

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

MINISTRY OF HIGHER EDUCATION
AND SCIENTIFIC RESEARCH

HIGHER SCHOOL IN APPLIED SCIENCES
- T L E M C E N -



المدرسة العليا في العلوم التطبيقية
École Supérieure en
Sciences Appliquées

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

المدرسة العليا في العلوم التطبيقية
- تلمسان -

Mémoire de fin d'étude

Pour l'obtention du diplôme d'ingénieur

Filière: Automatique
Spécialité: Automatique

Présenté par : -ASNOUNE Nour El Houda
-HADJ HENNI Hamza

Thème

**Commande robuste d'un système non linéaire:
Application au pendule inversé rotatif**

Soutenu publiquement, le juin 2023 , devant le jury composé de:

M.Lotfi MERAD	Professeur	ESSAT	Président
M.Fayssal ARRICHI	Maitre de Conférence	ESSAT	Directeur de mémoire
M.M.Rida MOKHTARI	Maitre de Conférence	ESSAT	Co-Directeur de mémoire
M.Ahmed TAHOUR	Professeur	ESSAT	Examineur 1
Mme.Zineb KHEDIM	Maitre de Conférence	ESSAT	Examineur 2

Année universitaire : 2022 /2023

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

REMERCIEMENTS

Nous remercions Allah de nous avoir donné la patience et le courage pour accomplir ce travail

Nous exprimons également notre profonde gratitude à notre encadrant, Monsieur Fayssal ARICHI, ainsi qu'à notre co-encadrant, Monsieur Mohammed Rida MOKHTARI. Leur soutien constant, leur patience, leur disponibilité et leurs conseils éclairés ont nourri notre réflexion tout au long de cette année académique et nous ont permis d'apporter des améliorations substantielles à ce mémoire.

Notre reconnaissance s'adresse également aux membres du jury, à savoir Monsieur Lotfi MERAD, Madame Zineb KHEDIM et Monsieur Ahmed TAHOUR, pour l'attention soutenue qu'ils ont portée à ce travail.

Nous témoignons aussi toute notre gratitude envers tout le personnel de l'Ecole Supérieur en Science Appliqué de Tlemcen qui veille à assurer une formation de qualité aux étudiants.

Pour terminer, nous tenons à remercier toute personne ayant contribué de près ou de loin à la réalisation de ce travail.

Dédicace

Je dédie humblement ce travail à mes très chers parents, dont j'ai eu l'immense honneur de suivre ce parcours extraordinaire, dont vous avez pleinement connu les défis. Je vous remercie sincèrement pour votre soutien moral inestimable et les innombrables encouragements dont vous m'avez constamment gratifié.

Également, je dédie ce travail à mon cher frère Amine ainsi qu'à mes chères sœurs Zheira, Habiba, Hakima et Amina, qui ont toujours été présents à mes côtés. Votre soutien et votre affection m'ont donné la force de persévérer.

Enfin, j'adresse une dédicace toute particulière à mes chères amies, en particulier Karima, Souad, Manal et Fedoua. Votre amitié précieuse et votre soutien indéfectible ont été une source de réconfort et de motivation tout au long de ce parcours.

Nour El Houda

Dédicace

A mes chers parents, qui avez été les phares dans l'obscurité de mon parcours, qui m'ont soutenus tout au long de ma vie, qui m'a encouragé, qui a cru en moi et a prié pour moi. grâce à vous, j'ai pu trouver la force de surmonter les défis et d'atteindre ce jalon important dans ma vie.

A mes chers frère aimants Mohamed et Bilal qui m'ont toujours taquinée mais m'ont constamment encouragés.

A ma sœur Khadidja, qui a partagé avec moi les longues nuits. Nous avons étudié ensemble, nous avons ri ensemble et nous avons eu des moment formidable ensemble.

Aussi, je remercie ma binôme pour le travail qu'elle a fait et les efforts inlassables qu'elle a fourni tout au long ce projet de fin d'études.

Hamza

TABLE DES MATIÈRES

Introduction générale	12
1 Généralité sur les pendules et modélisation du pendule inversé rotatif (PIR)	14
1.1 Introduction	15
1.2 Définition du pendule	15
1.3 Bref historique sur le pendule	15
1.4 Types du pendule	17
1.5 Pendule inversé	18
1.5.1 Principe de fonctionnement du pendule inversé	19
1.5.2 Types du pendule inversé	19
1.5.3 Quelques applications du pendule inversé	21
1.5.4 Utilité des pendules inversés	24
1.6 Présentation du pendule inversé rotatif (QUBE-Servo 2)	24
1.7 Modélisation mathématique du PIR	26
1.7.1 Equation d'Euler-Lagrange	26
1.7.2 Représentation d'état du PIR	31
1.8 Conclusion	32
2 Commandes linéaires du pendule inversé rotatif	33
2.1 Introduction	34
2.2 Cahier des charges	34
2.3 Commandes linéaires	34
2.3.1 Naissance des commandes linéaires	34
2.4 Linéarisation du système	35
2.4.1 Points d'équilibre	35
2.4.2 Linéarisation du système autour d'un point d'équilibre	36
2.4.3 Pôles du système	37
2.5 Commandabilité du PIR	37
2.6 Commande par retour d'état :	38
2.6.1 Placement de pôles (PP)	39
2.6.2 Commande Linear Quadratic Regulator (LQR)	43
2.6.3 La commande proportionnel-dérivé (PD)	48

2.7	Conclusion	53
3	Théories des commandes non linéaires	54
3.1	Introduction	55
3.2	Commandes non linéaires	55
3.2.1	Commande par logique floue	56
3.2.2	Commande par réseau de neurones	57
3.3	Notion du commandes robustes	58
3.4	Commande par mode glissant (SMC)	58
3.5	Commande Super-twisting	62
3.5.1	Supertwisting modifiée	62
3.6	Commande hybride : Swing Up - Synergétique	63
3.6.1	La commande Swing-Up :	63
3.6.2	Commande synergétique (SC) :	65
3.7	Conclusion :	67
4	Application des commandes non linéaires sur le pendule inversé rotatif	68
4.1	Introduction	69
4.2	Application de la commande par mode glissant (SMC) sur le PIR :	69
4.3	Application de la commande super-twisting (STW) sur le PIR	72
4.4	Application de la commande super-twisting modifié (MSTW) sur le PIR	74
4.5	Application de la commande hybride (Swing Up-Synergétique) sur le PIR	76
4.5.1	La commande Swing-UP	76
4.5.2	Commande synergétique	77
4.6	Test de robustesse sur les quatres commandes	79
4.7	Application de commandes dépourvues de modèle mathématique sur le PIR	81
4.7.1	Application de la commande logique-floue sur le PIR	81
4.7.2	Application de la commande réseau de neurones sur le PIR	83
4.8	Comparaison entre les commandes	84
4.9	Conclusion	85
	Conclusion générale	86

TABLE DES FIGURES

1.1	Le pendule de Huygens [37]	15
1.2	L'appareil de Huygens [34]	15
1.3	Le tourbillon [21]	16
1.4	Le pendule de Kater [38]	16
1.5	Pendule simple [40]	17
1.6	Pendule double [39]	18
1.7	Pendule élastique [41]	18
1.8	Pendule conique [24]	18
1.9	Pendule inversé classique [32]	19
1.10	Pendule inversé sur double tige [32]	20
1.11	Pendule inversé sphérique [10]	20
1.12	Pendule inversé rotationnel [1]	21
1.13	Pendule inversé à double roue [9]	21
1.14	Robot intelligent [25]	22
1.15	Prothèse active [29]	22
1.16	Segway [31]	22
1.17	Robot humanoïde [20]	23
1.18	Segway-Ninebot Loomo Delivery [4]	23
1.19	Robot de téléprésence [35]	23
1.20	BigDog [33]	24
1.21	Le robot Hospi [14]	24
1.22	Composants du QUBE-SERVO 2 [1]	25
1.23	Schéma du pendule inversé rotatif [36]	27
2.1	Schéma fonctionnel	35
2.2	Schéma fonctionnel du commande par retour d'état.	39
2.3	Principe du placement de pôles [15]	39
2.4	L'évolution de l'angle du bras.	41
2.5	L'évolution de l'angle du pendule.	41
2.6	L'évolution de l'angle du bras	41
2.7	L'évolution de l'angle du bras en appliquons un test de robustesse	42
2.8	L'évolution de l'angle du pendule	42
2.9	L'évolution de l'angle du pendule en appliquons un test de robustesse	42

2.10	La commande PP	43
2.11	La commande PP en appliquons un test de robustesse	43
2.12	L'évolution de l'angle du bras.	45
2.13	L'évolution de l'angle du pendule.	45
2.14	L'évolution de l'angle du bras et le signal de la référence	45
2.15	L'évolution de l'angle du bras et le signal de la référence en appliquons un test de robustesse	46
2.16	L'évolution de l'angle du pendule	46
2.17	L'évolution de l'angle du pendule en appliquons un test de robustesse	46
2.18	L'évolution de l'angle du pendule	47
2.19	L'évolution de l'angle du pendule en appliquons un test de robustesse	47
2.20	Schéma bloc d'un régulateur PD	50
2.21	L'évolution de l'angle de bras	50
2.22	L'évolution de l'angle du pendule.	50
2.23	L'évolution de l'angle du bras	51
2.24	L'évolution de l'angle du bras en appliquons un test de robustesse	51
2.25	L'évolution de l'angle du pendule	51
2.26	L'évolution de l'angle du pendule en appliquons un test de robustesse	52
2.27	L'évolution de l'angle de la commande PD	52
2.28	L'évolution de la commande PD en appliquons un test de robustesse	52
3.1	Structure de la commande par logique floue [23]	57
3.2	La commande par réseau de neurones [5]	58
3.3	Le phénomène de glissement [8]	60
3.4	Schéma d'un pendule inversé libre [1]	64
4.1	L'évolution de l'angle du pendule du PIR appliquons la commande SMC	70
4.2	L'évolution de l'angle du bras du PIR appliquons la commande SMC	71
4.3	La commande par mode glissant	71
4.4	L'évolution de l'angle du pendule du PIR appliquons la commande STW	72
4.5	L'évolution de l'angle du bras du PIR appliquons la commande STW	73
4.6	La commande Super-twisting	73
4.7	L'évolution de l'angle du pendule du PIR appliquons la commande MSTW	75
4.8	L'évolution de l'angle du bras du PIR appliquons la commande MSTW	75
4.9	L'évolution de la commande Super-twisting modifiée	76
4.10	L'évolution de l'angle du pendule du PIR appliquons la commande hybride	78
4.11	L'évolution de l'angle du bras du PIR appliquons la commande hybride	78
4.12	L'évolution de la commande hybride	79
4.13	L'évolution de l'angle du pendule en présence du perturbations appliquons la commande SMC	79
4.14	L'évolution de l'angle du pendule en présence du perturbations appliquons la commande STW	80
4.15	L'évolution de l'angle du pendule en présence du perturbations appliquons la commande MSTW	80
4.16	L'évolution de l'angle du pendule en présence du perturbations appliquons la commande hybride	80
4.17	L'évolution de l'angle du pendule appliquons la commande par logique floue	81
4.18	L'évolution de l'angle du bras appliquons la commande par logique floue	82
4.19	L'évolution de la commande par logique floue	82

4.20 L'évolution de l'angle du pendule appliquons la commande par réseau de neurones	83
4.21 L'évolution de l'angle du bras appliquons la commande par réseau de neurones	83
4.22 L'évolution de la commande par réseau de neurones	83

LISTE DES TABLEAUX

1.1	Composants du QUBE-SERVO 2 [1]	25
1.2	Paramètres du PIR [1]	27

INTRODUCTION GÉNÉRALE

Lors de nos interactions quotidiennes, nous avons tous observé des personnes qui se déplaçant sur des Segways, ainsi que l'émergence de robots de livraison et d'autres types de robots. Cette observation suscite naturellement des interrogations quant aux principes sous-jacents qui régissent ces machines complexes. Il est généralement admis que la plupart de ces robots complexes se basent sur le principe du pendule inversé. Dans cette étude, notre objectif est de concentrer sur une catégorie spécifique de pendule inversé, à savoir le pendule inversé rotatif sur la maquette du QUANSER QUBE Servo 2 disponible à notre établissement ESSAT, et de développer une stratégie de commande appropriée pour le contrôler.

Etat de l'art des commandes appliquées sur le QUANSER QUBE Servo 2 :

Placement de pôles : Le placement de pôles est une technique de commande permettant de spécifier les positions des pôles du système afin d'atteindre des performances désirées en termes de stabilité, de temps de réponse et d'amortissement. Sur le QUANSER QUBE Servo 2, différentes approches de placement de pôles en boucle fermée ou en boucle ouverte peuvent être employées. Ces méthodes consistent à concevoir les gains du régulateur afin de positionner les pôles du système aux emplacements souhaités.

LQR (Linear Quadratic Regulator) : Le LQR est une méthode de commande optimale utilisée pour régler les gains d'un régulateur linéaire quadratique en minimisant une fonction coût quadratique. Cette technique permet d'optimiser les performances en termes de trajectoire, de stabilité et de consommation d'énergie. L'application du LQR sur le QUANSER QUBE Servo 2 nécessite premièrement une linéarisation du système autour d'un point de fonctionnement, puis l'utilisation des techniques de contrôle optimal pour calculer les gains du régulateur.

Swing-Up : Le Swing-Up est une méthode de commande appliquée aux systèmes mécaniques sous-actionnés, tels que les pendules inversés. L'objectif du Swing-Up est de fournir suffisamment d'énergie au système pour le faire passer d'une position d'équilibre à une autre. Sur le QUANSER QUBE Servo 2, des stratégies de commande basées sur l'énergie, telles que le contrôle par énergie passante, peuvent être mises en œuvre pour réaliser cette tâche. Ces approches exploitent les propriétés énergétiques du système pour générer des trajectoires de mouvement adéquates.

Notre travail est divisé en quatre chapitres.

Le premier chapitre de cette étude s'attache à présenter une vue d'ensemble des pendules, en décrivant leurs types et en se focalisant sur le pendule inversé en particulier. Nous aborderons les différentes variantes de pendule inversé et mettrons en évidence leur domaine d'application spécifique. Par la suite, nous procéderons à la modélisation mathématique de notre système, à savoir le pendule inversé rotatif, afin de présenter la représentation d'état du système.

Le deuxième chapitre consistera à mettre en œuvre le modèle mathématique du système. Nous procéderons à la linéarisation du système autour du point d'équilibre instable, car les commandes linéaires démontrent leur efficacité dans cette plage de linéarité. Trois types de commandes linéaires seront appliqués, à savoir la commande par placement de pôles, la commande linéaire quadratique, et enfin le régulateur proportionnel dérivé. Les résultats des simulations et des expérimentations seront présentés, permettant ainsi une comparaison des performances entre les trois commandes.

Le troisième chapitre sera dédié à l'introduction de la théorie des commandes non linéaires appliquées au système. Nous présenterons différentes techniques de commande, notamment la commande par mode glissant, la commande supertwisting simple, la commande supertwisting modifiée et la commande hybride synergétique Swing Up. Chacune de ces commandes présente des avantages spécifiques pour le système.

Dans le quatrième chapitre, nous procéderons à l'application des commandes mentionnées précédemment sur notre système, le pendule inversé rotatif. Nous tiendrons compte du modèle mathématique réel du système, qui est non linéaire, afin d'effectuer ces applications. Nous présenterons ensuite les résultats expérimentaux obtenus, mettant en évidence les performances des différentes commandes. De plus, nous établirons une collaboration avec un étudiant qui applique des commandes sur le même système, mais sans se baser sur le modèle mathématique. Cette collaboration nous permettra de réaliser une comparaison entre les deux approches, en mettant en évidence les avantages et les limites de chacune d'entre elles.

L'ensemble de cette étude vise à approfondir notre compréhension des principes de commande des pendules inversés rotatifs, ainsi qu'à développer des stratégies de contrôle efficaces pour ce type spécifique de système. Par cette exploration, nous espérons contribuer à l'avancement des connaissances dans le domaine de l'automatique et à l'amélioration des performances des pendules inversés rotatifs dans des applications pratiques telles que les différents types de robots.

CHAPITRE 1

GÉNÉRALITÉ SUR LES PENDULES ET MODÉLISATION DU PENDULE INVERSÉ ROTATIF (PIR)

Sommaire

1.1	Introduction	15
1.2	Définition du pendule	15
1.3	Bref historique sur le pendule	15
1.4	Types du pendule	17
1.5	Pendule inversé	18
1.5.1	Principe de fonctionnement du pendule inversé	19
1.5.2	Types du pendule inversé	19
1.5.3	Quelque application du pendule inversé	21
1.5.4	Utilité des pendules inversé	24
1.6	Présentation du pendule inversé rotatif (QUBE-Servo 2)	24
1.7	Modélisation mathématique du PIR	26
1.7.1	Equation d'Euler-Lagrange	26
1.7.2	Représentation d'état du PIR	31
1.8	Conclusion	32

1.1 Introduction

Les pendules sont des systèmes mécaniques simples qui ont captivé l'imagination des scientifiques et du grand public pendant des siècles en raison de leur utilisation pour mesurer le temps et de leur comportement mystérieux et enchanteur. Ils sont l'un des exemples les plus simples de systèmes oscillatoires. Cependant, leur apparente simplicité ne reflète pas la complexité des phénomènes physiques qu'ils englobent.

Dans ce chapitre, nous allons explorer le monde fascinant des pendules et concentrer sur une variante particulière appelée le pendule inversé rotatif. En outre, nous allons présenter ce dernier et faire une étude approfondie de sa modélisation mathématique.

1.2 Définition du pendule

Selon WordNet, une base de données d'anglais compilée par l'université de Princeton, un pendule est un poids ou un autre objet monté de sorte qu'il puisse balancer librement sous l'influence de la gravité. Le poids est le plus souvent monté sur une corde ou un cordon et suspendu à un pivot.

1.3 Bref historique sur le pendule

Le pendule a été découvert et étudié pour la première fois par Galilée au début du XVIIe siècle. Il a observé que le mouvement d'un pendule était régulier et qu'il était possible d'utiliser cette régularité pour mesurer le temps avec une grande précision. Cependant, il a fallu attendre le travail de Christiaan Huygens, un scientifique néerlandais, pour comprendre le mouvement du pendule et en tirer des conclusions importantes [22]. En 1656, Huygens découvre que la période de vibration d'un pendule dépend uniquement de sa longueur et de l'accélération gravitationnelle locale, et non de son amplitude (figure 1.1). Cela signifie que si la longueur du pendule est connue, il est possible de mesurer la durée d'une période d'oscillation avec une grande précision. Cette découverte a ouvert la voie à l'utilisation du pendule comme un instrument de mesure précis pour les horloges (figure 1.2), qui étaient alors en train de devenir de plus en plus sophistiquées et utiles [42].

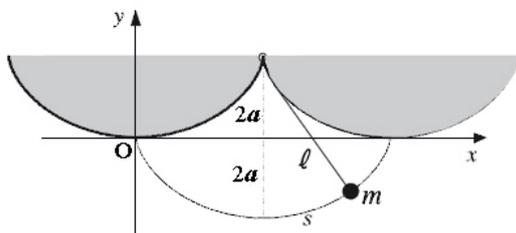


FIGURE 1.1 – Le pendule de Huygens [37]



FIGURE 1.2 – L'appareil de Huygens [34]

Au XVIIIe siècle, les horloges à pendule sont devenues les instruments de mesure du temps les plus précis et les plus fiables, grâce aux améliorations apportées à leur conception et à leur fonctionnement. Les horlogers ont perfectionné les pendules en les équipant de systèmes de compensation thermique pour réduire les effets des changements

CHAPITRE 1. GÉNÉRALITÉ SUR LES PENDULES ET MODÉLISATION DU PENDULE INVERSÉ ROTATIF (PIR)

de température sur la précision, ainsi que de dispositifs d'échappement pour réguler le mouvement du pendule et garantir son fonctionnement constant.

En 1795, l'horloger suisse Abraham-Louis Breguet invente le "tourbillon" (figure 1.3), un mécanisme sophistiqué qui compense les effets de la gravité sur le mouvement du pendule en faisant tourner l'ensemble du mécanisme de l'horloge. Cette invention a permis d'augmenter encore la précision des horloges à pendule et a permis aux horlogers de construire des montres-bracelets à haute précision[13].



FIGURE 1.3 – Le tourbillon [21]

Au XIXe siècle, le pendule a été utilisé pour des expériences en physique, en particulier pour étudier la nature de la force gravitationnelle. Le pendule a également été utilisé pour des expériences de métrologie, comme la détermination de la forme de la Terre et de la variation de l'accélération gravitationnelle en différents points de sa surface.

- **En 1817** le physicien anglais Henry Kater a inventé le pendule inversé en réponse à une enquête du gouvernement britannique sur les méthodes de mesure de la gravité. il a été utilisé pendant de nombreuses décennies pour mesurer la gravité, la longueur exacte d'une seconde de temps, et pour étalonner les horloges et les chronomètres (figures 1.4) [18].



FIGURE 1.4 – Le pendule de Kater [38]

Higdon et Cannon étaient tous deux des chercheurs en génie mécanique à l'Université Stanford dans les années 1960.

- **En 1965** Truxal a écrit un ensemble de notes de cours sur les modèles d'état d'espace et le contrôle, utilisant le système à double pendule inversé comme exemple. Ces notes ont contribué à la diffusion de la théorie de l'espace d'état et du contrôle moderne, en utilisant le système à double pendule inversé comme un exemple pratique[11].

- **En 1966** Schaefer et Cannon ont discuté de la dynamique et de la stabilité des systèmes à pendule inversé avec des articulations flexibles, ainsi que des techniques de contrôle pour stabiliser ces systèmes. Leurs travaux ont montré que les articulations flexibles peuvent rendre ces systèmes plus difficiles à contrôler, car ils introduisent des non-linéarités et des effets de couplage dans les équations de mouvement. Cependant, leur travail a également montré que les techniques de contrôle appropriées peuvent être utilisées pour stabiliser ces systèmes et les amener à se comporter de manière souhaitée. Il est intéressant de noter que l'article de Schaefer et Cannon de 1966 crédite également Claude Shannon pour avoir suggéré le système à pendule inversé, mais ne mentionne pas les travaux de Roberge.

- A la fin des années 1960, les discussions du système à pendule inversé unique ont été inclus dans manuels populaires tels que Cannon (1967), Dorf (1967), et Ogata (1970) (qui font tous référence à Higdon et Cannon(1963) dans leurs discussions sur le pendule inversé).

Le problème de stabilisation d'un pendule inversé est un exemple classique dans les cours de physique et de mécanique pour illustrer les concepts de contrôle et de stabilisation. Il s'agit de maintenir un pendule en position d'équilibre inversée en utilisant une base oscillante verticalement. Cette configuration a fait l'objet d'une série d'articles dans l'American Journal of Physics, notamment par Phelps et Hunter (1965), Blitzer (1965) et Kalmus (1970). Ces articles ont examiné diverses approches de contrôle pour maintenir le pendule en position d'équilibre et ont fourni des exemples concrets de l'utilisation de l'espace d'état et de la théorie du contrôle pour résoudre des problèmes de ce type. Ce problème a inspiré de nombreux travaux de recherche sur la stabilisation de systèmes non linéaires.

1.4 Types du pendule

- **Pendule Simple** : C'est le type de pendule le plus basique, formés par un fil attaché à un point fixe et une masse pendent l'autre bout. Il s'agit d'un système physique simple qui peut être utilisé pour comprendre les principes de la mécanique (figure 1.5).

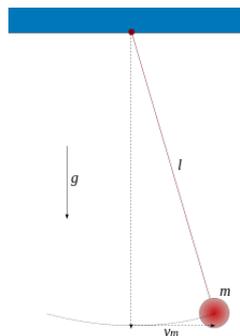


FIGURE 1.5 – Pendule simple [40]

• **Pendule double** : Il s'agit d'un système formé par deux pendules simples qui sont attachés ensemble. Chaque pendule peut se déplacer indépendamment, ce qui peut entraîner le phénomène Chaos (figure 1.6).

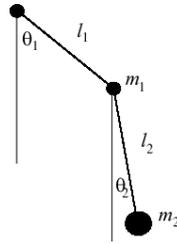


FIGURE 1.6 – Pendule double [39]

• **Pendule élastique** : Ce type de pendule consiste d'un fil élastique attaché à un point fixe et d'une masse qui pend à l'autre bout. Il peut être utilisé pour étudier les vibrations élastiques et les effets de la force de rappel (figure 1.7).

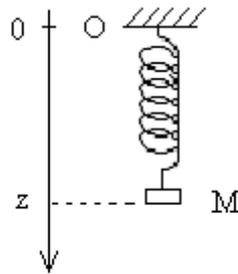


FIGURE 1.7 – Pendule élastique [41]

• **Pendule conique** : Ce type de pendule consiste d'un fil attaché à un point fixe et une masse qui pend à l'autre bout et qui est libre de se déplacer sur un cercle conique (figure 1.8).

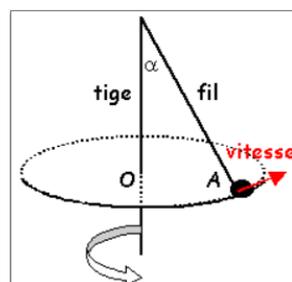


FIGURE 1.8 – Pendule conique [24]

1.5 Pendule inversé

Le pendule inversé est un système de contrôle non linéaire central en recherche en automatique, utilisé pour analyser la stabilité et élaborer des stratégies de régulation de systèmes dynamiques. Sa nature instable est représentative de nombreux défis en

ingénierie et robotique, et son étude est essentielle pour développer des solutions innovantes dans ces domaines. Il est composé d'un pendule attaché à une base mobile qui peut se déplacer dans deux directions perpendiculaires à la direction de la gravité. Contrairement à un pendule ordinaire, où la base est fixe et le pendule se balance sous l'influence de la gravité, le pendule inversé est conçu pour se tenir en équilibre instable en contrôlant la position de la base en temps réel.

Il est souvent utilisé comme cas d'étude pour tester des algorithmes de contrôle avancés tels que la commande par retour d'état linéaire, la commande par logique floue et les réseaux de neurones artificiels.

1.5.1 Principe de fonctionnement du pendule inversé

Le pendule inversé est constitué d'une masse suspendue en haut d'un axe de rotation, à l'opposé de ce que l'on observe avec un pendule classique. Le système est instable, car la masse peut facilement tomber dans n'importe quelle direction. Pour maintenir la masse en équilibre, il faut constamment ajuster son angle par rapport à la verticale. Cela se fait grâce à un système de contrôle en boucle fermée.

Le système de contrôle en boucle fermée mesure l'angle de la masse par rapport à la verticale et compare cette mesure à une valeur de référence. Si l'angle est différent de la valeur de référence, le système de contrôle envoie un signal à un moteur qui ajuste l'angle de la masse en déplaçant le point d'attache de la masse. L'objectif est de maintenir la masse en équilibre en ajustant constamment son angle.

1.5.2 Types du pendule inversé

- **Pendule inversé classique** : Ce pendule inversé est constitué d'une masse suspendue à une tige rigide qui est fixée à un pivot. Il est utilisé comme exemple de système dynamique complexe pour l'enseignement de la physique et de la théorie de contrôle (figure 1.9).

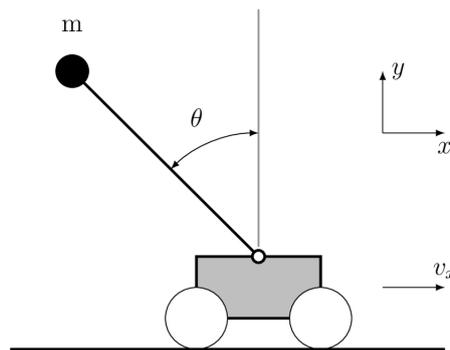


FIGURE 1.9 – Pendule inversé classique [32]

- **Pendule inversé sur double tige** : Ce pendule inversé est constitué de deux tiges rigides, l'une avec une masse suspendue et l'autre qui pivote autour de son point de fixation. Il est utilisé pour étudier les comportements dynamiques complexes des systèmes physiques (figure 1.10).

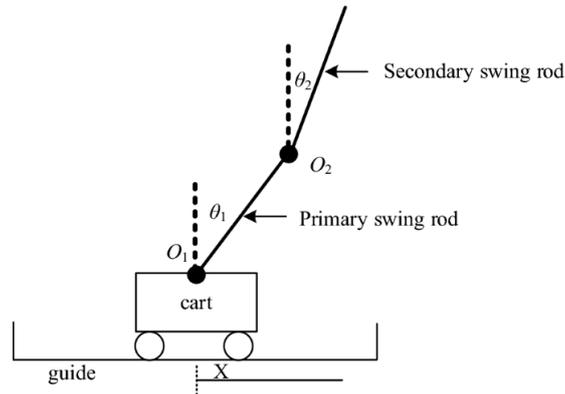


FIGURE 1.10 – Pendule inversé sur double tige [32]

- **Pendule inversé sphérique** : Ce pendule inversé est constitué d'une masse suspendue à un point de suspension qui peut se déplacer sur une sphère. Il est utilisé pour étudier les phénomènes de stabilité et de contrôle dans les systèmes physiques (figure 1.11).

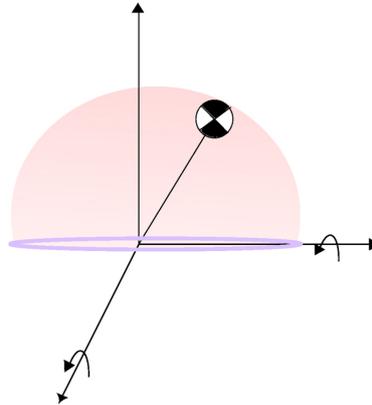


FIGURE 1.11 – Pendule inversé sphérique [10]

- **Pendule inversé rotationnel** : Le pendule inversé simple effectue un mouvement de translation, tandis que le pendule inversé rotationnel effectue un mouvement de rotation autour d'un axe vertical (figure 1.12).



FIGURE 1.12 – Pendule inversé rotationnel [1]

• **Pendule inversé à double roue** : Ce pendule inversé est constitué de deux roues qui pivotent autour de leur axe, avec une masse suspendue à leur intersection. Il est utilisé pour étudier les phénomènes de stabilité et de contrôle dans les systèmes à plusieurs corps (figure 1.13).

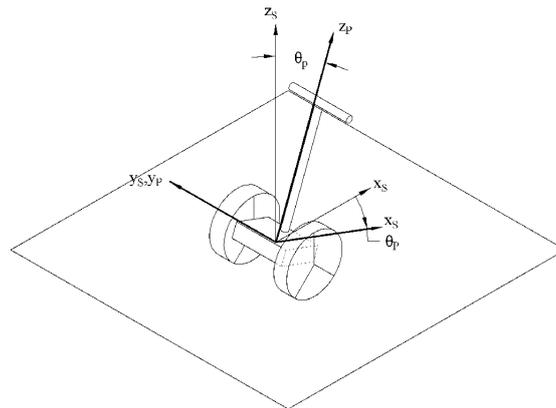


FIGURE 1.13 – Pendule inversé à double roue [9]

1.5.3 Quelques applications du pendule inversé

• **Robot Intelligent avec Balance à Deux Roues** : Il emploie quatre modes de fonctionnement différents. Il peut se déplacer sur deux roues, effectuant diverses tâches. Il peut également être commandé via le capteur à distance (figure 1.14).



FIGURE 1.14 – Robot intelligent [25]

• **Prothèses actives** : C'est une prothèse de pied programmée avec un microprocesseur qui a une adaptabilité en temps réel du mouvement. Il imite la perte de fonction musculaire en fournissant activement de l'énergie pendant la chute (figure 1.15).



FIGURE 1.15 – Prothèse active [29]

• **Segway** : Le segway est un moyen de transport personnel électrique à deux roues. Il utilise un système de contrôle de mouvement basé sur les pendules inversés pour maintenir son équilibre et se déplacer (figure 1.16).



FIGURE 1.16 – Segway [31]

• **Robot humanoïde** : Le robot humanoïde est un robot conçu pour ressembler et imiter les mouvements et les comportements humains. Ils peuvent être utilisés dans divers domaines, tel que l'entraînement, la recherche et la médecine (figure 1.17).



FIGURE 1.17 – Robot humanoïde [20]

• **Segway-Ninebot Loomo Delivery** : Il s'agit d'un robot de livraison autonome qui utilise le principe du pendule inversé pour se maintenir debout. Il peut transporter des objets jusqu'à 50 kilogrammes sur une distance allant jusqu'à 8 km (figure 1.18).



FIGURE 1.18 – Segway-Ninebot Loomo Delivery [4]

• **Robot de téléprésence** : Les robots de téléprésence utilisent des roues pour se déplacer et des capteurs pour mesurer leur position et leur orientation. Ils utilisent également le principe du pendule inversé pour maintenir leur équilibre (figure 1.19).



FIGURE 1.19 – Robot de téléprésence [35]

• **BigDog** : Un robot quadrupède, conçu pour se déplacer sur des terrains difficiles et porter des charges lourdes sur des terrains impraticables pour les véhicules à roues. Le robot utilise un principe de pendule inversé pour maintenir son équilibre, similaire à celui utilisé par le segway (figure 1.20).

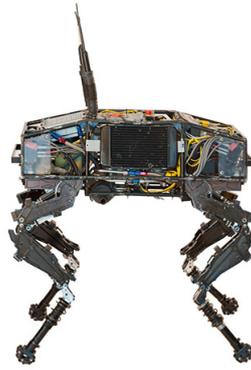


FIGURE 1.20 – BigDog [33]

• **Hospi** : Un robot de livraison de médicaments qui se déplace dans les couloirs des hôpitaux pour livrer des fournitures médicales et des médicaments aux patients. Le robot utilise un système de stabilisation par pendule inversé pour maintenir son équilibre et se déplacer en douceur sur les sols inégaux des hôpitaux (figure 1.21).



FIGURE 1.21 – Le robot Hospi [14]

1.5.4 Utilité des pendules inversé

En général, les pendules inversés sont très utiles pour contrôler la stabilité des systèmes automatisés et aussi pour mesurer des petits mouvement et changement de position et de vitesse dans divers domaines tels que la mécanique, l'automatique et la médecine. Ses avantages comprennent :

- Robuste aux conditons difficile telles que les vibrations, les chocs et les températures extrêmes.
- Précision de meusure élevée.
- Simplicité de l'installation et de l'utilisation.

1.6 Présentation du pendule inversé rotatif (QUBE-Servo 2)

Le Pendule Inversé Rotatif est un système classique utilisé surtout pour faire apprendre la modélisation et le contrôle dans la physique et l'ingénierie. Le PIR est composé d'un

CHAPITRE 1. GÉNÉRALITÉ SUR LES PENDULES ET MODÉLISATION DU PENDULE INVERSÉ ROTATIF (PIR)

bras rotatif qui est attaché au moteur pivot d'un coté, sa position est définie par l'angle θ et le pendule est attaché à l'autre extrémité de bras, sa position est définie par l'angle α .

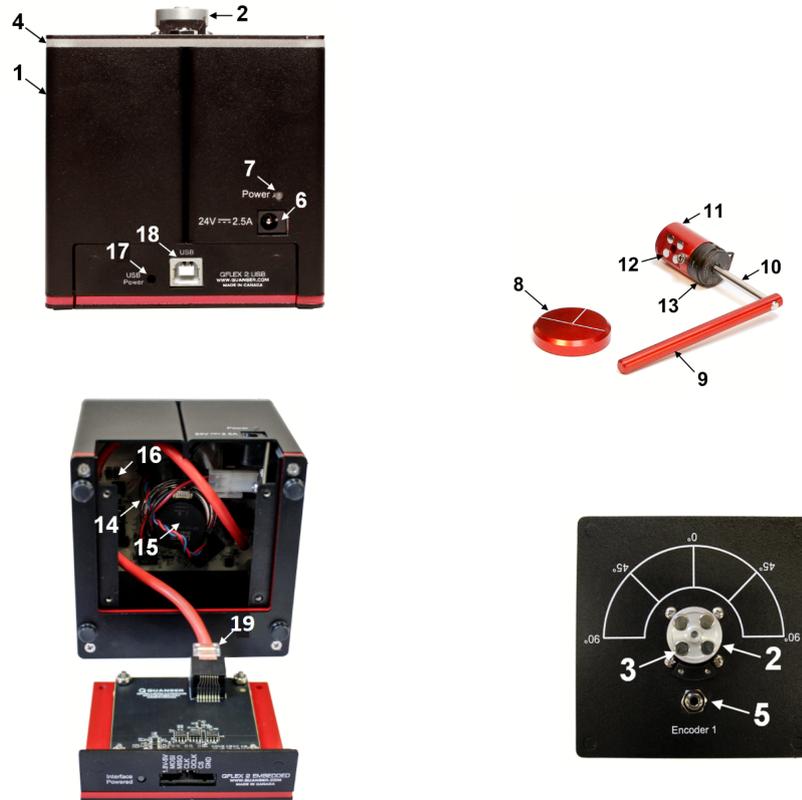


FIGURE 1.22 – Composants du QUBE-SERVO 2 [1]

N°	Composants	N°	Composants
1	Châssis	11	Moyeu de bras rotatif
2	Connecteur de module	12	Aimants de pendule rotatif
3	Aimants de connecteur de module	13	Encodeur de pendule
4	bandeau de LED d'état	14	Moteur DC
5	Connecteur de module encodeur	15	encodeur de moteur
6	Connecteur d'alimentation	16	QUBE-SERVO 2 carte DAQ/amplificateur
7	LED d'alimentation du système	17	"LED d'alimentation de l'interface
8	Disque d'inertie	18	Connecteur USB
9	Liaison de pendule	19	Bus de données interne
10	Tige de bras rotatif		

TABLE 1.1 – Composants du QUBE-SERVO 2 [1]

1.7 Modélisation mathématique du PIR

La modélisation mathématique du pendule inversé rotatif consiste à décrire ce système sous forme d'équations mathématiques qui permettent de prédire son comportement. Cette modélisation est importante car elle permet de comprendre comment le système réagit à différentes conditions et de concevoir des contrôleurs pour stabiliser le pendule. Afin de comprendre son comportement, plusieurs méthodes de modélisation mathématique ont été développées, parmi lesquelles l'équation d'Euler-Lagrange.

1.7.1 Equation d'Euler-Lagrange

L'équation d'Euler-Lagrange est une équation différentielle de deuxième ordre qui décrit les mouvements d'un système physique en termes de la fonction de Lagrange L , qui est une mesure de l'énergie cinétique et potentielle du système, ainsi que des forces qui agissent sur le système.

La fonction de Lagrange L est une fonction de deux variables, les coordonnées généralisées q et leur dérivée \dot{q} . La fonction L exprime la différence entre l'énergie cinétique et potentielle du système, et est souvent écrite comme $L(q, \dot{q})$. Les coordonnées généralisées sont des variables qui décrivent l'état du système et permettent de décrire toutes les positions et orientations possibles.

Le principe de moindre action est basé sur l'idée que le mouvement réel d'un système physique est choisi parmi tous les mouvements possibles qui relient les mêmes positions initiales et finales en minimisant l'action. L'action est définie comme l'intégrale de la différence entre l'énergie cinétique et potentielle du système le long de la trajectoire du système. Le principe de moindre action permet de déterminer l'équation de mouvement du système en faisant varier la trajectoire du système de sorte que l'action soit minimale. En d'autres termes, la trajectoire réelle du système est celle pour laquelle la variation de l'action est nulle. L'action est une grandeur qui caractérise le mouvement d'un système physique et est donnée par :

$$S = \int L \, dt$$

où L est la fonction de Lagrange, t est le temps, et l'intégrale est prise sur la durée totale du mouvement. L'équation de Lagrange-Euler est obtenue en faisant varier la trajectoire du système de sorte que la variation de l'action soit nulle. En d'autres termes, la trajectoire réelle du système doit être celle qui minimise l'action. On obtient alors l'équation de mouvement du système, qui relie la fonction de Lagrange L aux coordonnées généralisées q et leurs dérivées $\frac{dq}{dt}$, ainsi qu'aux forces qui agissent sur le système. Pour faire varier la trajectoire du système, on utilise le principe de variation. On introduit une petite perturbation $\delta q(t)$ autour de la trajectoire réelle $q(t)$ du système. On demande ensuite que la variation de l'action S soit nulle, ce qui donne :

$$\delta S = 0$$

On peut alors développer cette expression en utilisant la définition de l'action et en faisant une intégration par parties. Après quelques manipulations, on obtient finalement l'équation de Lagrange-Euler :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} = F$$

CHAPITRE 1. GÉNÉRALITÉ SUR LES PENDULES ET MODÉLISATION DU PENDULE INVERSÉ ROTATIF (PIR)

Avec F est la force extérieure et q est une coordonnée généralisée.

Il est important de souligner que l'équation d'Euler-Lagrange est une équation de mouvement générale qui s'applique à une grande variété de systèmes physiques, allant des particules individuelles aux systèmes complexes tels que les fluides et les champs. Elle est également utilisée dans d'autres domaines de la physique, comme en optique, en électromagnétisme, en mécanique quantique et en relativité restreinte.

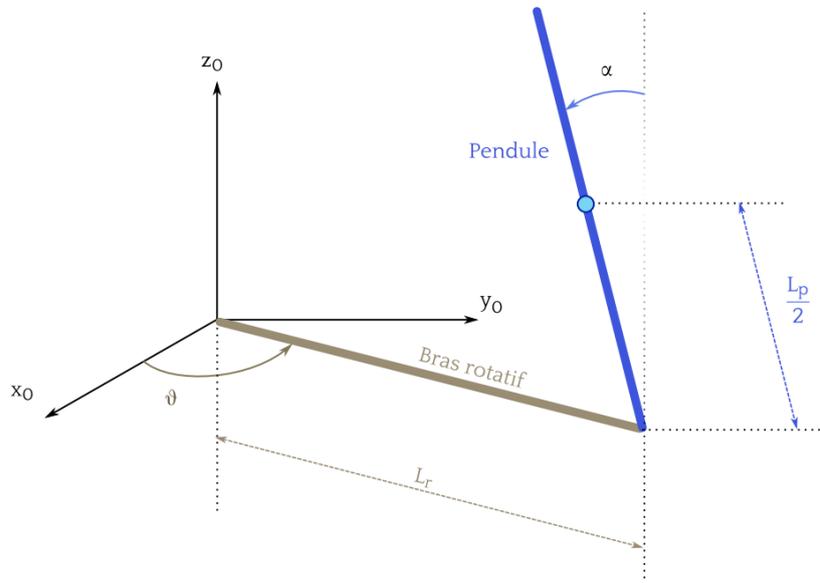


FIGURE 1.23 – Schéma du pendule inversé rotatif [36]

La figure 1.23 représente le schéma du PIR, le bras est lié au moteur, ce qui provoque la rotation du bras. En conséquence, le pendule tourne également. Tous les calculs de la modélisation se feront en prenant pour origine, la position haute du pendule.

Les paramètres et leurs valeurs sont résumés dans le tableau suivant :

Symbole	Description	Valeur	Unité
K_m	Constante de la f.e.m	0.0076777	V.s/rad
R_m	Résistance d'induit du moteur	2.6	ohm
m_p	Masse du pendule	0.127	Kg
L_r	Langueur de bras	0.2159	m
L_p	Langueur de pendule	0.33655	m
J_r	Moment d'inertie du bras de son centre de masse	0.0009983	Kg.m ²
J_p	Moment d'inertie du pendule de son centre de masse	0.0012	Kg.m ²
β_r	Coefficient de viscosité d'amortissement du bras	0.0024	N.m.s/rad
β_p	Coefficient de viscosité d'amortissement du pendule	0.0024	N.m.s/rad
g	Gravité	9.81	Kg.m ²

TABLE 1.2 – Paramètres du PIR [1]

CHAPITRE 1. GÉNÉRALITÉ SUR LES PENDULES ET MODÉLISATION DU PENDULE INVERSÉ ROTATIF (PIR)

Nous allons commencer par le calcul de l'énergie potentielle E_p et l'énergie cinétique E_c du système

$$E_c = E_{c_{pendule}} + E_{c_{bras}} \quad (1.1)$$

$$E_p = E_{p_{pendule}} + E_{p_{bras}} \quad (1.2)$$

— Le bras :

$$\begin{cases} E_{c_{bras}} = \frac{1}{2} J_r \dot{\theta}^2 \\ E_{p_{bras}} = 0 \end{cases}$$

— Le pendule :

$$\begin{cases} E_{c_{pendule}} = \frac{1}{2} m_p \dot{P}^2 + \frac{1}{2} \dot{\alpha}^2 \\ E_{p_{pendule}} = \frac{1}{2} m_p g L_p \cos \alpha \end{cases}$$

— L'énergie cinétique totale :

$$\begin{aligned} E &= E_{c_{bras}} + E_{c_{pendule}} \\ E_c &= \frac{1}{2} J_r \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m_p \dot{P}^2 + \frac{1}{2} \dot{\alpha}^2 \end{aligned} \quad (1.3)$$

— L'énergie potentielle totale :

$$\begin{aligned} E_p &= E_{p_{bras}} + E_{p_{pendule}} \\ E_p &= \frac{1}{2} m_p g L_p \cos \alpha \end{aligned} \quad (1.4)$$

Avec P est le vecteur position du centre de gravité du pendule donnée par les equations suivantes :

$$\begin{cases} P_x = L_r \cos \theta + \frac{1}{2} L_p \sin \alpha \sin \theta \\ P_y = L_r \sin \theta - \frac{1}{2} L_p \sin \alpha \cos \theta \\ P_z = L_p \cos \alpha \end{cases} \quad (1.5)$$

On la dérive :

$$\begin{cases} \dot{P}_x = -L_r \dot{\theta} \sin \theta + \frac{1}{2} L_p (\dot{\alpha} \cos \alpha \sin \theta + \dot{\theta} \cos \theta \sin \alpha) \\ \dot{P}_y = L_r \dot{\theta} \cos \theta - \frac{1}{2} L_p (\dot{\alpha} \cos \alpha \cos \theta - \dot{\theta} \sin \theta \sin \alpha) \\ \dot{P}_z = -\frac{1}{2} L_p \dot{\alpha} \sin \alpha \end{cases} \quad (1.6)$$

On a :

$$\dot{P}^2 = \dot{P}_x^2 + \dot{P}_y^2 + \dot{P}_z^2 \quad (1.7)$$

En remplaçant dans (1.3) on trouve :

$$Ec = \frac{1}{2} \left(J_r + m_p L_r^2 + \frac{1}{2} m_p L_p^2 \sin^2 \alpha \right) \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} \left(J_p + \frac{1}{4} m_p L_p^2 \right) \dot{\alpha}^2 - \frac{1}{2} m_p L_r \cos \alpha \dot{\theta} \dot{\alpha} \quad (1.8)$$

Alors L devient :

$$L = \frac{1}{2} \left(J_r + m_p L_r^2 + \frac{1}{2} m_p L_p^2 \sin^2 \alpha \right) \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} \left(J_p + \frac{1}{4} m_p L_p^2 \right) \dot{\alpha}^2 - \frac{1}{2} m_p L_r \cos \alpha \dot{\theta} \dot{\alpha} - \frac{1}{2} m_p g L_p \cos \alpha \quad (1.9)$$

On utilise la formule de Lagrange pour tirer les équation différentielle :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{dL}{d\dot{x}} \right) - \frac{dL}{dx} = F \quad (1.10)$$

Pour le cas du PIR on a deux degré de liberté (θ, α) :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \left(\frac{dL}{d\dot{\theta}} \right) - \frac{dL}{d\theta} = Q_1 \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{dL}{d\dot{\alpha}} \right) - \frac{dL}{d\alpha} = Q_2 \end{cases} \quad (1.11)$$

Dans ce système on a deux force extérieure : Q_1 en relation avec θ alors elle est appliqué à la tige (couple du moteur et frottement), et Q_2 en relation avec α qui est une force de frottement :

$$\begin{cases} Q_1 = \tau - B_r \dot{\theta} \\ Q_2 = -B_p \dot{\alpha} \end{cases} \quad (1.12)$$

B_r et B_p sont les coefficients des frottement visqueux du bras et du pendule respectivement et τ représente le moment du couple appliqué à la tige rotative généré par le servomoteur [1]

$$\tau = \frac{K_m}{R_m} (V_m - K_m \dot{\theta}) \quad (1.13)$$

Donc on aura les équations différentielles qui décrivent la dynamique du système :

$$\ddot{\theta} \left(J_r + m_p L_r^2 + \frac{1}{4} m_p L_p^2 \sin \alpha \right) - \left(\frac{1}{2} m_p L_p L_r \cos \alpha \right) \ddot{\alpha} + \dot{\alpha} \dot{\theta} \left(\frac{1}{2} m_p L_p \sin \alpha \cos \alpha \right) + \dot{\alpha}^2 \left(\frac{1}{2} m_p L_r L_p \sin \alpha \right) = Q_1 \quad (1.14)$$

$$\ddot{\theta} \left(-\frac{1}{2} m_p L_p L_r \cos \alpha \right) + \ddot{\alpha} \left(J_p + \frac{1}{4} m_p L_p^2 \right) + \dot{\theta}^2 \left(-\frac{1}{4} m_p L_p^2 \sin \alpha \cos \alpha \right) - \frac{1}{2} m_p g L_p \sin \alpha = Q_2 \quad (1.15)$$

CHAPITRE 1. GÉNÉRALITÉ SUR LES PENDULES ET MODÉLISATION DU
PENDULE INVERSÉ ROTATIF (PIR)

Le modèle est écrit sous forme d'un système simple de deux équations à deux inconnues :

$$\begin{cases} a\ddot{\theta} + b\ddot{\alpha} = c \\ a_1\ddot{\theta} + b_1\ddot{\alpha} = c_1 \end{cases} \quad (1.16)$$

Tel que :

- $a = J_r + m_p L_r^2 + \frac{1}{4} m_p L_p^2 \sin^2 \alpha$
- $a_1 = \left(-\frac{1}{2} m_p L_r L_p \cos \alpha \right)$
- $b = \left(-\frac{1}{2} m_p L_r L_p \cos \alpha \right)$
- $b_1 = J_p + \frac{1}{4} m_p L_p^2$
- $c = \tau - \beta_r \dot{\theta} - \left[\dot{\alpha} \dot{\theta} \left(\frac{1}{2} m_p L_p^2 \sin \alpha \cos \alpha \right) + \dot{\alpha}^2 \left(\frac{1}{2} m_p L_r L_p \sin \alpha \right) \right]$
- $c_1 = -\beta_p \dot{\alpha} - \left[\dot{\alpha}^2 \left(-\frac{1}{4} m_p L_p^2 \sin \alpha \cos \alpha \right) - \frac{1}{2} m_p g L_p \sin \alpha \right]$

On utilise la méthode de résolution de Cramer afin d'obtenir les deux inconnues $\ddot{\alpha}, \ddot{\theta}$:

$$\ddot{\theta} = \frac{\begin{vmatrix} c & b \\ c_1 & b_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}} = \frac{cb_1 - c_1b}{ab_1 - a_1b} = \frac{det_1}{det} \quad (1.17)$$

$$\ddot{\alpha} = \frac{\begin{vmatrix} a & c \\ a_1 & c_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}} = \frac{ac_1 - a_1c}{ab_1 - a_1b} = \frac{det_2}{det} \quad (1.18)$$

$$det = (J_r + m_p L_r^2) \left(J_p + \frac{1}{4} m_p L_p^2 \right) + \frac{1}{4} m_p L_p^2 \sin^2 \alpha \left(J_p + \frac{1}{4} m_p L_p^2 \right) - \frac{1}{4} (m_p L_p L_r \cos \alpha)^2 \quad (1.19)$$

$$\begin{aligned} det_1 = & \left[\tau - \beta_r \dot{\theta} - \left(\frac{1}{2} m_p L_p^2 \sin \alpha \cos \alpha \right) \dot{\alpha} \dot{\theta} - \left(\frac{1}{2} m_p L_r \sin \alpha \right) \dot{\alpha}^2 \right] \times \\ & - \left[-\beta_p \dot{\alpha} + \left(\frac{1}{4} m_p L_p^2 \sin \alpha \cos \alpha \right) \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m_p g L_p \sin \alpha \right] \left(-\frac{1}{2} m_p L_r L_p \cos \alpha \right) \end{aligned} \quad (1.20)$$

$$\begin{aligned} det_2 = & \left[-\beta_p \dot{\alpha} + \left(\frac{1}{4} m_p L_p^2 \sin \alpha \cos \alpha \right) \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m_p g L_p \sin \alpha \right] \left(J_r + m_p L_r^2 + \frac{1}{4} m_p L_p^2 \sin^2 \alpha \right) \\ & - \left[\tau - \beta_r \dot{\theta} - \left(\frac{1}{2} m_p L_p^2 \sin \alpha \cos \alpha \right) \dot{\alpha} \dot{\theta} - \left(\frac{1}{2} m_p L_r \sin \alpha \right) \dot{\alpha}^2 \right] \left(-\frac{1}{2} m_p L_r L_p \cos \alpha \right) \end{aligned} \quad (1.21)$$

Donc :

$$\begin{aligned} \ddot{\theta} = & \left[\tau - \beta_r \dot{\theta} - \left(\frac{1}{2} m_p L_p^2 \sin \alpha \cos \alpha \right) \dot{\alpha} \dot{\theta} - \left(\frac{1}{2} m_p L_r \sin \alpha \right) \dot{\alpha}^2 \right] \frac{J_p + \frac{1}{4} m_p L_p^2}{det} \\ & - \left[-\beta_p \dot{\alpha} + \left(\frac{1}{4} m_p L_p^2 \sin \alpha \cos \alpha \right) \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m_p g L_p \sin \alpha \right] \frac{\left(-\frac{1}{2} m_p L_r L_p \cos \alpha \right)}{det} \end{aligned} \quad (1.22)$$

$$\begin{aligned} \ddot{\alpha} = & \left[-\beta_p \dot{\alpha} + \left(\frac{1}{4} m_p L_p^2 \sin \alpha \cos \alpha \right) \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m_p g L_p \sin \alpha \right] \frac{\left(J_r + m_p L_p^2 + \frac{1}{4} m_p L_p^2 \sin \alpha^2 \right)}{det} \\ & - \left[\tau - \beta_r \dot{\theta} - \left(\frac{1}{2} m_p L_p^2 \sin \alpha \cos \alpha \right) \dot{\alpha} \dot{\theta} - \left(\frac{1}{2} m_p L_r \sin \alpha \right) \dot{\alpha}^2 \right] \frac{\left(-\frac{1}{2} m_p L_r L_p \cos \alpha \right)}{det} \end{aligned} \quad (1.23)$$

Le modèle dynamique du système est résulté en équations (1.14), (1.15) et (1.16). Le couple appliqué sur le bras rotatif est généré par un servomoteur, alors l'entrée est la tension délivrée au moteur .

1.7.2 Représentation d'état du PIR

La représentation d'état en automatique fait référence à la manière de décrire le comportement d'un système en utilisant une description formelle de ses différents états. Cela permet d'obtenir une image complète de la dynamique du système, y compris comment il change en fonction du temps. En effet c'est un outil essentiel pour la modélisation, l'analyse, la conception et la mise en œuvre de systèmes. Elle peut aider à améliorer la stabilité, la performance et la fiabilité des systèmes.

Dnas notre cas, le PIR est un système non linéaire, sa representation d'état s'écrit comme suite :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_3 \\ \dot{x}_2 = x_4 \\ \dot{x}_3 = f_1(x) + g_1(x)u \\ \dot{x}_4 = f_2(x) + g_2(x)u \end{cases} \quad (1.24)$$

Avec le vecteur d'état est donné comme suite :

$$x = (x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4)^T = (\theta \ \alpha \ \dot{\theta} \ \dot{\alpha})^T$$

Et les fonctions $f_1(x), f_2(x), g_1(x)$ et de $g_2(x)$ sont données ci-dessous :

$$\begin{aligned} f_1(x) = & \left[-\frac{K_m^2}{R_m} x_3 - B_r x_3 - \left(\frac{1}{2} m_p L_p^2 \sin x_2 \cos x_2 \right) x_4 x_3 - \left(\frac{1}{2} m_p L_r \sin x_2 \right) x_4^2 \right] \frac{\left(J_p + \frac{1}{4} m_p L_p^2 \right)}{det} \\ & - \left[-B_p x_4 + \left(\frac{1}{4} m_p L_p^2 \sin x_2 \cos x_2 \right) x_3^2 + \frac{1}{2} m_p g L_p \sin x_2 \right] \frac{\left(-\frac{1}{2} m_p L_r L_p \cos x_2 \right)}{det} \end{aligned} \quad (1.25)$$

$$g_1(x) = \frac{J_p + \frac{1}{4}m_p L_p^2}{det} \quad (1.26)$$

$$f_2(x) = \left[-B_p x_4 + \left(\frac{1}{4}m_p L_p^2 \sin x_2 \cos x_2 \right) x_3^2 + \frac{1}{2}m_p g L_p \sin x_2 \right] \frac{\left(J_r + m_p L_p^2 + \frac{1}{4}m_p L_p^2 \sin^2 x_2 \right)}{det} \\ - \left[-\frac{K_m^2}{R_m} x_3 - B_r x_3 - \left(\frac{1}{2}m_p L_p^2 \sin x_2 \cos x_2 \right) x_4 x_3 - \left(\frac{1}{2}m_p L_r \sin x_2 \right) x_4^2 \right] \frac{\left(-\frac{1}{2}m_p L_r L_p \cos x_2 \right)}{det} \quad (1.27)$$

$$g_2(x) = \frac{-\frac{1}{2}m_p L_r L_p \cos x_2}{det} \quad (1.28)$$

Avec

$$det = (J_r + m_p L_r^2) \left(J_p + \frac{1}{4}m_p L_p^2 \right) + \frac{1}{4}m_p L_p^2 \sin^2 x_2 \left(J_p + \frac{1}{4}m_p L_p^2 \right) - \frac{1}{4}(m_p L_p L_r \cos x_2)^2 \quad (1.29)$$

1.8 Conclusion

Dans le cadre de ce chapitre, nous avons identifié deux étapes essentielles de notre projet. Tout d'abord, nous avons présenté en détail le pendule inversé rotatif (PIR). Cette étape a permis d'établir une compréhension approfondie du système étudié. Ensuite, nous avons consacré une attention particulière à la modélisation mathématique du PIR. Cette étape revêt une importance cruciale dans la réalisation de notre objectif principal, qui est de concevoir et de mettre en œuvre une commande efficace pour le système.

CHAPITRE 2

COMMANDES LINÉAIRES DU PENDULE INVERSÉ ROTATIF

Sommaire

2.1	Introduction	34
2.2	Cahier des charges	34
2.3	Commandes linéaires	34
2.3.1	Naissance des commandes linéaires	34
2.4	Linéarisation du système	35
2.4.1	Points d'équilibre	35
2.4.2	Linéarisation du système autour d'un point d'équilibre	36
2.4.3	Pôles du système	37
2.5	Commandabilité du PIR	37
2.6	Commande par retour d'état :	38
2.6.1	Placement de pôles (PP)	39
2.6.2	Commande Linear Quadratic Regulator (LQR)	43
2.6.3	La commande proportionnel-dérivé (PD)	48
2.7	Conclusion	53

2.1 Introduction

Dans ce chapitre, Nous nous intéressons à la synthèse des commandes linéaire pour le PIR à savoir la commande par retour d'état (placement de pôles), commande linéaire quadratique (LQR) et la commande par régulateur proportionnel-intégral (PD). Ces types de commandes nécessitent une linéarisation des équations de la dynamique de PIR autour de son point d'équilibre instable comme déjà présenter dans le chapitre précédent où l'objectif est de stabiliser le PIR autour de son point d'équilibre instable.

2.2 Cahier des charges

On doit satisfaire le cahier de charge suivant [3] :

- Voltage maximal du moteur $|Vm| < 24V$
- Déviation maximale du pendule $|\alpha| < 15^\circ$
- Le coefficient d'amortissement : $\xi = 0.7$

2.3 Commandes linéaires

Les commandes linéaires sont un ensemble de techniques utilisées pour réguler et contrôler les systèmes dynamiques. Elles sont largement utilisées dans diverses applications, telles que l'automatisation industrielle, les systèmes de transport et les systèmes électroniques. Les commandes linéaires visent à garantir la stabilité, la performance et la robustesse des systèmes, tout en tenant compte des limitations de performance et des contraintes opérationnelles.

Une commande linéaire est une loi de commande basée sur une relation linéaire entre la sortie d'un système et les signaux de commande. Elle implique généralement l'utilisation d'algorithmes et de modèles linéaires pour représenter le comportement du système et concevoir le régulateur. Les commandes linéaires incluent des techniques telles que les régulateurs à retour d'état, les correcteurs proportionnels-intégraux-dérivés (PID), et les régulateurs à avance de phase ou à retard de phase. Les commandes linéaires sont généralement plus simples à mettre en œuvre et à analyser que les commandes non linéaires, mais elles peuvent ne pas être adaptées pour des systèmes dont le comportement est intrinsèquement non linéaire.

2.3.1 Naissance des commandes linéaires

La naissance des commandes linéaires remonte au début du 20e siècle avec plusieurs développements clés. En 1927, Harold S. Black invente la contre-réaction négative, améliorant la stabilité des amplificateurs électroniques. Dans les années 1930-1940, Harry Nyquist et Hendrik Bode établissent les bases de la théorie moderne du contrôle en développant des critères de stabilité et des diagrammes de Bode. Dans les années 1950, les ingénieurs Ziegler et Nichols introduisent le régulateur PID, qui devient rapidement un standard industriel. Enfin, la théorie de l'espace d'état émerge dans les années 1960, offrant une représentation plus générale des systèmes dynamiques et ouvrant la voie à des régulateurs plus avancés. Ces développements ont marqué la naissance des commandes linéaires et posé les bases pour leur évolution ultérieure[28][43].

2.4 Linéarisation du système

Le modèle du système est non linéaire et sous actionnée : il admet moins d'actionneurs que le degrés de liberté (il possède une seule entrée u dans le but de commander deux sorties, la stabilisation de la tige et du pendule). Alors une linéarisation du système autour de ses points d'équilibre peut être utilisée pour étudier le comportement local du système .

En générale, la representation d'un systeme linéaire s'écrit comme suite :

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases} \quad (2.1)$$

Le schéma fonctionnel associé à ce système est comme suite :

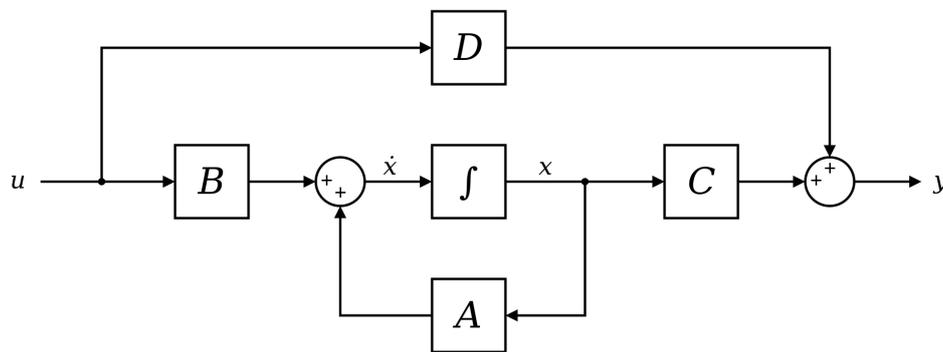


FIGURE 2.1 – Schéma fonctionnel

Avec :

x : Le vecteur d'état.

u : La commande (l'entrée).

y : La sortie du système.

A : La matrice d'état.

B : La matrice de commande.

C : La matrice d'observation.

D : La matrice de couplage (pour la majorité des systèmes $D = 0$).

La linéarisation d'un système non linéaire autour d'un point d'équilibre consiste à approximer le comportement du système proche de ce point en utilisant un modèle linéaire. Cela peut être fait en utilisant la jacobienne du système non linéaire au point d'équilibre, qui donne les taux de changement des variables du système à ce point. Le système linéarisé nous facilite l'analyse des performance telle que la stabilité. Cependant, cette approche ne peut être utilisée que dans un voisinage limité autour du point d'équilibre et ne peut pas fournir une description complète du comportement du système non linéaire.

2.4.1 Points d'équilibre

Les points d'équilibre d'un système sont des configurations ou des états spécifiques pour lesquels les variables d'un système restent constantes dans le temps, même en l'absence

d'entrées externes ou de perturbations. Dans le contexte des systèmes dynamiques et du contrôle, les points d'équilibre sont importants car ils fournissent des informations précieuses sur le comportement à long terme d'un système et sur la manière dont il réagit aux perturbations et aux actions de contrôle.

Un point d'équilibre est déterminé en étudiant les équations qui décrivent le comportement d'un système dynamique. Pour un système linéaire, les points d'équilibre correspondent aux solutions des équations d'état lorsque les dérivées des variables d'état sont égales à zéro.

Les points d'équilibre du PIR sont trouvés à partir de : $\dot{x}_i = 0$ avec $i = [1, 4]$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 0 \\ \dot{x}_2 = 0 \\ \dot{x}_3 = 0 \\ \dot{x}_4 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \\ f_1(x) = 0 \\ f_2(x) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \dot{\theta} = 0 \\ \dot{\alpha} = 0 \\ f_1(x) = 0 \\ f_2(x) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{\theta} = 0 \\ \dot{\alpha} = 0 \\ \frac{1}{2}m_g L_p \sin \alpha \left(\frac{1}{2}m_p L_r L_p^2 \cos \alpha \right) = 0 \\ \sin \alpha (J_r + m_p L_p^2 \sin^2 \alpha) = 0 \end{cases} \quad (2.2)$$

La résolution du système donne la solution suivante :

$$\begin{cases} \alpha = k\pi \text{ avec } k \in \mathbb{Z} \\ \theta \in \mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \text{ et } \alpha = \pi \text{ (physiquement il n'existe que ce deux cas)} \\ \theta \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Donc l'ensemble des points d'équilibre de ce système est donné par :

$$\tilde{X} = \{\tilde{x}_1 = (0, \pi, 0, 0), \tilde{x}_2 = (0, 0, 0, 0)\}$$

Le premier point d'équilibre \tilde{x}_1 est instable (représente la position verticale haute), le second \tilde{x}_2 est stable (représente la position verticale basse).

2.4.2 Linéarisation du système autour d'un point d'équilibre

La forme du modèle linéarisé est donnée comme suite :

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \left. \frac{\partial F}{\partial x} \right|_{x=\tilde{x}} \\ B = \left. \frac{\partial G}{\partial u} \right|_{x=\tilde{x}, u=0} \end{cases} \quad (2.3)$$

$$\text{Avec : } F = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \\ f_1(x) \\ f_2(x) \end{pmatrix} \quad G = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ g_1(x) \\ g_2(x) \end{pmatrix}$$

Après calcul, nous trouvons les résultats suivants :

$$A = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_1}{\partial x_3} & \frac{\partial f_1}{\partial x_4} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_3} & \frac{\partial f_2}{\partial x_4} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{\frac{1}{4}m_p^2 g L_p^2 L_r}{d} & \frac{(-B_r - K_m Z)(J_p + \frac{1}{4}m_p L_p^2)}{d} & \frac{-B_p(\frac{1}{2}m_p L_p L_r)}{d} \\ 0 & \frac{(\frac{1}{2}m_p g L_p)(J_r + m_p L_p^2)}{d} & \frac{(-B_r - K_m Z)(-\frac{1}{2}m_p L_r L_p)}{d} & \frac{-B_p(J_r + m_p L_p^2)}{d} \end{vmatrix}$$

$$B = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\partial g_1}{\partial u} \\ \frac{\partial g_2}{\partial u} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{Z(J_p + \frac{1}{4}m_p L_p^2)}{d} \\ \frac{(\frac{1}{2}m_p L_r L_p)Z}{d} \end{vmatrix}$$

$$\text{Avec : } \quad d = J_p J_r + J_p m_p L_r^2 + \frac{1}{4} J_r m_p L_p^2 \quad , \quad Z = \frac{K_m}{R_m}$$

On prend les positions (θ, α) comme sorties, après le remplacement du valeurs des paramètres, le système s'écrit :

$$A = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 149.2751 & -0.0104 & 0 \\ 0 & 261.6091 & -0.0103 & 0 \end{vmatrix} \quad B = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 49.7275 \\ 49.1493 \end{vmatrix} \quad C = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad D = 0$$

2.4.3 Pôles du système

La stabilité d'un système représenté par sa représentation d'état peut être analysée en étudiant les valeurs propres de la matrice d'état A. Plus précisément, un système est stable si et seulement si toutes les valeurs propres de A ont une partie réelle strictement négative.

On calcule les valeur propre de la matrice d'état par la formule $\det(\lambda I - A)$. Pour ce système on a quatre poles $p_1 = 0$, $p_2 = -16.1773$, $p_3 = 16.1714$, $p_4 = -0.0045$. Comme prévu, le système est instable autour de point d'équilibre $(\theta, 0, 0, 0)$ car un de ses pôles est positive (p_3). Pour cela, afin de stabiliser notre système, on doit rendre tous les pôles négatifs.

2.5 Commandabilité du PIR

La commandabilité d'un système linéaire est une propriété fondamentale qui évalue la capacité de contrôle du système à partir d'une condition initiale donnée. Plus précisément, elle permet de déterminer si le système peut être conduit d'un état initial donné à un état final désiré, en un temps fini, en utilisant une entrée adéquate.

La notion de matrice de commandabilité est souvent utilisée pour évaluer la commandabilité d'un système linéaire. C'est une matrice carrée de dimensions égales au nombre

d'états du système. Si la matrice de commandabilité est de rang maximal, cela signifie que le système est complètement commandable.

La matrice de commandabilité peut être calculée à partir de la matrice d'état A et du vecteur d'entrée B du système. Elle est définie comme suit :

$$C = [B, AB, A^2B, \dots, A^{n-1}B]$$

Pour notre système

$$C = [B, AB, A^2B, A^3B] = \begin{vmatrix} 0 & 50 & -1 & 7337 \\ 0 & 49 & -1 & 12858 \\ 50 & -1 & 7337 & -153 \\ 49 & -1 & 12858 & -210 \end{vmatrix}$$

La matrice de commandabilité C est de rang complet (le rang égale au nombre des états du système '4') \Rightarrow **système commandable**.

2.6 Commande par retour d'état :

La commande par retour d'état est une technique de contrôle avancée pour les systèmes dynamiques. Elle consiste à mesurer l'ensemble des variables d'état d'un système et à utiliser ces mesures pour générer un signal de commande qui permettra d'atteindre les performances et les objectifs de stabilité souhaités. Cette approche est particulièrement adaptée aux systèmes linéaires et aux systèmes non linéaires linéarisés, et elle est utilisée dans diverses applications, telles que l'aéronautique, la robotique et l'automatisation industrielle.

La commande par retour d'état se base sur la représentation d'un système dynamique dans l'espace d'état, qui décrit l'évolution des variables d'état du système en fonction du temps, des entrées et des paramètres du système. Contrairement à d'autres méthodes de contrôle, comme la commande PID, qui se basent sur l'erreur entre la sortie désirée et la sortie réelle, la commande par retour d'état prend en compte l'ensemble des variables d'état pour générer le signal de commande.

La forme générale d'un système linéaire est exprimée comme suit, tel que précédemment mentionné (3.28) :

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}$$

La loi de commande par retour d'état est écrit selon l'équation suivante :

$$u(t) = -Kx(t)$$

où $u(t)$ et $x(t)$ sont respectivement le vecteur d'entrée et d'état introduit dans (3.28) et $K \in R^{1 \times n}$ est appelé gain de retour d'état (figure 2.2). La loi de commande suppose que le vecteur d'état complet est connu sans aucune erreur. S'il y a des états inconnus, il est obligatoire d'utiliser un estimateur d'état pour calculer les valeurs manquantes. Si certaines données manquent pour mesurer les changements de variables d'état, il est possible d'utiliser des filtres passe-haut pour estimer ces données manquantes de sorte que la commande par retour d'état puisse être appliquée, le filtre passe-haut est exprimé sous la forme :

$$\frac{\omega s}{s + \omega} \tag{2.4}$$

où ω représente la fréquence de coupure du filtre (dans notre cas $\omega = 50 \text{ rad/s}$) et s est la variable de Laplace. Lorsqu'il est utilisé avec un signal d'entrée, ce filtre (2.4) est capable de produire une estimation du taux de variation de ce signal.

Dans ce chapitre nous allons utiliser deux types de commande par retour d'état : commande par placement de pôle et la commande LQR.

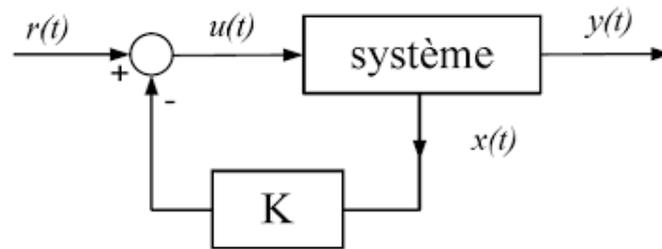


FIGURE 2.2 – Schéma fonctionnel du commande par retour d'état.

$u(t)$: c'est la commande par retour d'état (loi de commande).

$r(t)$: c'est la consigne (sortie désirée).

$x(t)$: vecteur d'état.

$K = [k_1, k_2, \dots, k_n]$: est un vecteur ligne de n composantes appelé vecteur des gains du retour d'état.

$y(t)$: est la sortie du système.

2.6.1 Placement de pôles (PP)

La commande par placement de pôles est une technique de commande qui permet de concevoir un contrôleur pour un système dynamique en spécifiant la position des pôles de la fonction de transfert du système en boucle fermée. La position des pôles a une influence sur les caractéristiques de réponse du système, telles que la stabilité, la rapidité de réponse et l'amortissement. Les avantages de la commande par placement de pôles sont qu'elle permet une conception de contrôleurs précise et efficace en fonction des spécifications de conception souhaitées, et qu'elle permet de prendre en compte le cahier de charge du système.

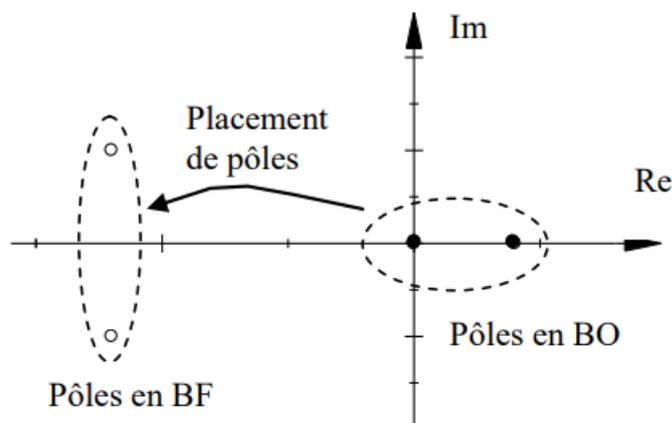


FIGURE 2.3 – Principe du placement de pôles [15]

Principe de la commande :

Dans la commande par placement de pôles, les pôles de la fonction de transfert en boucle fermée sont choisis en fonction des spécifications de conception souhaitées, telles que le temps de réponse, le dépassement et l'amortissement. Ces pôles sont utilisés pour déterminer les gains du contrôleur nécessaires afin d'atteindre les positions des pôles souhaitées [7], la loi de commande est donnée par :

$$u = -Kx$$

Pour que la commande soit physiquement réalisable, les valeurs propres choisies doivent être réelles ou complexes conjuguées deux à deux (ce qui garantit une fonction de transfert à coefficients réels) et aussi doivent être à partie réelle strictement négative (pour garantir la stabilité). Le PIR a 4 pôles, on va choisir deux poles p_1 et p_2 comme des pôles complexes conjugué

$$p_{1,2} = -\sigma \pm j\omega_d$$

avec $\sigma = \xi\omega_n$ et $\omega_d = \omega_n\sqrt{1 - \xi^2}$ ou ω_n est la pseudo pulsation et ξ est le coefficient d'amortissement, et les deux autre pôles, on va les mettre comme des pôles non dominant : $p_3 = -30$ $p_4 = -40$ d'après le cahier de charge on a :

$$\sigma = \xi\omega_n = 2.80$$

$$\omega_d = \omega_n\sqrt{1 - \xi^2} = 2.86$$

donc les pôles du système en boucle fermés $P = [-2.8 + 2.86j, -2.8 - 2.86j, -30, -40]$ ensuite on trouve le gain K en utilisant la commande du MATLAB :

$$K = \text{place}(A, B, P)$$

On aura :

$$K = [-3.3890 \quad 41.4687 \quad -1.3826 \quad 2.9368]$$

Après la synthèse du commande, l'équation de système en boucle fermée devient :

$$\dot{x} = Ax + B(-Kx) = (A - BK)x$$

Résultats de simulation :

Le modèle de simulation du PIR est basé sur la représentation d'état linéarisée du système. Les sorties de cette représentation sont utilisées comme retour d'état et soustraites de la référence pour obtenir un signal d'erreur, qui est ensuite entrant dans le bloc de gain K de placement de pôle. Le gain K est utilisé pour réguler le signal d'erreur et produire une commande de contrôle pour le système.

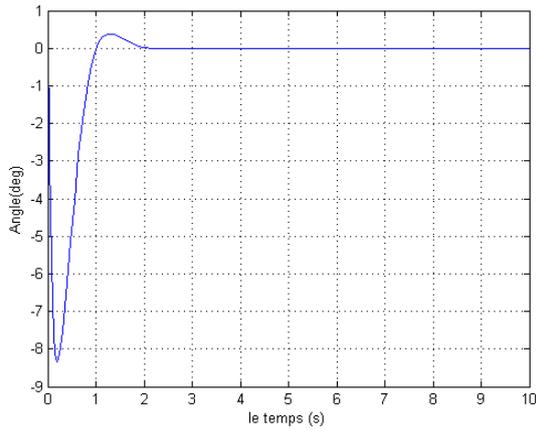


FIGURE 2.4 – L'évolution de l'angle du bras.

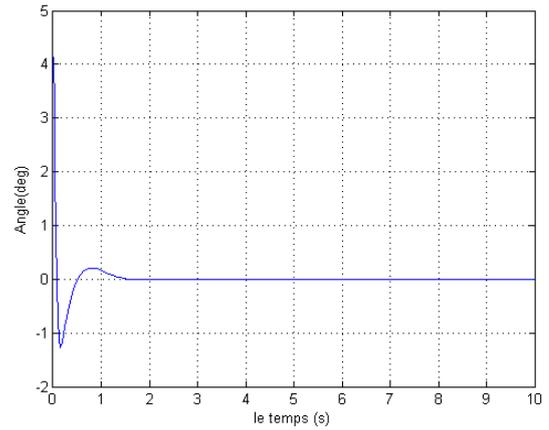


FIGURE 2.5 – L'évolution de l'angle du pendule.

Les représentations graphiques (2.4) et (2.5) illustrent comment les angles du bras θ et du pendule α évoluent au fil du temps. On constate que l'un ou l'autre des deux éléments présente un délai de réponse d'une à deux secondes, mais que le système finit par se stabiliser autour de sa position d'équilibre.

Résultats expérimentaux :

Le contrôleur conçu est évalué expérimentalement sur une plate-forme "QUBE Servo" à l'aide du logiciel de contrôle en temps réel "QUARC". Aux fins de l'implémentation, il est supposé que l'état complet est disponible pour le retour d'état. Cependant, seul l'angle du bras rotatif et l'angle du pendule peuvent être mesurés à l'aide des codeurs intégrés sur le module. Au lieu d'utiliser un observateur pour estimer le reste des états, un filtre passe-haut est utilisé.

Le pendule doit être manuellement placé autour de sa position d'équilibre instable (zone de linéarité).

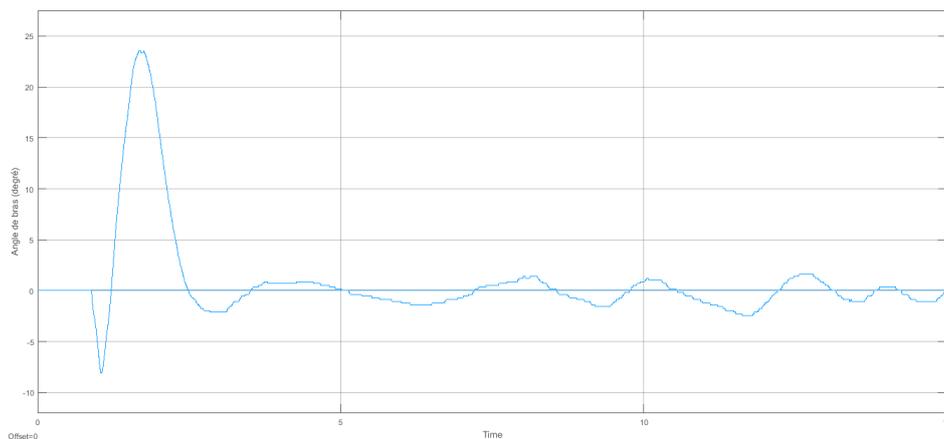


FIGURE 2.6 – L'évolution de l'angle du bras

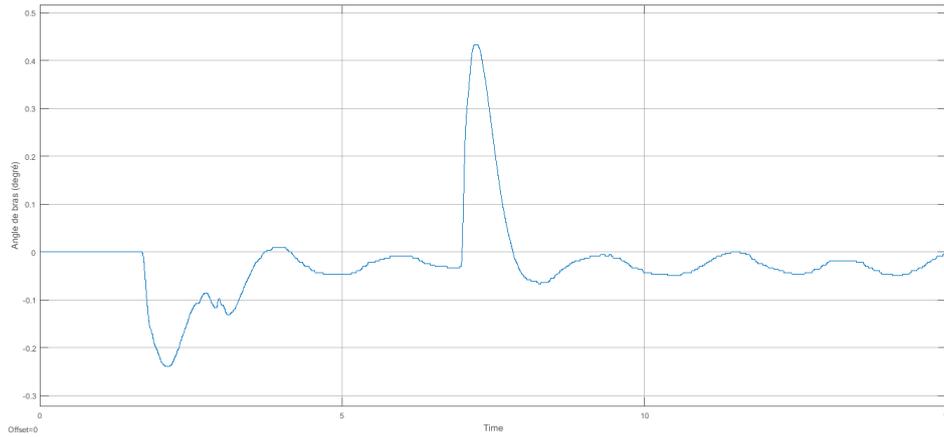


FIGURE 2.7 – L'évolution de l'angle du bras en appliquons un test de robustesse

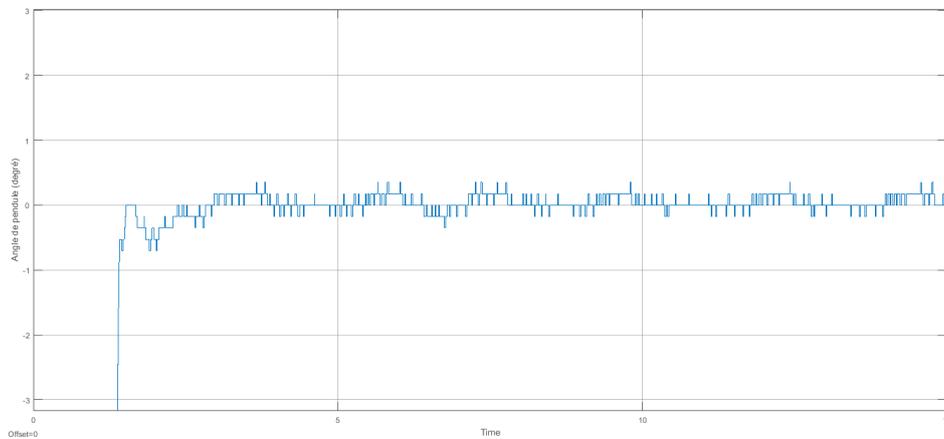


FIGURE 2.8 – L'évolution de l'angle du pendule

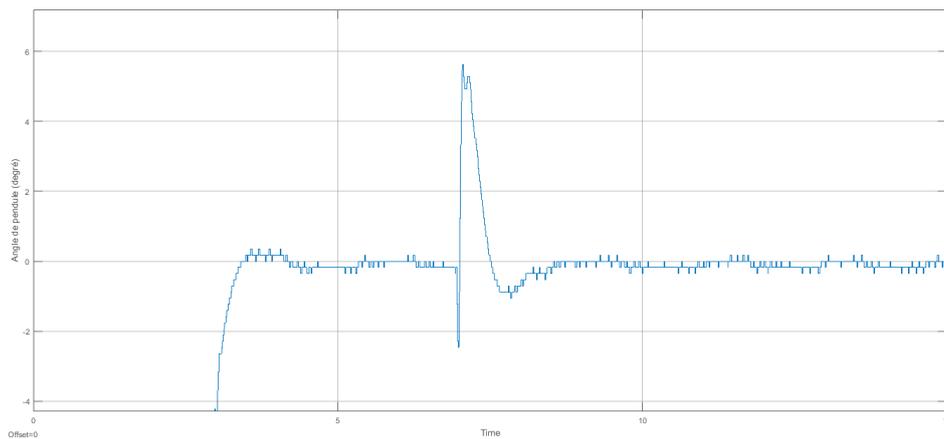


FIGURE 2.9 – L'évolution de l'angle du pendule en appliquons un test de robustesse

La performance du système lors des expérimentations est similaire à celle obtenue lors des simulations. L'évolution de l'angle du bras θ est régie par le signal de référence (figure 2.6), avec une légère perturbation presque insignifiante due aux influences extérieures. Quant au pendule, il reste stable autour de son point d'équilibre instable (figure 2.8).

Ces deux éléments présentent une stabilité remarquable, ils parviennent à revenir à leur état d'équilibre lorsque des tests de robustesse sont effectués en frappant le pendule avec le doigt comme indiqué dans les figures (2.7) et (2.9).

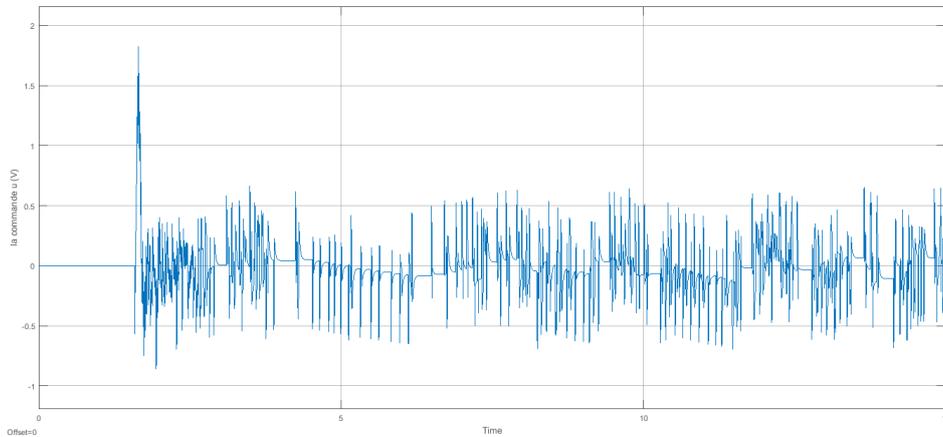


FIGURE 2.10 – La commande PP

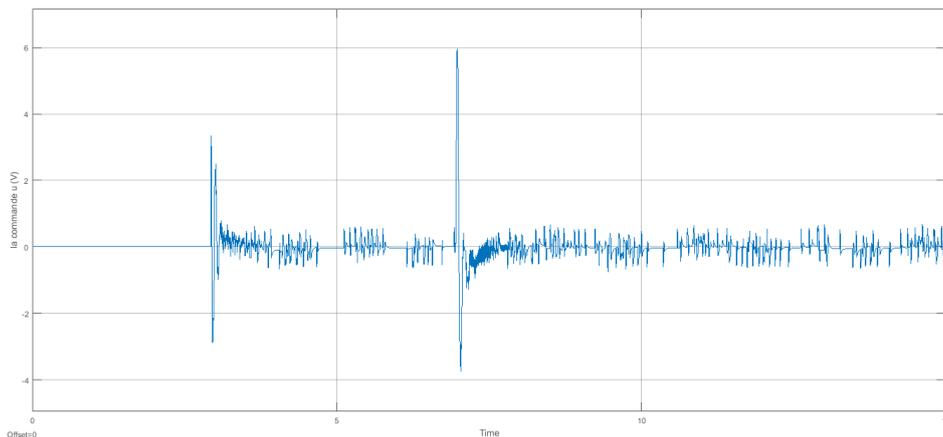


FIGURE 2.11 – La commande PP en appliquons un test de robustesse

Les figures (2.10) et (2.11) présentent l'évolution de la commande par placement de pôles en présence et en absence de l'application du test de robustesse, respectivement. Il a été observé que, même en appliquant ses test, la commande est capable de stabiliser le pendule dans la zone de linéarité en un laps de temps court, ramenant ainsi le système à sa position désirée.

2.6.2 Commande Linear Quadratic Regulator (LQR)

La commande LQR est une méthode de contrôle optimal pour les systèmes dynamiques continus linéaires invariants dans le temps. Cette méthode vise à trouver une commande en boucle fermée linéaire en retour d'état qui minimise un coût quadratique pondéré de l'état et de l'entrée du système.

La théorie du contrôle optimal a été développée dans les années 1950 par des mathématiciens tels que Richard Bellman et Lev Pontryagin. Cette théorie a été appliquée pour la première fois au contrôle des systèmes dynamiques linéaires par Rudolf

Kalman en 1960.

En 1961, le mathématicien japonais Yutaka Yamamoto a publié un article sur la commande optimale pour les systèmes linéaires, qui a inspiré les travaux de Peter Falb et Michael Athans, deux ingénieurs de l'Université de Californie à Berkeley. Ils ont développé la méthode LQR dans les années 1960, en utilisant des techniques d'optimisation numérique pour résoudre l'équation d'état de Riccati.

Principe de la commande :

Le principe de la commande LQR est de minimiser une fonction coût qui est une somme pondérée des écarts de l'état et de l'entrée du système par rapport à des valeurs de référence souhaitées. La pondération est effectuée à l'aide de deux matrices : une matrice de pondération d'état et une matrice de pondération d'entrée[7].

La fonction coût est définie comme suit :

$$\int_0^{\infty} (x^T Q x + u^T R u) dx$$

Où x est le vecteur d'état du système, u est le vecteur de commande, Q est la matrice de poids d'état, et R est la matrice de poids de commande. Cette fonction coût mesure la performance du système et prend en compte les coûts associés à la fois aux états et aux commandes. Avec :

- Q symétrique semi-définie positive.
- $R(t)$ symétrique définie positive.

LQR vise à minimiser la fonction coût quadratique J en calculant une loi de commande optimale. Cette loi de commande prend généralement la forme d'un gain de retour d'état K . Ce dernier est calculé en résolvant l'équation de Riccati qui est donnée par :

$$A^T P + P A - P B R^{-1} B^T P + Q = 0$$

où A , B , Q et R sont des matrices qui décrivent le système, et P est la matrice de gain de l'équation de Riccati.

La matrice P est déterminée en résolvant l'équation de Riccati à l'aide d'algorithmes de résolution numérique tels que l'algorithme de Lyapunov ou l'algorithme de Schur.

Une fois que la matrice de gain P est déterminée, le gain de retour d'état K est calculé comme suit :

$$K = R^{-1} B^T P$$

afin d'obtenir la commande :

$$u(t) = -Kx(t)$$

La conception concurrente de LQR est obtenue en sélectionnant les matrices de pondération pour la fonction de coût. Les poids choisis pour notre PIR étaient :

$$Q = \begin{vmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad \text{et} \quad R = 1 \quad (2.5)$$

Pour trouver les matrices de pondérations nous avons utilisé une méthode simple de choix libre des pondérations en vue d'aboutir à un correcteur satisfaisant.

Une fois les coefficients de pondération sont déterminés, la fonction 'lqr' de Matlab est

utilisée pour calculer la matrice de gain K qui minimise la fonction quadratique J . On obtient :

$$K = [-2.4495 \quad 38.1924 \quad -1.5479 \quad 3.4305]$$

Les pôles en boucle fermée sont :

$$P = [-72.7332 \quad -8.2251 \pm 3.1465i \quad -2.4633]$$

Résultats de simulation :

Le modèle de simulation utilisant la commande LQR suit un schéma de bloc similaire à celui du placement de pôles. Cependant, au lieu d'utiliser le gain k calculé dans la méthode de placement de pôles, on utilise le gain calculé par la méthode LQR pour ajuster le signal d'erreur et générer une commande de contrôle pour le système.

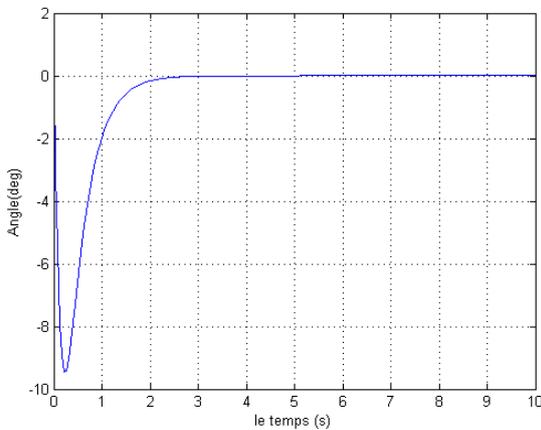


FIGURE 2.12 – L'évolution de l'angle du bras.

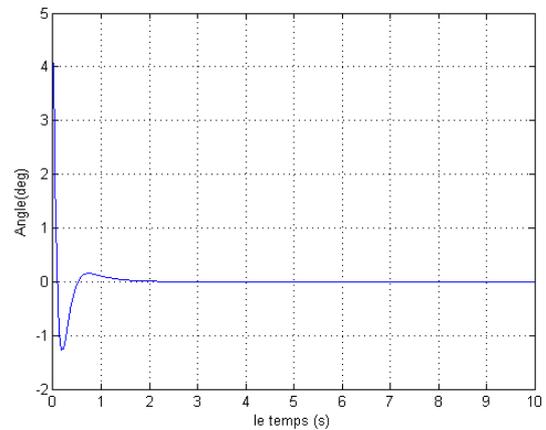


FIGURE 2.13 – L'évolution de l'angle du pendule.

D'après les représentations graphiques (2.12), (2.13) qui montrent l'évolution de l'angle du bras et du pendule, on observe qu'après une seconde ces derniers atteignent une stabilité autour du point d'équilibre du système.

Résultats expérimentaux :

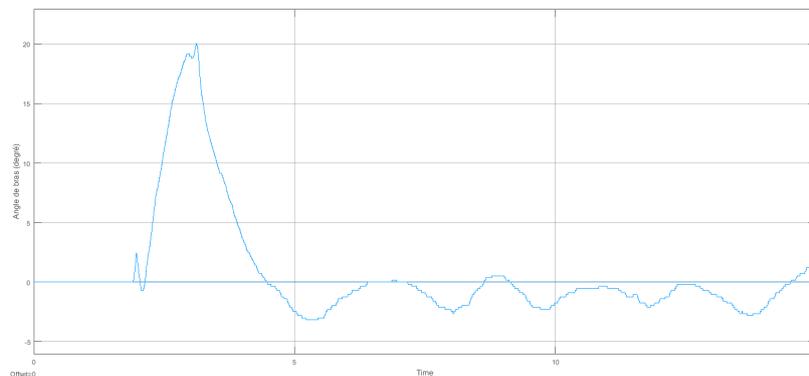


FIGURE 2.14 – L'évolution de l'angle du bras et le signal de la référence

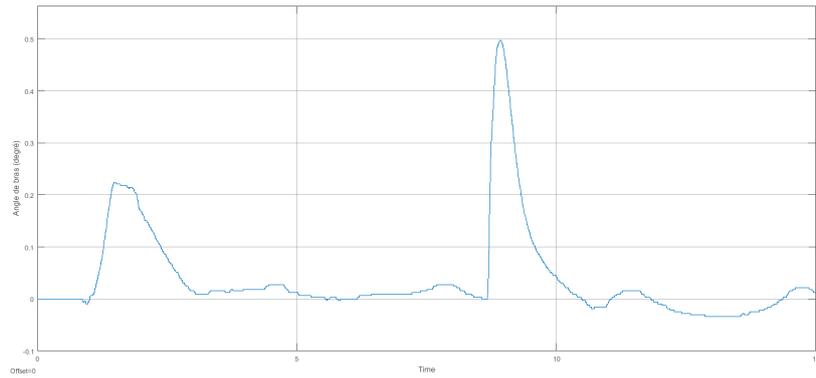


FIGURE 2.15 – L'évolution de l'angle du bras et le signal de la référence en appliquons un test de robustesse

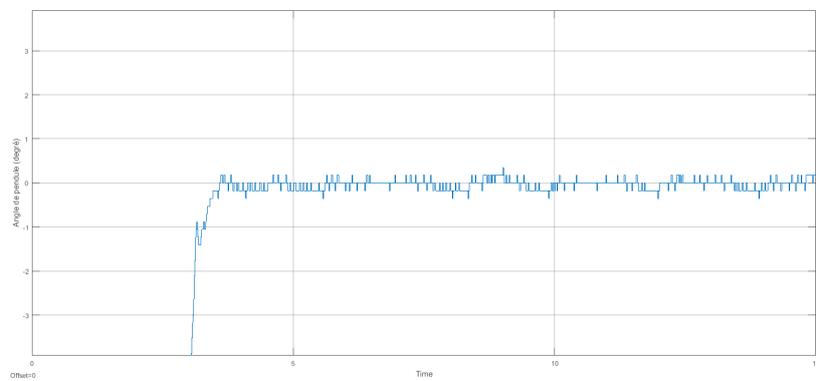


FIGURE 2.16 – L'évolution de l'angle du pendule

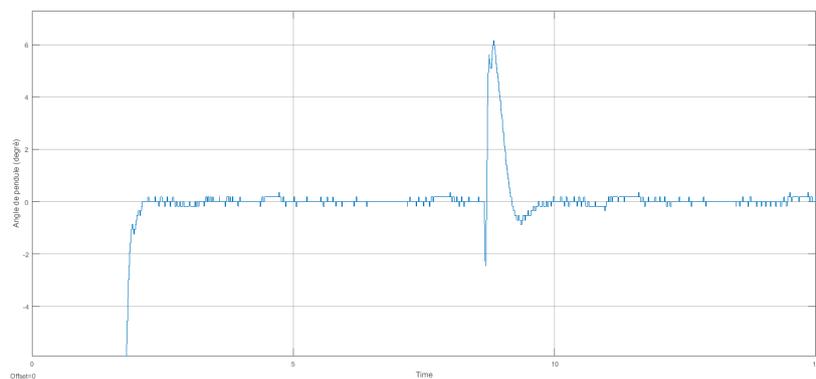


FIGURE 2.17 – L'évolution de l'angle du pendule en appliquons un test de robustesse

- Les résultats de simulation sont en étroite concordance avec les résultats expérimentaux.
- L'évolution de l'angle du bras θ est régie par le signal de référence (figure 2.14), avec une légère perturbation presque insignifiante due aux influences extérieures. En ce qui concerne le pendule, il reste stable autour de son point d'équilibre instable (figure 2.16).
- La légère différence dans les réponses est principalement due aux conditions initiales variables dans l'expérimentation en temps réel, lorsque le pendule est soulevé

manuellement jusqu'à la plage linéaire du point d'équilibre instable, à partir duquel le contrôleur s'active, ainsi qu'à des effets non linéaires non modélisés tels que la friction.

- Le pendule et le bras rotatif présentent une stabilité observable lors de la présence de perturbations (figures 2.15 et 2.17).

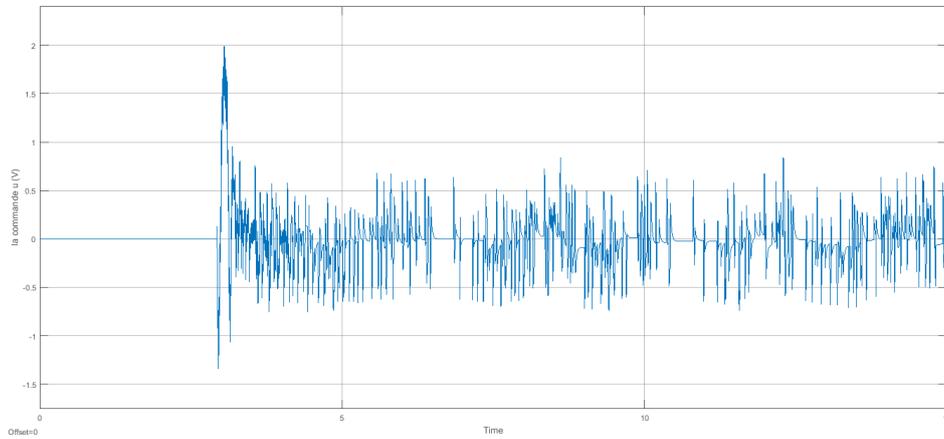


FIGURE 2.18 – L'évolution de l'angle du pendule

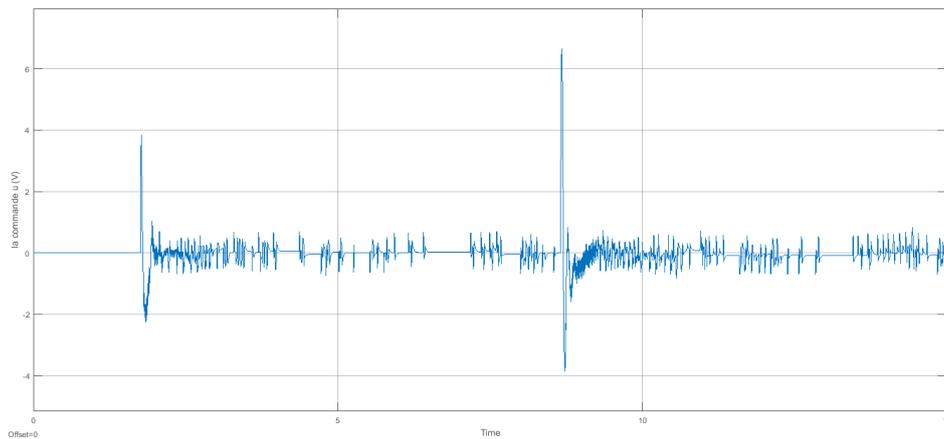


FIGURE 2.19 – L'évolution de l'angle du pendule en appliquons un test de robustesse

Les figures (2.18) et (2.19) exposent respectivement l'évolution de la commande LQR en l'absence et en la présence de perturbations. Il est à noter que l'utilisation d'une faible tension d'entrée pour contrôler le système présente des avantages significatifs, notamment en termes d'économie d'énergie et de réduction des coûts opérationnels. Par conséquent, la commande LQR se réagit rapide dans sa capacité à stabiliser le pendule face aux perturbations.

Comparaison entre PP et LQR :

- Les exigences du cahier des charges sont satisfaites par les deux méthodes de commande, LQR et PP, lorsque la tension des commandes est égale à 1, ce qui est bien inférieur à 24 V. De plus, lorsque le pendule atteint la zone de linéarité de 15 degrés, il se stabilise.
- En observant les figures ci-dessus, on remarque que la commande LQR est plus performante que la méthode de placement de pôles pour ajuster la réponse en un temps moindre. Lorsque des perturbations sont appliquées simultanément à ces deux méthodes, il est observé que le temps nécessaire pour que le contrôleur de placement de pôles compense ces perturbations est plus long que celui requis par le contrôleur LQR. De plus, l'amplitude des oscillations est inférieure avec la méthode LQR par rapport à la méthode de placement de pôles, ce qui témoigne de la rapidité de réponse de la méthode LQR.
- La méthode de placement de pôle est plus simple et plus intuitive à mettre en place, car elle consiste à placer les pôles du système dans des positions souhaitées afin d'obtenir une réponse désirée. En revanche, la méthode LQR nécessite la résolution d'un problème d'optimisation, qui peut être plus complexe, mais qui peut permettre d'obtenir une réponse de commande plus efficace en termes de performances.

2.6.3 La commande proportionnel-dérivé (PD)

Le régulateur PID (proportionnel-intégral-dérivé) est une méthode de commande de rétroaction qui a été développée depuis la fin du XIXe siècle jusqu'à nos jours. Les régulateurs proportionnels ont été utilisés pour le contrôle automatique des processus industriels dans les années 1890, et la notion d'un régulateur à action intégrale a été introduite dans les années 1920 pour améliorer la précision du contrôle des processus. Le régulateur à action dérivée a été développé dans les années 1930 pour aider à stabiliser les systèmes de contrôle, et c'est à cette époque que la notion de régulateur PID a été introduite. Les régulateurs PID ont été utilisés pour le contrôle de divers processus industriels dans les années 1940, et des avancées significatives ont été réalisées dans le développement de régulateurs PID dans les années 1940-1950, notamment dans la théorie de la commande de rétroaction et l'utilisation de l'électronique pour le contrôle automatique. Les ordinateurs sont devenus de plus en plus courants dans l'industrie dans les années 1960-1970, ce qui a permis la mise en œuvre de régulateurs PID plus avancés et plus complexes, ainsi que de nouvelles méthodes de réglage des paramètres PID. Avec l'avènement de l'Internet des objets et des systèmes de contrôle distribués dans les années 2000-2020, les régulateurs PID sont de plus en plus utilisés dans de nombreux domaines, y compris le contrôle de processus industriels, les systèmes mécatroniques, les drones et les robots, les véhicules autonomes, et bien d'autres encore [6].

Principe de la commande :

Le régulateur PID est un dispositif de commande qui utilise une combinaison de trois termes pour ajuster un système de contrôle. Les termes sont proportionnel (P), intégral (I) et dérivé (D), d'où le nom "PID".

Le terme proportionnel P est utilisé pour ajuster la sortie du système en fonction de l'erreur actuelle. Plus l'erreur est grande, plus la correction est grande. Cependant, l'utilisation du terme P seul peut entraîner un dépassement (overshoot) et une oscillation

(oscillation) du système.

Le terme intégral I est utilisé pour corriger l'erreur cumulée au fil du temps. Cela permet de réduire le dépassement et de stabiliser le système.

Le terme dérivé D est utilisé pour anticiper l'évolution future de l'erreur. Il est utilisé pour réduire la réponse transitoire (transient response) et améliorer la stabilité.

En combinant les trois termes, le régulateur PID peut ajuster le système de contrôle pour atteindre un état stable avec une réponse rapide et précise aux changements dans les conditions de fonctionnement. La forme général de l'expression d'un régulateur PID est la suivante :

$$u(t) = K_p e(t) + K_i \int e(t) dt + K_d \frac{de(t)}{dt}$$

ou :

$u(t)$ est la sortie du régulateur PID (ou la commande envoyée au système).

$e(t)$ est l'erreur de contrôle (c'est à dire la différence entre la valeur désirée et la valeur actuelle de la variable de contrôle).

K_p est le gain proportionnel, qui contrôle l'amplitude de la sortie en fonction de l'erreur actuelle.

K_i est le gain intégral, qui contrôle l'amplitude de la sortie en fonction de l'erreur accumulée au fil du temps.

K_d est le gain dérivé, qui contrôle l'amplitude de la sortie en fonction du taux de variation de l'erreur.

Dans les systèmes sous-actionnés, le terme intégral I du régulateur PID peut conduire à des oscillations et à une instabilité du système de contrôle en raison du temps de réponse lent et de la présence de délais dans la réponse du système. Pour cette raison, les régulateurs PD (proportionnel-dérivé) sont souvent utilisés à la place du régulateur PID dans les systèmes sous-actionnés.

Le régulateur PD utilise uniquement les termes proportionnel et dérivé pour ajuster le système de contrôle. Le terme proportionnel P ajuste la sortie en fonction de l'erreur actuelle, tandis que le terme dérivé D est utilisé pour prédire l'évolution future de l'erreur et ajuster la commande en conséquence.

Pour notre système Deux boucles de retour d'état distinctes sont utilisées pour contrôler l'angle de bras et de pendule. Cette stratégie de contrôle permet de maintenir le pendule en position verticale tout en maintenant l'angle souhaité du bras rotatif [3], comme montre la figure (2.20).

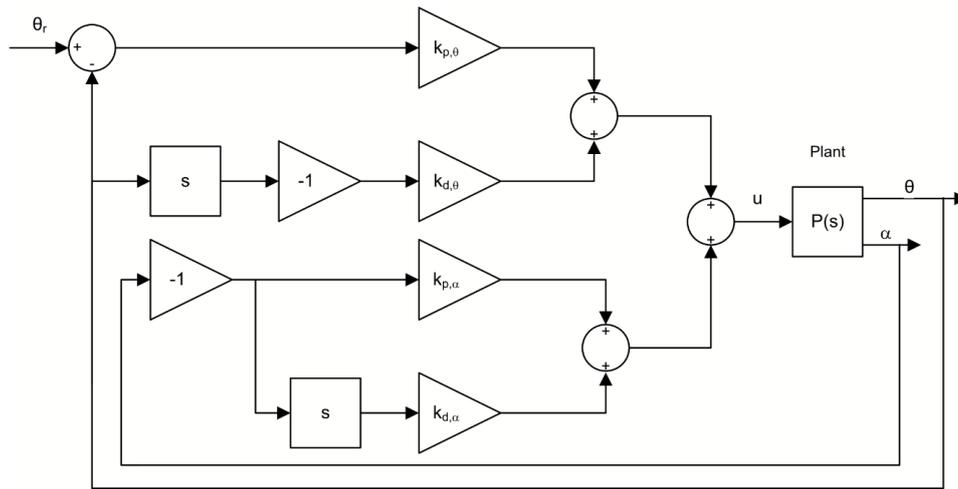


FIGURE 2.20 – Schéma bloc d'un régulateur PD

On a choisit les paramètre suivant : $k_{p,\theta} = 2$, $k_{d,\theta} = 1$, $k_{p,\alpha} = 30$, $k_{d,\alpha} = 2.5$,

Résultat de simulations :

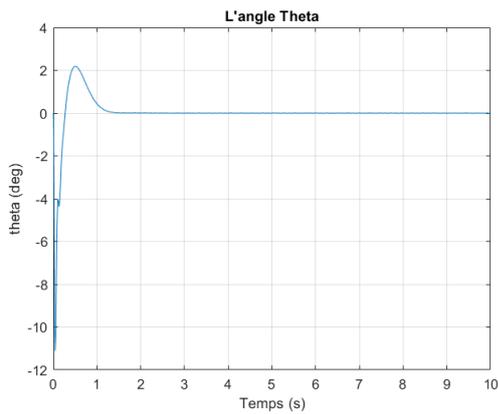


FIGURE 2.21 – L'évolution de l'angle de bras

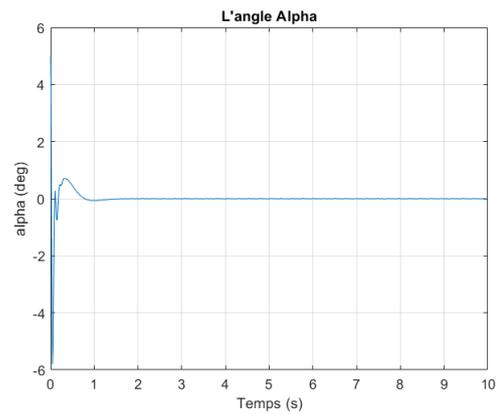


FIGURE 2.22 – L'évolution de l'angle du pendule.

La resultat de simulation en utilisant le regulateur PD est representé par les figure (2.22) et (2.21) qui décrivent respectivement l'évolution de l'angle de pendule et de bras. On remarque qu'après une seconde le système atteint la position d'équilibre et se stabiliser sans erreur

Résultat expérimentaux :

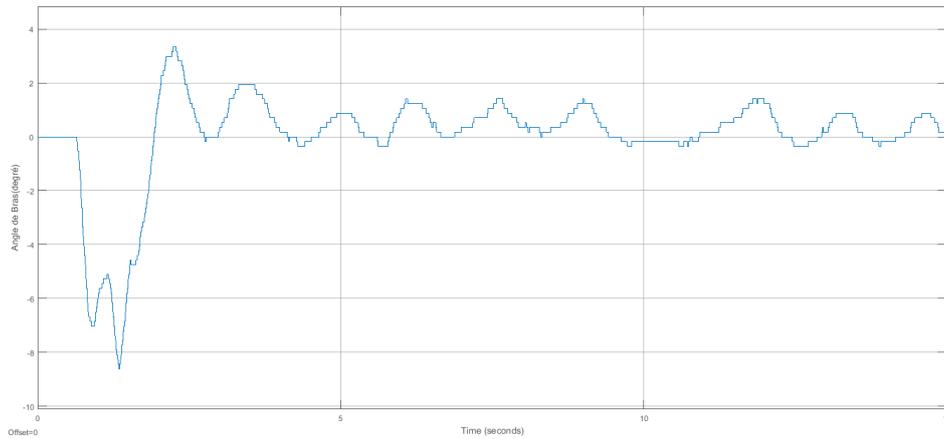


FIGURE 2.23 – L'évolution de l'angle du bras

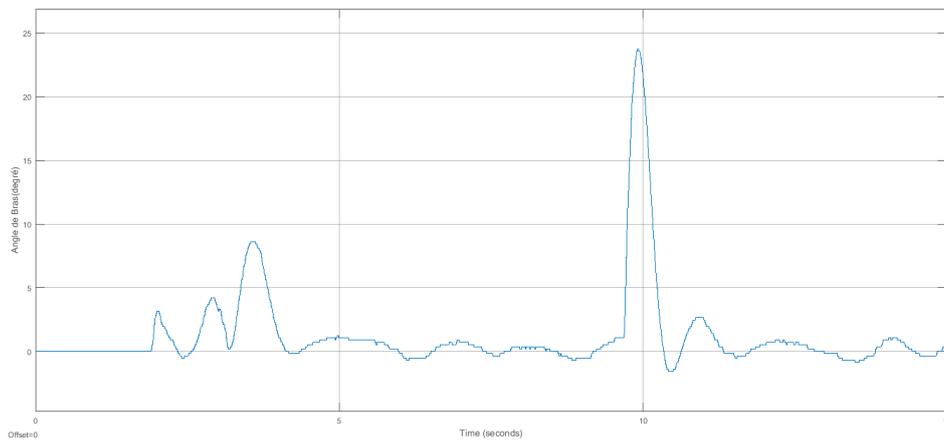


FIGURE 2.24 – L'évolution de l'angle du bras en appliquons un test de robustesse

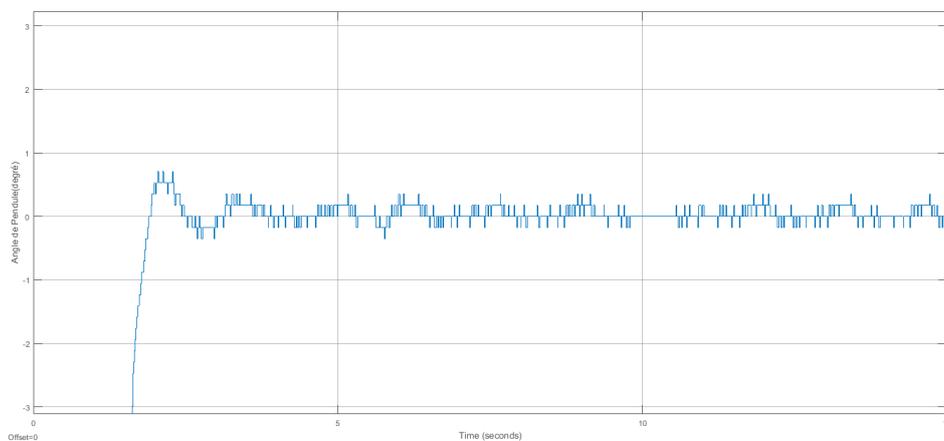


FIGURE 2.25 – L'évolution de l'angle du pendule

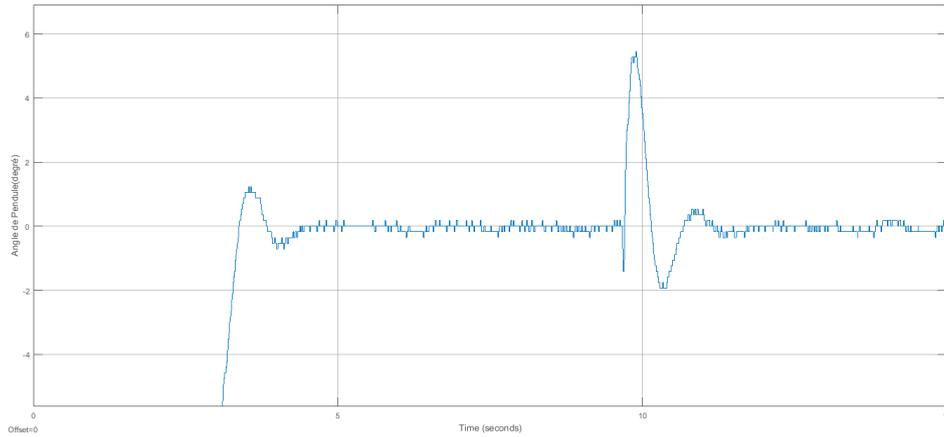


FIGURE 2.26 – L'évolution de l'angle du pendule en appliquons un test de robustesse

Les figures (2.25) (2.23) (2.26) (2.24) représentent respectivement l'évolution de l'angle du pendule et du bras en l'absence et en la présence de perturbations. Il est remarquable que, que ce soit pour le bras ou le pendule, tous deux atteignent la position d'équilibre souhaitée. Toutefois, le bras oscille autour de ce point d'équilibre tandis que le pendule présente un léger phénomène de chattering.

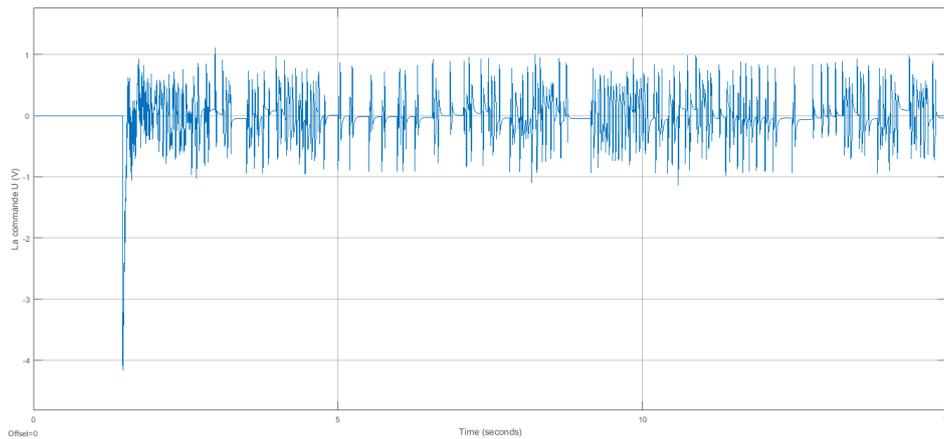


FIGURE 2.27 – L'évolution de l'angle de la commande PD

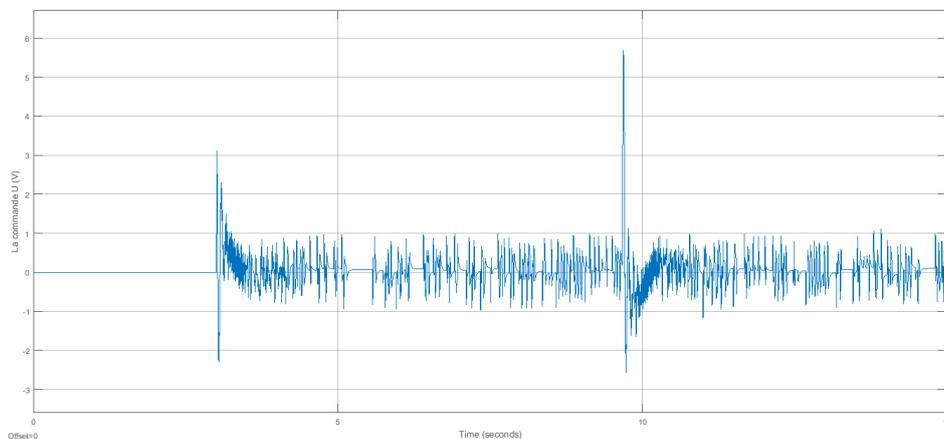


FIGURE 2.28 – L'évolution de la commande PD en appliquons un test de robustesse

En ce qui concerne les figures (2.27) et (2.28), elles illustrent l'évolution de la commande PD en présence et en l'absence de perturbations. On observe que la commande PD réagit aux perturbations en tentant de ramener rapidement le pendule à sa position d'équilibre. Cependant, le chattering persiste malgré ces efforts.

Comparaison entre la commande PP, LQR et PD :

- Les trois techniques de commande (PD, PP et LQR) se sont avérées efficaces pour stabiliser le pendule inversé à la position souhaitée. De plus, elles satisfont aux conditions du cahier des charges, puisque la tension de commande pour PD est de 2V, tandis que pour PP et LQR elle est de 1V. Ces deux tensions sont inférieures à la valeur spécifiée dans le cahier des charges, qui est de 24V. Les résultats obtenus indiquent que les méthodes de placement de pôles et LQR sont capables de maintenir l'équilibre du pendule inversé dans le cas où on exige des perturbations. Par conséquent, ces deux méthodes de commande présentent une robustesse supérieure à celle de la méthode PD.
- Le régulateur PD est un algorithme de contrôle simple et facile à mettre en œuvre, mais il ne prend pas en compte la dynamique complète du système. Le régulateur LQR, quant à lui, est un algorithme de contrôle optimal qui prend en compte la dynamique complète du système, mais qui est plus complexe à mettre en œuvre et nécessite plus de calcul.

2.7 Conclusion

Il existe de nombreuses façons de manipuler le comportement d'un système dynamique, et ces approches de contrôle peuvent être trouvées dans la littérature scientifique. Les contrôleurs que nous allons utiliser dans ce chapitre sont le PP, le LQR et le PD, nous avons donné une brève explication sur chaque contrôleur et la façon de l'utiliser. Nous avons appliqué ces commandes en temps réel au PIR, en particulier dans leur zone de linéarité. Cependant, dans le chapitre suivant, nous allons examiner une commande adaptée au système non linéaire complet.

CHAPITRE 3

THÉORIES DES COMMANDES NON LINÉAIRES

Sommaire

3.1	Introduction	55
3.2	Commandes non linéaires	55
3.2.1	Commande par logique floue	56
3.2.2	Commande par réseau de neurones	57
3.3	Notion du commandes robustes	58
3.4	Commande par mode glissant (SMC)	58
3.5	Commande Super-twisting	62
3.5.1	Supertwisting modifiée	62
3.6	Commande hybride : Swing Up - Synergétique	63
3.6.1	La commande Swing-Up :	63
3.6.2	Commande synergétique (SC) :	65
3.7	Conclusion :	67

3.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous nous intéressons à examiner la synthèse de commandes non linéaires pour le PIR, notamment la commande par mode glissant (SMC), la commande de super-twisting modifiée (MSTW) et la commande synergétique (SC). Pour mettre en œuvre ces types de commandes, il est nécessaire d'avoir le modèle mathématique non linéaire du PIR. Le but ultime de ce travail est de stabiliser le système autour de son point d'équilibre instable, en évitant toute intervention manuelle.

3.2 Commandes non linéaires

Les commandes non linéaires sont une branche importante de la théorie du contrôle qui étudie les systèmes de commande utilisant des fonctions non linéaires pour contrôler des processus dynamiques. Contrairement aux commandes linéaires, les commandes non linéaires peuvent être plus complexes et difficiles à synthétiser, mais elles peuvent offrir une meilleure précision et une meilleure stabilité dans certaines situations.

Les commandes non linéaires sont largement utilisées dans de nombreuses applications industrielles et technologiques, telles que la robotique, l'automatisation industrielle, la commande de moteurs et la navigation aérienne et spatiale. La maîtrise de ces techniques de commande peut permettre d'améliorer la performance et la fiabilité des systèmes de contrôle, ainsi que de développer de nouvelles applications innovantes.

La commande par retour d'état non linéaire est une méthode de commande couramment utilisée en commande non linéaire. Elle est basée sur la conception d'une fonction de Lyapunov qui est utilisée pour garantir la stabilité du système. Cette fonction est utilisée pour concevoir une loi de commande qui entraîne une décroissance de la fonction de Lyapunov le long des trajectoires du système, ce qui garantit que le système converge vers un état d'équilibre stable.

Fonction de Lyapunov

La fonction de Lyapunov est un outil mathématique utilisé pour analyser la stabilité des systèmes dynamiques. Elle permet de déterminer si un système est stable, instable ou présente une stabilité marginale. Elle est nommée en l'honneur du mathématicien russe Aleksandr Lyapunov, qui a introduit cette fonction en 1892.

Une fonction de Lyapunov est une fonction scalaire définie positive, généralement notée $V(x)$, où x représente l'état du système. La fonction de Lyapunov doit être continue et différentiable par rapport à ses variables. Pour démontrer la stabilité d'un système, on choisit une fonction de Lyapunov candidate. Cette fonction doit être définie positive (c'est-à-dire, $V(x) > 0$ pour tous les états $x \neq 0$ et $V(0) = 0$) et doit être choisie en fonction de la dynamique du système et des objectifs de contrôle. La stabilité du système est déterminée en analysant la dérivée temporelle de la fonction de Lyapunov candidate $\dot{V}(x)$. Les conditions de stabilité sont les suivantes :

- **Stabilité asymptotique** : Si $\dot{V}(x) < 0$ pour tous les états $x \neq 0$, le système est asymptotiquement stable, ce qui signifie que l'erreur d'état converge vers zéro lorsque le temps tend vers l'infini.
- **Stabilité marginale** : Si $\dot{V}(x) \leq 0$ pour tous les états $x \neq 0$, le système est marginalement stable. Dans ce cas, l'erreur d'état peut converger vers zéro ou osciller autour de zéro sans diverger.

- **Instabilité** : Si $\dot{V}(x) > 0$ pour certains états $x \neq 0$, le système est instable, ce qui signifie que l'erreur d'état diverge lorsque le temps tend vers l'infini.

3.2.1 Commande par logique floue

La commande par logique floue est une approche de contrôle basée sur la logique floue, une extension de la logique classique qui permet de représenter et de traiter des informations imprécises ou ambiguës. La logique floue a été introduite par Lotfi A. Zadeh en 1965, dans le but de mieux modéliser la façon dont les humains raisonnent et prennent des décisions en utilisant des termes linguistiques vagues ou flous.

Contrairement aux méthodes de contrôle traditionnelles, qui reposent généralement sur des modèles mathématiques précis des systèmes dynamiques, la commande par logique floue utilise des règles linguistiques floues pour décrire et contrôler le comportement du système. Ces règles linguistiques sont basées sur l'expertise humaine et sont exprimées sous la forme "SI X EST A ALORS Y EST B", où X et Y sont des variables du système, et A et B sont des ensembles flous décrivant des qualificatifs tels que "petit", "moyen" ou "grand" [23].

Bref historique :

L'historique de la commande par logique floue commence avec l'introduction de la logique floue par Lotfi A. Zadeh en 1965. Cette nouvelle approche permet de traiter les informations imprécises ou ambiguës en modélisant les incertitudes à l'aide d'ensembles flous.

Dans les années 1970, Ebrahim Mamdani et Sedrak Assilian ont développé le premier contrôleur flou pour un système de contrôle de processus industriel. Cela a marqué le début de l'application de la logique floue dans la commande des systèmes dynamiques.

Au cours des années 1980 et 1990, la commande par logique floue a gagné en popularité et a été largement appliquée dans divers domaines tels que l'automatisation industrielle, la robotique, les systèmes de communication, les réseaux électriques, l'automobile et l'aérospatial. Des entreprises de renom comme Siemens, Honeywell, Omron et Toshiba ont intégré la commande par logique floue dans leurs produits et systèmes.

Étapes solides de la logique floue :

Un contrôleur par logique floue se compose généralement de trois étapes principales :

1. Fuzzification : Cette étape consiste à convertir les variables d'entrée du système, qui sont généralement des valeurs numériques précises, en degrés d'appartenance aux ensembles flous définis par les règles linguistiques.

2. La base de connaissance : contient les définitions des sous-ensembles flous, leurs fonctions d'appartenance, leurs univers de discours et l'ensemble des règles d'inférence.

3. L'inférence floue : est le processus d'évaluation des règles linguistiques floues en utilisant les degrés d'appartenance des variables d'entrée. L'inférence floue génère un ensemble flou pour chaque règle, qui représente la conclusion de cette règle en fonction des entrées actuelles du système.

4. Défuzzification : La défuzzification consiste à convertir les ensembles flous résultant de l'inférence floue en une valeur numérique précise, qui est utilisée comme commande pour le système. Plusieurs méthodes de défuzzification, telles que le centre de gravité, le

bissecteur de l'aire et la moyenne des maxima, peuvent être utilisées pour réaliser cette conversion.

La structure d'une commande basée sur la logique floue est illustrée sur la figure (3.1).

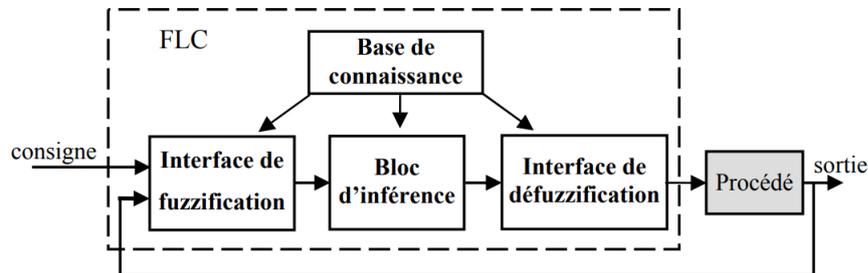


FIGURE 3.1 – Structure de la commande par logique floue [23]

3.2.2 Commande par réseau de neurones

La commande par réseau de neurones est une approche moderne et avancée pour réguler et contrôler les systèmes dynamiques, qui tire parti des capacités de modélisation et d'apprentissage des réseaux de neurones artificiels (RNA). Inspirés par les mécanismes de traitement de l'information dans les cerveaux biologiques, les RNA sont des structures de calcul parallèles composées d'unités de traitement interconnectées, appelées neurones artificiels. Ces neurones travaillent ensemble pour apprendre et représenter des modèles complexes à partir de données d'entrée et générer des réponses adaptées en fonction des situations rencontrées.

La commande par réseau de neurones se base sur la capacité des RNA à modéliser des relations non linéaires, complexes et multidimensionnelles entre les variables d'entrée et de sortie d'un système. Cette approche est particulièrement utile pour les systèmes dont les dynamiques sont difficiles à modéliser mathématiquement ou qui sont sujets à des incertitudes et des perturbations. Les réseaux de neurones peuvent être entraînés à partir de données historiques ou en temps réel pour apprendre le comportement du système et générer des commandes appropriées pour atteindre les objectifs de contrôle souhaités.

Bref historique :

L'histoire de la commande par réseau de neurones a débuté avec l'introduction du premier modèle de neurone artificiel par McCulloch et Pitts en 1943, suivi du perceptron de Rosenblatt en 1958. L'algorithme de rétropropagation, développé dans les années 1980, a stimulé l'intérêt pour les réseaux de neurones multicouches et leurs applications dans le contrôle des systèmes. Depuis les années 1990, les progrès en matière de puissance de calcul et de techniques d'apprentissage ont conduit à l'utilisation de réseaux de neurones plus profonds et complexes dans divers domaines, tels que la robotique, l'automobile et l'aérospatial. Les avancées récentes dans l'apprentissage profond, avec l'émergence des réseaux de neurones convolutifs et récurrents, ont encore élargi les possibilités de la commande par réseau de neurones.

Le principe de la commande par réseau de neurones :

- 1. Collecte des données :** Rassemblez des données d'entrée et de sortie pertinentes pour le système à contrôler, telles que les mesures d'état, les erreurs de suivi et les dérivées d'erreur.
- 2. Conception du réseau de neurones :** Créez un réseau de neurones artificiels adapté au problème de contrôle, comprenant des couches d'entrée, cachées et de sortie, ainsi que des neurones interconnectés.
- 3. Entraînement du réseau de neurones :** Utilisez les données collectées pour entraîner le réseau de neurones en ajustant les poids et les biais des connexions neuronales à l'aide de méthodes d'apprentissage telles que la rétropropagation, l'apprentissage par renforcement ou l'optimisation évolutionnaire.
- 4. Validation du modèle :** Testez et validez le modèle de réseau de neurones sur un ensemble de données distinctes pour vérifier sa précision et sa performance.
- 5. Implémentation du contrôleur :** Intégrez le réseau de neurones entraîné en tant que contrôleur dans le système de contrôle, où il recevra les informations d'état du système en entrée et produira les commandes appropriées en sortie.

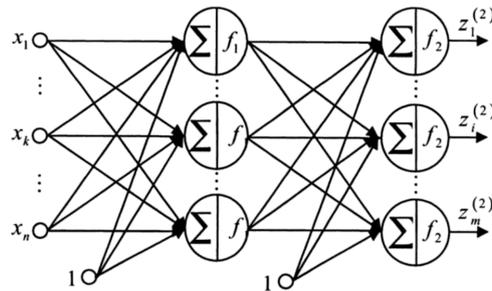


FIGURE 3.2 – La commande par réseau de neurones [5]

3.3 Notion du commandes robustes

Les commandes robustes sont des méthodes de contrôle qui sont conçues pour être résistantes aux perturbations, aux erreurs de modélisation et aux incertitudes dans les systèmes dynamiques. Leur conception tient spécifiquement compte de ces facteurs perturbateurs pour pouvoir y résister.

Il existe plusieurs types de commandes robustes, notamment :

- La commande prédictive.
- La commande par logique floue.
- La commande par réseau de neurones.
- La commande par mode glissant.
- La commande supertwisting simple/modifié.
- La commande synergétique.
- ...

3.4 Commande par mode glissant (SMC)

La commande par mode glissant (ou "sliding mode control" en anglais) est une technique de commande non linéaire robuste qui est basée sur la notion de surface de glissement qui

est une surface dans l'espace d'état du système qui permet de faire converger le système vers un état désiré.

En effet, la SMC est conçue pour maintenir le système sur cette surface de glissement en modifiant la commande d'entrée du système de manière à annuler les effets des perturbations et des erreurs de modélisation. L'objectif est de faire en sorte que le système suive cette surface de glissement, de manière à ce que l'erreur entre l'état du système et l'état désiré converge vers zéro.

La surface de glissement est définie comme une fonction qui est nulle sur la région d'équilibre du système, et qui atteint une valeur constante et non nulle à l'extérieur de cette région. Cette surface est conçue de manière à forcer le système à se déplacer sur cette surface (ou à "glisser" sur cette surface) en utilisant une commande qui est calculée en fonction de l'écart entre la sortie du système et la valeur de la surface de glissement. Cependant, la mise en œuvre de la SMC peut être complexe, car elle nécessite la conception de la surface de glissement, qui doit être choisie de manière à assurer la convergence du système vers l'état désiré. De plus, la SMC peut être sensible aux variations de paramètres du système et peut nécessiter un ajustement fin de ses paramètres pour assurer la stabilité du système [26].

Bref historique :

La commande par mode glissant a été développée dans les années 1950 et 1960 par des chercheurs russes tels qu'Emelyanov et Utkin pour contrôler les systèmes électromécaniques. Avec le développement de la théorie de la commande à structure variable (VSC) entre les années 1960 et 1980, la compréhension et l'application de la SMC se sont considérablement améliorées. Les années 1980 ont été marquées par une concentration sur l'analyse de la stabilité et de la performance en utilisant la théorie de Lyapunov et en abordant les problèmes de chattering par des approches modifiées de la SMC. Depuis les années 1990, cette méthode de commande non linéaire robuste a trouvé de nombreuses applications pratiques, telles que la robotique, les systèmes de commande de moteurs électriques, les systèmes aéronautiques et les systèmes de régulation de processus industriels, avec des études de cas et des travaux de recherche démontrant ses avantages et défis. Les développements récents de la recherche sur la SMC incluent la commande adaptative et robuste, la commande pour les systèmes multi-entrées multi-sorties (MIMO) et l'implémentation en temps réel sur des microcontrôleurs et des systèmes embarqués.

La SMC a été largement étudiée dans les années 1970 et 1980, notamment par les chercheurs russes et européens, qui ont développé de nouvelles méthodes pour la conception de la surface de glissement et pour l'analyse de la stabilité du système [2].

Conception de la commande [2] :

La conception de la commande peut être effectuée en trois étapes :

- **Définition de la surface de glissement** : La surface de glissement est un concept clé dans la commande par mode glissant et joue un rôle crucial pour assurer la stabilité et les performances souhaitées d'un système
- **Conditions d'existence et de convergence** : Les conditions d'existence et de convergence sont les critères qui permettent aux différentes dynamiques du système de converger vers la surface de glissement et d'y rester indépendamment de la perturbation.
- **Détermination de la loi de commande** : Une fois la surface de glissement

définie, et les conditions d'existence et de convergence sont assurées, il faut concevoir une loi de commande qui force le système à atteindre et à rester sur la surface de glissement. Cette loi de commande doit être robuste face aux incertitudes et aux perturbations.

1. Surface de glissement :

L'objectif principal de la surface de glissement est de définir une condition à partir de laquelle le système converge vers l'état désiré. Lorsque le système est sur la surface de glissement, il suit une trajectoire prédéterminée qui garantit la convergence de l'erreur d'état vers zéro. comme représente la figure (3.3).

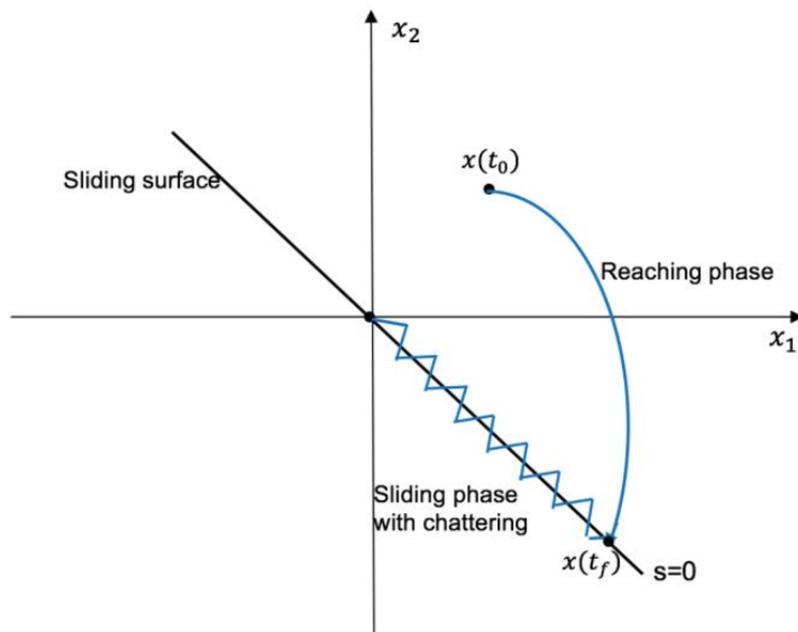


FIGURE 3.3 – Le phénomène de glissement [8]

Il existe différentes formes de surfaces de glissement, la formule générale est décrite comme suite [19] [27] :

$$S = \left(\lambda + \frac{d}{dt} \right)^{r-1} e \quad (3.1)$$

r est le degré relatif du système, e l'erreur sur les états, et λ un gain à définir.

2. Conditions d'existence et de convergence :

Il existe deux considérations pour assurer le mode de convergence :

- **Fonction discrète de commutation** : C'est la première condition de convergence, elle est proposée et étudiée par ELMYANOV et UTKIN. Il s'agit de donner à la surface une dynamique convergente vers zéro, elle est donnée par :

$$S(x)\dot{S}(x) < 0 \quad (3.2)$$

- **Fonction de Lyapunov** : Afin d'assurer que la trajectoire d'état converge vers la surface désirée, on établit la fonction de Lyapunov ci-après [19] :

$$V = \frac{1}{2}S^2 \quad (3.3)$$

La condition suivante doit être confirmée pour que la méthode puisse être considérée comme fiable :

$$\dot{V} < 0 \iff S(x)\dot{S}(x) < 0$$

3. Détermination de la loi de commande :

Une fois la surface de glissement est choisie, ainsi que le critère de convergence, il reste à déterminer la commande nécessaire pour attirer la variable à régler vers la surface, ensuite vers son point d'équilibre, en maintenant la condition d'existence du mode glissant. Lorsqu'il y a un régime glissant, la dynamique du système est indépendante de la loi de commande. De ce fait, on peut introduire une partie continue pour diminuer l'amplitude de la discontinuité.

Si on considère la forme d'un système non linéaire suivante :

$$\begin{cases} \dot{x} = F(x, t) + G(x, t)u \\ y = h(x, t) \end{cases}$$

Alors la loi de commande s'écrit comme suite :

$$u = G(x, t)^{-1}[-F(x, t) + u_d]$$

On remarque que la loi de la commande se compose de deux parties :

- **Commande équivalente** : La commande équivalente proposée par FILIPPOV et UTKIN correspond à la commande du système nominale permettant de satisfaire la condition : $\dot{S}(x, t) = 0$
- **Commande de commutation** u_d : La commande de commutation permettant de garantir la condition d'attractivité et responsable du glissement, la forme la plus simple que peut prendre est celle d'un relais :

$$u_d = -k \operatorname{sign}(S)$$

Où k est une constante positive qui représente le gain de la commande discontinue.

Phénomène de Chattering :

Le '**Chattering**' est un phénomène de vibration haute fréquence qui peut se produire dans la commande par mode glissant, lorsque le système passe rapidement et de manière répétitive d'un mode de glissement à un autre, ce qui peut provoquer des oscillations rapides et de faible amplitude autour de la surface de glissement.

Afin d'éviter le phénomène de commutations à haute fréquence qui peut causer le chattering, on remplace la fonction de commutation par la fonction de saturation. Cette méthode consiste à déterminer une bande limite autour de la surface de glissement pour assurer le lissage de la commande et maintenir l'état du système dans cette bande.

Il existe des méthodes de commande qui présentent moins de chattering et qui sont plus performantes que la commande par mode glissant, telles que la commande supertwisting simple ou modifié .

3.5 Commande Super-twisting

L'algorithme de commande Super-twisting - STW est l'un des algorithmes de commande à modes glissants du deuxième ordre les plus puissants pour les systèmes ayant un degré relatif égal à un. Il génère une fonction de commande qui conduit la variable de glissement et sa dérivée à zéro en temps fini en présence de perturbations/incertitudes lisses et bornées. Les principaux avantages de STW sont ses caractéristiques attractives : convergence en temps fini, robustesse aux incertitudes et simplicité de mise en œuvre. Cependant, l'algorithme STW contient une fonction discontinue lissée par intégration qui réduit considérablement le phénomène de chattering, mais ne l'élimine pas complètement [17].

Bref historique :

La commande Super-twisting est une technique de commande non-linéaire proposée en 1993 par Isaac Yaesh Levant pour résoudre les problèmes de contrôle des systèmes non-linéaires, tels que les oscillations rapides, les perturbations et les incertitudes. Cependant, elle présente certaines limites, notamment une convergence lente dans les régions proches de l'origine et une sensibilité aux retards de temps dans les systèmes. En 1998, Levant a proposé une variante modifiée de la commande Super-twisting, appelée "Super-twisting modifié", qui améliore la convergence et la robustesse de la commande Super-twisting.

Structure de la commande super-twisting :

C'est le même principe de la SMC, on a toujours la même commande équivalente, ce qui change est la commande de commutation qui est généralement définie en deux parties :

La première partie Ressemblant à la commande par mode glissant traditionnelle, un gain proportionnel est utilisé. Cependant, dans ce cas, le gain est appliqué à la valeur absolue de la surface de glissement, laquelle est ensuite multipliée par la fonction *sign* :

$$u_1(t) = -k_1 |S|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(S) \quad (3.4)$$

La deuxième partie implique une action intégrale de la fonction *sign* associée à la surface de glissement :

$$u_2(t) = -k_2 \int \text{sign}(S) dt + d(x, t) \quad (3.5)$$

Avec : k_1 et k_2 sont des gains positifs et sont sélectionnés pour compenser les perturbations $d(x, t)$ et la loi de commande de commutation est alors donnée par :

$$u_d = u_1 + u_2 \quad (3.6)$$

3.5.1 Supertwisting modifiée

La MSTW est une évolution de la commande super-twisting classique qui vise à améliorer encore les performances et la robustesse du système, tout en réduisant davantage le chattering. Bien que la structure de base de la MSTW soit similaire à celle de la STW, elle introduit des modifications dans la loi de commande pour obtenir des résultats améliorés.

Structure de la commande super-twisting modifiée :

La loi de commande super-twisting modifiée conserve généralement la même structure que la loi de commande super-twisting classique, avec une première partie proportionnelle à la surface de glissement (fonction de commutation) et une seconde partie intégrale basée sur l'intégrale de la valeur absolue de la surface de glissement. Cependant, la commande super-twisting modifiée peut incorporer des modifications telles que l'utilisation de fonctions continues ou de saturation pour réduire davantage le chattering.

Sa loi de commande est donné comme suite [26] :

$$u_d = -k_1|S|^{\frac{1}{2}}\text{sign}(S) - k_2S + Z \quad (3.7)$$

$$\dot{Z} = -k_3\text{sign}(S) - k_4S + d(x, t) \quad (3.8)$$

Avec k_1, k_2, k_3, k_4 sont des gains à identifier et $d(x, t)$ est une perturbation à compenser en choisissant les bon valeurs de k_3 et k_4 .

3.6 Commande hybride : Swing Up - Synergétique

3.6.1 La commande Swing-Up :

La commande "Swing up" est une technique de contrôle utilisée principalement pour amener un pendule inversé (aussi appelé pendule de Furuta) de sa position d'équilibre inférieure (pendulaire) à sa position d'équilibre supérieure (inversée), où le pendule se trouve en position verticale.

Le but de la commande "Swing up" est d'appliquer des forces de contrôle appropriées à la base du pendule de manière à ce qu'il oscille avec une amplitude croissante jusqu'à ce qu'il atteigne la position verticale. Une fois que le pendule est suffisamment proche de la position verticale, une autre stratégie de contrôle, souvent une commande linéaire quadratique (ex : LQR) ou une commande non linéaire, est utilisée pour stabiliser le pendule en position verticale.

Bref historique :

La commande Swing-up est une technique de contrôle qui a évolué historiquement en parallèle avec le développement des approches de contrôle pour les systèmes non linéaires et instables. Ce problème de contrôle, souvent associé au pendule inversé, a servi de banc d'essai pour les chercheurs et les ingénieurs travaillant sur des systèmes dynamiques complexes.

1980-1990 : La commande par énergie est apparue comme une méthode pour résoudre le problème du Swing up du pendule inversé. Les chercheurs ont commencé à étudier comment appliquer des forces de contrôle à la base du pendule pour augmenter progressivement son énergie jusqu'à ce qu'il atteigne la position verticale. Cette approche a été particulièrement intéressante pour les systèmes non linéaires.

1990-2000 : Pendant cette période, la commande par énergie a été développée et améliorée pour aborder des problèmes de contrôle plus complexes. Les chercheurs ont commencé à combiner la commande par énergie avec d'autres techniques de contrôle, telles que la commande par retour d'état et la commande linéaire quadratique (LQR), pour stabiliser le pendule une fois qu'il atteint la position verticale.

2000-présent : La commande par énergie continue d'être utilisée et améliorée pour résoudre le problème du Swing up. Les chercheurs ont développé des approches hybrides et adaptatives pour améliorer la robustesse et l'efficacité de la commande par énergie, notamment en combinant la commande par énergie avec des techniques d'apprentissage automatique et d'optimisation.

Synthèse de la commande Swing-Up :

En théorie, si l'angle du bras est maintenu constant et que le pendule reçoit une perturbation initiale, le pendule continuera à osciller avec une amplitude constante. L'idée de contrôle de l'énergie repose sur la conservation de l'énergie dans les systèmes idéaux : la somme de l'énergie cinétique et potentielle est constante. Cependant, en pratique, le frottement amortira l'oscillation et l'énergie totale du système ne sera pas constante. Il est possible de capturer la perte d'énergie en fonction de l'accélération du pivot, qui à son tour peut être utilisée pour trouver un régulateur pour faire osciller le pendule. L'équation de mouvement non linéaire d'un pendule simple basée sur le schéma de la figure (3.4) est :

$$J_p \ddot{\alpha}(t) + m_p g l \sin \alpha(t) + m_p l u(t) \cos \alpha(t) = 0 \quad (3.9)$$

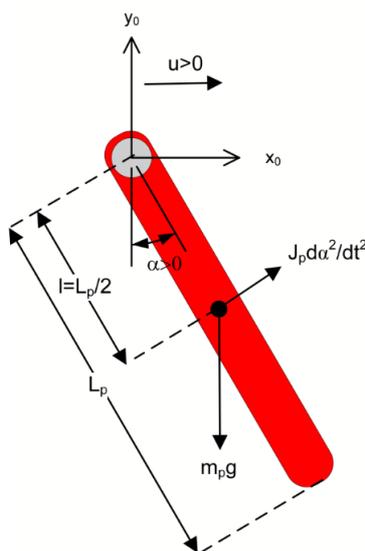


FIGURE 3.4 – Schéma d'un pendule inversé libre [1]

l'énergie potential du pendule est :

$$E_p(t) = m_p g l (1 - \cos \alpha) \quad (3.10)$$

et l'énergie cinétique est

$$E_c = \frac{1}{2} J_p \dot{\alpha}^2 \quad (3.11)$$

L'énergie potential est null quand $\alpha = 0$ et égale à $E_p = 2m_p g l$ quand $\alpha = \pi$ la somme de l'énergie cinétique et potential donne :

$$E = \frac{1}{2} J_p \dot{\alpha} + m_p g l (1 - \cos \alpha) \quad (3.12)$$

Différenciant l'équation (3.12) donne :

$$\dot{E} = \frac{dE}{dt} = J_p \ddot{\alpha} \dot{\alpha} + m_p g l \sin \alpha \dot{\alpha} \quad (3.13)$$

Résolvant pour $J_p \ddot{\alpha}$ dans l'équation (3.9) :

$$J_p \ddot{\alpha} = -m_p g l \sin \alpha - m_p u l \cos \alpha \quad (3.14)$$

par la substituer de l'équation (3.13) on trouve :

$$\dot{E} = -m_p u l \dot{\alpha} \cos \alpha \quad (3.15)$$

On peut facilement obtenir la loi de la commande en utilisant la fonction de Lyapunov suivante :

$$V = \frac{1}{2}(E - E_0)^2 \quad (3.16)$$

On l'a dérive :

$$\dot{V} = (E - E_0) \dot{E} \quad (3.17)$$

$$\Rightarrow \dot{V} = -(E - E_0) m_p u l \dot{\alpha} \cos \alpha \quad (3.18)$$

$$u = (E - E_r) \dot{\alpha} \cos \alpha \quad (3.19)$$

La fonction Lyapunov se réduit lorsque α ne s'équivaut pas à zéro et $\cos(\alpha)$ diffère également de zéro. Pour éviter que l'énergie atteigne zéro quand $\alpha = \pm\pi/2$ et pour que l'énergie change rapidement, il est crucial que la commande u ait une amplitude notable[30]. On peut obtenir ça par la formule suivante :

$$u = \text{sat}_{u_{max}}(k_s(E_r - E) \text{sign}(\dot{\alpha} \cos \alpha)) \quad (3.20)$$

Cette loi de commande conduira l'énergie du pendule vers l'énergie de référence, c'est-à-dire $E(t) \rightarrow E_0$. En définissant l'énergie de référence comme l'énergie potentielle du pendule la loi de commande amènera le pendule à sa position verticale.

3.6.2 Commande synergétique (SC) :

La synergétique, qui tire son étymologie du terme grec signifiant « travailler pour un but commun », représente un champ de recherche interdisciplinaire lancé en 1969 par Hermann Haken. Elle se focalise sur l'étude des systèmes matériels et non matériels composés d'un ensemble de parties individuelles et elle se base sur le concept de spontanéité, c'est-à-dire sur l'apparition auto-organisée de nouvelles qualités dans le système. La question centrale de la synergétique concerne l'existence de principes d'auto-organisation généraux indépendants de la nature des parties du système. Cette question peut trouver une réponse positive en portant une attention particulière aux échanges qualitatifs à l'échelle macroscopique entre les éléments du système[16].

La théorie de la commande synergétique permet aux concepteurs de résoudre efficacement beaucoup de problèmes difficiles de commande, qui n'ont pas été résolus par les méthodes classiques connues. Ces problèmes se relient non seulement, par exemple, à la stabilité globale de fonctionnement du système dans une boucle fermée ou de l'optimisation globale du comportement du système, mais également à la simplification de la transition d'une stratégie de partage de puissance à une autre, ou à la minimisation des pertes de l'énergie dans le système .

Bref historique :

La commande synergétique est une approche de contrôle développée par l'ingénieur et scientifique russe Vadim I. Utkin à la fin des années 1970 et au début des années 1980. L'historique de la commande synergétique peut être résumé en plusieurs étapes clés :

Fin des années 1970 - début des années 1980 : Vadim I. Utkin a développé la théorie de la commande synergétique en s'appuyant sur la théorie des systèmes à glissement, une méthode de contrôle non linéaire pour les systèmes incertains et perturbés. La commande synergétique se concentre sur la coordination des actions de plusieurs sous-systèmes pour atteindre un objectif de contrôle commun.

Années 1980 - années 1990 : Les recherches et les développements dans le domaine de la commande synergétique se sont poursuivis, avec l'introduction de nouveaux concepts et techniques pour améliorer la stabilité et l'efficacité des systèmes de contrôle synergétiques. Pendant cette période, la commande synergétique a été appliquée à diverses applications, notamment la robotique, les véhicules autonomes et les systèmes électromécaniques.

Années 2000 - aujourd'hui : La commande synergétique continue d'évoluer, avec des avancées dans la modélisation, l'analyse et la synthèse des systèmes de contrôle synergétiques. De nouvelles méthodes pour la conception et l'optimisation des lois de commande synergétiques ont été développées, intégrant des techniques d'apprentissage automatique, d'intelligence artificielle et d'optimisation.

Synthèse de la commande synergétique :

La commande synergétique est une méthode de contrôle qui se rapproche de la commande par mode glissant, en ce qu'elle impose une dynamique prédéterminée au système étudié. Toutefois, elle diffère de cette dernière par l'utilisation d'une macro-variable continue qui peut être fonction de deux ou plusieurs variables d'état du système.

Cette nouvelle approche ne nécessite pas la linéarisation du modèle et utilise de manière explicite un modèle non linéaire pour la synthèse de la commande [2][12].

Prenons en compte un système dynamique non-linéaire SISO (Single Input Single Output) de dimension n , décrit par l'équation suivante :

$$\frac{dx}{dt} = f(x, u, t) \tag{3.21}$$

Où x correspond au vecteur d'état du système tandis que u correspond au vecteur de commande et t le vecteur du temps.

Le processus de synthèse d'un contrôleur synergétique commence par la détermination d'une macro-variable par le concepteur, en réponse aux spécifications du cahier des charges et à d'éventuelles contraintes de contrôle. Cette macro-variable est définie comme suit :

$$\phi = \sigma(x, t) \tag{3.22}$$

Où ϕ est la macro-variable et $\sigma(x, t)$ une fonction définie par l'utilisateur. Chaque macro-variable imposée représente une nouvelle contrainte dans l'espace d'état du système, entraînant une réduction de son ordre d'une unité et conduisant à une convergence globale vers l'état désiré $\phi = 0$. L'objectif de la commande synergétique est de diriger le système vers un domaine spécifique, préalablement défini par le concepteur $\phi = 0$. Ceci se traduit par :

$$\sigma(x, t) = 0 \tag{3.23}$$

Le concepteur a la possibilité de déterminer les propriétés de la macro-variable en fonction des paramètres de commande, du temps de réponse, des contraintes de commande, et autres facteurs pertinents.

La macro-variable peut être construite comme une combinaison linéaire des variables d'état, et elle est forcée d'évoluer selon une trajectoire prédéfinie, déterminée par une contrainte connue sous le nom d'équation fonctionnelle dans la littérature de la commande synergétique, comme suite :

$$T\dot{\sigma} + M(\sigma) = 0 \quad T > 0 \quad (3.24)$$

Le paramètre T permet de contrôler la vitesse de convergence du système en boucle fermée vers le domaine prédéfini.

En prenant en considération la chaîne de la différentiation, représentée par :

$$\frac{d\sigma(x, t)}{dt} = \frac{d\sigma(x, t)}{dx} \frac{dx}{dt} \quad (3.25)$$

En utilisant les équations (3.21), (3.23), (3.24) et (3.25), il est possible d'exprimer la formule suivante :

$$T \frac{d\sigma(x, t)}{dx} f(x, u, t) + M(\sigma(x, t)) = 0 \quad (3.26)$$

En déterminant u à partir de la résolution de l'équation (3.26), la loi de commande peut être obtenue de la manière suivante :

$$u = g(x, \sigma(x, t), T, t) \quad (3.27)$$

À partir de l'équation (3.27), il est évident que la commande dépend non seulement des variables d'état du système, mais aussi de la macro-variable choisie par le concepteur et de la constante de temps T spécifiée.

Synthèse de la commande hybride :

La commande globale résulte de la combinaison de deux commandes : la première est une commande non linéaire qui garantit le balancement jusqu'à la zone ± 10 , et la deuxième est la commande synergétique qui, grâce à un commutateur, assure la stabilisation du pendule en position verticale.

$$u = \begin{cases} u_{syn} & |\theta| \leq \pm 10 \\ u_{swing-up} & \text{sinon} \end{cases} \quad (3.28)$$

3.7 Conclusion :

Dans ce chapitre, nous avons présenté en détail la théorie des commandes non linéaires appliquée au pendule inversé rotatif (PIR). Nous avons commencé par présenter la commande par mode glissant, suivie de l'étude approfondie de la commande supertwisting dans ses versions simple et modifiée. Nous avons expliqué également le concept de la commande hybride. Une compréhension approfondie de ces principes constitue une étape cruciale pour leur application efficace sur le PIR.

CHAPITRE 4

APPLICATION DES COMMANDES NON LINÉAIRES SUR LE PENDULE INVERSÉ ROTATIF

Sommaire

4.1	Introduction	69
4.2	Application de la commande par mode glissant (SMC) sur le PIR :	69
4.3	Application de la commande super-twisting (STW) sur le PIR	72
4.4	Application de la commande super-twisting modifié (MSTW) sur le PIR	74
4.5	Application de la commande hybride (Swing Up-Synergétique) sur le PIR	76
4.5.1	La commande Swing-UP	76
4.5.2	Commande synergétique	77
4.6	Test de robustesse sur les quatres commandes	79
4.7	Application de commandes dépourvues de modèle mathématique sur le PIR	81
4.7.1	Application de la commande logique-floue sur le PIR	81
4.7.2	Application de la commande réseau de neurones sur le PIR	83
4.8	Comparaison entre les commandes	84
4.9	Conclusion	85

4.1 Introduction

Dans le chapitre précédent, nous avons examiné en détail les différentes commandes non linéaires utilisées dans le contexte du PIR. Dans ce chapitre, nous allons passer à l'application pratique de ces commandes sur le PIR afin d'évaluer leur performances et leur efficacité.

Une particularité intéressante de cette étude est notre collaboration avec un étudiant qui a réalisé un projet de fin d'études portant sur l'application de commandes sans modèle mathématique sur le PIR. Cette collaboration nous permettra de comparer nos approches basées sur des modèles mathématiques avec ses approches qui n'ont pas recours à ces modèles.

4.2 Application de la commande par mode glissant (SMC) sur le PIR :

Le PIR est représenté sous forme du modèle mathématique suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_3 \\ \dot{x}_2 = x_4 \\ \dot{x}_3 = f_1(x) + g_1(x)u \\ \dot{x}_4 = f_2(x) + g_2(x)u \end{cases} \quad (4.1)$$

Afin de prendre en compte la dynamique à la fois du bras rotatif et du pendule, nous allons opter pour une surface de glissement qui permettra d'incorporer ces deux éléments dans une seule équation, formulée de la manière suivante [26] :

$$S = k_\theta \dot{\theta} + k_\alpha \dot{\alpha} + \lambda_\theta \theta + \lambda_\alpha \alpha$$

où k_θ , k_α , λ_θ et λ_α sont des gains de surface glissante.

Pour la démonstration de stabilité et le calcul de la commande, nous prenons en compte la fonction de Lyapunov mentionné précédemment (3.3), sa dérivé est :

$$\dot{V} = S\dot{S}$$

Le système est stable si est seulement si : $\dot{V} < 0 \iff S\dot{S} < 0$

$$S\dot{S} = S \left(k_\theta \ddot{\theta} + k_\alpha \ddot{\alpha} + \lambda_\theta \dot{\theta} + \lambda_\alpha \dot{\alpha} \right) \quad (4.2)$$

$$= S \left[k_\theta \left(f_1(x) + g_1(x)u \right) + k_\alpha \left(f_2(x) + g_2(x)u \right) + \lambda_\theta x_3 + \lambda_\alpha x_4 \right] \quad (4.3)$$

$$= S \left[u \left(k_\theta g_1(x) + k_\alpha g_2(x) \right) + \left(k_\theta f_1(x) + k_\alpha f_2(x) + \lambda_\theta x_3 + \lambda_\alpha x_4 \right) \right] \quad (4.4)$$

Pour \dot{V} être négative, la formule de commande doit être de la forme suivante :

$$u = \left(k_\theta g_1(x) + k_\alpha g_2(x) \right)^{-1} \left(- \left(k_\theta f_1(x) + k_\alpha f_2(x) + \lambda_\theta x_3 + \lambda_\alpha x_4 \right) + u_d \right)$$

Voici la formule finale obtenue pour la commande :

$$u = \left(k_\theta g_1(x) + k_\alpha g_2(x) \right)^{-1} \left(- \left(k_\theta f_1(x) + k_\alpha f_2(x) + \lambda_\theta x_3 + \lambda_\alpha x_4 \right) - k \operatorname{sign}(S) \right)$$

Paramètres de commande :

Il est important de souligner que tous les paramètres des quatre commandes ont été choisis par le biais d'essais aléatoires, dans le but de trouver les valeurs appropriées qui permettent de stabiliser efficacement le système autour du point d'équilibre instable.

Paramètres	Valeur
k_θ	-0.1
k_α	0.2
λ_θ	-0.1
λ_α	3.1
k	1500

Résultats expérimentaux :

Afin de procéder à une évaluation expérimentale des performances de différentes stratégies de commande, incluant la commande par mode glissant ainsi que d'autres approches, nous avons utilisé le pendule inversé rotatif Quanser QUBE Servo 2. Cette plate-forme a été sélectionnée pour sa capacité à fournir un environnement de test adéquat. Nous avons pu ainsi mettre en œuvre le contrôleur conçu en utilisant le logiciel de contrôle en temps réel QUARC. Cette configuration expérimentale nous a permis d'observer le comportement du système dans des conditions réelles, sans aucune intervention manuelle.

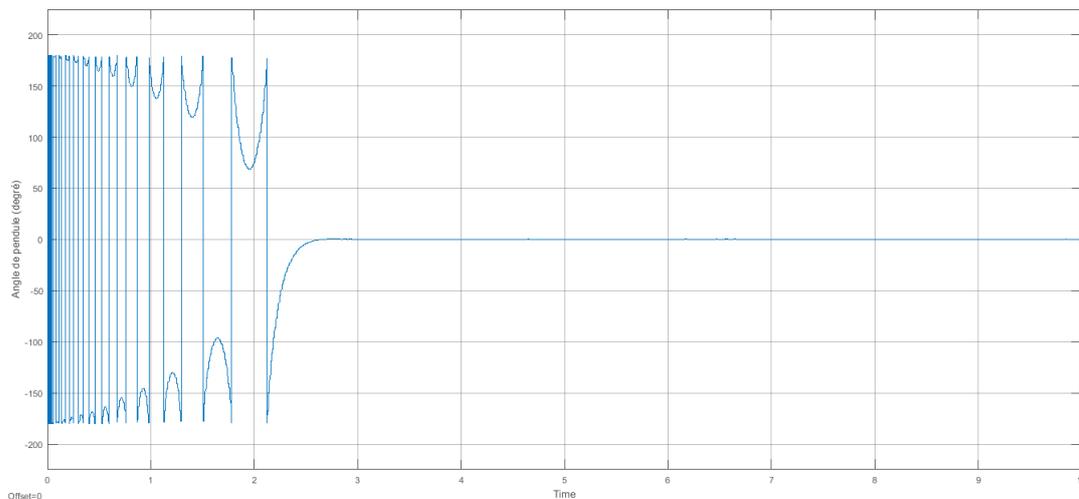


FIGURE 4.1 – L'évolution de l'angle du pendule du PIR appliquons la commande SMC

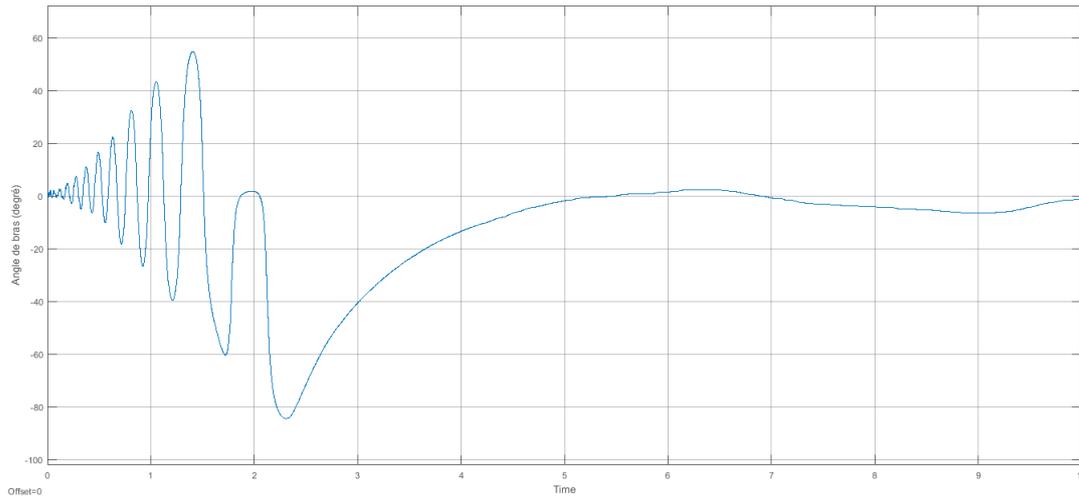


FIGURE 4.2 – L'évolution de l'angle du bras du PIR appliquons la commande SMC

Les figures (4.1) (4.2) présentent respectivement l'évolution de l'angle du pendule α et du bras θ appliquons la commande par mode glissant. Tout d'abord, nous avons constaté que le contrôleur a réussi à maintenir la position verticale du pendule de manière stable sans aucune intervention manuelle, cela démontre l'efficacité de la commande par mode glissant dans la régulation précise de la position du pendule.

Ainsi, nous avons observé que l'angle d'équilibre initial du pendule était de 180° , tandis que la position souhaitée était de 0° (correspondant au point d'équilibre instable). Cette configuration initiale a conduit à une évolution de l'angle du pendule à partir de 180° , suivi d'oscillations cohérentes qui ont permis d'atteindre l'objectif de stabilisation en un temps de 2.5 s.

En ce qui concerne l'évolution du bras rotatif, il est observé que l'angle du bras débute à une position stable de 0° degrés. Par la suite, il entre en oscillation afin de soutenir le mouvement de montée du pendule, puis il revient à sa position d'équilibre. Cette trajectoire du bras rotatif démontre son rôle essentiel dans le contrôle du PIR, en fournissant les forces nécessaires pour maintenir l'équilibre et faciliter les mouvements désirés.

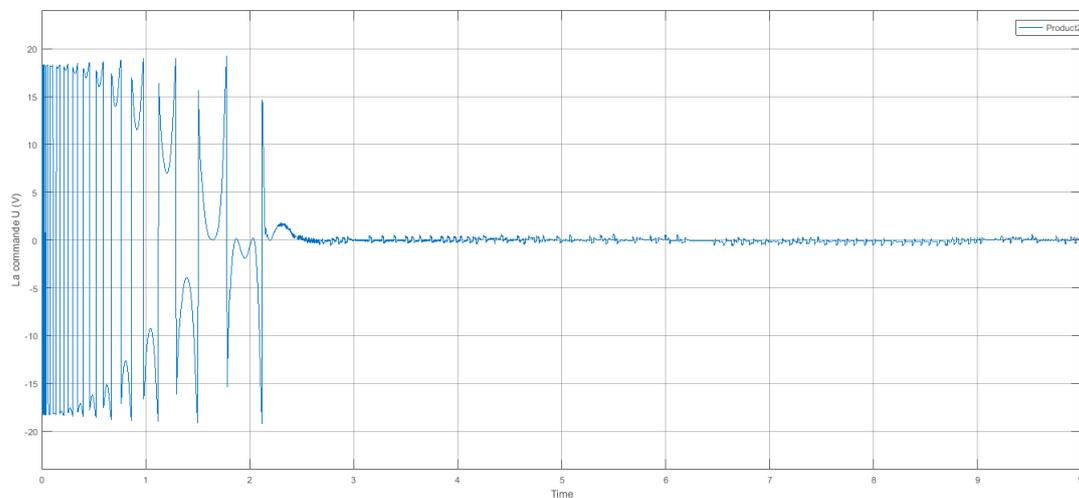


FIGURE 4.3 – La commande par mode glissant

La figure (4.3) représente l'évolution de la commande par mode glissant appliquée au PIR. Un aspect remarquable à souligner est la robustesse de ce contrôleur face aux perturbations externes. On observe que la commande par mode glissant parvient à stabiliser le pendule en générant une tension maximale de 18 V. Cependant, cette approche nécessite une consommation d'énergie plus élevée. De plus, des oscillations de faible amplitude, appelées chattering, sont présentes dans le système. Afin de remédier à ces limitations, une approche de commande supertwisting sera mise en œuvre.

4.3 Application de la commande super-twisting (STW) sur le PIR

En appliquant les mêmes étapes que la commande par mode glissant, nous introduisons une différence notable dans la commande de régulation. Cela conduit à l'obtention de la formule suivante de la commande :

$$u = \left(k_\theta g_1(x) + k_\alpha g_2(x) \right)^{-1} \left(-(k_\theta f_1(x) + k_\alpha f_2(x) + \lambda_\theta x_3 + \lambda_\alpha x_4) - \underbrace{k_1 |S|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(S) - k_2 \int \text{sign}(S) dt}_{\text{Le terme de super-twisting simple}} \right) \quad (4.5)$$

Paramètres de commande :

Paramètres	Valeur
k_θ	-0.1
k_α	0.2
λ_θ	-0.1
λ_α	5.1
k_1	370
k_2	-0.2

Résultats expérimentaux :

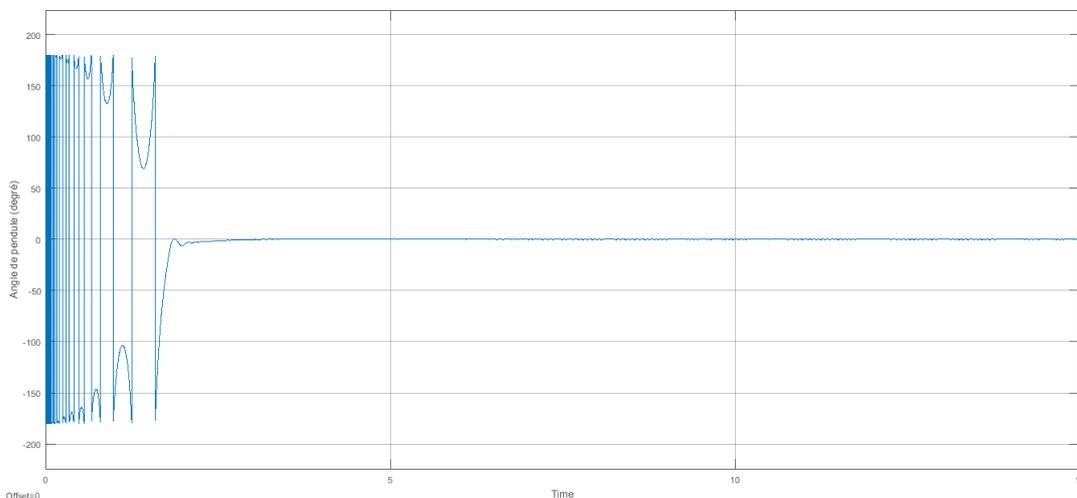


FIGURE 4.4 – L'évolution de l'angle du pendule du PIR appliquons la commande STW

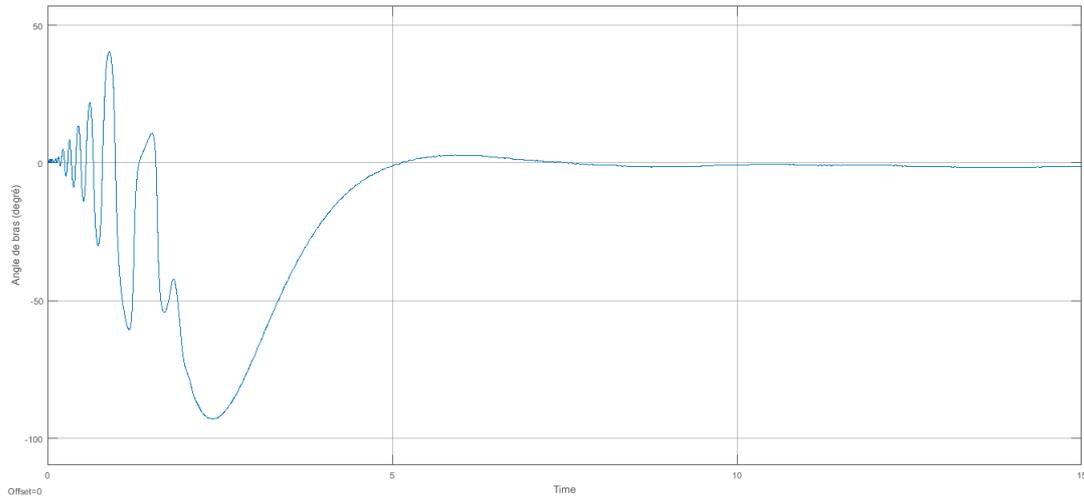


FIGURE 4.5 – L'évolution de l'angle du bras du PIR appliquons la commande STW

Les figures (4.4) et (4.5) présentent respectivement l'évolution de l'angle du pendule et du bras du PIR sous l'application de la commande STW. Une observation importante est le temps de réponse réduit pour amener le pendule dans la position désirée, qui est d'environ 2 s, avec un nombre minimal d'oscillations du pendule.

En ce qui concerne l'évolution du bras rotatif, on constate que le bras effectue des oscillations rapides dans le but d'aider le pendule à se stabiliser dans le point d'équilibre instable. Cette réaction rapide du bras contribue à réduire le temps nécessaire pour atteindre la stabilisation du pendule. En effet, sous l'application de la commande STW, le temps de stabilisation du bras est d'environ 5 secondes.

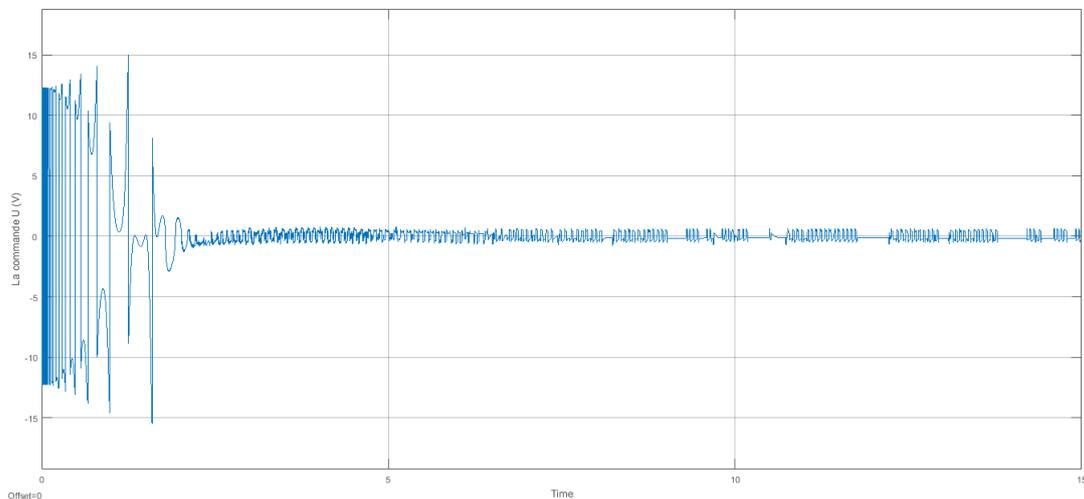


FIGURE 4.6 – La commande Super-twisting

La figure (4.6) représente l'évolution de la commande super-twisting. Un avantage significatif de cette commande réside dans sa capacité à réduire considérablement les oscillations indésirables, notamment le chattering (environ de 1.3V), par rapport à la commande par mode glissant.

En termes de consommation d'énergie, la commande super-twisting présente une efficacité accrue par rapport à la commande par mode glissant. En effet, elle parvient à stabiliser le pendule en utilisant une tension réduite de 15V, ce qui permet de réaliser des économies

d'énergie significatives et de prolonger la durée de vie des composants.

Afin d'optimiser la consommation d'énergie de la commande, une modification de la commande supertwisting est proposée.

4.4 Application de la commande super-twisting modifié (MSTW) sur le PIR

Par une légère adaptation du terme de commande de régulation du supertwisting simple, il est possible d'obtenir une formulation modifiée de cette commande, connue sous le nom de supertwisting modifié. Cette modification vise à améliorer les performances et la stabilité de la commande, tout en conservant les avantages du supertwisting d'origine.

On considère la fonction de Lyapunov et la surface de glissement mentionnées précédemment dans la loi de commande par mode glissant :

$$V = \frac{1}{2}S^2 \quad S = k_\theta \dot{\theta} + k_\alpha \dot{\alpha} + \lambda_\theta \theta + \lambda_\alpha \alpha$$

Nous suivons les mêmes étapes que celles utilisées dans la commande SMC, dérivons V et utilisons la formule du modèle mathématique du PIR (4.1), afin de trouver la formule mentionnée dans (4.4).

Afin d'assurer la stabilité du système en trouvant $\dot{V} < 0$, il est nécessaire de remplacer le terme u par la commande suivante, qui comprend deux termes distincts : un terme pour la compensation et un autre pour la régulation (le terme du supertwisting modifié) [26]. La formule de la commande est représentée par l'expression suivante :

$$u = \left(k_\theta g_1(x) + k_\alpha g_2(x) \right)^{-1} \left(-\left(k_\theta f_1(x) + k_\alpha f_2(x) + \lambda_\theta x_3 + \lambda_\alpha x_4 \right) + \underbrace{k_1 |S|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(S) + k_2 S - Z}_{\text{Le terme de Supertwisting modifié}} \right)$$

La formule de \dot{Z} est celle de (3.8).

Paramètres de commande :

Paramètres	Valeur
k_θ	-0.1
k_α	0.2
λ_θ	-0.1
λ_α	3.1
k	1500
k_1	330
k_2	-0.1

Résultats expérimentaux :

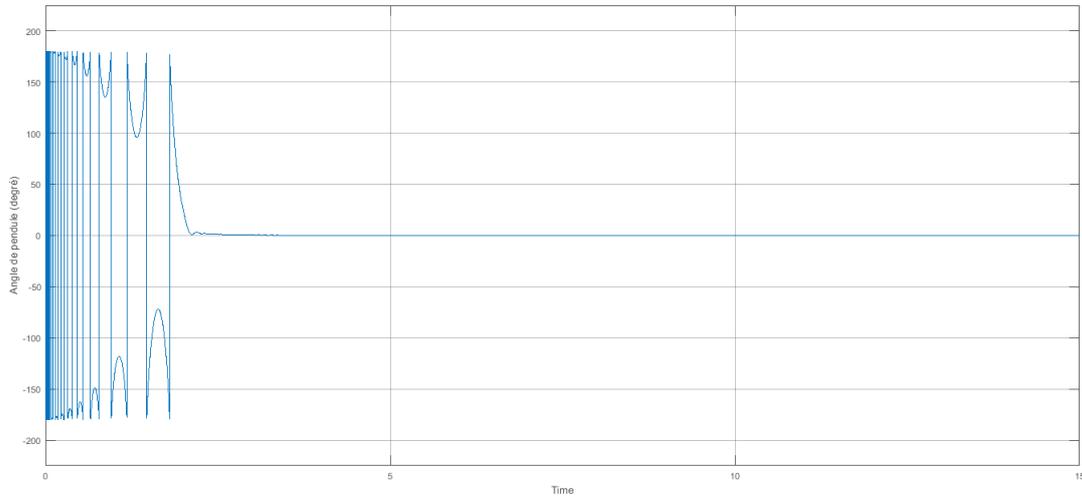


FIGURE 4.7 – L'évolution de l'angle du pendule du PIR appliqué la commande MSTW

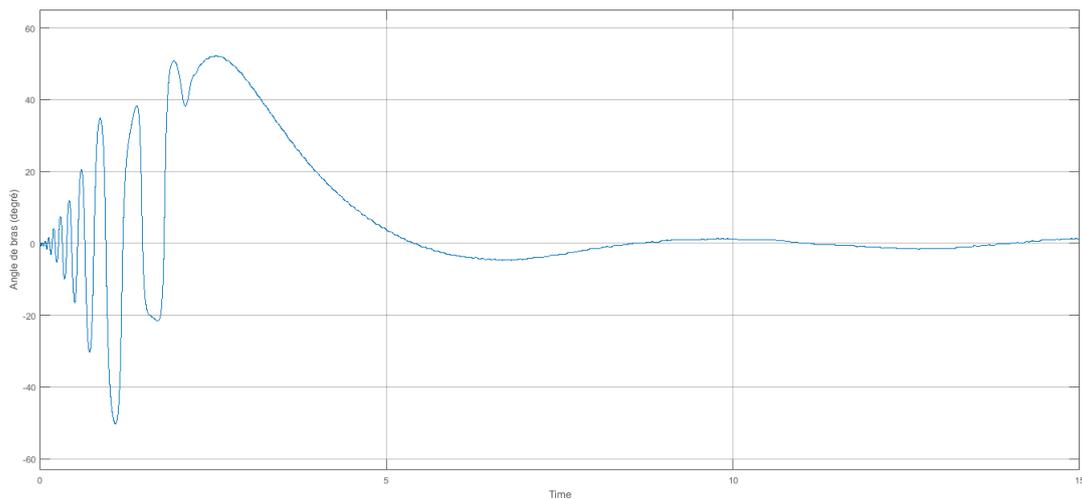


FIGURE 4.8 – L'évolution de l'angle du bras du PIR appliqué la commande MSTW

Les figures (4.7)(4.8) présentent respectivement l'évolution de l'angle du pendule et du bras appliqué la commande MSTW. Nous constatons plusieurs observations importantes. Tout d'abord, le temps de réponse du pendule et du bras rotatif pour atteindre la position désirée est similaire à celui observé lors de l'application de la commande STW simple, avec un temps d'environ 2 secondes. Cela indique que la modification apportée à la commande STW n'a pas affecté de manière significative le temps de stabilisation du système.

Une autre observation importante concerne le comportement du bras rotatif. Après avoir aidé le pendule à s'élever, le bras présente un léger retard lorsqu'il revient à sa position d'équilibre à 0° . Ce retard peut être dû à des facteurs tels que les caractéristiques mécaniques du bras ou la réponse temporelle des composants du système. Cependant, malgré ce léger retard, le bras parvient toujours à revenir à sa position d'équilibre, ce qui confirme son rôle crucial dans la stabilisation du PIR.

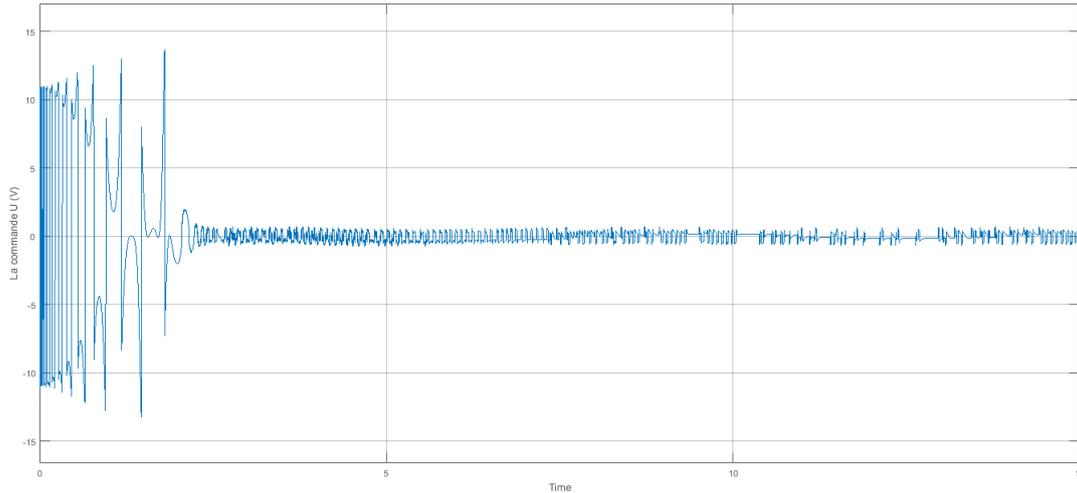


FIGURE 4.9 – L'évolution de la commande Super-twisting modifiée

En analysant l'évolution de la commande dans la figure (4.9), on observe une différence notable en termes de consommation d'énergie par rapport aux commandes précédentes. La commande MSTW parvient à atteindre une tension maximale de 13V. Par ailleurs, on constate que l'amplitude du chattering est considérablement réduite par rapport à la commande STW simple. Alors que le chattering atteignait 1.5 V dans la commande précédente, il est maintenant réduit à un niveau inférieur à 1 V. Cette réduction du chattering est une caractéristique essentielle de la commande MSTW, car elle permet d'éliminer les oscillations indésirables et d'assurer une stabilisation plus précise du PIR. Par conséquent, l'objectif principal de cette commande est d'améliorer la robustesse du système, ce qui sera abordé ultérieurement.

4.5 Application de la commande hybride (Swing Up-Synergétique) sur le PIR

4.5.1 La commande Swing-UP

Lorsque le pendule est dans sa position pendante, l'énergie potentielle est minimale et l'énergie cinétique est nulle. Pour le faire monter à la position verticale haute, l'énergie du système doit être augmentée. C'est ce qu'on appelle le "swing-up", c'est-à-dire l'augmentation de l'énergie du pendule jusqu'à ce qu'il atteigne la position verticale haute.

La commande "Swing-UP" est définie comme suit :

$$u_{s-up} = sat_{u_{max}}(\gamma(E_r - E)sign(\dot{\alpha} \cos \alpha)) \quad (4.6)$$

Étant donné que la variable de contrôle dans le QUBE-Servo 2 est la tension du moteur, $V_m(t)$, il est nécessaire de convertir l'accélération en tension. Ceci peut être réalisé en utilisant l'expression suivante :

$$v_m(t) : \frac{R_m r m_r}{k t} u_{s-up} \quad (4.7)$$

avec R_m est la résistance du moteur, k_t est un constant du couple courant, r est la longueur du bras et m_r est la mass du bras.

4.5.2 Commande synergétique

Considérons le modèle mathématique du PIR décrit en (4.1). On choisissant la fonction de Lyapunov suivante :

$$V = \frac{1}{2}\sigma^2$$

On choisit la formule suivante de la macro variable :

$$\sigma(t) = k_\theta \dot{\theta} + k_\alpha \dot{\alpha} + \lambda_\theta \theta + \lambda_\alpha \alpha$$

Afin d'assurer la stabilité du système on doit trouver $\dot{V} < 0$

Donc :

$$\dot{V} = \sigma \dot{\sigma}$$

$$\begin{aligned} \sigma \dot{\sigma} &= \sigma \left(k_\theta \ddot{\theta} + k_\alpha \ddot{\alpha} + \lambda_\theta \dot{\theta} + \lambda_\alpha \dot{\alpha} \right) \\ &= \sigma \left[k_\theta \left(f_1(x) + g_1(x)u \right) + k_\alpha \left(f_2(x) + g_2(x)u \right) + \lambda_\theta x_3 + \lambda_\alpha x_4 \right] \\ &= \sigma \left[u \left(k_\theta g_1(x) + k_\alpha g_2(x) \right) + \left(k_\theta f_1(x) + k_\alpha f_2(x) + \lambda_\theta x_3 + \lambda_\alpha x_4 \right) \right] \end{aligned}$$

Pour \dot{V} être négatif, la formule de commande doit être comme suit :

$$u_{syn} = - \left(k_\theta g_1(x) + k_\alpha g_2(x) \right)^{-1} \left(\left(k_\theta f_1(x) + k_\alpha f_2(x) + \lambda_\theta x_3 + \lambda_\alpha x_4 \right) + \frac{1}{T} \sigma \right) \quad (4.8)$$

La commande hybride :

$$u = \begin{cases} u_{syn} & |\theta| \leq \pm 10 \\ u_{s-up} & sinon \end{cases}$$

Paramètres de commande synergétique :

Paramètres	Valeur
k_θ	-0.09
k_α	0.4
λ_θ	-0.09
λ_α	6
T	0.0006

Résultats expérimentaux :

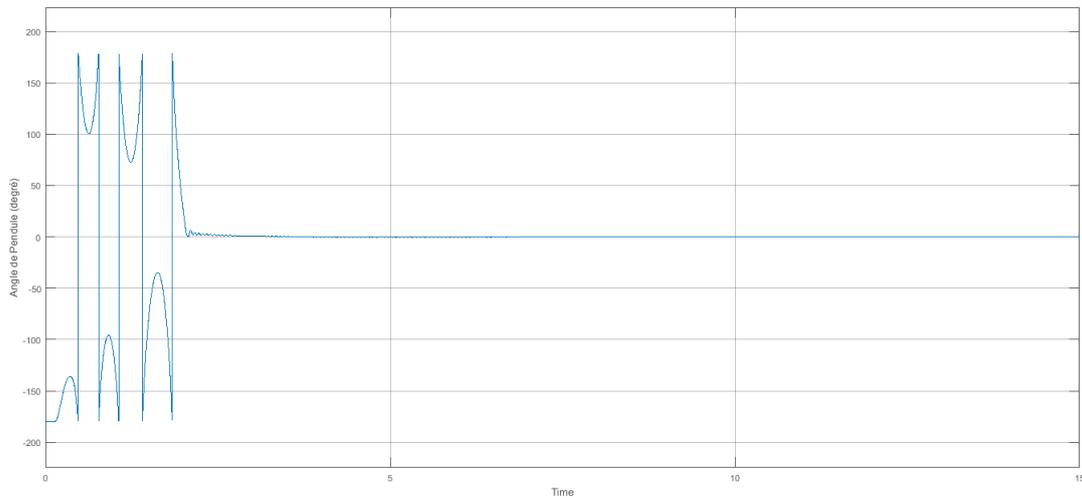


FIGURE 4.10 – L'évolution de l'angle du pendule du PIR appliquons la commande hybride

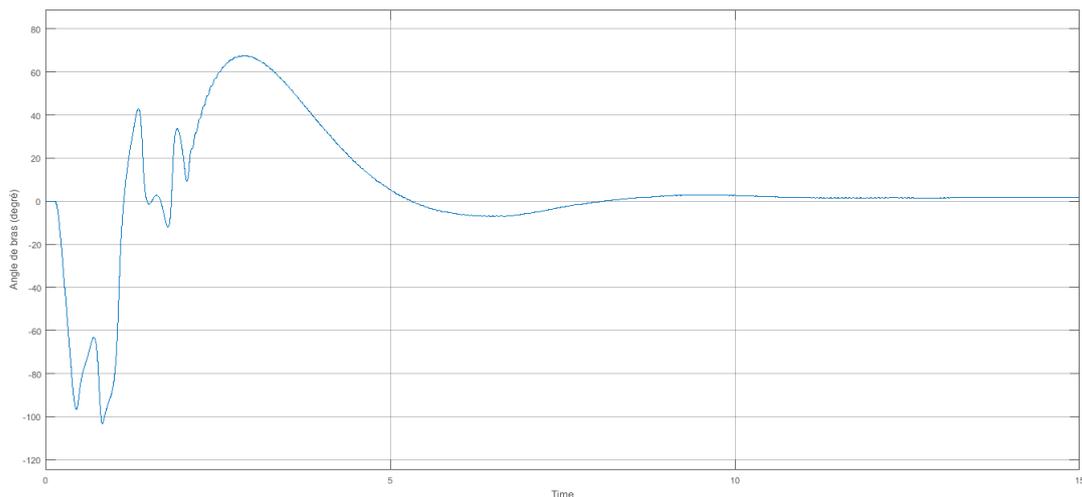


FIGURE 4.11 – L'évolution de l'angle du bras du PIR appliquons la commande hybride

Les résultats de l'évolution de l'angle du pendule et du bras du PIR en utilisant la commande hybride sont illustrés dans les figures (4.10) et (4.11). Dans les premières secondes de l'évolution, on constate un retard de 2 secondes au cours duquel le système entre en oscillation, il est associé à l'initialisation de la commande "swing up", qui permet de générer l'énergie nécessaire pour élever le pendule à partir de sa position initiale.

Ainsi, le temps de réponse du pendule pour atteindre sa position haute est d'environ 3 secondes. De plus, le temps de réponse du bras est similaire à celui observé précédemment, cependant, une légère différence est observée dans la trajectoire de retour du bras vers sa position d'équilibre, où il ne revient pas complètement à cette position.

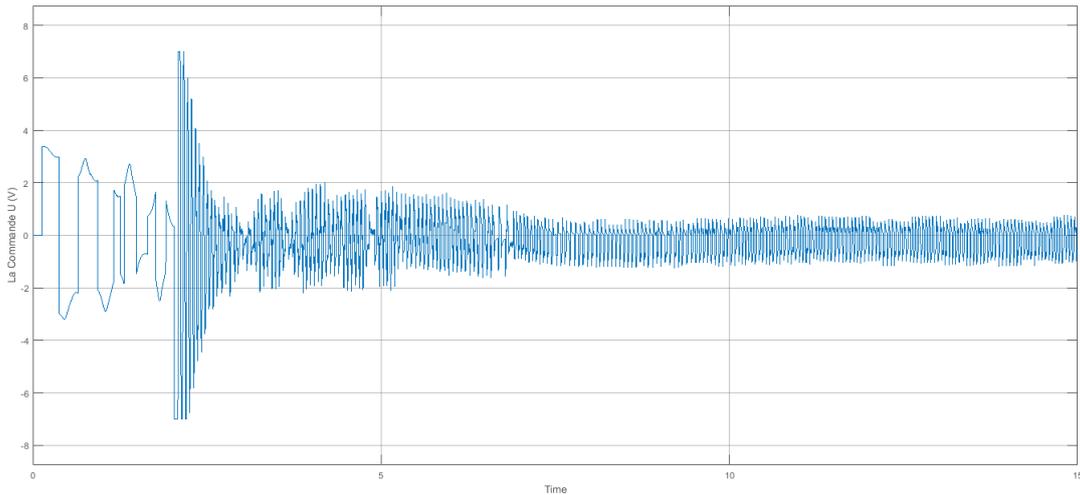


FIGURE 4.12 – L'évolution de la commande hybride

En examinant l'évolution de la commande hybride représentée dans la figure (4.12), on observe des résultats encourageants en termes de consommation d'énergie. La tension maximale atteinte par la commande est réduite de 13V à 7V, ce qui représente une diminution significative de la consommation d'énergie. De plus, le chattering reste d'environ 1V, ce qui confirme l'efficacité de la commande hybride dans la réduction des oscillations indésirables et de minimiser l'énergie.

4.6 Test de robustesse sur les quatre commandes

Afin d'évaluer la robustesse des commandes mentionnées précédemment, des perturbations externes ont été introduites manuellement dans le système du pendule inversé rotatif. L'objectif était d'observer comment le pendule réagisse et se comporte face à des influences extérieures. Les résultats expérimentaux de l'évolution de l'angle du pendule en présence de perturbations sont représentés dans les figures (4.13), (4.14), (4.15) et (4.16). Chacune de ces figures correspond à l'application d'une commande spécifique, à savoir la commande SMC, la commande STW, la commande MSTW et la commande hybride, respectivement.

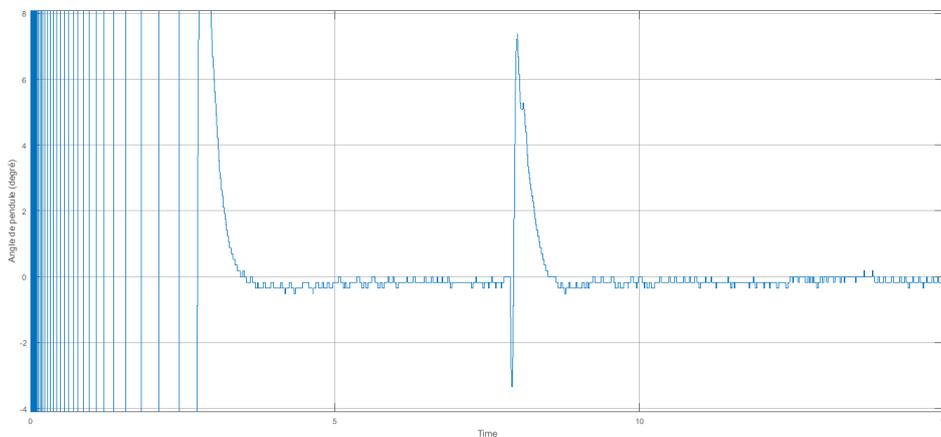


FIGURE 4.13 – L'évolution de l'angle du pendule en présence de perturbations appliquons la commande SMC

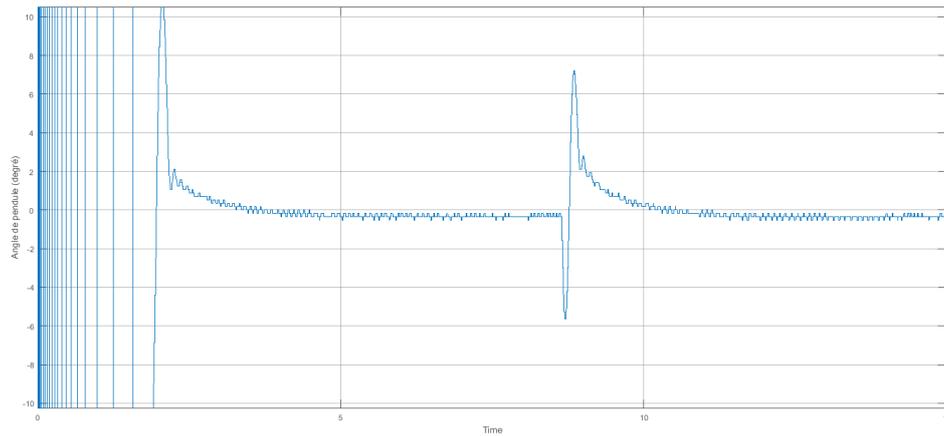


FIGURE 4.14 – L'évolution de l'angle du pendule en présence de perturbations appliquons la commande STW

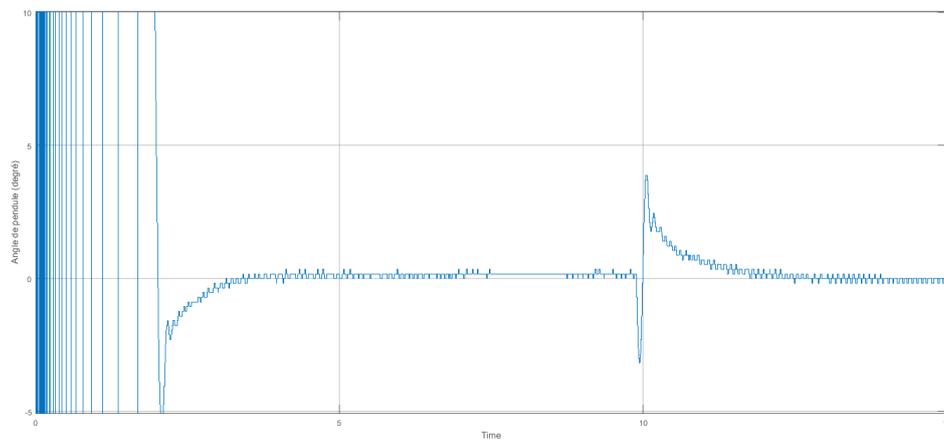


FIGURE 4.15 – L'évolution de l'angle du pendule en présence de perturbations appliquons la commande MSTW

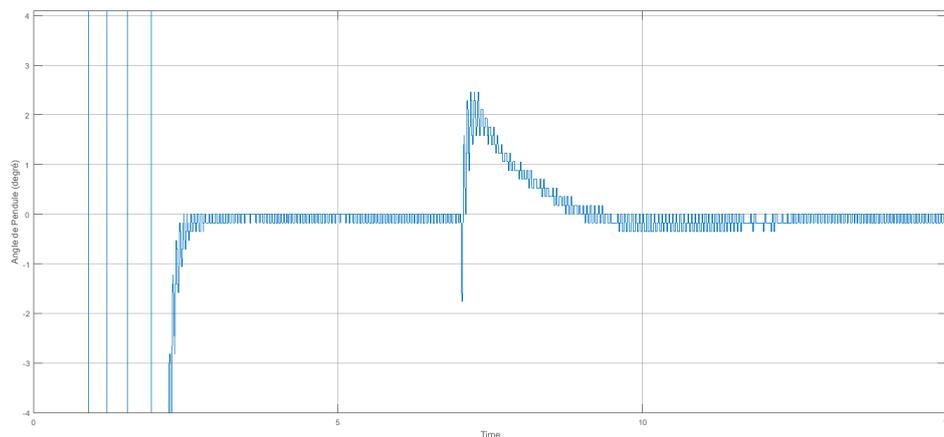


FIGURE 4.16 – L'évolution de l'angle du pendule en présence de perturbations appliquons la commande hybride

On peut observer que la commande SMC se démarque par sa robustesse face aux perturbations, bien qu'elle présente un phénomène de chattering. En revanche, la commande

STW simple présente un chattering d’amplitude inférieure à celui de la SMC, tout en conservant sa robustesse. En ce qui concerne la commande MSTW, elle se positionne comme la plus réactive, permettant une réponse rapide du bras pour assurer la stabilité du pendule. Cependant, la commande hybride présente une robustesse inférieure par rapport aux commandes mentionnées précédemment, étant donné que son principe repose sur une consommation énergétique réduite, nécessitant ainsi des compromis.

4.7 Application de commandes dépourvues de modèle mathématique sur le PIR

En collaboration avec l’étudiant **Mahiedine AYAD**, auteur du projet de fin d’études intitulé ”**Commande en temps réel d’un pendule inversé rotatif par la logique floue et par approche neuronale**”, nous avons eu l’opportunité de comparer les performances de nos commandes qui s’appuient sur des modèles mathématiques avec celles d’autres approches, telles que l’utilisation de la logique floue et des réseaux de neurones, qui ne reposent pas sur les mêmes principes, dans le contexte du contrôle du PIR.

Les résultats présentés ci-dessous ont été obtenus à l’aide de l’interface QUANSER Qube Servo 2, comme mentionné précédemment. Il convient de souligner que la mise en œuvre de la commande par logique floue repose sur l’utilisation de deux sous commandes de logique floue. La première commande permet de provoquer des oscillations du pendule, tandis que la seconde commande vise à stabiliser le pendule dans la zone de linéarité en utilisant un Switch. D’autre part, la commande par réseau de neurones s’appuie sur des techniques d’apprentissage pour réguler le système.

4.7.1 Application de la commande logique-floue sur le PIR

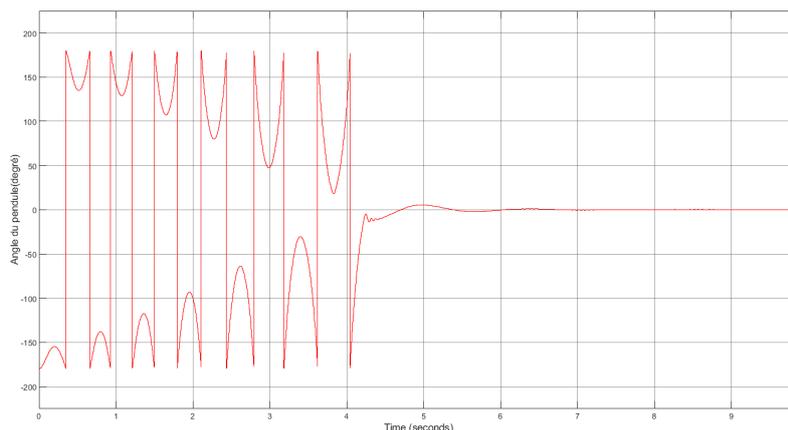


FIGURE 4.17 – L’évolution de l’angle du pendule appliquons la commande par logique floue

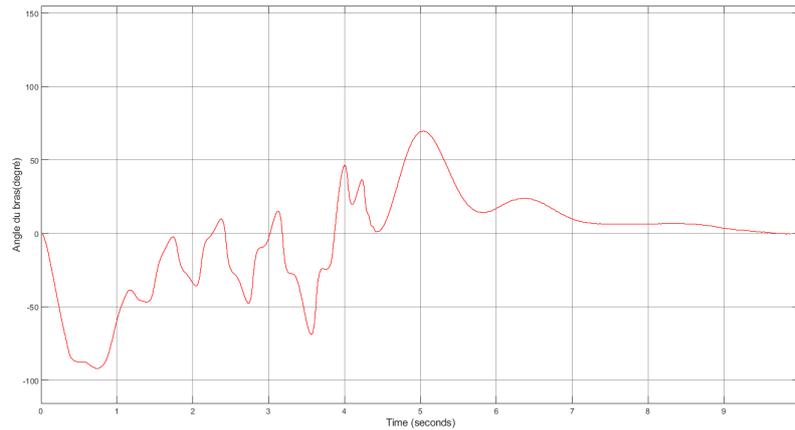


FIGURE 4.18 – L'évolution de l'angle du bras appliquons la commande par logique floue

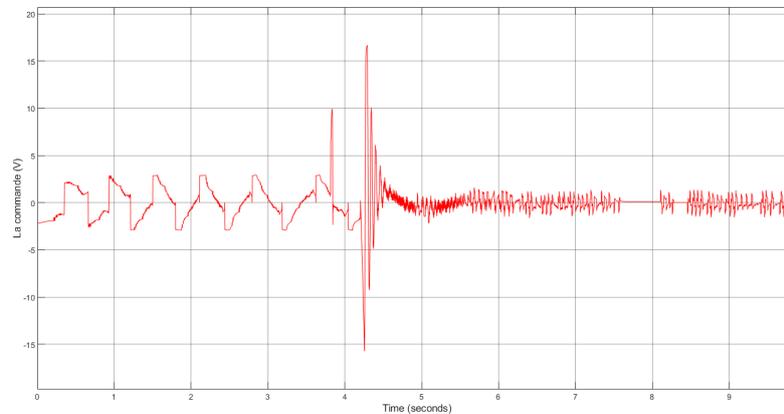


FIGURE 4.19 – L'évolution de la commande par logique floue

Les résultats obtenus dans les figures (4.17), (4.18), et (4.19) montrent l'évolution de l'angle du pendule, du bras rotatif, et de la commande par logique floue, respectivement. Il est observé que cette commande est capable de redresser le pendule et de le stabiliser dans sa position d'équilibre instable en un temps de 5 secondes. Cependant, il est important de noter que cette commande nécessite une consommation d'énergie plus élevée, atteignant 18V.

4.7.2 Application de la commande réseau de neurones sur le PIR

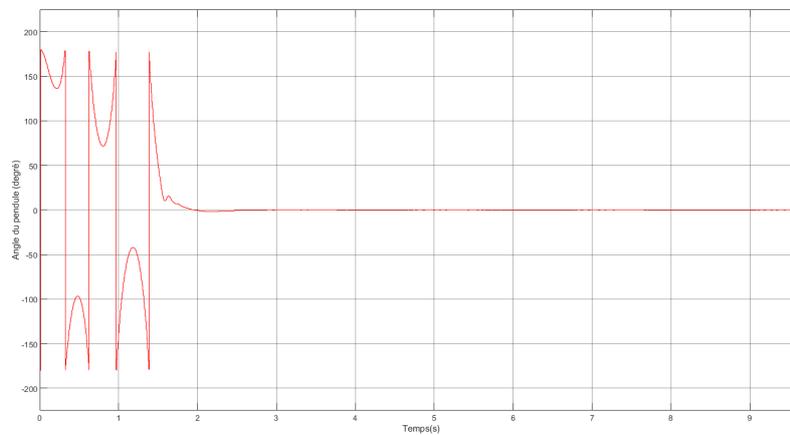


FIGURE 4.20 – L'évolution de l'angle du pendule appliquons la commande par réseau de neurones

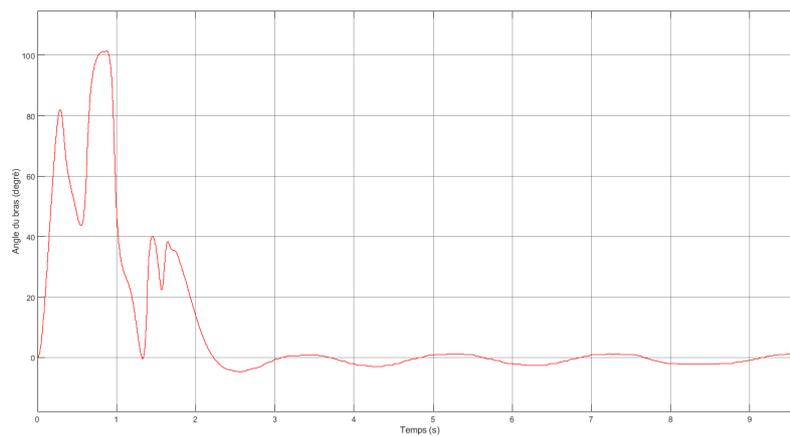


FIGURE 4.21 – L'évolution de l'angle du bras appliquons la commande par réseau de neurones

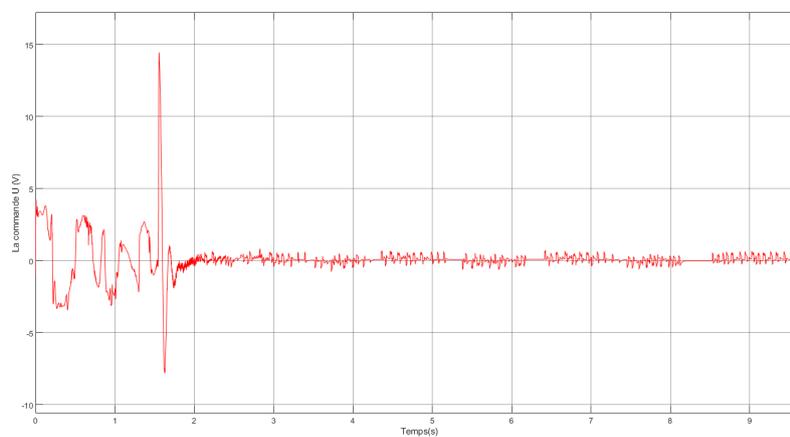


FIGURE 4.22 – L'évolution de la commande par réseau de neurones

L'évolution du pendule, du bras rotatif et de la commande par réseau de neurones sont présentés respectivement dans les figures (4.20) (4.21) (4.22). On remarque que la commande par réseau de neurones se distingue par sa rapidité, sa robustesse et sa précision. En effet, le temps requis pour que le pendule atteigne la position désirée est réduit à seulement 2 secondes, ce qui est considérablement plus rapide. De plus, la consommation d'énergie de cette commande est relativement faible, atteignant seulement 14V. On note également une réduction du phénomène de chattering. Cependant, il est important de souligner que l'angle du bras rotatif ne reste pas systématiquement dans la position d'équilibre souhaitée, présentant une légère déviation.

4.8 Comparaison entre les commandes

Il est important de souligner que la comparaison entre les différentes approches de commande ne conduit pas à une conclusion définitive quant à la supériorité d'une méthode par rapport à une autre. Au contraire, la sélection de la méthode de commande optimale dépend des caractéristiques spécifiques de chaque approche, qui doivent être évaluées en fonction des exigences du système à commander.

Dans le contexte des systèmes de commande, une approche basée sur un modèle mathématique peut offrir à la fois une robustesse élevée et une rapidité d'exécution, même si cela se fait au prix d'une consommation d'énergie plus élevée. Cependant, il est important de noter que certains systèmes ne nécessitent pas une robustesse aussi élevée ou ne disposent pas d'un modèle mathématique précis. Dans de tels cas, il est possible d'adopter des approches alternatives telles que les commandes basées sur des réseaux de neurones ou la logique floue. Ces approches se distinguent par leur rapidité d'exécution et leur consommation d'énergie réduite. Toutefois, il convient de souligner que la principale force des commandes basées sur des modèles mathématiques réside dans leur capacité à faire face aux variations et aux perturbations du système de manière robuste.

4.9 Conclusion

En conclusion, ce chapitre a exploré l'application des commandes non linéaires sur le pendule inversé rotatif et a mis en lumière les performances et les caractéristiques des diverses approches de commande. Il est manifeste que la robustesse de ces commandes se révèle lorsque celles-ci sont appliquées à des systèmes complexes tels que les robots.

CONCLUSION GÉNÉRALE

Dans le cadre de cette étude, nous avons examiné en détail le contrôle du pendule inversé rotatif en utilisant deux approches de commande distinctes : les commandes linéaires et les commandes non linéaires. Les commandes linéaires se sont révélées efficaces pour stabiliser le pendule dans la zone de linéarité, tandis que les commandes non linéaires ont permis de prendre en compte la nature intrinsèquement non linéaire du système, conduisant ainsi à des résultats plus satisfaisants.

Les expériences menées ont confirmé l'importance de considérer la non linéarité du pendule inversé rotatif lors de la conception des stratégies de commande. Les résultats obtenus ont démontré que les commandes non linéaires permettent une meilleure régulation du système, en minimisant les erreurs et les écarts par rapport à la consigne.

Cette étude a profondément enrichi notre compréhension des principes de commande appliqués aux pendules inversés rotatifs. Elle a souligné l'importance de développer des stratégies de commande spécifiquement adaptées à la nature particulière de ce système dynamique. En effet, les caractéristiques non linéaires du pendule inversé rotatif exigent une approche de commande plus sophistiquée pour obtenir des performances optimales.

Les connaissances acquises au cours de cette recherche ne se limitent pas uniquement au pendule inversé rotatif, mais peuvent également être étendues à d'autres systèmes non linéaires similaires. Cette étude ouvre ainsi de nouvelles perspectives passionnantes dans le domaine du contrôle des systèmes dynamiques, offrant des opportunités de recherche supplémentaires pour améliorer les performances des pendules inversés rotatifs dans diverses applications pratiques, telles que les robots et les dispositifs de stabilisation.

En somme, cette étude apporte une contribution significative à l'avancement des connaissances dans le domaine de l'automatique en proposant des solutions de commande efficaces pour les systèmes complexes. Les résultats obtenus servent de fondement solide pour les futures recherches visant à développer des stratégies de commande encore plus performantes et à explorer de nouvelles applications pour ces systèmes dynamiques fascinants.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] 2, Quanser Qube Servo: *Pendule inversé rotationnel*. <https://www.quanser.com/products/qube-servo-2/>, <https://www.quanser.com/products/qube-servo-2/>.
- [2] ABDERREZEK, Hadjer: *Contribution à la commande robuste des systèmes non linéaires*. Mémoire de Magistère, UNIVERSITÉ FERHAT ABBAS -SETIF-1UFAS1 (ALGERIE), 2015.
- [3] AISSAT, Nesrine: *Modélisation et commande d'un système non linéaire : Application au pendule inversé rotatif*. Mémoire d'ingénieur, Ecole supérieure en science appliquée de Tlemcen, 2020.
- [4] Automation, Robotics: *Delivery robot*. <https://roboticsandautomationnews.com/2019/01/25/segway-robotics-showcases-its-delivery-robot-loomo/20720/>, <https://roboticsandautomationnews.com/2019/01/25/segway-robotics-showcases-its-delivery-robot-loomo/20720/>.
- [5] Bariza, BELOURGHI, HOUICHI Larbi et HEDDAM Salim: *RESEAUX DE NEURONES ARTIFICIELS POUR LA MODELISATION DU DOSAGE DU COAGULANT DANS LES STATIONS DE TRAITEMENTS DES EAUX DE SURFACE A FAIBLE TURBIDITE*. 2012.
- [6] Bennett, Stuart: *A history of control engineering, 1930-1955*. Numéro 47. IET, 1993.
- [7] BERKOUNE, Ali Abdessetar et Mohammed Rida RABEHI: *Modélisation et commande en temps réel d'un pendule inversé rotatif : Approche linéaire*. Mémoire d'ingénieur, Ecole supérieure en science appliquée de Tlemcen, 2021.
- [8] Bhatia, Divya: *English Technical Report and Correction : Performance Comparison of SMC, LQR and PD control for Spacecraft High Accuracy Pointing (Teilvorhaben TU Braunschweig)*. mai 2021.
- [9] Castro, Arnaldo: *Modeling and dynamic analysis of a two-wheeled inverted-pendulum*. Mémoire de Master, Institut de Technologie, Georgia, 2012.
- [10] Elhasairi, Ahmed et Alexandre Pechev: *Humanoid robot balance control using the spherical inverted pendulum mode*. *Frontiers in Robotics and AI*, 2 :21, 2015.
- [11] Emami-Naeini, Abbas: *Analytic feedback system design : an interpolation approach : Peter Dorato ; Brooks and Cole, Pacific Grove, CA, 2000, ISBN : 0-534-36917-0, 2003*.

- [12] Farid, BENABIDA et FITAH Lahcen: *Commande synergétique et modélisation floue de type takagi-Sugeno appliquées aux systèmes hyperchaotiques*. Thèse de doctorat, faculté des sciences et de la technologie univ bba, 2022.
- [13] George, Abby Joseph Arakal: *Human Powered Energy Harvester based on Autowinder Mechanism : Analysis, Build and Test*. Thèse de doctorat, Clemson University, 2019.
- [14] group, Panasonic: *Hospi*. <https://news.panasonic.com/global/topics/4728>, <https://news.panasonic.com/global/topics/4728>.
- [15] Guendouzi, Mohamed amine: *Commande d'un entraînement avec machine à courant continu : Méthodes de l'espace d'état*. Mémoire de master, UNIVERSITE LARBI BEN M'HIDI OUM EL BOUAGHI, 2018.
- [16] Haken, Hermann: *Synergetics*. Scholarpedia, 2(1) :1400, 2007.
- [17] Kahouadji, Mouad, M Rida Mokhtari, Amal Choukchou-Braham et Brahim Cherki: *Real-time attitude control of 3 DOF quadrotor UAV using modified super twisting algorithm*. Journal of the Franklin Institute, 357(5) :2681–2695, 2020.
- [18] Kater, Henry: *XXII. An account of experiments for determining the variation in the length of the pendulum vibrating seconds, at the principal stations of the Trigonometrical Survey of Great Britian*. Philosophical Transactions of the Royal Society of London, (109) :337–508, 1819.
- [19] Khanesar, Mojtaba Ahmadi, Mohammad Teshnehlab et Mahdi Aliyari Shoorehdeli: *Sliding mode control of rotary inverted pendulum*. Dans *2007 Mediterranean Conference on Control & Automation*, pages 1–6. IEEE, 2007.
- [20] LEOBOTICS: *Robot humanoïde*. <https://www.leobotics.fr/comparateur-robot/robot-professionnel-industrie-telecommunication-axes-mobile-agv-pro-leobotics-robotics/recherche-et-developpement-robot-etude-laboratoire-humanoïde-biomimetisme-e-quadrupede-mini-micro-robotics/robot-humanoïde-android-bipede/robot-humanoïde-dynamique-agile-atlas-boston-dynamics/>, <https://www.leobotics.fr/comparateur-robot/robot-professionnel-industrie-telecommunication-axes-mobile-agv-pro-leobotics-robotics/recherche-et-developpement-robot-etude-laboratoire-humanoïde-biomimetisme-quadrupede-mini-micro-robotics/robot-humanoïde-android-bipede/robot-humanoïde-dynamique-agile-atlas-boston-dynamics/>.
- [21] louis, Abraham: *Tourbillon*. <https://www.my-watchsite.fr/blog/il-etait-une-fois-le-tourbillon/>, <https://www.my-watchsite.fr/blog/il-etait-une-fois-le-tourbillon/>.
- [22] Lundberg, Kent H et Taylor W Barton: *History of inverted-pendulum systems*. IFAC Proceedings Volumes, 42(24) :131–135, 2010.
- [23] Mechernene, A, M Zerikat et M Hachlef: *Régulation floue de la vitesse d'un moteur asynchrone triphasé dans une commande vectorielle par orientation du flux rotorique*. 2007.
- [24] mécanique, Oscillateur: *Pendule conique*. <https://www.chimix.com/T-fiches/osc-mec.htm>, <https://www.chimix.com/T-fiches/osc-mec.htm>.
- [25] NewtechStore: *Robot intelligent*. <https://fr.newtechstore.eu/product/rc-robot-intelligent-avec-balance-a-deux-roues/>, <https://fr.newtechstore.eu/product/rc-robot-intelligent-avec-balance-a-deux-roues/>.
- [26] Nguyen, Ngo Phong, Hyondong Oh, Yoonsoo Kim et Jun Moon: *A nonlinear hybrid controller for swinging-up and stabilizing the rotary inverted pendulum*. Nonlinear Dynamics, 104 :1117–1137, 2021.

- [27] Norouzi, Armin et Charles Robert Koch: *Integration of PD-type iterative learning control with adaptive sliding mode control*. IFAC-PapersOnLine, 53(2) :6213–6218, 2020.
- [28] Nyquist, Harry: *Regeneration theory*. Bell system technical journal, 11(1) :126–147, 1932.
- [29] OPR, Empower de Ottobock chez: *Prothèse active*. <https://opr35.com/2019/01/11/de-cheville-active-empower-de-ottobock-chez-opr/>, <https://opr35.com/2019/01/11/de-cheville-active-empower-de-ottobock-chez-opr/>.
- [30] RABEHI, Mohammed Rida et Ali Abdessetar BERKOUNE: *Modélisation et commande non linéaire d'un pendule inversé rotatif*. Mémoire de master, Ecole Supérieure en Science Appliqué de Tlemcen, 2021.
- [31] reconditionné, Gyropode Segway i2: *Segway*. <https://www.segwayfrance.com/produit/gyropode-segway-i2-securite-copie/>, <https://www.segwayfrance.com/produit/gyropode-segway-i2-securite-copie/>.
- [32] Renaudo, Erwan: *Des comportements flexibles aux comportements habituels : Meta-apprentissage neuro-inspiré pour la robotique autonome*. Thèse de doctorat, Université Pierre et Marie Curie (Paris 6), 2016.
- [33] ROBOTS: *Big-Dog*. <https://robots.ieee.org/robots/bigdog/>, <https://robots.ieee.org/robots/bigdog/>.
- [34] Science.lu: *Appareil de Hygens*. <https://www.science.lu/fr/eppur-si-muove/lappareil-huygens-comment-mesurer-le-temps-maniere-precise>, <https://www.science.lu/fr/eppur-si-muove/lappareil-huygens-comment-mesurer-le-temps-maniere-precise>.
- [35] Techni-contact: *Robot de téléprésence*. <https://www.techni-contact.com/produits/857571-33451892-robot-de-tele-presence.html>, <https://www.techni-contact.com/produits/857571-33451892-robot-de-tele-presence.html>.
- [36] TOULOUSE, Université: *Systèmes linéaires à Temps Continu*. https://master-eea.univ-tlse3.fr/wp-content/uploads/2018/10/Sujets_TPs.pdf, https://master-eea.univ-tlse3.fr/wp-content/uploads/2018/10/Sujets_TPs.pdf.
- [37] Wikipédia: *Pendule cycloïdal*. https://fr.wikipedia.org/w/index.php?title=Pendule_cyclo%C3%AFdal&oldid=200590887, https://fr.wikipedia.org/w/index.php?title=Pendule_cyclo%C3%AFdal&oldid=200590887.
- [38] Wikipédia: *Pendule de Kater*. https://fr.wikipedia.org/wiki/Pendule_de_Kater, https://fr.wikipedia.org/wiki/Pendule_de_Kater.
- [39] Wikipédia: *Pendule double*. https://fr.wikipedia.org/wiki/Pendule_double, https://fr.wikipedia.org/wiki/Pendule_double.
- [40] Wikipédia: *Pendule simple*. https://fr.wikipedia.org/wiki/Pendule_simple, https://fr.wikipedia.org/wiki/Pendule_simple.
- [41] Wikipédia: *Pendule élastique*. https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Pendule_%C3%A9lastique_vertical_amorti_-_bis.png?uselang=fr, https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Pendule_%C3%A9lastique_vertical_amorti_-_bis.png?uselang=fr.
- [42] Yoder, Joella G: *Unrolling time : Christiaan Huygens and the mathematization of nature*. AMC, 10 :12, 1988.
- [43] Ziegler, John G et Nathaniel B Nichols: *Optimum settings for automatic controllers*. Transactions of the American society of mechanical engineers, 64(8) :759–765, 1942.

Résumé:

L'objectif de cette étude est de concevoir des stratégies de commande pour le système de pendule inversé rotatif, utilisant la maquette du QUANSER QUBE Servo 2. Deux approches de commande sont appliquées. La première approche représente des commandes linéaires (Placement de Pôles "PP", Commande Linéaire Quadratique "LQR" et Régulateur Proportionnel Dérivé "PD"), après avoir linéarisé le système autour du point d'équilibre instable, ce qui limite leur fonctionnement à la zone de linéarité.

La deuxième approche repose sur les commandes non linéaires, à savoir la commande par mode glissant "SMC", la commande super-twisting simple "STW", la commande super-twisting modifiée "MSTW" et la commande hybride synergétique-Swing UP. Ces commandes exploitent le modèle mathématique non linéaire du système. Les résultats expérimentaux de ces commandes non linéaires seront ensuite comparés aux résultats obtenus avec l'application de la logique floue et des réseaux de neurones, dans le cadre d'une collaboration avec un étudiant.

Mots clés: Système non linéaire, Pendule inversé rotatif, Modélisation mathématique, Commande linéaire, Commande non linéaire, Point d'équilibre.

Abstract:

The objective of this study is to design control strategies for the rotary inverted pendulum system using the QUANSER QUBE Servo 2 model. Two control approaches are applied: linear controls (Pole Placement "PP," Linear Quadratic Control "LQR," and Proportional Derivative Control "PD"), after linearizing the system around the unstable equilibrium point, which limits their operation to the linear region.

The second approach relies on non-linear controls, including sliding mode control "SMC," simple super-twisting control "STW," modified super-twisting control "MSTW," and hybrid synergistic-swing UP control. These controls exploit the non-linear mathematical model of the system. The experimental results of these non-linear controls will then be compared with the results obtained from the application of fuzzy logic and neural networks, in collaboration with a student.

Keywords: Nonlinear system, Rotary inverted pendulum, Mathematical modeling, Linear control, Nonlinear control, Equilibrium point.

ملخص:

الهدف من هذه الدراسة هو تصميم استراتيجيات التحكم لنظام النواس المقلوب ، باستخدام نموذج QUANSER QUBE Servo 2. يتم تطبيق طريقتين للتحكم: التحكم الخطي (وضع الأقطاب ، والتحكم الخطي التربيعي و المنظم الاشتقاقي النسبي) ، بعد جعل النظام خطيًا حول نقطة التوازن غير المستقر ، مما يحد من تشغيله في منطقة الخطية.

يعتمد الأسلوب الثاني على أدوات التحكم غير الخطية ، بما في ذلك التحكم في الوضع الانزلاقي ، والتحكم البسيط في الالتواء الفائق ، والتحكم في الالتواء الفائق المعدل ، والتحكم الهجين التآزر والتأرجح. تستغل هذه الأوامر النموذج الرياضي غير الخطي للنظام. ستتم مقارنة النتائج التجريبية لهذه الضوابط غير الخطية بالنتائج التي تم الحصول عليها من خلال تطبيق المنطق الضبابي والشبكات العصبية ، في إطار التعاون مع الطالب

الكلمات المفتاحية: النظام غير الخطي ، النواس المقلوب الدوار ، النمذجة الرياضية ، التحكم الخطي ، التحكم غير الخطي ، نقطة التوازن

