$G_X(t) = E(e^{tX}) = \int_{D_f} e^{tx} f_X(x)dx.$$

Remarque 4.3.4. *Comme dans le cas discret, la relation entre le moment d'ordre k et la fonction génératrice des moments, est donnée par*

$$G_X^{(k)}(0) = m_k$$

Exemple 4.3.2. *Soit X une v.a de d.d.p f_X définie par*

$$f_X(x) = \begin{cases} x & si\ 0 < x < 1 \\ k - \frac{k}{2}x & si\ 1 \leq x \leq 2 \\ 0 & sinon \end{cases}$$

1) *Déterminer la valeur de k.*
2) *Déterminer la fonction de répartition de X.*
3) *Calculer l'espérance et la variance de X.*

Solution

La fonction f_X est bien définie sur $\mathbb{R}$, donc $D_f = \mathbb{R}$

1)

$$\begin{aligned} f_X \text{ est une d.d.p} &\Rightarrow \int_{\mathbb{R}} f_X(x)dx = 1 \\ &\Rightarrow \int_{-\infty}^{0} 0dx + \int_0^1 xdx + \int_1^2 k - \frac{k}{2}xdx + \int_2^{\infty} 0dx = 1 \\ &\Rightarrow 0 + \left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^1 + \left[kx - \frac{k}{2}\frac{1}{2}x^2\right]_1^2 + 0 = 1 \\ &\Rightarrow \left(\frac{1}{2}1^2 - 0\right) + \left(k \times 2 - \frac{k}{2}\frac{1}{2} \times 4 - \left(k - \frac{k}{2}\frac{1}{2} \times 1^2\right)\right) = 1 \\ &\Rightarrow \frac{1}{2} + 2k - k - k + \frac{k}{4} = 1 \Rightarrow k = 2. \end{aligned}$$

2)

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \begin{cases} \int_{-\infty}^{x} 0dt & = 0 & si\ x < 0 \\ \int_0^x tdt & = \frac{x^2}{2} & si\ 0 \leq x < 1 \\ \int_0^1 tdt + 2\int_1^x (1 - \frac{t}{2})dt & = -\frac{x^2}{2} + 2x - 1 & si\ 1 \leq x < 2 \\ \int_0^1 tdt + \int_1^2 (1 - \frac{t}{2})dt & = 1 & si\ x \geq 2 \end{cases}$$

3) *L'espérance de X :*

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_{\mathbb{R}} xf(x)dx = \int_0^1 x^2dx + 2\int_1^2 (x - \frac{x^2}{2})dx \\ &= \left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^1 + 2\left[\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3\right]_1^2 \\ &= \frac{1}{3} + 2 \times (2 - \frac{8}{6} - \frac{1}{2} + \frac{1}{6}) \\ E(X) &= 1. \end{aligned}$$

La variance de X :

$$\begin{aligned} Var(X) &= E(X^2) - [E(X)]^2 \\ &= E(X^2) - 1 \end{aligned}$$

or

$$\begin{aligned} E(X^2) &= \int_{\mathbb{R}} x^2 f(x)dx = \int_0^1 x^3 dx + 2\int_1^2 (x^2 - \frac{x^3}{2})dx \\ &= \left[\frac{1}{4}x^4\right]_0^1 + \left[\frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4\right]_1^2 \\ &= \frac{1}{4} + (\frac{16}{3} - 4 - \frac{2}{3} + \frac{1}{4}) \\ &= \frac{7}{6}. \end{aligned}$$

d'où

$$V(X) = \frac{1}{6}.$$

Transformation d'une v.a.r continue

Soit X une variable aléatoire dont la densité de probabilité est donnée par f_X et de fonction de répartition F_X.
On se propose d'étudier dans cette partie la détermination de la densité de probabilité f_Y d'une variable aléatoire Y lorsque celle-ci est liée à X par la relation

$$Y = g(X)$$

où g est une application mesurable de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$
On note par C_X respectivement C_Y les supports de f_X et f_Y ($C_X = x \in D_{f_X} : f_X(x) \neq 0, C_Y = y \in D_{f_Y} : f_Y(y) \neq 0$), on a

$$C_Y = g\left(C_X\right).$$

Deux cas doivent être considérés : le cas où g est bijective et le cas où elle est non bijective sur le domaine D_f.

Si g est bijective et dérivable sur D_f : *la loi de Y est donnée par la formule suivante*

$$f_Y(y) = f_X(g^{-1}(y)) \times \left|\left(g^{-1}(y)\right)'\right| \times \mathbb{I}_{C_Y}(y) \tag{4.4}$$

où g^{-1} est la fonction réciproque de g.

Preuve
Désignons par F_Y la fonction de répartition de Y

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P(Y \leq y) = P(g(x) \leq y) = \begin{cases} P(x \leq g^{-1}(y)) & \text{si g est une fonction croissante} \\ P(x \geq g^{-1}(y)) & \text{si g est une fonction décroissante} \end{cases} \\ &= \begin{cases} F_X(g^{-1}(y)) & \text{si g est une fonction croissante} \\ 1 - F_X(g^{-1}(y)) & \text{si g est une fonction décroissante} \end{cases} \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= (F_Y(y))' = \begin{cases} \left(F_X(g^{-1}(y))\right)' & \text{si g est une fonction croissante} \\ \left(1 - F_X(g^{-1}(y))\right)' & \text{si g est une fonction décroissante} \end{cases} \\ &= \begin{cases} f_X(g^{-1}(y)).(g^{-1}(y))' & \text{si g est une fonction croissante} \\ -f_X(g^{-1}(y)).(g^{-1}(y))' & \text{si g est une fonction décroissante} \end{cases} \\ &= f_X(g^{-1}(y)).\left|\left(g^{-1}(y)\right)'\right| \end{aligned}$$

■

Si g n'est pas bijective sur D_f *Si g n'est pas bijective sur le domaine $D = C_X$ il faut le séparer en sous domaine (D_i) tel que $D = \cup D_i$ et $\forall i, g_{/D_i}$ (la restriction de g sur D_i) sera bijective, dans ce cas*

$$f_Y(y) = \sum f_X(g^{-1}_{/D_i}(y)). \left|\left(g^{-1}_{/D_i}(y)\right)'\right|. \|_{C_i}(y) \tag{4.5}$$

avec

$$C_i = g(D_i).$$

4.4 Enoncé des exercices

Exercice 1 :
Un joueur jette un dé équilibré

Si le résultat égale a 1 il gagne 2 points.

Si le résultat est un chiffre pair il gagne 3 points.

Si le résultat égale a 3 ou 5 il ne gagne rien.

Soit X la variable aléatoire qui donne le gain algébrique de ce joueur.

1) *Etablir la loi de probabilité de X.*
2) *Déterminer la fonction de répartition de X.*
3) *Donner la fonction génératrice des moments.*
4) *En Déduire l'espérance, la variance et l'écart type de la v.a. X.*

***Exercice 2 :** ([1])*

Le temps T nécessaire à un rat pour parcourir un labyrinthe est une variable aléatoire dont la distribution de probabilité est donnée par :

$t_i(en secondes)$	2	3	4	5	6	7
$P_T(t_i)$	$0,1$	$0,1$	$0,3$	p_5	$0,2$	$0,1$

1) *Compléter le tableau en calculant p_5.*
2) *Calculer le temps moyen, la variance, l'écart-type.*
3) *Le rat est récompensé à l'aide d'un biscuit pour chaque seconde économisée sur un temps de parcours de 6 secondes (par exemple, s'il met 4 secondes, il reçoit 2 biscuits, mais, s'il met 6 secondes ou plus, il ne reçoit rien).*

   — *Donner la loi de probabilité de la variable "Récompense " R, égale, au nombre de biscuits reçus.*
   — *Calculer la récompense moyenne du rat, ainsi que la variance et l'écart-type de R.*
4) *Supposons que le rat soit puni par un choc électrique dont la "puissance" augmente fortement avec le temps mis à parcourir le labyrinthe, soit un choc de T^2 volts pour un temps de T secondes. Calculer la punition moyenne du rat.*
5) *Reprendre la question précédente en supposant que la punition soit un choc électrique dont la puissance varie avec le temps selon la formule $P = 10T + 5$ (la "puissance" du choc électrique est exprimée en volts). Calculer de deux façons différentes la punition moyenne ainsi que $Var(P)$.*

Exercice 3 :
Un jeu consiste à lancer deux fois de suite une pièce de monnaie. On gagne 3 points à chaque fois qu'on obtient pile et on perd 2 points à chaque fois qu'on obtient face.
Soit X la variable aléatoire qui, à chaque partie, associe le gainobtenu à la fin.

1) *Déterminer la loi de la v.a. X.*
2) *Calculer $P(X < 2)$ puis $P(X \geq 2)$.*
3) *On pose $Y = \frac{1}{X}$ Donner la loi de Y et calculer $E(Y)$.*

Exercice 4

On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{x}{\theta} - \frac{1}{2} & si \ -\theta \leq x < -\frac{\theta}{2} \\ \frac{x}{\theta} - \frac{1}{2} & si \ \frac{\theta}{2} \leq x < \theta \\ 0 & sinon \end{cases}$$

où θ est un réel positif

1. *Déterminer θ pour que la fonction f soit une densité de probabilité.*
2. *On note par X la v.a de d.d.p f.*
   a) *Calculer $E(X)$ et $Var(X)$.*
   b) *Déterminer la fonction de répartition de X.*
3. *Calculer $P(-1 < X \leq 3)$.*

Exercice 5 :
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \frac{a}{1 + x^2}.$$

1) *Déterminer a pour que f soit une densité de probabilité.*
   Soit X une v.a. de d.d.p f.
2) *Déterminer la fonction de répartition de X.*
3) *X admet-elle une espérance ?*

Exercice 6 :
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} a3^{-x} & si \ x > 0 \\ a3^{x} & si \ x < 0 \end{cases}$$

1) *Déterminer a pour que f soit une densité de probabilité.*
   Soit X une variable aléatoire admettant f pour densité.
2) *Déterminer la fonction de répartition de X. On pose $Y = 3X$ et $Z = X^2$*
3) *Déterminer la loi de Y et la loi de Z.*

4.5 Solutions des exercices

Exercice 1 :

1) $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$ *et* $X(\Omega) = \{0,2,3\}$
pour déterminer la loi de X il faut calculer $P_X\{x_i\}\ \ \forall x_i \in X(\Omega)$. *On a*

$$\begin{aligned} P_X\{0\} &= P(X^{-1}(0)) = P\{3,5\} = \frac{2}{6} \\ P_X\{2\} &= P(X^{-1}(2)) = P\{1\} = \frac{1}{6} \\ P_X\{3\} &= P(X^{-1}(3)) = P\{2,4,6\} = \frac{3}{6}. \end{aligned}$$

D'où la loi de X :

x_i	0	2	3
$P_X(x_i)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$

Table 4.5 –

2) La fonction de répartition de X :

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & si\ x < 0 \\ \frac{1}{3} & si\ 0 \le x \le 2 \\ \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2} & si\ 2 \le x \le 3 \\ \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{2} = 1 & si\ x \ge 3 \end{cases}$$

3) La fonction génératrice des moments :

$$\begin{aligned} G_X(t) &:= E(e^{tx}) \\ &= \frac{1}{3} + \frac{1}{6}e^{2t} + \frac{1}{2}e^{3t}. \end{aligned}$$

4) ***L'espérance de*** *X :*

$$E(X) = m_1 = G'_X(0)$$

or

$$G'_X(t) = \frac{1}{3}e^{2t} + \frac{3}{2}e^{3t}.$$

d'où

$$\begin{aligned} E(X) &= G'_X(0) \\ &= \frac{1}{3}e^0 + \frac{3}{2}e^0 \\ &= \frac{11}{6} \end{aligned}$$

La variance de *X :*

$$Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = m_2 - (m_1)^2$$

or

$$m_2 = G''_X(0)$$

et

$$G''_X(t) = \frac{2}{3}e^{2t} + \frac{9}{2}e^{3t}.$$

par suite

$$m_2 = \frac{2}{3} + \frac{9}{2} = \frac{31}{6}.$$

d'où

$$Var(X) = \frac{31}{6} - \left(\frac{11}{6}\right)^2 \simeq 1,8.$$

***L'écart-type de** X :*

$$\sigma_X = \sqrt{Var(X)} \simeq \sqrt{1,8} \simeq 1,34.$$

Exerice2

1) P_T *est une fonction de masse sur* $T(\Omega) = 2,3,4,5,6,7$ *donc*

$$\sum_{i=1}^{6} P_T(t_i) = 1$$

d'où

$$0,1 + 0,1 + 0,3 + p_5 + 0,2 + 0,1 = 1$$

par suite

$$p_5 = 1 - 0,8 = 0,2.$$

2) *L'espérance de T :*

$$\begin{aligned} E(T) &:= \sum_{i=1}^{6} t_i P_T(t_i) \\ &= (2 \times 0,1) + (3 \times 0,1) + (4 \times 0,3) + (5 \times 0,2) + (6 \times 0,2) + (7 \times 0,1) \\ &= 4,6. \end{aligned}$$

La variance de T :

$$\begin{aligned} Var(T) &:= E(T^2) - (E(T))^2 \\ &= \sum_{i=1}^{6} t_i^2 P_T(t_i) - (E(T))^2 \\ &= (4 \times 0,1) + (9 \times 0,1) + (16 \times 0,3) + (25 \times 0,2) + (36 \times 0,2) + (49 \times 0,1) - (4,6)^2 \\ &= 2,04. \end{aligned}$$

3)

— *On a*

$$\begin{aligned} P_R(4) &= P_T(2) = 0,1 \\ P_R(3) &= P_T(3) = 0,1 \\ P_R(2) &= P_T(4) = 0,3 \\ P_R(1) &= P_T(5) = 0,2 \\ P_R(0) &= P_T(6) + P_T(7) = 0,3 \end{aligned}$$

Ainsi on obtient la loi de probabilité de la variable R dans le tableau suivant :

r_j	0	1	2	3	4
$P_R(r_j)$	0,3	0,2	0,3	0,1	0,1

— *L'espérance de R :*

$$\begin{aligned} E(R) &:= \sum_{j=1}^{5} r_j P_R(r_j) \\ &= (0\times 0,3) + (1\times 0,2) + (2\times 0,3) + (3\times 0,1) + (4\times 0,1) \\ &= 1,5. \end{aligned}$$

La variance de R :

$$\begin{aligned} Var(R) &:= E(R^2) - (E(R))^2 \\ &= \sum_{j=1}^{5} r_j^2 P_R(r_j) - (E(R))^2 \\ &= (0\times 0,3) + (1\times 0,2) + (4\times 0,3) + (9\times 0,1) + (16\times 0,1) - (1,5)^2 \\ &= 1,65. \end{aligned}$$

L'écart-type de R :

$$\sigma(R) = \sqrt{Var(X)} = \sqrt{1,65} \simeq 1,28.$$

4) La punition moyenne :

$$\begin{aligned} E(T^2) &= \sum_{i=1}^{6} t_i^2 P_T(t_i) \\ &= (4\times 0,1) + (9\times 0,1) + (16\times 0,3) + (25\times 0,2) + (36\times 0,2) + (49\times 0,1) \\ &= 23,2. \end{aligned}$$

5) $P = 10T + 5$
L'espérance et la variance de P :
première méthode : *En utilisant les propositions* 2.2 *et* 2.4*, on a :*

$$E(P) = E(10T+5) = 10E(T) + 5 = 10\times 4,6 + 5 = 51.$$

$$Var(P) = Var(10T+5) = 10^2 Var(T) = 100\times 2,04 = 204.$$

deuxième méthode : *La loi de la v.a P :*

p_i	25	35	45	55	65	75
$P_P(p_i)$	0,1	0,1	0,3	p_5	0,2	0,1

Maintenant, en utilisant la définition, on a :

$$\begin{aligned} E(P) &= \sum_{i=1}^{6} p_i P_P(p_i) \\ &= (25\times 0,1) + (35\times 0,1) + (45\times 0,3) + (55\times 0,2) + (65\times 0,2) + (75\times 0,1) \\ &= 51. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Var(P) &= E(P^2) - (E(P))^2 \\ &= \sum_{i=1}^{6} p_i^2 P_P(p_i) - (E(P))^2 \\ &= (25^2\times 0,1) + (35^2\times 0,1) + (45^2\times 0,3) + (55^2\times 0,2) + (65^2\times 0,2) + (75^2\times 0,1) - 51^2 \\ &= 204. \end{aligned}$$

Exercice3

1)

- *Déterminons $X(\Omega)$ l'ensemble des valeurs prises par X :*
  L'ensemble des résultats possible de cette expérience aléatoire est :

$$\Omega = \{(P,P),(P,F),(F,P),(F,F)\}$$

où P = pile, F = face.

  - *Si on obtient deux fois pile on gagne 6.*
  - *Si on obtient une fois pile et une fois face on gagne 1.*
  - *Si on obtient deux fois Face on perd 4.*

Ainsi,

$$X(\Omega) = \{-4, 1, 6\}$$

- *Déterminons la loi de X*
  On a
  $P_X(-4) = P(F,F) = \frac{1}{4}$, $P_X(1) = P(P,F) + P(F,P) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$, $P_X(6) = P(P,P) = \frac{1}{4}$. *Ainsi, la loi de la v.a. X est donnée par le tableau suivant*

x_i	-4	*1*	*6*
$P_X(x_i)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

2) Calculons $P(X<2)$ puis $P(X \geq 2)$ les valeurs de x_i vérifiant la condition $x_i < 2$ sont -4 et 1, donc

$$P(X<2) = P_X{-4} + P_X{1} = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}.$$

Les évènements $(X<2)$ et $(X \geq 2)$ sont deux évènements complémentaires, donc

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X<2) = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}.$$

3) la loi de la v.a. $Y = \frac{1}{X}$ est donnée par le tableau suivant

y_i	$-\frac{1}{4}$	*1*	$\frac{1}{6}$
$P_Y(y_i)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

L'espérance de Y :

$$\begin{aligned} E(Y) &= \sum_{i=1}^{3} y_i P_Y(y_i) \\ &= \left(-\frac{1}{4} \times \frac{1}{4}\right) + \left(1 \times \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{6} \times \frac{1}{4}\right) \\ &= \frac{23}{48}. \end{aligned}$$

Exercice 4

1) Déterminons θ pour que f soit une d.d.p

$$
\begin{aligned}
f \text{ est une d.d.p.} \quad &\Rightarrow \int_{D_f} f(x)dx = 1 \\
&\Rightarrow \int_{supp_f} f(x)dx = 1 \\
&\Rightarrow \int_{-\theta}^{-\frac{\theta}{2}} -\frac{x}{\theta} - \frac{1}{2}dx + \int_{\frac{\theta}{2}}^{\theta} \frac{x}{\theta} - \frac{1}{2}dx = 1 \\
&\Rightarrow \left[-\frac{x^2}{2\theta} - \frac{x}{2}\right]_{-\theta}^{-\frac{\theta}{2}} + \left[\frac{x^2}{2\theta} - \frac{x}{2}\right]_{\frac{\theta}{2}}^{\theta} = 1 \\
&\Rightarrow \left[-\frac{\theta^2}{8\theta} + \frac{\theta}{4} + \frac{\theta^2}{2\theta} - \frac{\theta}{2}\right]] + \left[\frac{\theta^2}{2\theta} - \frac{\theta}{2} - \frac{\theta^2}{8\theta} + \frac{\theta}{4}\right] = 1 \\
&\Rightarrow \frac{\theta}{4} = 1 \\
&\Rightarrow \theta = 4.
\end{aligned}
$$

2) Soit X une v.a. de d.d.p f

$$
f(x) = \begin{cases} -\frac{x}{4} - \frac{1}{2} & si \ -4 \leq x < -2 \\ \frac{x}{4} - \frac{1}{2} & si \ 2 \leq x < 4 \\ 0 & sinon \end{cases}
$$

a) Calculons l'espérance et la variance de X :

$$
\begin{aligned}
E(X) &= \int_{D_f} xf(x)dx \\
&= \int_{supp_f} xf(x)dx \\
&= \int_{-4}^{-2} -\frac{x^2}{4} - \frac{x}{2}dx + \int_{2}^{4} \frac{x^2}{4} - \frac{x}{2}dx \\
&= \left[-\frac{x^3}{12} - \frac{x^2}{4}\right]_{-4}^{-2} + \left[\frac{x^3}{12} - \frac{x^2}{4}\right]_{2}^{4} \\
&= \frac{8}{12} - 1 - \frac{64}{12} + 4 + \frac{64}{12} - 4 - \frac{8}{12} + 1 \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
Var(X) &= E(X^2) - (E(X))^2 \\
&= \int_{D_f} x^2 f(x)dx - 0 \\
&= \int_{supp_f} x^2 f(x)dx \\
&= \int_{-4}^{-2} -\frac{x^3}{4} - \frac{x^2}{2}dx + \int_{2}^{4} \frac{x^3}{4} - \frac{x^2}{2}dx \\
&= \left[-\frac{x^4}{16} - \frac{x^3}{6}\right]_{-4}^{-2} + \left[\frac{x^4}{16} - \frac{x^3}{6}\right]_{2}^{4} \\
&= -\frac{16}{16} + \frac{8}{6} + \frac{4^4}{16} - \frac{4^3}{6} \\
&= -1 + \frac{4}{3} + 16 - \frac{32}{3} \\
&= \frac{13}{3}.
\end{aligned}
$$

3) La fonction de répartition de X

$$
\begin{aligned}
F_X(x) &= \int_{-\infty}^{x} f(t)dt \\
&= \begin{cases} 0 & si\ x < -4 \\ \int_{-4}^{x} -\frac{t}{4} - \frac{1}{2}dt & si\ -4 \le x < -2 \\ \int_{-4}^{-2} -\frac{t}{4} - \frac{1}{2}dt & si\ -2 \le x < 2 \\ \int_{-4}^{-2} -\frac{t}{4} - \frac{1}{2}dt + \int_{2}^{x} \frac{t}{4} - \frac{1}{2} & si\ 2 \le x < 4 \\ 1 & si\ x \ge 4 \end{cases} \\
&= \begin{cases} 0 & si\ x < -4 \\ -\frac{x^2}{8} - \frac{x}{2} & si\ -4 \le x < -2 \\ \frac{1}{2} & si\ -2 \le x < 2 \\ \frac{x^2}{8} - \frac{x}{2} + 1 & si\ 2 \le x < 4 \\ 1 & si\ x \ge 4 \end{cases}
\end{aligned}
$$

3)

$$
\begin{aligned}
P(-1 < X \le 3) &= F_X 3 - F_X -1 \\
&= \left(\frac{3^2}{8} - \frac{3}{2} + 1\right) - \frac{1}{2} \\
&= \frac{9}{8} - \frac{3}{2} + 1 - \frac{1}{2} \\
&= \frac{1}{8}.
\end{aligned}
$$

<u>Exercice 5 :</u>

1) Déterminons a pour que f soit une d.d.p

$$\begin{aligned}
f \text{ est une d.d.p.} \quad &\Rightarrow \int_{D_f} f(x)dx = 1 \\
&\Rightarrow \int_{\mathbb{R}} f(x)dx = 1 \\
&\Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{a}{1+x^2}dx = 1 \\
&\Rightarrow a \times \left(\lim_{x\to\infty} arctan(x) - \lim_{x\to-\infty} arctan(x) \right) = 1 \\
&\Rightarrow a\Pi = 1 \\
&\Rightarrow a = \frac{1}{\Pi}.
\end{aligned}$$

Soit X une v.a. de d.d.p $f(x) = \frac{1}{\Pi(1+x^2)}$

2) La fonction de répartition de X

$$\begin{aligned}
F_X(x) &= \int_{-\infty}^{x} f(t)dt \\
&= \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\Pi(1+t^2)}dt \\
&= \frac{1}{\Pi} \times [arctan(t)]_{-\infty}^{x} \\
&= \frac{1}{\Pi} \times \left(arctan(x) + \frac{\Pi}{2} \right) \\
&= \frac{1}{\Pi} arctan(x) + \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

3) La v.a. X n'admet pas d'espérance mathématique car

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} |x| f(x)dx &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|x|}{\Pi(1+x^2)}dx \\
&= \int_{0}^{+\infty} \frac{2x}{\Pi(1+x^2)}dx \\
&= \left[\ln\left(1+x^2\right) \right]_0^{+\infty} = +\infty.
\end{aligned}$$

Exercice 6 :

1) Déterminons a pour que f soit une d.d.p

$$\begin{aligned}
f \text{ est une d.d.p.} \quad &\Rightarrow \int_{D_f} f(x)dx = 1 \\
&\Rightarrow \int_{\mathbb{R}} f(x)dx = 1 \\
&\Rightarrow \int_{-\infty}^{0} a3^x dx \int_{0}^{+\infty} a3^{-x} = 1 \\
&\Rightarrow a \times \left(\int_{-\infty}^{0} e^{x\ln 3} dx \int_{0}^{+\infty} e^{-x\ln 3} \right) = 1 \\
&\Rightarrow a \times \left(\left[\frac{1}{ln3} e^{x\ln 3} \right]_{-\infty}^{0} + \left[\frac{1}{ln3} e^{-x\ln 3} \right]_{0}^{+\infty} \right) = 1 \\
&\Rightarrow a \frac{2}{\ln 3} = 1 \\
&\Rightarrow a = \frac{\ln 3}{2}.
\end{aligned}$$

Soit X une variable aléatoire de d.d.p $f(x) = \begin{cases} \frac{\ln 3}{2} 3^{-x} & si\ x > 0 \\ \frac{\ln 3}{2} 3^{x} & si\ x < 0 \end{cases}$

2) *La fonction de répartition de X*

— *si x<0*

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_{-\infty}^{x} f(t)dt \\ &= \int_{-\infty}^{x} \frac{\ln 3}{2} 3^t dt \\ &= \int_{-\infty}^{x} \frac{\ln 3}{2} e^{t\ln 3} dt \\ &= \left[\frac{1}{2} e^{t\ln 3}\right]_{-\infty}^{x} \\ &= \frac{1}{2} e^{x\ln 3} \\ &= \frac{1}{2} 3^x. \end{aligned}$$

— *si x>0*

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_{-\infty}^{x} f(t)dt \\ &= \int_{-\infty}^{0} \frac{\ln 3}{2} 3^t dt + int_0^x \frac{\ln 3}{2} 3^{-t} dt \\ &= \frac{1}{2} + \int_{0}^{x} \frac{\ln 3}{2} e^{-t\ln 3} dt \\ &= \frac{1}{2} + \left[\frac{-1}{2} e^{-t\ln 3}\right]_{0}^{x} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{-1}{2} e^{-x\ln 3} + \frac{1}{2} \\ &= 1 - \frac{1}{2} 3^{-x} \end{aligned}$$

$$= \begin{cases} 1 - \frac{1}{2} 3^{-x} & si\ x > 0 \\ \frac{1}{2} 3^{x} & si\ x < 0 \end{cases}$$

3) a) *$Y = g(X) = 3X$, la fonction g est bijective sur $\mathbb{R}$, pour déterminer la loi de Y, on va utiliser la formule (4.4) :*

$$f_Y(y) = f_X(g^{-1}(y)) \times \left|\left(g^{-1}(y)\right)'\right| \times \mathbb{I}_{C_Y}(y)$$

On a

$$y = g(x) = 3x \Rightarrow x = \frac{y}{3} = g^{-1}(y)$$

donc

$$\left(g^{-1}(y)\right)' = \frac{1}{3}$$

et

$$x \in \mathbb{R} \Rightarrow y \in \mathbb{R} \Rightarrow C_Y = \mathbb{R}$$

On en déduit : $\forall y$

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= f_X(\frac{y}{3}) \times \frac{1}{3} \\ &= \begin{cases} \frac{\ln 3}{6} 3^{\frac{-y}{3}} & si\ y > 0 \\ \frac{\ln 3}{6} 3^{\frac{y}{3}} & si\ y < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

b) *Maintenant $Z = X^2 = g(x)$ la fonction g dans ce cas n'est pas bijective sur $\mathbb{R}$, mais la restriction de g sur $\mathbb{R}^+$ ($g_1 = g_{/\mathbb{R}^+}$) et la resriction de g sur $\mathbb{R}^-$ ($g_2 = g_{/\mathbb{R}^-}$) sont bijectives, pour déterminer la loi de Z, on va utiliser la formule (4.5) :*

$$f_Z(y) = f_X(g_1^{-1}(z)) \times \left|\left(g_1^{-1}(y)\right)'\right| \times \mathbb{1}_{C_1}(z) + f_X(g_2^{-1}(z)) \times \left|\left(g_2^{-1}(y)\right)'\right| \times \mathbb{1}_{C_2}(z)$$

— *si $x \in \mathbb{R}^+$:*

$$z = g_1(x) = x^2 \Rightarrow x = g_1^{-1}(z) = \sqrt{z}$$

donc

$$\left(g_1^{-1}(z)\right)' = \frac{1}{2\sqrt{z}}$$

et

$$x \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow z \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow C_1 = \mathbb{R}^+$$

— *si $x \in \mathbb{R}^-$:*

$$z = g_2(x) = x^2 \Rightarrow x = g_2^{-1}(z) = -\sqrt{z}$$

donc

$$\left(g_1^{-1}(z)\right)' = \frac{-1}{2\sqrt{z}}$$

et

$$x \in \mathbb{R}^- \Rightarrow z \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow C_2 = C_1 = \mathbb{R}^+$$

On en déduit : $\forall z \in \mathbb{R}^+$

$$\begin{aligned} f_Z(z) &= f_X(\sqrt{z}) \times \left|\frac{1}{2\sqrt{z}}\right| \mathbb{1}_{z\in\mathbb{R}^+} + f_X(-\sqrt{z}) \times \left|\frac{-1}{2\sqrt{z}}\right| \mathbb{1}_{z\in\mathbb{R}^+} \\ &= \begin{cases} \frac{\ln 3}{2} 3^{-\sqrt{z}} \frac{1}{2\sqrt{z}} & si\ z > 0 \\ \frac{\ln 3}{2} 3^{-\sqrt{z}} \frac{1}{2\sqrt{z}} & si\ z > 0 \end{cases} \end{aligned}$$

D'où

$$f_Z(z) = \frac{\ln 3}{2\sqrt{z}} 3^{-\sqrt{z}} \mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(z)$$

Chapitre 5

Lois de probabilités usuelles

5.1 Cas discret

5.1.1 Loi uniforme $U(n)$

Dans ce cas $X(\Omega)=\{x_1, x_2, .., x_n\}$ *et* $P_X(x_i) = \frac{1}{n}$.

En fait cela représente le cas de l'équiprobabilité.

Exemple : *On lance un dé équilibré, soit X la v.a.égale le numéro apparaissant sur le dé.*

$$X \circlearrowleft U(n)$$

5.1.2 Loi de Bernoulli $B(p)$

Une v.a X suit une loi de Bernoulli de paramètre p si et seulement si, $X(\Omega) = \{0, 1\}$, *et*

$$P_X(\{1\}) = p, P_X(\{0\}) = 1 - p = q$$

***La loi de** X :*

$$P_X k = p^k q^{1-k} \quad k \in 0, 1$$

Notation

Soit X une v.a qui suit une loi de Bernoulli de paramètre p, on notera alors :

$$X \circlearrowleft B(p)$$

Proposition 5.1.1. *si* $X \circlearrowleft B(p)$ *alors* $E(X) = p$ *et* $V(X) = pq$.

Exemples

Fonction indicatrice de A :

$$\mathbb{1}_A(x) = \begin{cases} 1 & si\ x \in A \\ 0 & si\ x \notin A. \end{cases}$$

$$X \circlearrowleft B(P(A)), \quad E(X) = P(A), \quad Var(X) = P(A)(1 - P(A)).$$

5.1.3 Loi binomiale $B(n, p)$

On réalise une expérience qui consiste à répéter n fois de manière indépendante une épreuve de Bernoulli de paramètre p.
Soit X la variable qui donne le nombre de succés à l'issue de l'expérience (nombre des "1") :
***La loi de** X :*

$$X(\Omega) = \{0, 1, ..., n\} \text{ et } P_X(k) = C_n^k p^k q^{n-k}.$$

Dans ce cas, X suit une loi binomiale de paramètres n et p et on écrit :

$$X \circlearrowleft B(n, p)$$

Proposition 5.1.2. *si $X \circlearrowleft B(n, p)$ alors $E(X) = np$ et $V(X) = npq$.*

***Exemple** On jette six fois une pièce de monnaie et on considère la v.a X égale le nombre de faces obtenues.*
On aura alors

$$X \circlearrowleft B(6, \frac{1}{2})$$

D'où :

$$E(X) = 6 \times \frac{1}{2} = 3$$

$$Var(X) = 6 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = 1,5.$$

5.1.4 Loi géométrique $G(p)$

Soit X une v.a.r discrète qui donne le nombre d'expérience nécessaire pour la réalisation d'un évènement A telque $P(A) = p$:
***La loi de** X :*

$$X(\Omega) = \mathbb{N}^* \text{ et } P_X(k) = pq^{k-1}.$$

***Notation** :*
On dira dans ce cas que X suit une loi géométrique de paramètre p, et on écrit

$$X \circlearrowleft G(p)$$

Proposition 5.1.3. *si $X \circlearrowleft G(p)$ alors $E(X) = \frac{1}{p}$ et $V(X) = \frac{q}{p^2}$.*

Exemple 5.1.1.
- *On lance un dé cubique équilibré, la variable aléatoire X comptant le nombre de lancers nécessaires pour obtenir un 2 suit une loi géométrique de paramètre $\frac{1}{6}$.*
- *Lorsqu'on lance un dé cubique équilibré, la probabilité d'obtenir un 2 au troisième lancer (et pas avant) est égale à :*

$$P_X(k) = \frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^{3-1} = \frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^2 \simeq 0,11.$$

5.1.5 Loi de Poisson $P(\lambda)$

On dit qu'une v.a.r discrète X suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$, et on note

$$X \circlearrowleft P(\lambda)$$

si et seulement si sa loi de probabilité est donnée par

$$P_X(k) = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}, \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

Proposition 5.1.4. *si $X \circlearrowleft P(\lambda)$ alors $E(X) = V(X) = \lambda$.*

Exemple
Une machine utilisée dans une chaîne de production tombe en panne en moyenne 2 fois par mois.
Soit X le nombre de pannes par mois, en supposant que X suit une loi de Poisson, quelle est la probabilité que dans un mois donné la machine tombe en panne au moins deux fois ?

On a, par hypothèse $X \circlearrowleft P(2)$,
d'où $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et

$$P_X(k) = \frac{2^k}{k!}e^{-2}, \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

donc, la probabilité que dans un mois donné la machine tombe en panne au moins deux fois, égale

$$\begin{aligned} P(X \geq 2) &= 1 - P(X < 2) \\ &= 1 - (P_X(0) + P_X(1)) \\ &= 1 - \left(\frac{2^0}{0!}e^{-2} + \frac{2^1}{1!}e^{-2}\right) \\ &= 1 - 3e^{-2} \simeq 0,59. \end{aligned}$$

5.2 Cas continu

5.2.1 Loi uniforme

Une v.a. X est distribuée uniformément sur un intervalle $[a, b]$, si et seulement si sa densité de probabilité s'exprime :

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & si\ x \in [a, b] \\ 0 & si\ non \end{cases}$$

Notation

$$X \circlearrowleft U[a, b]$$

Proposition
si $X \circlearrowleft U[a, b]$ alors $E(X) = \frac{a+b}{2}$ et $Var(X) = \frac{(a-b)^2}{12}$.
La fonction de répartition
Si $X \circlearrowleft U[a, b]$, sa fonction de répartition est donnée par

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & si\ x \leq a \\ \frac{x-a}{b-a} & si\ x \in [a, b] \\ 1 & si\ x \geq b \end{cases}$$

5.2.2 Loi exponentielle

Une v.a.r X suit une loi de exponentielle de paramètre $\lambda > 0$, (on note $X \circlearrowleft \zeta(\lambda)$), si et seulement si

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & si\ x > 0 \\ 0 & si\ non \end{cases}$$

Proposition 5.2.1. *si $X \circlearrowleft \zeta(\lambda)$ alors $E(X) = \frac{1}{\lambda}$ et $V(X) = \frac{1}{\lambda^2}$.*

La fonction de répartition
Si $X \circlearrowleft \zeta(\lambda)$, sa fonction de répartition est donnée par

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & si\ x \leq 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & si\ x \geq 0 \end{cases}$$

5.2.3 Loi normale

Une v.a. X suit la loi normale de paramètres m, σ^2, (on note $X \circlearrowleft N\left(m, \sigma^2\right)$), si et seulement si sa densité de probabilité est donnée par

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2} \ \forall x \in \mathbb{R}$$

Proposition
si $X \circlearrowleft N\left(m, \sigma^2\right)$ alors $E(X) = m$ et $V(X) = \sigma^2$.

Remarque 5.2.1. *On appelle $N(0,1)$ la loi normale standardisée, on note $\phi(x)$ sa densité de probabilité*

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} \ \forall x \in \mathbb{R}$$

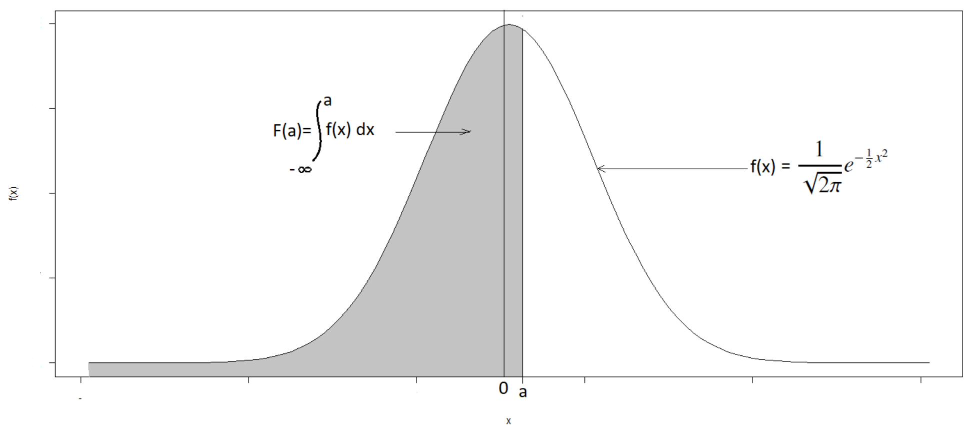

FIGURE 5.1 –

Théorème 5.2.1. *Si $X \circlearrowleft N\left(m, \sigma^2\right)$ alors $Y = \frac{X-m}{\sigma} \circlearrowleft N(0,1)$.*

Preuve

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P(Y \leq y) = P(\frac{X-m}{\sigma} \leq y) \\ &= P(X \leq \sigma y + m) = F_X(\sigma y + m) \end{aligned}$$

Par dérivation, on obtient

$$f_Y(y) = \sigma f_X(\sigma y + m) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}y^2}$$

■

Remarque 5.2.2.

— *La conséquence de ce résultat est le non établissement de tables pour la fonction de répartition d'une loi* $N\left(m, \sigma^2\right)$, *et puisque la table de la loi* $N(0, 1)$ *suffit pour calculer toutes les probabilités.*

— *La d.d.p de la loi* $N(0, 1)$ *est symétrique par rapport à* 0 $(f(-x) = f(x))$, *par consequence* $F(-x) = 1 - F(x)$.

5.3 Enoncé des exercices :

Exercice 1 :

On possède une pièce de monnaie truquée de telle sorte que la probabilité d'obtenir pile soit $0,3$

1) *On lance* 10 *fois la pièce.*
   Quelle est la probabilité d'obtenir 3 *fois pile ?*
2) *On lance la pièce jusqu'à ce que l'on obtient pile pour la première fois.*
   Combien effectuera-t-on en moyenne de lancers ?

Exercice 2 :

On a constaté que le nombre moyen de clients, par minute, arrivant aux caisses d'un supermarché est $0,8$. *Sachant que ce nombre suit une loi de Poisson pour un certain paramètre , quelle est la probabilité qu'entre* $14h30$ *et* 14.31,

1) *Il n'y ait aucun client ;*
2) *Il y ait un ou deux clients ;*
3) *Il y ait au plus* 3 *clients.*

Exercice 3 : *Soit X une variable aléatoire continue dont la densité de probabilité est donnée par :*

$$f(x) = \frac{x}{2} + k \ \ pour \ -1 < x < 1; et\ f(x) = 0 \ ailleurs$$

1) *Déterminer k.*
2) *Déterminer la fonction de répartition et en déduire* $P(0 < X < 3)$.

Exercice 4 :

Le poids des bébés à la naissance suit une loi normale de moyenne $3,3Kg$ *et d'écart type* $0,6Kg$. *On note X la variable aléatoire "poids des bébés à la naissance".*

1) *Calculer la probabilité :* $P(2,12 < X < 4,48)$.
2) *Déterminer la limite du poids correspondant aux* 10% *des bébés les plus gros.*

Exercice 5 :

1) *soit X une variable aléatoire suivant une loi normale* $N(0,1)$.
   Déterminer $t > 0$ *tel que* $P(-t < X < t) = 0,95$.
2) *soit X une variable aléatoire suivant une loi normale* $N(8,16)$.
   Donner des valeurs approchées pour

$$P(X < 7,5), P(X > 8,5), P(6,5 < X < 10), P(X > 6 \setminus X > 5).$$

3) *Soit X une variable aléatoire suivant une loi gaussienne.*
   Déterminer l'espérance et la variance de X sachant que

$$\begin{cases} P(X < -1) \approx 0,05 \\ P(X > 3) \approx 0,12 \end{cases}$$

Exercice 6 *Une médaille est dite conforme lorsque sa masse est comprise entre* $9,9$ *et* $10,1$ *grammes.*
On dispose de deux machines M_1 *et* M_2 *pour produire les médailles.*

1) *Après plusieurs séries de tests, on estime que la machine M_1 produit des médailles dont la masse X en grammes suit la loi normale d'espérance* 10 *et d'écart-type* 0,06 .
On note C l'événement "la médaille est conforme".
   — *Calculer la probabilité qu'une médaille produite par la machine M_1 ne soit pas conforme.*

2) *La proportion des médailles non conformes produites par la machine M_1 étant jugée trop importante, on utilise la machine M_2 qui produit des médailles dont la masse en grammes suit la loi normale d'espérance* 10 *et d'écart-type σ.*
   — *Sachant que cette machine produit* 6% *de pièces non conformes, déterminer la valeur de σ .*

Exercice supplémentaire

Exercice 1 :

On considère une entreprise de construction produisant des objets sur deux chaînes de montage A et B qui fonctionnent indépendamment l'une de l'autre. Pour une chaîne donnée, les fabrications des pièces sont indépendantes. On suppose que A produit 60% *des objets et B produit* 40% *des objets. La probabilité qu'un objet construit par la chaîne A soit défectueux est* 0.1 *alors que la probabilité pour qu'un objet construit par la chaîne B soit défectueux est* 0.2.

1) *On choisit au hasard un objet à la sortie de l'entreprise. On constate que cet objet est défectueux. Calculer la probabilité de l'évènement « l'objet provient de la chaîne A ».*

2) *On suppose de plus que le nombre d'objets produits en une heure par A est une variable aléatoire Y qui suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda = 20$. On considère la variable aléatoire X représentant le nombre d'objets défectueux produits par la chaîne A en une heure.*
   a) *Rappeler la loi de Y ainsi que la valeur de l'espérance et de la variance de Y.*
   b) *Soient k et n deux entiers naturels, déterminer la probabilité conditionnelle $P(X = k/Y = n)$.*
   (On distinguera les cas $k < n$ et $k > n$).
   c) *En déduire, en utilisant le système complet d'évènements $(Y = i)_{i \in N}$, que X suit une loi de Poisson de paramètre* 2.

Exercice 2 :

Une entreprise produit des batteries de téléphones portables. On note Y la variable aléatoire qui, à chaque échantillon de 100 *batteries, associe la moyenne des durées des décharge. On admet que Y suit la loi normale de paramètre $m = 80et$ $s = 0,4$.*

1) *Calculer la probabilité $P(79 \leq Y \leq 81)$.*
2) *Déterminer le réel a tel que $P(Y \geq a) = 0,95$.*
3) *Calculer la probabilité de l'évènement « $(Y \geq 80)$ sachant que $(Y \geq 79,34)$ ».*

Exercice 3 :

Une variable aléatoire X suit une loi normale de paramètres m et σ^2.
On sait que $P(X \leq 2) = 0,7611$ et $P(X \geq 6) = 0,0066$.

1) *Déterminer la moyenne et l'écart type de X.*
2) *Calculer les probabilités :*

$$P(X \geq 4,92) \ ; \ P(X \geq -4,12) \ ; \ P(4,92 \leq X \leq 7,18).$$

5.4 Solutions des exercices

Exercice 1

1) *On lance* 10 *fois la pièce,*
et on note par X le nombre de "pile" obtenus au cours de cette expérience.
X suit une loi Binomiale de paramètres $n = 10$ *et* $p = 0,3$ *:*

$$X \circlearrowleft B(10; 0,3)$$

$$P_X k = C_{10}^k 0,3^k \times 0,7^{10-k}; \quad \forall k \in \{0, 1, ..., 10\}$$

d'où, la probabilité d'obtenir 3 *fois pile :*

$$P_X 3 = C_{10}^3 0,3^3 \times 0,7^7 \simeq 0,26.$$

2) *On note Y la variable aléatoire réelle égale au nombre de lancers nécessaires pour obtenir, pour la première fois, "pile" .*
La loi de Y :

$$Y \circlearrowleft G(p)$$

où

$$p = P(\text{"}pile\text{"}) = 0,3$$

donc, Y suit une loi géométrique de paramètre $p = 0,3$

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad P_X k = 0,3 \times 0,7^{k-1}$$

On en déduit :

$$E(Y) = \frac{1}{p} = \frac{1}{0,3} = \frac{10}{3}$$

donc, en moyenne, si on répète un grand nombre de fois l'expérience aléatoire, il faudra $\frac{10}{3}$ *lancers, pour obtenir pour la première fois "pile" .*

Exercice2

On va modéliser ce problème par une loi de Poisson, soit X la variable aléatoire associée, par hypothèse

$$E(X) = 0,8$$

Alors X suit une loi de poisson de paramètre $\lambda = 0,8$
et $\forall \lambda \in \mathbb{N}$

$$P_X\{k\} = \frac{0,8^k}{k!} e^{-0,8}$$

On calcule ensuite les probabilités :

1)

$$\begin{aligned} P_X\{0\} &= \frac{0,8^0}{0!} e^{-0,8} \\ &= e^{-0,8} \simeq 0,45. \end{aligned}$$

2)

$$\begin{aligned} P_X\{1\} + P_X\{2\} &= \frac{0,8^1}{1!} e^{-0,8} + \frac{0,8^2}{2!} e^{-0,8} \\ &= 1,18 e^{-0,8} \simeq 0,5. \end{aligned}$$

3)

$$\begin{aligned} P_X\{3\} &= \frac{0,8^3}{3!}e^{-0,8} \\ &= \frac{0,8^3}{6}e^{-0,8} \simeq 0,04. \end{aligned}$$

Exercice 3

1)

$$\begin{aligned} f \text{ est une d.d.p.sur } \mathbb{R} &\Rightarrow \int_{\mathbb{R}} f(x)dx = 1 \\ &\Rightarrow \int_{-1}^{1} \frac{x}{2} + kdx = 1 \\ &\Rightarrow \left[\frac{x^2}{4} + kx\right]_{-1}^{1} = 1 \\ &\Rightarrow \frac{1}{4} + k - \frac{1}{4} + k = 1 \\ &\Rightarrow k = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

2) La fonction de répartition de X

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_{-\infty}^{x} f(t)dt \\ &= \begin{cases} 0 & si\ x < -1 \\ \int_{-1}^{x} \frac{t}{2} + \frac{1}{2}dt & si\ -1 < x < 1 \\ 1 & si\ x > 1 \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0 & si\ x < -1 \\ \frac{x^2}{4} + \frac{x}{2} + \frac{1}{4} & si\ -1 < x < 1 \\ 1 & si\ x > 1 \end{cases} \end{aligned}$$

En déduit :

$$\begin{aligned} P(0 < X < 3) &= F(3) - F(0) \\ &= 1 - \frac{1}{4} \\ &= \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

Exercice 4 : *Par hypothèse X* $\circlearrowleft$ $N(3,3;\ \ 0,6^2)$ *donc, d'après le théorème (5.2.1), la variable alétoire* $Y = \frac{X-3,3}{0,6}$ *suit une loi* $N(0,1)$.

1)

$$\begin{aligned} P(2,12 < X < 4,48) &= P(\frac{2,12-3,3}{0,6} < \frac{X-3,3}{0,6} < \frac{4,48-3,3}{0,6}) \\ &= P(-1,467 < Y < 2,5) \\ &= F_Y(2,5) - F_Y(-1,47) \\ &= F_Y(2,5) - (1 - F_Y(1,47)) \\ &= 0,9938 - 1 + 0,9292 \\ &= 0,923. \end{aligned}$$

2) Déterminer la limite du poids correspondant aux 10% *des bébés les plus gros.*

$$\begin{aligned}
P(X > a) = 0,1 \quad &\Rightarrow \quad P(\frac{X-3,3}{0,6} > \frac{a-3,3}{0,6}) = 0,1 \\
&\Rightarrow \quad P(Y > \frac{a-3,3}{0,6}) = 0,1 \\
&\Rightarrow \quad 1 - F_Y(\frac{a-3,3}{0,6}) = 0,1 \\
&\Rightarrow \quad F_Y(\frac{a-3,3}{0,6}) = 0,9 \\
&\Rightarrow \quad \frac{a-3,3}{0,6} = 1,28 \\
&\Rightarrow \quad a = 4,068.
\end{aligned}$$

Exercice 5 :

1) Par hypothése $X \circlearrowleft N(0,1)$*, on note par* F *sa fonction de répartition de* X*. On a*

$$P(-t < X < t) = F(t) - F(-t) = F(t) - (1 - F(t)) = 2F(t) - 1$$

Donc

$$P(-t < X < t) = 095 \Leftrightarrow F(t) = 0,975$$

Ce qui donne

$$t \simeq 1,96.$$

2)

$$X \circlearrowleft N(8,16) \Rightarrow Y = \frac{X-8}{4} \circlearrowleft N(0,1)$$

a)

$$\begin{aligned}
P(X < 7,5) &= P\left(\frac{X-8}{4} < \frac{7,5-8}{4}\right) \\
&= P\,(Y < -0,125) \\
&= F_Y(-0,125) = 1 - F_Y(0,125) \\
&\simeq 1 - 0,55 \\
&\simeq 0,45.
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
P(X > 8,5) &= P\left(\frac{X-8}{4} > \frac{8,5-8}{4}\right) \\
&= P\,(Y > 0,125) \\
&\simeq 1 - 0,55 \\
&\simeq 0,45.
\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}
P(6,5 < X < 10) &= P\left(\frac{6,5-8}{4} < \frac{X-8}{4} < \frac{10-8}{4}\right) \\
&= P\,(-0,375 < Y < 0,5) \\
&= F_Y(0,5) - F_Y(-0,375) \\
&= F_Y(0,5) - 1 + F_Y(0,375) \\
&\simeq 0,6915 - 1 + 0,6443 \\
&\simeq 0,34.
\end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned}
P(X > 6 \setminus X > 5) &= \frac{P\left((X > 6) \bigcap (X > 5)\right)}{P(X > 5)} \\
&= \frac{P\left(X > 6\right)}{P(X > 5)} \\
&= \frac{P\left(\frac{X-8}{4} > \frac{6-8}{4}\right)}{P(\frac{X-8}{4} > \frac{5-8}{4})} \\
&= \frac{P\left(Y > -0,5\right)}{P(Y > -0,75)} \\
&= \frac{1 - F_Y(-0,5)}{1 - F_Y(-0,75)} \\
&= \frac{F_Y(0,5)}{F_Y(0,75)} \\
&\simeq \frac{0,6915}{0,7734} \\
&\simeq 0,89.
\end{aligned}$$

3)

$$X \circlearrowleft N(m, \sigma^2) \Rightarrow Y = \frac{X - m}{\sigma} \circlearrowleft N(0, 1)$$

On a

$$\begin{cases} P(X < -1) \approx 0,05 \\ P(X > 3) \approx 0,12 \end{cases}$$

En renormalisant comme aux questions précédentes, on trouve :

$$\begin{cases} P(\frac{X-m}{\sigma} < \frac{-1-m}{\sigma}) \approx 0,05 \\ P(\frac{X-m}{\sigma} > \frac{3-m}{\sigma}) \approx 0,12 \end{cases}$$

C'est à dire

$$\begin{cases} F\left(\frac{-1-m}{\sigma}\right) = 0,05 \\ 1 - F\left(\frac{3-m}{\sigma})\right) = 0,12 \end{cases}$$

Or, $F(-1,64) \simeq 0,05$ *et* $F(1,17) \simeq 0,88$*, donc on doit avoir*

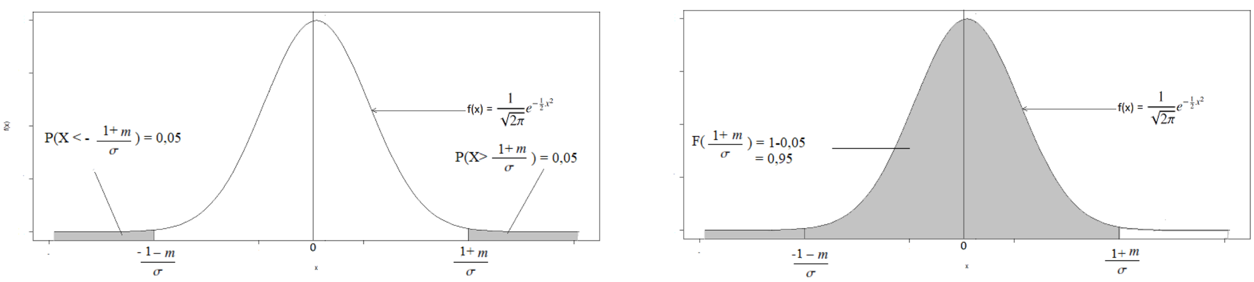

FIGURE 5.2 –

$$\begin{cases} \frac{1+m}{\sigma} = 1,64 \\ \frac{3-m}{\sigma}) = 1,17 \end{cases}$$

On résoud le système et on trouve

$$\begin{cases} m \simeq 1,33 \\ \sigma \simeq 1,42 \end{cases}$$

Exercice 6 :

1)

$$X \circlearrowleft N(10; 0,6^2) \Rightarrow Z = \frac{X-10}{0,06} \circlearrowleft N(0;1)$$

—

$$\begin{aligned}
P(9,9 \leq X \leq 10,1) &= P(\frac{9,9-10}{0,06} \leq \frac{X-10}{0,06} \leq \frac{10,1-10}{0,06}) \\
&= P(-1,66 \leq Z \leq 1,66) \\
&= F_Z(1,66) - F_Z(-1,66) \\
&= F_Z(1,66) - (1 - F_Z(1,66)) \\
&= 2F_Z(1,66) - 1 = 2 \times 0,9515 - 1 \\
&= 0,904.
\end{aligned}$$

— *donc, la probabilité qu'une médaille produite par la machine M_1 ne soit pas conforme :*

$$P(C) = 1 - P(9,9 \leq X \leq 10,1) = 1 - 0,904 \simeq 0,096$$

2)

$$Y \circlearrowleft N(10; \sigma^2) \Rightarrow T = \frac{Y-10}{\sigma} \circlearrowleft N(0;1)$$

6% des pièces ne sont pas conformes, par conséquent 94% des pièces le sont.
Donc :

—

$$\begin{aligned}
P(9,9 \leq Y \leq 10,1) = 0,94 &\Rightarrow P(\frac{9,9-10}{\sigma} \leq \frac{Y-10}{0,06} \leq \frac{10,1-10}{\sigma}) = 0,94 \\
&\Rightarrow P\left(\frac{0,1}{\sigma} \leq T \leq \frac{-0,1}{\sigma}\right) = 0,94 \\
&\Rightarrow F_T\left(\frac{0,1}{\sigma}\right) - \left(1 - F_T\left(\frac{0,1}{\sigma}\right)\right) = 0,94 \\
&\Rightarrow 2F_T\left(\frac{0,1}{\sigma}\right) - 1 = 0,94 \\
&\Rightarrow F_T\left(\frac{0,1}{\sigma}\right) = \frac{1,94}{2} \simeq 0,97 \\
&\Rightarrow \frac{0,1}{\sigma} \simeq 1,881 \\
&\Rightarrow \sigma \simeq 0,053.
\end{aligned}$$

Chapitre 6

Lois conjointes

6.1 Loi de probabilité d'un couple aléatoire discret

6.1.1 Loi de probabilité conjointe

Etant donnée un couple de variables aléatoires discrètes (X, Y) *à* <u>*valeurs réelles*</u> *(* $(X, Y)(\Omega) \subset \mathbb{R}^2$*), on appelle loi conjointe de X et Y l'application de* $\mathbb{R}^2$ *dans* $\mathbb{R}$ *définie par*

$$\left(x_i, y_j\right) \to P_{X,Y}(x_i, y_j) = P(\left\{(X, Y) = (x_i, y_j)\right\}) = p(\{X = x_i\} \cap Y = y_j)$$

Le couple (X, Y) *n'est plus une variable aléatoire réelle, mais une variable aléatoire à valeurs dans* $\mathbb{R}^2$.

Une loi conjointe se représente, habituellement, par un tableau :

X \ Y	y_1	…	y_j	…
x_1	$P(\{X=x_1\}\cap\{Y=y_1\})$	…	$P(\{X=x_1\}\cap\{Y=y_j\})$	…
…	…	…	…	…
x_i	$P(\{X=x_i\}\cap\{Y=y_1\})$	…	$P(\{X=x_i\}\cap\{Y=y_j\})$	…
…	…	…	…	…

FIGURE 6.1 –

6.1.2 Fonction de répartition conjointe

La fonction de répartition conjointe du couple (X, Y) *notée par* $F_{X,Y}(x, y)$ *est définie par*

$$F_{X,Y}(x, y) = \mathbb{P}(\{X \leq x\} \cap \{Y \leq y\}) = \sum_{x_i \leq x} \sum_{y_j \leq y} P_{X,Y}(x_i, y_j)$$

6.1.3 Lois marginales

Etant donnée la loi conjointe d'un couple aléatoire réel discret (X, Y) *, la loi marginale de X est la loi de probabilité de la Variable aléatoire X. Elle se calcule en faisant la somme des probabilités* $\mathbb{P}(\{X = x_i\} \cap \{Y = y_j\})$*, pour toutes les valeurs possible de* y_j*.*

$$\mathbb{P}(\{X = x_i\}) = \sum_j \mathbb{P}(\{X = x_i\} \cap \{Y = y_j\})$$

6.1.4 L'espérance mathématique d'une fonction de deux variables aléatoires

l'espérance d'une fonction de deux variables aléatoires discrètes g(X,Y) est définie par

$$E(g(X,Y)) = \sum_{x_i}\sum_{y_j} g(x_i,y_j)P_{X,Y}(x_i,y_j)$$

6.1.5 Lois conditionnelles

Etant donnée la loi conjointe d'un couple aléatoire réel discret (X, Y) *, la loi conditionnelle de X pour Y fixé est définie par*

$$\mathbb{P}_X^{Y=yj}(x_i) = \mathbb{P}(\{X = x_i\}/\{Y = y_j\}) = \frac{\mathbb{P}(\{X = x_i\} \cap \{Y = y_j\})}{\mathbb{P}(\{Y = y_j\})}$$

La loi conditionnelle de X s'obtient, pour chaque valeur de $Y = y_j$ *en divisant la probabilité conjointe dans une case, par la somme des probabilités de la* j *ième colonne.*

6.1.6 L'espérance conditionnelle

Etant donnée la loi conjointe d'un couple aléatoire réel discret (X, Y) *,l'espérance conditionnelle de X sachant que* $Y = y$ *est définie par*

Remarque 6.1.1.

$$E(X/Y) = \varphi(Y)$$

Proposition 6.1.1.

1) $E(X) = E(E(X/Y))$
2) $E(X/Y)^2 = E(X^2)$
3) $Var(X/Y) = E(X^2/Y) - (E(X/Y))^2$
4) $Var(X) = E(Var(X/Y)) + Var(E(X/Y))$.

6.1.7 Indépendance

Les variables aléatoires réelles discrètes X et Y sont dites indépendantes si et seulement si la loi conjointe est le produit des lois marginales

$$p(\{X = x_i\} \cap \{Y = y_j\}) = p(\{X = x_i\}) \times p(\{Y = y_j\})$$

Exemple :
La loi conjointe d'un couple de variables aléatoires (X, Y) *est donnée par le tableau suivant*

X \ Y	-1	0	1
1	1/12	1/6	1/12
2	1/12	0	α
3	1/6	0	1/3

FIGURE 6.2 –

1) *Déterminer* α.

2) Donner la valeur de $F_{X,Y}(3,0)$.

3) Trovrer la loi marginale de X.

4) Déterminer la loi de Y sachant que $X = 2$.

Solution

1) $\mathbb{P}_{ij}$ *définie une probabilité donc* $\sum \mathbb{P}_{ij} = 1$ *d'où*

$$\alpha = \frac{1}{12}.$$

2)

$$\begin{aligned} F_{X,Y}(3,0) &= P(X \leq 3, Y \leq 0) \\ &= P_{X,Y}(1,-1) + P_{X,Y}(2,-1) + P_{X,Y}(3,-1) + P_{X,Y}(0,-1) + P_{X,Y}(0,-1) + P_{X,Y}(0,-1) \\ &= \frac{6}{12} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

3) La loi marginale de X

$$\mathbb{P}_X(x_i) = \sum_j P_{X,Y}\left(x_i, y_j\right)$$

$X = x_i$	*1*	*2*	*3*
$P_X(x_i)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$

4) La loi de Y sachant que $X = 2$:

$$P_Y^{X=2}(y_j) = \frac{P_{X,Y}\left(2, y_j\right)}{P_X(2)}$$

$Y = y_j$	*-1*	*0*	*1*
$P_Y^{X=2}(y_j)$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$

6.2 Loi de probabilité d'un couple aléatoire continu

6.2.1 Fonction de répartition conjointe

La fonction de répartition conjointe du couple (X, Y) *notée par* $F_{X,Y}(x, y)$ *est définie par*

$$F_{X,Y}(x, y) = P(\{X \leq x\} \cap \{Y \leq y\})$$

6.2.2 La densité de probabilité conjointe

Soit (X, Y) *un couple de variables aléatoires continues de fonction de répartition* $F_{X,Y}(x, y)$, *la densité de probabilité conjointe du couple* (X, Y) *est définie par*

$$f_{X,Y}(x, y) = \frac{\partial^2 F_{X,Y}(x, y)}{\partial x \partial y}$$

Remarque 6.2.1.

$$F_{X,Y}(x, y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f_{X,Y}(u, v) dv du$$

Propriétées

1) $f_{X,Y}(x,y) \geq 0.$

2) $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)dxdy = 1.$

3) $f_{X,Y}$ *admet un nombre fini de points de discontinuité.*

4) $P(\{a \leq X \leq b\} \cap \{c \leq Y \leq d\}) = \int_a^b \int_c^d f_{X,Y}(x,y)dxdy.$

6.2.3 Densités de probabilités marginales

Soit $f_{X,Y}$ *la densité de probabilité conjointe du couple* (X,Y) *, les lois marginales de* X *et* Y *sont données respectivement par*

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)dy \\ f_Y(y) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)dx \end{aligned}$$

Remarque 6.2.2.

$$\begin{aligned} F_X(x) &= \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt = \lim_{y\to+\infty} F_{(X,Y)}(x,y) \\ F_Y(y) &= int_{-\infty}^{y} f_Y(t)dt = \lim_{x\to+\infty} F_{(X,Y)}(x,y). \end{aligned}$$

6.2.4 L'espérance mathématique d'une fonction de deux variables aléatoires

l'espérance d'une fonction de deux variables aléatoires continu $g(X,Y)$ *est définie par*

$$E(g(X,Y)) = \int\int g(x,y) f_{X,Y}(x,y)dxdy$$

6.2.5 Densités de probabilités conditionnelles

Soit $f_{X,Y}$ *la densité de probabilité conjointe du couple* (X,Y) *, les lois conditionnelles de* X *pour* Y *fixé et de* Y *pour* X *fixé sont données respectivement par*

$$f_X^{Y=y}(x) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)} \,;\, f_Y^{X=x}(y) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)}$$

Remarque 6.2.3. *Si* X *et* Y *sont deux variables aléatoires indépendantes alors*

$F_{X,Y}(x,y) = F_X(x) \times F_Y(y)$, $f_{X,Y}(x,y) = f_X(x) \times f_Y(y)$, $f_X^{Y=y}(x) = f_X(x)$ *et* $f_Y^{X=x}(y) = f_Y(y)$.

et

$$E(XY) = E(X) \times E(Y)$$

Exemple

Soit (X,Y) *un couple de variables aléatoires de densité de probabilité conjointe donnée par*

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} k(x+y) & si\ \ 0 < x < 2 \ et \ 0 < y < 2 \\ 0 & si\ non \end{cases}$$

1) Trouver k.

2) Déterminer la fonction de répartition conjointe $F_{X,Y}(x,y)$.

3) *Donner les densités de probabilité marginales. X et Y sont-elles indépendantes.*

4) *Calculer* $f_X^{Y=y}(x)$ *et* $f_Y^{X=x}(y)$

Solution

1)

$$\begin{aligned} f_{X,Y} \text{est une d.d.p} \quad &\Rightarrow \quad \int\int f_{X,Y}(x,y)dxdy = 1 \\ &\Rightarrow \quad k\int_0^2\int_0^2 x+y\; dxdy = 1 \\ &\Rightarrow \quad k = \frac{1}{8}. \end{aligned}$$

2) *la fonction de répartition conjoint :*

$$\begin{aligned} F_{X,Y}(x,y) &= \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f_{X,Y}(t,u)dudt \\ &= \begin{cases} 0 & si\;\; x<0 \;ou\; y<0 \\ \frac{1}{8}\left(x^2+2x\right) & si\;\; 0\le x<2 \;et\; y\ge 2 \\ \frac{1}{8}\left(y^2+2y\right) & si\;\; x\ge 2 \;et\; 0\le y<2 \\ \frac{1}{16}\left(x^2y+y^2x\right) & si\;\; 0\le x<2 \;et\; 0\le y<2 \\ 1 & si\;\; x\ge 2 \;ou\; y\ge 2 \end{cases} \end{aligned}$$

3) *les densités de probabilité marginales :*

a) *la loi de X :*

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int f_{X,Y}(x,y)dy = \frac{1}{8}\int_0^2 x+y\; dy 1I_{]0,2[}(x) \\ f_X(x) &= \frac{1}{4}(x+1)\; 1I_{]0,2[}(x) \end{aligned}$$

b) *la loi de Y :*

Par symétrie

$$f_Y(y) = \frac{1}{4}(y+1)\; 1I_{]0,2[}(y)$$

4) *Les lois conditionnelles :*

$$\forall y\in]0,2[,\;\; f_X^{Y=y}(x) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)} = \frac{\frac{1}{8}(x+y)}{\frac{1}{4}(y+1)} 1I_{]0,2[}(x)$$

donc

$$\forall y\in]0,2[,\;\; f_X^{Y=y}(x) = \frac{1}{2}\frac{x+y}{y+1} 1I_{]0,2[}(x)$$

et par symétrie

$$\forall x\in]0,2[,\;\; f_Y^{X=x}(y) = \frac{1}{2}\frac{x+y}{x+1} 1I_{]0,2[}(y).$$

6.3 Covariance de X et Y :

La quantité notée $Cov(X,Y)$ *définie par*

$$Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

est dite covariance du couple (X,Y) *, elle mesure le degré de dépendance entre X et Y.*

6.3.1 Coefficient de corrélation

La quantité notée ρ définie par

$$\rho = \frac{Cov(X, Y)}{\sigma_X \sigma_Y}$$

est dite coefficient de corrélation entre X et Y.

Remarque 6.3.1. *· le coefficient de corrélation mesure la corrélation entre deux variables aléatoires*

$\cdot \rho \in [-1, 1]$
$\cdot \rho (X, Y) = 1 \Leftrightarrow \exists a > 0, \exists b \in \mathbb{R}\ tq\ X = aY + b.$
$\cdot \rho (X, Y) = -1 \Leftrightarrow \exists a < 0, \exists b \in \mathbb{R}\ tq\ X = aY + b.$

Propriétés et quelques identités importantes

1) $Cov(X, Y) = E(X - E(X))E(Y - E(Y)).$
2) $E(aX + bY + c) = aE(X) + bE(Y) + c.$
3) $Var(aX + bY + c) = a^2Var(X) + b^2Var(Y) + 2abCov(X, Y).$
4) $Cov(X, Y) = 0 \Rightarrow Var(XY) = Var(X) + var(Y).$
5) *Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes et g_1 et g_2 deux fonctions de X et de Y alors*
$$E(g_1(X)g_2(Y)) = E(g_1(X)) \times E(g_2(Y))$$
6) *X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes* $\Rightarrow Cov(X, Y) = 0$, *mais*, $Cov(X, Y) = 0 \nRightarrow$ *X et Y sont indépendantes.*

6.3.2 Fonctions génératrices des moments

Pour obtenir les valeurs des moments conjoints $m_{k,l}$ d'ordre k, l on peut toujours utiliser les formules données ci-dessus.

Il est cependant plus commode d'utiliser la fonction génératrice des moments conjointe $G(t, u)$ pour calculer les moments d'ordre k, l.

$$G(t, u) = E(e^{tX+uY}) = \begin{cases} \sum_i \sum_j e^{tx_i+u\,y_j} p_{X,Y}(x_i, y_j) & \text{dans le cas discret} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx+u\,y} f_{X,Y}(x, y)dxdy & \text{dans le cas continu} \end{cases}$$

En dérivant cette fonction k fois par rapport à t et l fois par rapport à u et en évaluant la dérivée au point $(t, u) = (0, 0)$

$$m_{k,l} = E(X^kY^l) = \frac{\partial^{(k+l)}G(0, 0)}{\partial t^k \partial u^l}$$

Exemple 6.3.1. *Soient (X, Y) un couple de variables aléatoires discret de fonction de masse donnée par le tableau suivant*

1) *Calculer la fonction génératrice des moments du couple (X, Y).*
2) *Calculer les fonctions génératrices des moments de X et Y.*

<u>Solution</u>

X \ Y	-1	0	1	Px(x)
0	1 /4	0	3/8	5/8
1	0	1/4	1/8	3/8
Py(y)	1/4	1/4	1 /2	1

FIGURE 6.3 –

1) *la fonction génératrice des moments du couple* (X, Y)

$$\begin{aligned} G_{X,Y}(x,y) &= E\left(e^{tX+uY}\right) \\ &= \sum_{x_i}\sum_{y_j} P_{X,Y}(x_i,y_j)e^{tx_i+uy_j} \\ &= \frac{1}{4}e^{-u}+\frac{3}{8}e^{u}+\frac{1}{4}e^{t}+\frac{1}{2}e^{t+u}. \end{aligned}$$

2) *les fonctions génératrices des moments de X et Y*
<u>*1ère Méthode*</u>

$$\begin{aligned} G_X(t) &= E\left(e^{tX}\right) \\ &= \sum_{x_i} P_X(x_i)e^{tx_i} \\ &= \frac{5}{8}+\frac{3}{4}e^{t}. \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} G_Y(u) &= E\left(e^{uY}\right) \\ &= \sum_{y_j} P_Y(y_j)e^{uy_j} \\ &= \frac{1}{4}e^{-t}+\frac{1}{4}+\frac{7}{8}e^{t}. \end{aligned}$$

<u>*2ème Méthode*</u>

$$\begin{aligned} G_X(t) &= = \lim_{u\to 0} G(t,u) = G(t,0) \\ &= \frac{5}{8}+\frac{3}{4}e^{t}. \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} G_Y(u) &= \lim_{t\to 0} G(t,u) = G(0,u) \\ &= \frac{1}{4}e^{-t}+\frac{1}{4}+\frac{7}{8}e^{t}. \end{aligned}$$

Exemple *Soit f la fonction de densité du couple (X, Y) définie par*

$$f(x,y) = \begin{cases} e^{-(x+y)} & si\ x > 0\ et\ y > 0 \\ 0 & si\ non \end{cases}$$

— *Déterminer $G_{X,Y}(t,u)$ puis calculer $E(XY)$ et $E(X^2Y)$.*

Solution *la fonction génératrice des moments du couple* (X, Y)

$$\begin{aligned}
G_{X,Y}(x,y) &= E\left(e^{tX+uY}\right) \\
&= \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} e^{tx+uy}e^{-(x+y)}dxdy \\
&= \int_0^{+\infty} e^{(t-1)x}dx \int_0^{+\infty} e^{(1-u)y}dy \\
G_{X,Y} \text{ existe ssi } t &< 1 \text{ et } u < 1, \text{ dans ce cas} \\
G_{X,Y}(x,y) &= \frac{1}{t-1}\frac{1}{u-1}.
\end{aligned}$$

$$E(XY) = \frac{\partial^2}{\partial t \partial u} G_{X,Y}(0,0)$$

or

$$\frac{\partial^2}{\partial t \partial u} G_{X,Y}(t,u) = \frac{1}{(t-1)^2}\frac{1}{(u-1)^2}$$

d'où

$$E(XY) = 1.$$

maintenant

$$E(X^2Y) = \frac{\partial^3}{\partial t^2 \partial u} G_{X,Y}(0,0)$$

et

$$\frac{\partial^3}{\partial t^2 \partial u} G_{X,Y}(t,u) = \frac{2}{(t-1)^2}\frac{1}{(u-1)^2}$$

donc

$$E(X^2Y) = 2.$$

6.4 Enoncé des exercices

Exercice 1 :

La loi conjointe d'un couple de v.a (X, Y) est donnée par le tableau suivant

$Y=y_j$ \ $X=x_i$	1	2	3
1	1 /12	1 /6	1 /12
2	1 /12	0	a
3	1/6	0	1 /3

FIGURE 6.4 –

1) *Trouver* a.
2) *Déterminer les lois marginales de* X *et* Y.
3) *Les variables aléatoires* X *et* Y *sont-elles indépendantes ?*
4) *Déterminer la loi conditionnelle de* Y *sachant que* $X = 1$.

Exercice 2 :

Soit (X, Y) *un couple aléatoire telle que :*

$$P(X = i, Y = j) = \frac{a}{k(k+1)};\ k \geq 1;\ 1 \leq i \leq k;\ 1 \leq j \leq i$$

1) *Déterminer le réel* a.
2) *Déterminer les lois marginales de* X *et de* Y.
3) *Calculer la loi conditionnelle de* Y *sachant* $X = i$.

Exercice3 :

Soient X *et* Y *deux variables aléatoires vérifiant*

$$\forall (i, j) \in \mathbb{N}^2, P_{X,Y}(i, j) = \frac{1}{j!}\frac{a}{2^{i+j}}$$

1) *Déterminer* a *pour que* P *soit une fonction de masse.*
2) *Déterminer la loi de* X *et la loi de* Y, X *et* Y *sont elles indépendantes ?*

Exercice4 :

Soient X *et* Y *deux variables aléatoires de densité de probabilité conjointe :*

$$f(x, y) = \begin{cases} c(2x + y) & si -1 < x < 2 \ et\ 0 < y < 4, \\ 0 & si\ non \end{cases}$$

1) *Déterminer la valeur de* c.
2) *Calculer les fonctions de répartition marginales de* X *et* Y
3) *Calculer les densités de probabilité marginales de* X *et* Y.
4) *Ces variables aléatoires sont-elles indépendantes ou non ?*

Exercice 5 :

On considère le couple aléatoire (X, Y) de densité

$$f(x,y) = \begin{cases} ke^{-y} & si\ 0 < x < y, \\ 0 & si\ non \end{cases}$$

1) *Dessiner le domaine de $\mathbb{R}^2$ sur lequel cette densité ne s'annule pas.*
2) *Déterminer la valeur de la constante k.*
3) *Calculer les densités marginales de X et de Y.*
4) *Calculer $E(X)$, $E(Y)$ et $Cov(X, Y)$.*
5) *Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?*

Exercice6 :

Soit (X, Y) un couple aléatoire de densité conjointe :

$$f(x,y) = ky\, 1_D\ (x,y)$$

où D étant l'intérieur d'un triangle de sommets $O(0,0)$, $(1,0)$ et $(0,1)$

1) *Déterminer k pour que f soit effectivement une densité.*
2) *Calculer les densités de probabilité marginales de X et Y.*
3) *Calculer le moment d'ordre(1,1) du couple (X, Y), $E(X)$ et $E(Y)$.*
4) *Calculer $Cov(X, Y)$, que peut-on déduire.*
5) *Calculer $f_X^{Y=y}(x)$, densité conditionnelle de X sachant $Y = y$.*
6) *Déterminer $E(E[X|Y])$.*

Exercice 7 :

Soit D l'intérieur d'un triangle du plan délimité par les points (-1, 0), (1, 0) et (0, 1) et soit (X, Y) un couple de variables aléatoires de d.d.p donnée par

$$f(x,y) = k.|x|\, 1_D(x,y)$$

1) *Déterminer k , f_X et f_Y.*
   Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?
2) *Calculer $E(X)$ et $E(|x|)$.*
3) *Déterminer $f_X^{Y=y}(x)$, puis $E(X/Y = y)$*
4) *Calculer par deux méthodes $E(E(X/Y))$.*

Exercice8 :

On considère le couple de variables (X, Y) de densité conjointe égale

$$f_{X,Y}(x,y) = 1_{(\{|y|<x\},\{0<x<1\})}\ (x,y)$$

Calculer les lois marginales de X et de Y .

Exercice9 :

Soit (X, Y) un couple aléatoire de loi conjointe uniforme sur le domaine

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \left(x^2 + y^2\right) \leq 1, y \geq 0\}$$

1) *Donner la densité du couple (X, Y).*
2) *Calculer les lois marginales de X et de Y.*

6.5 Solutions des exercices

Exercice 1 :

1)

$$\sum_i \sum_j P_{X,Y}(x_i, y_j) = 1 \Rightarrow \frac{1}{12} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{12} + 0 + a + \frac{1}{6} + 0 + \frac{1}{3} = 1$$

$$\Rightarrow a = \frac{1}{12}.$$

2) les lois marginales :

la loi marginale de X

Y=y_j \ X=x_i	1	2	3	$P_Y(y_j)$
1	1 /12	1 /6	1 /12	1/3
2	1 /12	0	1/12	1/6
3	1/6	0	1 /3	1/2
$P_X(x_i)$	1/3	1/6	1/2	

FIGURE 6.5 –

X=x_i	1	2	3
$P_X(x_i)$	1/3	1/6	1/2

FIGURE 6.6 –

la loi marginale de Y

Y=y_j	1	2	3
$P_Y(y_j)$	1/3	1/6	1/2

FIGURE 6.7 –

3) Etudions à présent l'indépendance de X et Y, on a :

$$P_X\{1\} = \frac{1}{3}$$

$$P_Y\{2\} = \frac{1}{6}.$$

et on a

$$P_{X,Y}(1,2) = 0$$

Ainsi, on n'a pas

$$P_{X,Y}(1,2) = P_X\{1\} \times P_Y\{2\}$$

Donc les variables X et Y ne sont pas indépendantes.

4) *La loi conditionnelle de Y sachant que $X = 1$.*
On a

$$P_Y^{X=1}(y_j) := \frac{P_{X,Y}(1,y_j)}{P_X(1)}$$

Par suite

$$\begin{aligned} P_Y^{X=1}(1) &= \frac{P_{X,Y}(1,1)}{P_X(1)} = \frac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{3}} = \frac{1}{4} \\ P_Y^{X=1}(2) &= \frac{P_{X,Y}(1,2)}{P_X(1)} = \frac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{3}} = \frac{1}{4} \\ P_Y^{X=1}(3) &= \frac{P_{X,Y}(1,3)}{P_X(1)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{3}} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Donc, on peut résumer la loi de Y sachant $X = 1$ par le tableau suivant :

$Y=y_j$	1	2	3
$P_Y^{X=1}(y_j)$	1/4	1/4	1/2

FIGURE 6.8 –

Exercice 2 :

1) *Le réel a doit être positif, de plus, on doit calculer la série double $\sum_i \sum_j P(X=i, Y=j)$ qui doit converger vers 1*

$$\begin{aligned} \sum_i \sum_j P(X=i,Y=j) &= \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{i} \frac{a}{k(k+1)} \\ &= \sum_{i=1}^{k} \frac{ai}{k(k+1)} \\ &= \frac{a}{k(k+1)} \sum_{i=1}^{k} i \\ &= \frac{a}{k(k+1)} \frac{k(k+1)}{2}. \end{aligned}$$

Car la somme des n premiers termes d'une suite arithmétique $(U_n)_n$ vaut

$$\text{(le nombre des termes)} \times \frac{\text{(le premier terme)} + \text{(le dernier terme)}}{2}.$$

On obtient donc

$$\sum_i \sum_j P(X=i,Y=j) = 1 \Rightarrow a = 2$$

2) *la loi marginale de X :*
$\forall i \in \overline{1,k}$:

$$\begin{aligned} P_X(i) &= \sum_j P(X=i, Y=j) \\ &= \sum_{j=1}^{i} \frac{2}{k(k+1)} \\ &= \frac{2i}{k(k+1)}. \end{aligned}$$

la loi marginale de Y :
$\forall j \in \overline{1,k}$:

$$\begin{aligned} P_Y(j) &= \sum_i P(X=i, Y=j) \\ &= \sum_{i=j}^{k} \frac{2}{k(k+1)} \\ &= \frac{2(k-j+1)}{k(k+1)}. \end{aligned}$$

3) *La loi conditionnelle de Y sachant X = i :*
$\forall i \in \overline{1,k}$, $\forall j \in \overline{1,i}$

$$P_Y^{X=i}\{j\} = \frac{P(X=i, Y=j)}{P_X\{i\}}$$

$$= \frac{\frac{2}{k(k+1)}}{\frac{2i}{k(k+1)}}$$

$$= \frac{1}{i}.$$

Exercice 3

1) *P est une fonction de masse* $\Rightarrow a > 0$ *et* $\sum_i \sum_j P(X=i, Y=j)$

$$\begin{aligned} \sum_i \sum_j P(X=i, Y=j) &= \sum_{i=0}^{+\infty} \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{j!} \frac{a}{2^{i+j}} \\ &= a \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{1}{2^i} \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{j!} \frac{a}{2^j}. \end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{1}{2^i} &= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^0 \times \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}} \\ &= 2. \end{aligned}$$

Car la somme des n premiers termes d'une suite géométique $(U_n)_n$ *de raison q vaut*

$$S_n = \textit{(le premier terme)} \times \frac{1-q^{\textit{(le nombre des termes)}}}{1-q}.$$

Et la série $\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{j!}\frac{1}{2^j}$ *converge car c'est une série exponentielle, et sa somme vaut* $e^{\frac{1}{2}}$
On obtient donc

$$\sum_i \sum_j P(X = i, Y = j) = 1 \quad \Rightarrow \quad 2ae^{\frac{1}{2}} = 1$$
$$\Rightarrow \quad a = \frac{1}{2}e^{\frac{-1}{2}}.$$

2) *La loi de X :*
$\forall i \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} P_X(i) &= \sum_j P(X = i, Y = j) \\ &= \sum_j \frac{1}{j!}\frac{\frac{1}{2}e^{\frac{-1}{2}}}{2^{i+j}} \\ &= \frac{e^{\frac{-1}{2}}}{2^{i+1}} \sum_j \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^j}{j!} \\ &= \frac{e^{\frac{-1}{2}}}{2^{i+1}} e^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{2^{i+1}}. \end{aligned}$$

La loi de Y ;
$\forall j \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} P_Y(j) &= \sum_i P(X = i, Y = j) \\ &= \sum_i \frac{1}{j!}\frac{e^{\frac{-1}{2}}}{2^{i+j+1}} \\ &= \frac{2}{j!}\frac{e^{\frac{-1}{2}}}{2^{j+1}} \\ &= \frac{e^{\frac{-1}{2}}}{2^j j!}. \end{aligned}$$

X et Y sont elles indépendantes ? $\forall (i, j) \in \mathbb{N}^2$, *on a*

$$\begin{aligned} P_X(i) \times P_Y(j) &= \frac{1}{2^{i+1}} \times \frac{e^{\frac{-1}{2}}}{2^j j!} \\ &= \frac{1}{j!}\frac{e^{\frac{-1}{2}}}{2^{i+j+1}} \\ &= P_{(X,Y)}(i, j). \end{aligned}$$

d'où X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes.

Exercice 4 :

1)

$$\begin{aligned}
f \text{ est une d.d.p} &\Rightarrow \int\int f(x,y)dxdy = 1\\
&\Rightarrow c\int_{-1}^{2}\int_{0}^{4} 2x + ydydx = 1\\
&\Rightarrow c\int_{-1}^{2}\left[2xy + \frac{y^2}{2}\right]_0^4 dx = 1\\
&\Rightarrow c\int_{-1}^{2} 8x + 8dx = 1\\
&\Rightarrow c\left[4x^2 + 8x\right]_{-1}^{2} = 1\\
&\Rightarrow 36c = 1\\
&\Rightarrow c = \frac{1}{36}.
\end{aligned}$$

2) *Les fonctions de répartition marginales*
En utilisant la remarque (6.2.2), on a :

$$\begin{aligned}
F_X(x) &= \lim_{y\to+\infty} F_{(X,Y)}(x,y)\\
&= \lim_{y\to+\infty}\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(t,u)dudt\\
&= \int_{-1}^{x}\int_{0}^{4}\frac{1}{36}(2t+u)dudt \text{ si } x\in[-1,2](\text{si non } x<-1 \quad F_X(x)=0; x>2 \;\; F_X(x)=1)\\
&= \frac{1}{36}\int_{-1}^{x}\left[2tu + \frac{u^2}{2}\right]_0^4 dt\\
&= \frac{1}{36}\int_{-1}^{x} 8t + 8dt\\
&= \frac{1}{36}\left[4t^2 + 8t\right]_{-1}^{x}\\
&= \frac{1}{36}\{4x^2 + 8x - 4 + 8\}\\
&= \frac{1}{36}\{4x^2 + 8x + 4\}.
\end{aligned}$$

La fonction de répartition marginale de X :

$$F_x(x) = \begin{cases} 0 & si\ x < -1\\ \frac{1}{36}\{4x^2 + 8x + 4\} & si - 1 < x < 2\\ 1 & six > 2\end{cases}$$

$$\begin{aligned}
F_Y(y) &= \lim_{x\to+\infty} F_{(X,Y)}(x,y)\\
&= \lim_{x\to+\infty}\int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x} f(t,u)dtdu\\
&= \int_0^y\int_{-1}^{2}\frac{1}{36}(2t+u)dtdu \; si\; y\in[0,4](si\; non\; y<0 \quad F_Y(y)=0; y>4 \;\; F_Y(y)=1)\\
&= \frac{1}{36}\int_0^y \left[t^2+ut\right]_{-1}^{2} du\\
&= \frac{1}{36}\int_0^y (4+2u-1+u)\,du\\
&= \frac{1}{36}\int_0^y 3u+3du\\
&= \frac{1}{36}\left[\frac{3}{2}u^2+3u\right]_0^y\\
&= \frac{1}{12}\{\frac{1}{2}y^2+y\}.
\end{aligned}$$

La fonction de répartition marginale de Y :

$$F_Y(y)=\begin{cases} 0 & si\; y<0\\ \frac{1}{12}\{\frac{1}{2}y^2+y\} & si 0<y<4\\ 1 & si y>4\end{cases}$$

3) *la densité de probabilité marginale de X :*

$$f_X(x)=F'_X(x)=\frac{1}{36}\{8x+8\}\,\mathbb{1}_{[-1,2]}(x)$$

la densité de probabilité marginale de Y :

$$f_Y(y)=F'_Y(y)=\frac{1}{12}\{y+1\}\,\mathbb{1}_{[0,4]}(y)$$

4) *Les variables aléatoires X et Y ne sont pas indépendantes car*

$$f_{(X,Y)}(x,y)\neq f_X(x)\times f_Y(y)$$

Exercice 5 :

1) *On note* $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2/f(x,y)\neq 0\}$
donc $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2/0<x<y\}$

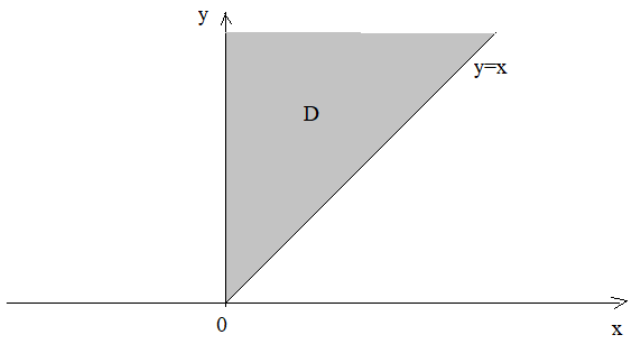

Figure 6.9 –

2)

$$\begin{aligned}
f \text{ est une d.d.p} \quad &\Rightarrow \quad \int\int_D f(x,y)dxdy = 1 \\
&\Rightarrow \quad k\int_0^{+\infty}\int_x^{+\infty} e^{-y}dydx = 1 \\
&\Rightarrow \quad k\int_0^{+\infty} \left[-e^{-y}\right]_x^{+\infty} dx = 1 \\
&\Rightarrow \quad k\int_0^{+\infty} e^{-x}dx = 1 \\
&\Rightarrow \quad k\left[-e^{-x}\right]_0^{+\infty} = 1 \\
&\Rightarrow \quad k = 1.
\end{aligned}$$

3) <u>*La densité marginale de X :*</u>
$\forall x \in \mathbb{R}^+$

$$\begin{aligned}
f_X(x) &= \int_x^{+\infty} f(x,y)dy \\
&= \int_x^{+\infty} e^{-y}dy \\
&= \left[-e^{-y}\right]_x^{+\infty} \\
&= e^{-x}.
\end{aligned}$$

$$f_X(x) = e^{-x}\,\mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}\ .$$

<u>*La densité marginale de Y :*</u>
$\forall y \in \mathbb{R}^+$

$$\begin{aligned}
f_Y(y) &= \int_0^{y} f(x,y)dx \\
&= \int_0^{y} e^{-y}dx \\
&= \left[xe^{-y}\right]_0^{y} \\
&= ye^{-y}.
\end{aligned}$$

$$f_Y(y) = ye^{-y}\,\mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}\ .$$

4) *a)* <u>*L'espérance de X :*</u>

$$\begin{aligned}
E(X) &= \int_0^{+\infty} xf_X(x)dx \\
&= \int_0^{+\infty} xe^{-x}dx.
\end{aligned}$$

En utilisant l'intégration par parties
<u>*Rappel :*</u>

$$\int U'V = UV - \int V'U$$

$$\left\langle \begin{array}{cc} U' = e^{-x} & U = -e^{-x} \\ V = x & V' = 1 \end{array} \right\rangle$$

$$\begin{aligned}
E(X) &= \left[-xe^{-x}\right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} -e^{-x}dx \\
&= 0 + \left[e^{-x}\right]_0^{+\infty} \\
&= 1.
\end{aligned}$$

b) L'espérance de Y :

$$\begin{aligned} E(Y) &= \int_0^{+\infty} y f_Y(y) dy \\ &= \int_0^{+\infty} y^2 e^{-y} dy. \end{aligned}$$

En posant

$$\left\langle \begin{array}{cc} U' = e^{-y} & U = -e^{-y} \\ V = y^2 & V' = 2y \end{array} \right\rangle$$

La formule d'intégration par parties nous indique que

$$\begin{aligned} E(Y) &= \left[-y^2 e^{-y}\right]_0^{+\infty} + 2\int_0^{+\infty} y e^{-y} dy \\ &= 2\int_0^{+\infty} y e^{-y} dy. \end{aligned}$$

On refait une intégration par parties pour calculer $\int_0^{+\infty} y e^{-y} dy$

$$\left\langle \begin{array}{cc} U' = e^{-y} & U = -e^{-y} \\ V = y & V' = 1. \end{array} \right\rangle$$

on obtient

$$\begin{aligned} E(Y) &= 2\left[-y e^{-y}\right]_0^{+\infty} + 2\int_0^{+\infty} e^{-y} dy \\ &= 2\left[-e^{-y}\right]_0^{+\infty} \\ &= 2. \end{aligned}$$

c) La covariance :

$$\begin{aligned} Cov(X,Y) &= E(XY) - E(X)E(Y) \\ &= \int_0^{+\infty}\int_x^{+\infty} x y e^{-y} dy dx - 2 \\ &= \int_0^{+\infty} x\left([y e^{-y}]_x^{+\infty} - \int_x^{+\infty} e^{-y} dy\right) dx - 2 \\ &= \int_0^{+\infty} x\left(x e^{-x} + [e^{-y}]_x^{+\infty}\right) dx - 2 \\ &= \int_0^{+\infty} x\left(x e^{-x} - e^{-x}\right) dx - 2 \\ &= \int_0^{+\infty} (x^2 - x) e^{-x} dx - 2 \\ &= 2 - 1 - 2 \\ &= -1. \end{aligned}$$

5) $Cov(X,Y) \neq 0 \Rightarrow$ *X et Y ne sont pas indépendantes.*

Exercice 6 :

$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / f(x,y) \neq 0\}$

donc

$$\begin{aligned} D &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / 0 < x < 1, 0 < y < 1 - x\} \\ &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / 0 < y < 1, 0 < x < 1 - y\}. \end{aligned}$$

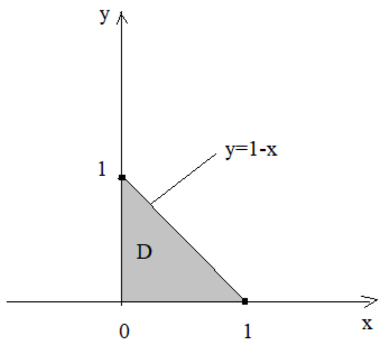

FIGURE 6.10 –

1)

$$\begin{aligned}
f \text{ est une d.d.p} \quad &\Rightarrow \int\int_D f(x,y)dxdy = 1\\
&\Rightarrow k\int_0^1\int_0^{1-y} ydxdy = 1\\
&\Rightarrow k\int_0^1 y\,[x]_0^{1-y}\,dy = 1\\
&\Rightarrow k\int_0^1 y(1-y)dy = 1\\
&\Rightarrow k\left[\frac{y^2}{2}-\frac{y^3}{3}\right]_0^1 = 1\\
&\Rightarrow \frac{k}{6} = 1\\
&\Rightarrow k = 6.
\end{aligned}$$

2) *La densité marginale de X :*
$\forall x \in [0,1]$

$$\begin{aligned}
f_X(x) &= \int_0^{1-x} f(x,y)dy\\
&= \int_0^{1-x} 6ydy\\
&= \left[3y^2\right]_0^{1-x}\\
&= 3(1-x)^2.
\end{aligned}$$

$$f_X(x) = 3(1-x)^2\,1_{[0,1]}(x).$$

La densité marginale de Y :
$\forall y \in [0,1]$

$$\begin{aligned}
f_Y(y) &= \int_0^{1-y} f(x,y)dx\\
&= \int_0^{1-y} 6ydx\\
&= [6xy]_0^{1-y}\\
&= 6y(1-y).
\end{aligned}$$

$$f_Y(y) = 6y(1-y)\,1_{[0,1]}(y).$$

3)

a) *Le moment d'ordre (1,1) du couple* (X, Y)

$$\begin{aligned}
E(XY) &= \int_0^1 \int_0^{1-x} xyf(x,y)dydx \\
&= \int_0^1 \int_0^{1-x} xy6ydydx \\
&= \int_0^1 x\left[2y^3\right]_0^{1-x} dx \\
&= \int_0^1 x(1-x)^3 dx \\
&= \int_0^1 x\left(1-3x+3x^2-x^3\right) dx \\
&= \int_0^1 x-3x^2+3x^3-x^4 dx \\
&= \left[\frac{x^2}{2}-x^3+\frac{3}{4}x^4-\frac{1}{5}x^5\right]_0^1 \\
&= \frac{9}{20}.
\end{aligned}$$

b) *L'espérance de X :*

$$\begin{aligned}
E(X) &= \int_0^1 xf_X(x)dx \\
&= \int_0^1 3x(1-x)^2 dx \\
&= \left[\frac{3}{2}x^2-2x^3+\frac{3}{4}x^4\right]_0^1 \\
&= \frac{1}{4}.
\end{aligned}$$

c) *L'espérance de Y :*

$$\begin{aligned}
E(Y) &= \int_0^1 yf_Y(y)dy \\
&= \int_0^1 6y^2(1-y)dy \\
&= \left[2y^3-\frac{3}{2}y^4\right]_0^1 \\
&= \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

4) *La covariance*

$$\begin{aligned}
Cov(X,Y) &= E(XY)-E(X)E(Y) \\
&= \frac{9}{20}-\frac{1}{4}\times\frac{1}{2} \\
&= \frac{3}{40}.
\end{aligned}$$

$Cov(X, Y) \neq 0 \Rightarrow$ *X et Y ne sont pas indépendantes*

5) *La densité conditionnelle de X sachant Y = y :* $\forall y \in [0,1]$, $x \in [0, 1-y]$

$$\begin{aligned} f_X^{Y=y}(x) &:= \frac{f_{(X,Y)}(x,y)}{f_Y(y)} \\ &= \frac{6y}{6y(1-y)} \\ &= \frac{1}{1-y}. \end{aligned}$$

$\forall y \in [0,1]$

$$f_X^{Y=y}(x) = \frac{1}{1-y} \mathbb{1}_{[0,1-y]}(x)$$

6) *En utilisant le premier résultat de la proposition (6.1.1), on a*

$$E(E[X|Y]) = E(X) = \frac{1}{4}.$$

Exercice 7 :

$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / f(x,y) \neq 0\}$
donc $D = D_1 \bigcup D_2$,*avec*

$$\begin{aligned} D_1 &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / -1 < x < 0 \text{ et } 0 < y < x+1\} \\ D_2 &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / 0 < x < 1 \text{ et } 0 < y < 1-x\}. \end{aligned}$$

ou bien $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / 0 < y < 1 \text{ et } y-1 < x < 1-y\}$

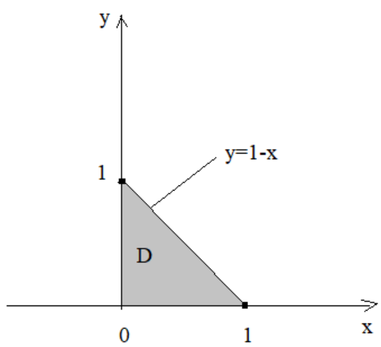

FIGURE 6.11 –

1)

$$\begin{aligned} f \text{ est une d.d.p} &\Rightarrow \int\int_D f(x,y)dxdy = 1 \\ &\Rightarrow k\left(\int_{-1}^{0}\int_{0}^{x+1} -xdydx + \int_0^1\int_0^{1-x} xdydx\right) = 1 \\ &\Rightarrow k\left(\int_{-1}^{0} -x\,[y]_0^{x+1}\,dx + \int_0^1 x\,[y]_0^{1-x}\,dx\right) = 1 \\ &\Rightarrow k\left(\int_{-1}^{0} -x(x+1)dx + \int_0^1 x(1-x)dx\right) = 1 \\ &\Rightarrow k\left(\left[\frac{-x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{0} + \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1\right) = 1 \\ &\Rightarrow k\left(\frac{1}{6} + \frac{1}{6}\right) = 1 \\ &\Rightarrow k = 3. \end{aligned}$$

2) *La densité marginale de X :*
$\forall x \in [-1, 1]$

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int f(x,y)dy \\ &= -3\int_0^{1+x} xdy\, \mathbb{1}_{[-1,0]}(x) + 3\int_0^{1-x} xdy\, \mathbb{1}_{[0,1]}(x) \\ &= -3x\left([y]_0^{1+x}\, \mathbb{1}_{[-1,0]}(x) + [y]_0^{1-x}\, \mathbb{1}_{[0,1]}(x)\right) \\ &= -3x(1+x)\, \mathbb{1}_{[-1,0]}(x) + 3x(1-x)\, \mathbb{1}_{[0,1]}(x). \end{aligned}$$

La densité marginale de Y :
$\forall y \in [0, 1]$

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \int_{y-1}^{1-y} f(x,y)dx \\ &= \int_{y-1}^{0} -3xdx + \int_0^{1-y} 3xdx \\ &= \left[\frac{-3x^2}{2}\right]_{y-1}^{0} + \left[\frac{3x^2}{2}\right]_0^{1-y} \\ &= \frac{3}{2}(y-1)^2 + \frac{3}{2}(1-y)^2 \\ &= 3\,(y-1)^2 \end{aligned}$$

$$f_Y(y) = 3\,(y-1)^2\, \mathbb{1}_{[0,1]}(y).$$

$f_X(x)f_Y(y) \neq f_{(X,Y)}(x,y) \Rightarrow$ *XetYne sont pas indépendantes*

3) *L'espérance de X :*

$$\begin{aligned} E(X) &= \int x f_X(x)dx \\ &= -3\int_{-1}^{0} x^2 + x^3 dx + 3\int_0^1 x^2 - x^3 dx \\ &= 3\left[\frac{-x^3}{3} + \frac{-x^4}{4}\right]_{-1}^{0} + 3\left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right]_0^1 \\ &= 3\left(\frac{-1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) \\ &= 0. \end{aligned}$$

L'espérance de |X| :

$$\begin{aligned} E(X) &= \int |x| f_X(x)dx \\ &= 3\int_{-1}^{0} x^2 + x^3 dx + 3\int_0^1 x^2 - x^3 dx \\ &= 3\left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4}\right]_{-1}^{0} + 3\left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right]_0^1 \\ &= 3\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) \\ &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

4) <u>*La densité conditionnelle de X sachant Y = y :*</u> $\forall y \in [-1,1],\ x \in [y-1, 1-y]$

$$\begin{aligned} f_X^{Y=y}(x) &:= \frac{f_{(X,Y)}(x,y)}{f_Y(y)} \\ &= \frac{3|x|}{3(y-1)^2} \\ &= \frac{|x|}{(1-y)^2}. \end{aligned}$$

$\forall y \in [-1,1]$

$$f_X^{Y=y}(x) = \frac{|x|}{(1-y)^2}\, 1_{[y-1,1-y]}(x)$$

<u>*L'espérance conditionnelle $E(X/Y=y)$*</u>

$$\begin{aligned} E(X/Y=y) &= \int x f_X^{Y=y}(x)dx \\ &= \int_{y-1}^{1-y} x\frac{|x|}{(1-y)^2}dx \\ &= \int_{y-1}^{0} \frac{-x^2}{(1-y)^2}dx + \int_0^{1-y} \frac{x^2}{(1-y)^2}dx \\ &= \frac{-1}{(1-y)^2}\left[\frac{x^3}{3}\right]_{y-1}^{0} + \frac{1}{(1-y)^2}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{1-y} \\ &= \frac{1}{(1-y)^2}\left(\frac{(y-1)^3}{3} + \frac{(1-y)^3}{3}\right) \\ &= 0. \end{aligned}$$

4)

$$\begin{aligned} E(X/Y=y) = 0 &\Rightarrow E(X/Y) = 0 \\ &\Rightarrow E(E(X/Y)) = 0. \end{aligned}$$

<u>*2 ème méthode :*</u>
En utilisant le premier résultat de la proposition (6.1.1) :

$$E(E(X/Y)) == E(X) = 0$$

<u>***Exercice 8 :***</u>
$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2/\{|y| < x\}, \{0 < x < 1\}\right\}$
donc $D = D_1 \bigcup D_2$,*avec*

$$\begin{aligned} D_1 &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2/-1 < y < 0 \text{ et } -y < x < 1\} \\ D_2 &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2/0 < y < 1 \text{ et } y < x < 1\}. \end{aligned}$$

ou bien $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2/0 < x < 1 \text{ et } -x < y < x\}$ <u>*La loi marginale de X :*</u> $\forall x \in [0,1]$

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int_{-x}^{x} f_{X,Y}(x,y)dy \\ &= \int_{-x}^{x} dy \\ &= [y]_{-x}^{x} \\ &= 2x. \end{aligned}$$

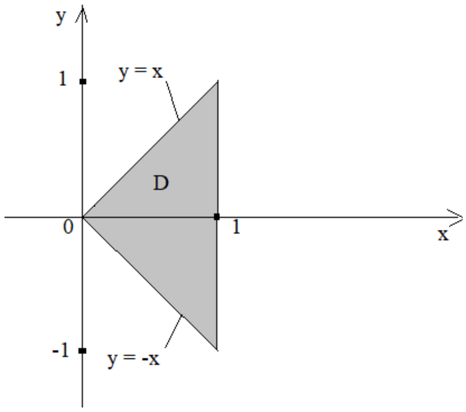

FIGURE 6.12 –

$$f_X(x) = 2x\,\mathbb{1}_{[0,1]}(x).$$

La densité marginale de Y :
$\forall y \in [-1, 1]$

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \int_{-y}^{1} f(x,y)dx\,\mathbb{1}_{[-1,0]}(y) + \int_{y}^{1} f(x,y)dx\,\mathbb{1}_{[0,1]}(y) \\ &= (1+y)\,\mathbb{1}_{[-1,0]}(y) + (1-y)\,\mathbb{1}_{[0,1]}(y). \end{aligned}$$

$$f_Y(y) = (1+y)\,\mathbb{1}_{[-1,0]}(y) + (1-y)\,\mathbb{1}_{[0,1]}(y).$$

Exercice 9 :
$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \left(x^2+y^2\right) \leq 1, y \geq 0\}$
donc

$$\begin{aligned} D &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / 0 < y < 1 \; et \; -\sqrt{1-y^2} < x < \sqrt{1-y^2}\} \\ D &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / -1 < x < 1 \; et \; 0 < y < \sqrt{1-x^2}\}. \end{aligned}$$

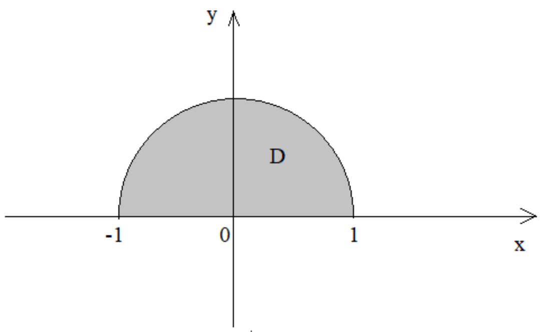

FIGURE 6.13 –

1) *La loi conjointe du couple (x,y) :*
(X,Y) suit une loi uniforme sur le domaine D

$$\Rightarrow f_{(X,Y)}(x,y) = \frac{1}{surface\ de\ D}\,\mathbb{1}_D(x,y)$$

Or, la surface du domaine $D = \frac{\pi R^2}{2} = \frac{\pi}{2}$ (car, dans cet exemple le rayon $R = 1$) d'où

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{2}{\pi}\,\mathbb{1}_D(x,y)$$

2) *La loi marginale de X :* $\forall x \in [-1, 1]$

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f_{X,Y}(x,y)dy \\ &= \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \frac{2}{\pi}dy \\ &= \frac{2}{\pi}[y]_0^{\sqrt{1-x^2}} \\ &= \frac{2}{\pi}\sqrt{1-x^2}. \end{aligned}$$

$$f_X(x) = \frac{2}{\pi}\sqrt{1-x^2}\, 1_{[-1,1]}(x).$$

La densité marginale de Y :
$\forall y \in [0, 1]$

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f_{X,Y}(x,y)dx \\ &= \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} \frac{2}{\pi}dx \\ &= \frac{2}{\pi}[x]_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} \\ &= \frac{4}{\pi}\sqrt{1-y^2}. \end{aligned}$$

$$f_Y(y) = \frac{4}{\pi}\sqrt{1-y^2}\, 1_{[0,1]}(y).$$

Chapitre 7

Transformation des vecteurs aléatoires

7.1 Etude du cas discret

7.1.1 Définition

On considère un couple de variables aléatoires discrètes (X, Y) *de support* $D_{(X,Y)}$ *et de fonction de masse* $P_{(X,Y)}(x, y)$, *et leurs relations à deux autres variables* (U, V) *en posant :*

$$\begin{aligned} (U, V) &= h(X, Y) = (h_1(X, Y), h_2(X, Y)) \\ D_{(U,V)} &\subset h\left(D_{(X,Y)}\right) \; et \; P_{(U,V)}(u, v) = \sum_{(x,y)\in h^{-1}(U,V)} P_{(X,Y)}(x, y) \quad \forall (u, v) \in h(x, y) \end{aligned}$$

On cherche à déterminer la loi de probabilité du couple (U, V)

7.1.2 Exemple

Soit (X, Y) *un couple aléatoire discret et de fonction de masse donnée par le tableau suivant*

X \ Y	-1	0	1
-1	1/6	1/4	0
0	1/4	1/6	1/6

FIGURE 7.1 –

Soit $U = X^2$; $V = Y^2$ *déterminer la loi du couple* (U, V).
Solution

$$D_U = \{0, 1\}, \quad D_V = \{0, 1\}, \quad D_{(U,V)} = \{(0, 0); (0, 1); (1, 0); (1, 1)\}$$

$$\begin{aligned} P_{U,V}(0, 0) &= P_{X,Y}(0, 0) = 1/6 \\ P_{U,V}(0, 1) &= P_{X,Y}(0, -1) + P_{X,Y}(0, 1) = 1/4 + 1/6 = 5/12 \\ P_{U,V}(1, 0) &= P_{X,Y}(-1, 0) = 1/4 \\ P_{U,V}(1, 1) &= P_{X,Y}(-1, -1) + P_{X,Y}(-1, 1) = 1/6 + 0 = 1/6 \end{aligned}$$

U \ V	0	1
0	1 /6	5/12
1	1 /4	1/6

FIGURE 7.2 –

7.2 Etude du cas continu

7.2.1 Définition

On considère un couple de variables aléatoires (X, Y) de densité de probabilité $f_{X,Y}$, soit g une application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$.
On définit la transformée de (X, Y) par $(U, V) = g(X, Y)$
on sppose que g vérifie les conditions suivantes :

1) *g est définie sur $D \subset \mathbb{R}^2$ tel que*

$$P((X, Y) \in D) = P((U, V) \in H) = \int_D f_{X,Y}(x, y)dxdy = 1$$

et g est bijective d'inverse g^{-1}.

2) *Les dérivées partielles de g (resp. de g^{-1}) existent et elles sont continues sur D (resp. sur $g(D)$)*
3) *Le déterminant de la matrice Jacobienne de g^{-1}, définie par :*

$$J(g^{-1}(x)) = \det\begin{pmatrix} \frac{\partial g_1^{-1}}{\partial u}(u, v) & \frac{\partial g_1^{-1}}{\partial v}(u, v) \\ \frac{\partial g_2^{-1}}{\partial u}(u, v) & \frac{\partial g_2^{-1}}{\partial v}(u, v) \end{pmatrix} \neq 0, \quad \forall\,(u, v) \in g(D)$$

Alors le couple (U, V) admet une densité de probabilité conjointe donnée par

$$f_{U,V}(u, v) = \begin{cases} f_{X,Y}(g^{-1}(u, v)).\left|J(g^{-1}(u, v))\right| & si\ (u, v) \in H = g(D) \\ 0 & si\ non \end{cases} \tag{7.1}$$

7.2.2 Exemples

Exemple 7.2.1. *Soit (X, Y) un couple aléatoire de fonction de densité de probabilité conjointe donnée par*

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} e^{-x-y} & si\ x > 0\ et\ y > 0 \\ 0 & si\ non \end{cases}$$

On pose

$$\begin{cases} U = X + Y \\ V = X - Y \end{cases}$$

Déterminer la loi du couple (U, V).

<u>Solution</u>
D'après la formule (7.1), on a

$$f_{(U,V)}(u, v) = f_{(X,Y)}g^{-1}(u, v) \times \left|J(g^{-1}(u, v))\right| \times 1_H\ (u, v)$$

or

$$\left\{\begin{array}{l} U = X + Y \\ V = X - Y \end{array}\right. \Longrightarrow \begin{array}{l} X = \frac{U+V}{2} \\ Y = \frac{U-V}{2} \end{array}$$

et

$$J(g^{-1}(u,v)) = \begin{vmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{vmatrix} = -\frac{1}{2} \neq 0 \quad \forall\, (u,v) \in H$$

d'où

$$\begin{aligned} f_{(U,V)}(u,v) &= f_{(X,Y)}\left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2}\right) . \frac{1}{2} \, 1_H \, (u,v) \\ &= \frac{1}{2} e^{-\frac{u+v}{2} - \frac{u-v}{2}} = \frac{1}{2} e^{-u} \, 1_H \, (u,v). \end{aligned}$$

reste à déterminer le domaine H =?

$$\begin{aligned} x &= \frac{u+v}{2} > 0 \Longrightarrow u > -v \Longrightarrow v > -u \\ y &= \frac{u-v}{2} > 0 \Longrightarrow u > v \end{aligned}$$

d'où

$$H = \{(u,v) / -u < v < u; u > 0\}$$

donc

$$f_{(U,V)}(u,v) = \left\{\begin{array}{ll} \frac{1}{2} e^{-u} & si\ u > 0\ et\ -u < v < u \\ 0 & si\ non \end{array}\right.$$

Exemple 7.2.2. *Soit (X,Y) un couple aléatoire de densité de probabilité conjointe donnée par*

$$f_{X,Y}(x,y) = \left\{\begin{array}{ll} 1 & si\ 0 < x < 1\ et\ 0 < y < 1 \\ 0 & si\ non \end{array}\right.$$

1) *Déterminer la loi du couple $(U,V) = \left(X^2, Y^2\right)$.*
2) *Déterminer la loi de $Z = X + Y$.*

Solution

1) *On utilisons la formule (7.1), on a*

$$f_{(U,V)}(u,v) = f_{(X,Y)} g^{-1}(u,v) \times \left| J(g^{-1}(u,v)) \right| \times 1_H \, (u,v)$$

or

$$\left\{\begin{array}{l} U = X^2 \\ V = Y^2 \end{array}\right. \Longrightarrow \begin{array}{l} X = \sqrt{U} \\ Y = \sqrt{V} \end{array}$$

$$J(g^{-1}(u,v)) = \begin{vmatrix} \frac{1}{2\sqrt{U}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2\sqrt{V}} \end{vmatrix} = \frac{1}{4\sqrt{U}\sqrt{V}} \neq 0 \quad \forall\, (u,v) \in H$$

et

$$\begin{aligned} 0 &< x < 1 \Longrightarrow 0 < \sqrt{u} < 1 \Longrightarrow 0 < u < 1 \\ 0 &< y < 1 \Longrightarrow 0 < \sqrt{v} < 1 \Longrightarrow 0 < v < 1 \end{aligned}$$

d'où

$$H =]0,1[\times]0,1[$$

donc

$$f_{(U,V)}(u,v) = \left\{\begin{array}{ll} \frac{1}{4\sqrt{u}\sqrt{v}} & si\ 0 < u < 1\ et\ 0 < v < 1 \\ 0 & si\ non \end{array}\right.$$

2)

$$\begin{cases} Z = X + Y \\ T = X \end{cases} \Longrightarrow \quad \begin{matrix} X = T \\ Y = Z - T \end{matrix}$$

$$J(g^{-1}(z,t)) = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \quad \forall\,(z,t) \in H$$

$H = ?$

$$\begin{aligned} 0 &< x < 1 \Longrightarrow 0 < t < 1 \\ 0 &< y < 1 \Longrightarrow 0 < z - t < 1 \Longrightarrow t < z < t + 1 \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} H &= \{(z,t)/t \in]0,1[, \quad z \in]t, t+1[\} \\ &= \{(z,t)/z \in]0,1[, \quad t \in]0,z[\} \cup \{(z,t)/z \in]1,2[, \quad t \in]z-1,1[\} \end{aligned}$$

donc

$$f_{(Z,T)}(z,t) = \begin{cases} 1 & si\ 0 < t < 1\ et\ t < z < t+1 \\ 0 & si\ non \end{cases}$$

par suite

$$\begin{aligned} f_Z(z) &= \int f_{(Z,T)}(z,t)dt \\ &= \int_0^z dt\ 1_{]0,1[}\ (z) + \int_{z-1}^1 dt\ 1_{[1,2[}\ (z) \\ &= z\ 1_{]0,1[}\ (z) + (2-z)\ 1_{[1,2[}\ (z). \end{aligned}$$

7.3 Enoncé des exercices

Exercice 1 :

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires de d.d.p

$$f(x, y) = e^{-y}1_{\{0<x<y\}}.$$

1) Déterminer la loi conjointe $f_{Z,T}$ du couple (Z, T) défini par :

$$\begin{cases} Z = X + Y \\ T = Y - X \end{cases}$$

2) En déduire les densités marginales de Z et T.

Exercice2 :

Soit f la fonction définie par :

$$f(x, y) = \frac{1}{2}I_{]-1,0[}(x)I_{]-1,0[}(y) + I_D(x, y)$$

où $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; \, x \geq 0, y \geq 0 \text{ et } x + y < 1\}$.
Soient $U = X + Y$et $V = X - Y$.

Déterminer la densié du couple (U, V).

Exercice supplémentaire :

Exercice1 :

Soient X et Y deux v.a de densité de probabilité conjointe $f_{X,Y}$ définie par

$$f_{X,Y}(x, y) = ky1_D(x, y), \quad D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 \leq 1, y > 0\right\}$$

1) Déterminer k,.

2) Calculer $P(X < Y)$.

3)

a) Déterminer la densité du couple (Z, T) définie par

$$Z = X^2 + Y^2, \quad T = X^2$$

b) En déduire la distribution deZ.

Exercice 2 : *Soient X et Y deux v.a.r. indépendantes de même loi admettant pour densité f définie par :*

$$f(x) = ke^{-|x|}$$

1) Déterminer k.

2) Déterminer la loi de $Q = Y/X$ et, si elles existent, l'espérance et la variance de Q.

3) Déterminer la loi de $S = X - Y$.

Exercice 3 :

Soient Y_1 et Y_2 deux variables aléatoires indépendantes de même loi exponentielle de paramètre strictement positif.

1) Quelle est la loi de $Z = min(Y1; Y2)$?

2) *Quelle est la loi de* $T = max(Y1; Y2)$ *?*

Exercice 4 : *Trois personnes A, B et C arrivent en même instant devant deux cabines téléphoniques. Les personnes A et B occupent immédiatement les deux cabines, la personne C remplace le premier sorti. On note X, Y et Z les v.a désignant le temps d'occupation respectifs des cabines par A, B et C.*

On suppose que ce sont des v.a indépendantes de même loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.

1) *Déterminez la fonction de répartition de la v.a* $U = \min(X, Y)$. *En déduire la loi de* U.
2) *Exprimez en fonction de X, Y et Z l'évènement : " C sort le dernier ".*
3) *Quelle est la loi du temps total T passé par C à la poste (temps d'attente plus temps d'occupation de la cabine) ?*
4) *En prenant* 0 *comme instant d'arrivée des trois personnes et on note par* S *l'instant du dernier départ. Exprimez* S *en fonction de* X, Y *et* S, Z.

7.4 Solutions des exercices

Exercice 1 :

$$f(x,y) = \begin{cases} e^{-y} & si\ 0 < x < y. \\ 0 & si\ non \end{cases}$$

Le support de f :

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R} : 0 < x < y\}$$

La représentation graphique du domaine D :

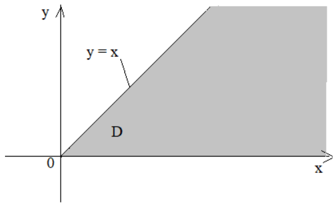

FIGURE 7.3 –

1) *La loi conjointe $f_{Z,T}$ du couple (Z,T) :*

$$\begin{cases} Z = X + Y \\ T = Y - X \end{cases} \tag{7.2}$$

En utilisant la formule (7.1), on a :

$$f_{Z,T}(z,t) = f_{X,Y}\left(g_1^{-1}(z,t), g_2^{-1}(z,t)\right) \times \left|J(\left(g^{-1}(z,t)\right)\right| \times 1_H\ (z,t)$$

a) *Les fonctions $g_1^{-1}(z,t)$ et $g_2^{-1}(z,t)$*

$$(7.2) \Rightarrow \begin{cases} X = \frac{Z-T}{2} = g_1^{-1}(z,t) \\ Y = \frac{Z+T}{2} = g_2^{-1}(z,t) \end{cases} \tag{7.3}$$

b) *Le déterminant de la matrice Jacobienne :*

$$\begin{aligned} J(g^{-1}(z,t)) &= \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \neq 0. \end{aligned}$$

c) *Le domaine H :*
On a $(x,y) \in D$

$$\begin{aligned} (7.2)\ et\ (7.3) \quad &\Rightarrow \begin{cases} z = x + y > 0 \\ t = y - x > 0 \\ x = \frac{z-t}{2} > 0 \\ y = \frac{z+t}{2} > 0 \end{cases} \\ &\Rightarrow \begin{cases} z > 0 \\ t > 0 \\ z - t > 0 \\ z + t > 0 \end{cases} \\ &\Rightarrow \begin{cases} H = \{(z,t) \in \mathbb{R}; z > 0\ et\ 0 < t < z\} \\ \quad = \{(z,t) \in \mathbb{R}; t > 0\ et\ z > t\} \end{cases} \end{aligned}$$

d'où

$$f_{Z,T}(z,t) = \frac{1}{2}e^{-\frac{z+t}{2}} \times 1_H\,(z,t) \tag{7.4}$$

2) *La densité marginale de Z :*

$$\begin{aligned} f_Z(z) &:= \int f_{Z,T}(z,t)dt \\ &= \frac{1}{2}e^{-\frac{z}{2}} \int_0^z e^{-\frac{t}{2}}dt \times 1_{\mathbb{R}^+}(z) \\ &= \frac{1}{2}e^{-\frac{z}{2}} \left[-2e^{-\frac{t}{2}}\right]_0^z \times 1_{\mathbb{R}^+}(z) \\ &= e^{-\frac{z}{2}} \left\{-e^{-\frac{z}{2}} + 1\right\} \times 1_{\mathbb{R}^+}(z) \\ &= e^{-\frac{z}{2}} - e^{-z} \times 1_{\mathbb{R}^+}(z). \end{aligned}$$

La densité marginale de T :

$$\begin{aligned} f_T(t) &:= \int f_{Z,T}(z,t)dz \\ &= \frac{1}{2}e^{-\frac{t}{2}} \int_t^{+\infty} e^{-\frac{z}{2}}dz \times 1_{\mathbb{R}^+}(t) \\ &= e^{-\frac{t}{2}} \left[e^{-\frac{z}{2}}\right]_t^{+\infty} \times 1_{\mathbb{R}^+}(z) \\ &= e^{-\frac{t}{2}} \left\{e^{-\frac{t}{2}} + 1\right\} \times 1_{\mathbb{R}^+}(t) \\ &= e^{-t} \times 1_{\mathbb{R}^+}(t). \end{aligned}$$

Exercice 2 :

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{2} & si\ -1 < x < 0\ et\ -1 < y < 0. \\ 1 & si\ (x,y) \in D \\ 0 & si\ non \end{cases}$$

Le support de f :

$$supp(f) = ([-1,0] \times [-1,0]) \cup D$$

où

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R} : x \geq 0, y \geq 0\ et\ x + y < 1\}$$

La représentation graphique du domaine D :

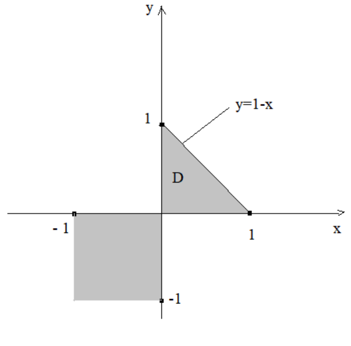

FIGURE 7.4 –

1) La loi conjointe $f_{U,V}$ du couple (U, V) :

$$\begin{cases} U = X + Y \\ V = X - Y \end{cases} \tag{7.5}$$

En utilisant la formule (7.1), on a :

$$f_{U,V}(u, v) = f_{X,Y}\left(g_1^{-1}(u, v), g_2^{-1}(u, v)\right) \times \left|J(\left(g^{-1}(u, v)\right)\right| \times 1_H\,(u, v)$$

a) <u>Les fonctions $g_1^{-1}(u, v)$ et $g_2^{-1}(u, v)$</u>

$$(7.5) \Rightarrow \begin{cases} X = \frac{U+V}{2} = g_1^{-1}(u, v) \\ Y = \frac{U-V}{2} = g_2^{-1}(u, v) \end{cases} \tag{7.6}$$

b) <u>Le déterminant de la matrice Jacobienne :</u>

$$\begin{aligned} J(g^{-1}(z, t)) &= \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} \end{vmatrix} \\ &= \frac{-1}{4} + \frac{-1}{4} = \frac{-1}{2} \neq 0. \end{aligned}$$

c) <u>Le domaine H :</u>

$$H = H_1 \cup H_2$$

Si $(x, y) \in D$

$$(7.5)\ et\ (7.6) \Rightarrow \begin{cases} 0 < u < 1 \\ -u < v < u \end{cases}$$

$$H_1 = \{(u, v) \in \mathbb{R} : 0 < u < 1, -u < v < u\}$$

Si $(x, y) \in ([-1, 0] \times [-1, 0])$

$$\begin{cases} -1 < x < 0 \\ -1 < y < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2 < x + y < 0 \\ -1 < x - y < 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2 < u < 0 \\ -1 < v < 1 \end{cases}$$

$$H_2 = \{(u, v) \in \mathbb{R} : -2 < u < 0, -1 < v < 1\}$$

$$f_{U,V}(u, v) = f_{(X,Y)}\left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2}\right) \times \frac{1}{2} \times 1_H\,(u, v) \tag{7.7}$$

$$= \frac{1}{4} \times 1_{H_2}\,(u, v) + \frac{1}{2} \times 1_{H_1}\,(u, v). \tag{7.8}$$

2) <u>La densité marginale de U :</u>

$$\begin{aligned} f_U(u) &:= \int f_{U,V}(u, v)dv \\ &= \frac{1}{4}\int_{-1}^{1} dv \times 1_{[-2,0]}\,(u) + \frac{1}{2}\int_{-u}^{u} dv \times 1_{[0,1]}\,(u) \\ &= \frac{1}{2} \times 1_{[-2,0]}\,(u) + u \times 1_{[0,1]}\,(u) \end{aligned}$$

Annexe

Table de la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite *La fonction* $F : x \rightarrow F(x) = P(X < x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}^{\frac{-x^2}{2}}}$ *est la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.Tabl*

- *La table suivante donne une valeur approchée de* $F(x)$ *à* 10^{-4} *près, pour x compris entre* 0 *et* $3,99$.
- *Lorsque* $x < 0,5$ *, on utilise la formule* $F(x) = 1 - F(-x)$
- $F(x) < 0 \Rightarrow x < 0$

	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990
3,1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995
3,3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997
3,4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998
3,5	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998
3,6	0,9998	0,9998	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,7	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,8	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,9	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

FIGURE 7.5 – Table de la loi normale

Bibliographie

[1] *TD Probabilité, indépendance, conditionnementhttp , Université d'Evry Val d'Essonne :*
http$//www.cmap.polytechnique.fr/$ *xavier.erny*$/joint/1516_MSV20_TDs.pdf$.

[2] *arbe, P., Ledoux, M. (2012). Probabilité (L3M1). EDP Sciences.*

[3] *udley, R. M. (2018). Real Analysis and Probability. Chapman and Hall/CRC.*

[4] *ollard, D. (2002). A user's guide to measure theoretic probability. Cambridge University Press.*

[5] *. Youssef (2018) Probabilités..*