République algérienne démocratique et populaire

Ministère de l’Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Ecole supérieure en sciences appliquées de Tlemcen

Département de la formation préparatoire

Introduction à l'algèbre linéaire

Cours et exercices

Auteur : Bensid Yazid

Année universitaire : 2022/2023

Introduction à l'algèbre linéaire

Cours et exercices

Bensid Yazid

ESAA-Tlemcen

ybensid.joomla.com

Première impression, Octobre 2022

Table des matières

Préface

Ce polycopié traite du module d'algèbre linéaire. Il est le fruit de l'enseignement du module algèbre 2 en première année dans le cadre de la formation préparatoire à l'école supérieure en sciences appliquées de Tlemcen (ESSAT). Cet ouvrage est donc destiné aux premières années des classes préparatoires aux grandes écoles mais aussi aux étudiants de première année de tronc commun (MI-ST-SM). Ce manuscrit comprend 5 chapitres qui couvrent l'ensemble du programme du module algèbre 2 :

Le premier chapitre présente la notion fondamentale d'espace vectoriel, on y aborde aussi les notions de familles libres, génératrices bases et dimension. De nombreux exemples sont fournies pour que l'étudiant puisse se familiariser avec ses nouvelles définitions.

Le second chapitre est consacrée aux applications linéaires dans lequel on définit aussi le noyau et l'image et on caractérise les applications bijectives. Nous avons fait le choix de fournir des exemples de géométrie car l'étudiant est déjà familier avec ce types d'applications.

Le troisieme chapitre traite des matrices et des déterminants, on y detaille les opérations élementaires sur les matrices comme l'addition la multiplication ainsi que l'inverse d'une matrice.

Dans le quatrième chapitre on expose deux méthodes de résolution des systèmes linéaires que sont la règle de Cramer et la méthode de gauss.

Enfin, dans le cinquième et dernier chapitre on aborde la notion de diagonalisation et de trigonalisation des endomorphismes avec des exemples détaillés. On a choisit de présenter au début de ce chapitre les notions de matrice de passage et de matrice associée pour d'une part tirer partie de la notion de systèmes linéaires vu au chapitre précèdent mais aussi de motiver l'introduction de la notion de réduction des endomorphismes à venir.

A la fin de chaque chapitre on retrouve une série d'exercices avec leur corrigés detaillés.

Comme tout travail le notre reste bien évidemment perfectible, nous invitons donc le lecteur à nous faire parvenir toute remarque ou suggestion pour améliorer notre manuscrit.

1. Espaces vectoriels

1.1 Definitions

Définition 1.1.1 Soit $\mathbb{K}$ un corps (par ex :$\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) et soit $\mathbb{E}$ un ensemble muni d'une loi de composition interne notée $(+)$ et d'une loi de composition externe $(.)$ définie par

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{K}\times\mathbb{E} & \to & \mathbb{E} \\ (\lambda, V) & \to & \lambda.V \end{array}$$

$\mathbb{E}$ est un $\mathbb{K}-$espace vectoriel seulement si :

1. $(\mathbb{E}, +)$ est un groupe abelien.
2. $\forall\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, $\forall V_1, V_2 \in \mathbb{E}$ on a :
   (a) $(\lambda+\mu).V_1 = \lambda.V_1 + \mu.V_1$
   (b) $\lambda.(V_1+V_2) = \lambda.V_1 + \lambda.V_2$
   (c) $(\lambda\mu).V_1 = \lambda(\mu.V_1)$
   (d) $1.V_1 = V_1$ avec : 1 l'element neutre de l'operation "multiplication" du corps $\mathbb{K}$.

■ **Exemple 1.1**

1. l'ensemble des polynômes $\mathbb{K}[X]$ est un $\mathbb{K}-$espace vectoriel.
2. $\mathbb{R}^n$, $\quad n \geq 1$ est un $\mathbb{R}-$ espace vectoriel.
3. l'ensemble des fonctions $\mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ est un $\mathbb{R}-$ espace vectoriel.

■

Définition 1.1.2 $F \subset \mathbb{E}$ est un sous espace vectoriel de $\mathbb{E}$ ssi :

1. $0 \in F$ (F non vide)
2. $\forall V_1, V_2 \in F$ on a : $V_1 + V_2 \in F$ (Stabilité)
3. $\forall\lambda \in \mathbb{K}$, $\forall V \in F$ on a : $\lambda V \in F$ (Multiplication par un scalaire)

■ **Exemple 1.2**

1. $\mathbb{K}_n[X]$ est un sous espace vectoriel de l'espace des polynômes $\mathbb{K}[X]$.
2. l'ensemble des fonctions continues $\mathscr{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ est un sous espace vectoriel de l'espace des fonctions $\mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

3. $\mathscr{A} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x+y=0\}$ est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$

■

1.2 Somme de sous espaces vectoriels, somme directe

Définition 1.2.1 Soit $\mathbb{E}$ un $\mathbb{K}-$espace vectoriel et soient $\mathscr{A}_1$, $\mathscr{A}_2$ deux sev de $\mathbb{E}$
On définie la somme de $\mathscr{A}_1$ et $\mathscr{A}_2$ par :

$$\mathscr{A}_1 + \mathscr{A}_2 = \{V \in \mathbb{E}/\ V = V_1 + V_2 \text{ avec } V_1 \in \mathscr{A}_1 \text{ et } V_2 \in \mathscr{A}_2\}$$

Lemme 1.2.1 $\mathscr{A}_1 + \mathscr{A}_2$ est un sev de $\mathbb{E}$

Définition 1.2.2 Soient $\mathscr{A}_1$, $\mathscr{A}_2$ deux sev de $\mathbb{E}$

$\mathscr{A}_1$, $\mathscr{A}_2$ sont en somme directe ssi $\mathscr{A}_1 \cap \mathscr{A}_2 = \{0\}$

$\mathscr{A}_1$, $\mathscr{A}_2$ sont supplémentaires dans $\mathbb{E}$ et on note $\mathbb{E} = \mathscr{A}_1 \oplus \mathscr{A}_2$ ssi :

$$\mathscr{A}_1 \cap \mathscr{A}_2 = \{0\} \text{ et } \mathscr{A}_1 + \mathscr{A}_2 = \mathbb{E}$$

Theorème 1.2.2 Soient $\mathscr{A}_1$, $\mathscr{A}_2$ deux sev de $\mathbb{E}$

$$\mathbb{E} = \mathscr{A}_1 \oplus \mathscr{A}_2 \Leftrightarrow \forall V \in \mathbb{E},\ \exists!(V_1,V_2) \in \mathscr{A}_1 \times \mathscr{A}_2,\ V = V_1 + V_2$$

■ **Exemple 1.3** Soient $\mathscr{A}_1$, $\mathscr{A}_2$ deux sev de $\mathbb{R}^2$ avec :
$\mathscr{A}_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2/x=0\}$ $\quad \mathscr{A}_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2/y=0\}$

$$\mathbb{R}^2 = \mathscr{A}_1 \oplus \mathscr{A}_2$$

■

■ **Exemple 1.4**
Soient $\mathscr{A}_1$, $\mathscr{A}_2$ deux sev de $\mathbb{R}^3$ avec :
$\mathscr{A}_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3/x=0, y=0\}$ $\quad \mathscr{A}_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3/z=0\}$

$$\mathbb{R}^3 = \mathscr{A}_1 \oplus \mathscr{A}_2$$

■

1.3 Famille libre, famille génératrice, base et dimension

Définition 1.3.1 Soit $\mathbb{E}$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et soient $V_1, V_2, \cdots, V_k \in \mathbb{E}$

1. Un vecteur $V \in \mathbb{E}$ est dit "combinaison linéaire" des vecteurs $V_1, V_2, \cdots, V_k$ si

$$\exists \lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k \in \mathbb{K} \text{ tels que : } V = \lambda_1 V_1 + \lambda_2 V_2 + \cdots + \lambda_k V_k$$

2. La famille de vecteurs $\{V_1, V_2, \cdots, V_k\}$ est dite génératrice ssi tout vecteur de $\mathbb{E}$ s'ecrit comme combinaison linéaire des vecteurs $V_1, V_2, \cdots, V_k$ i.e :

$$\forall V \in \mathbb{E} \quad V = \lambda_1 V_1 + \lambda_2 V_2 + \cdots + \lambda_k V_k$$

R On dit aussi que $\mathbb{E}$ est engendrée par la famille $\{V_1, V_2, \cdots, V_k\}$
et on note $\mathbb{E} = Vect\{V_1, V_2, \cdots, V_k\}$

3. La famille de vecteurs $\{V_1, V_2, \cdots, V_k\}$ est dite liée ssi : $\exists(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k) \in \mathbb{K}^n \setminus \{0, 0, \cdots, 0\}$
$$\lambda_1 V_1 + \lambda_2 V_2 + \cdots + \lambda_k V_k = 0_{\mathbb{E}}$$
4. La famille de vecteurs $\{V_1, V_2, \cdots, V_k\}$ est dite libre ssi : $\forall \lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k \in \mathbb{K}$
$$\lambda_1 V_1 + \lambda_2 V_2 + \cdots + \lambda_k V_k = 0_{\mathbb{E}} \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_k = 0_{\mathbb{K}}$$
5. Une famille de vecteurs libre et génératrice est dite base.
6. On appelle dimension d'un espace vectoriel (notée $dim\mathbb{E}$) le nombre de vecteurs d'une base (i.e : $dim\mathbb{E} = Cardinal(base(\mathbb{E}))$.

Theorème 1.3.1 $dim\mathbb{E} = n$ est invariante (i.e : elle ne change pas si la base change).

R Si $dim\mathbb{E} < \infty$ alors $\mathbb{E}$ est dit de dimension finie.

Theorème 1.3.2 Soit $\mathbb{E}$ un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension finie et soit $\mathscr{B} = \{V_1, V_2, \cdots, V_n\}$ une base de $\mathbb{E}$ alors tout vecteur de $\mathbb{E}$ s'ecrit de manière unique comme combinaison linéaire des vecteurs de $\mathscr{B}$ i.e :
$$\forall V \in \mathbb{E}, \exists!\ \lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n \in \mathbb{K} \text{ tels que : } \quad V = \lambda_1 V_1 + \lambda_2 V_2 + \cdots + \lambda_n V_n$$
Les $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ sont dites composantes de V dans la base $\mathscr{B}$

On note $V = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}_{\mathscr{B}}$

■ **Exemple 1.5** Trouver la dimension de $\mathbb{R}^2$

$V \in \mathbb{R}^2 \Rightarrow V = (x, y)$ avec $x, y \in \mathbb{R} \Rightarrow (x, y) = (x, 0) + (0, y) = x(1, 0) + y(0, 1) = xe_1 + ye_2$

Donc $\mathscr{B} = \{e_1, e_2\}$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}^2$

$\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 = 0 \Rightarrow \lambda_1(1, 0) + \lambda_2(0, 1) = (0, 0) \Rightarrow (\lambda_1, 0) + (0, \lambda_2) = (0, 0) \Rightarrow (\lambda_1, \lambda_2) = (0, 0)$
$\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0 \Rightarrow \mathscr{B}$ est une famille libre de $\mathbb{R}^2$

On appelle $\mathscr{B}$ base canonique de $\mathbb{R}^2$

$dim\,\mathbb{R}^2 = Card\,\mathscr{B} = 2$

$V \in \mathbb{R}^2 \Rightarrow V = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_{\mathscr{B}} \Rightarrow x$ et y sont les composantes du vecteur V dans la base $\mathscr{B}$ ■

Theorème 1.3.3 Soit $\mathscr{B} = \{e_1, e_2, e_3, \cdots, e_n\} = \{(1, 0, \cdots, 0), (0, 1, \cdots, 0), \cdots, (0, 0, \cdots, 1)\}$. $\mathscr{B}$ est dite base canonique de $\mathbb{R}^n$.
$$\boxed{dim\,\mathbb{R}^n = n}$$
$$V(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n \Rightarrow V = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_{\mathscr{B}}$$

■ **Exemple 1.6** Trouver la dimension de $\mathbb{R}_2[X]$

$V \in \mathbb{R}_2[X] \Rightarrow V(X) = a_0 + a_1X + a_2X^2$ avec $a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}$
$\Rightarrow V(X) = a_0(1) + a_1(X) + a_2(X^2) = a_0e_1 + a_1e_2 + a_2e_3$
Donc $\mathscr{B} = \{e_1, e_2, e_3\} = \{1, X, X^2\}$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}_2[X]$
$\lambda_1e_1 + \lambda_2e_2 + \lambda_3e_3 = 0 \Rightarrow \lambda_1(1) + \lambda_2(X) + \lambda_3(X^2) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0 \Rightarrow \mathscr{B}$ est une famille libre de $\mathbb{R}_2[X]$
On appelle $\mathscr{B}$ base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$
$dim\,\mathbb{R}_2[X] = Card\,\mathscr{B} = 3$

$$V \in \mathbb{R}_2[X] \Rightarrow V = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}_{\mathscr{B}}$$

$$P(X) = 3 - 2X + 5X^2 \Rightarrow P = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}_{\mathscr{B}}$$

■

Theorème 1.3.4 Soit $\mathscr{B} = \{e_1, e_2, e_3, \cdots, e_{n+1}\} = \{1, X, X^2, \cdots, X^n\}$
Alors, $\mathscr{B}$ est dite base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.

$$\boxed{dim\,\mathbb{R}_n[X] = n+1}$$

Soit $V(X) = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \cdots + a_nX^n$

$$V \in \mathbb{R}_n[X] \Rightarrow V = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}_{\mathscr{B}}$$

Theorème 1.3.5 — Théorème de la base incomplète. Soit $\mathbb{E}$ un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension finie.

1. Toute famille famille libre peut etre complétée de manière à former une base de $\mathbb{E}$.
2. De toute famille génératrice, on peut extraire une base de $\mathbb{E}$.

Corollaire 1.3.6 Soit $\mathbb{E}$ un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension finie $dim\mathbb{E} = n$

1. Toute famille de plus de n vecteurs est liée.
2. Toute famille de moins de n vecteurs ne peut être generatrice.
3. Toute famille libre de n vecteurs est une base
4. Toute famille generatrice de n vecteurs est une base

■ **Exemple 1.7** $\mathscr{B}' = \{V_1, V_2\}$ avec $V_1 = (1,1) \quad V_2 = (1,0)$
$V \in \mathbb{R}^2 \Rightarrow V = (x,y)$ avec $x, y \in \mathbb{R}$
$\Rightarrow (x,y) = (y,y) + (x-y, 0) = y(1,1) + (x-y)(1,0) = yV_1 + (x-y)V_2$
Donc $\mathscr{B}'$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}^2$
$dim\,\mathbb{R}^2 = Card\,\mathscr{B}' = 2 \Rightarrow \mathscr{B}'$ est une base de $\mathbb{R}^2$

$$V \in \mathbb{R}^2 \Rightarrow V = yV_1 + (x-y)V_2 = \begin{pmatrix} y \\ x-y \end{pmatrix}_{\mathscr{B}'}$$

$$V = (-1,3) = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}_{\mathscr{B}} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}_{\mathscr{B}'}$$

■

■ **Exemple 1.8** $\mathscr{B}' = \{V_1, V_2\}$ avec $V_1(X) = X - 1 \quad V_2(X) = X + 1$
$V \in \mathbb{R}_1[X] \Rightarrow V(X) = a_0 + a_1X$ avec $a_0, a_1 \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow V(X) = \frac{a_1+a_0}{2}(X+1) + \frac{a_1-a_0}{2}(X-1) = \frac{a_1+a_0}{2}V_1 + \frac{a_1-a_0}{2}V_2$
Donc $\mathscr{B}' = \{V_1, V_2\}$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}_1[X]$
$dim\,\mathbb{R}_1[X] = Card\,\mathscr{B}' = 2 \Rightarrow \mathscr{B}'$ est une base de $\mathbb{R}_1[X]$
$V \in \mathbb{R}_1[X] \Rightarrow V = \frac{a_1+a_0}{2}V_1 + \frac{a_1-a_0}{2}V_2$

$$\Rightarrow V = \begin{pmatrix} \frac{a_1+a_0}{2} \\ \\ \frac{a_1-a_0}{2} \end{pmatrix}_{\mathscr{B}'}$$

$$P(X) = -2+3X \Rightarrow P = \begin{pmatrix} -2 \\ \\ 3 \end{pmatrix}_{\mathscr{B}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \\ \frac{5}{2} \end{pmatrix}_{\mathscr{B}'}$$ ■

Proposition 1.3.7 Soit $\mathbb{E}$ un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension finie, et soient F, G deux sev de $\mathbb{E}$ alors :

1.
$$dimF \leq dim\mathbb{E} \quad \text{et} \quad dimG \leq dim\mathbb{E}$$

2.
$$E = F \oplus G \Leftrightarrow \begin{cases} dimF + dimG & = & dimE \\ F \cap G & = & \{0\} \end{cases}$$

1.4 Espace engendré par une famille de vecteurs

Définition 1.4.1 Soit $\mathbb{E}$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et soient $V_1, V_2, \cdots, V_k \in \mathbb{E}$.
L'ensemble défini par $Vect\{V_1, V_2, \cdots, V_k\} = \{V \in E / V = \lambda_1 V_1 + \lambda_2 V_2 + \cdots + \lambda_k V_k\}$ est un sev de E. On l'appelle sous espace vectoriel engendré par les vecteurs $V_1, V_2, \cdots, V_k$.

■ **Exemple 1.9** $V_1 = (1,0,1)$ et $V_2 = (1,1,1)$
$W_1(1,2,1) \in Vect\{V_1, V2\}$ car : $W_1 = -V_1 + 2V_2$
$W_2(2,1,0) \notin Vect\{V_1, V2\}$ ■

Lemme 1.4.1 $dim\,Vect\{V_1, V_2, \cdots, V_k\} \leq k$

Exercice 1 Les sous ensembles suivants sont ils des sous espaces vectoriels ?

$$\mathscr{A}_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x + y = 2z\} \qquad \mathscr{A}_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / sin(x+y) = 0\}$$

$$\mathscr{B}_1 = \{f \in \mathscr{F} / f(-x) = -f(x)\} \qquad \mathscr{B}_2 = \{f \in \mathscr{F} / f(1) = 0 \text{ ou } f(2) = 0\}$$

$$\mathscr{C} = \{P \in \mathbb{R}[X] / P(0) = 0\}$$

■

Exercice 2 Soient $E = \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $\mathscr{C}$ l'ensemble des fonctions de E croissantes et

$$\Delta = \{f - g / f, g \in \mathscr{C}\}$$

Montrer que Δ est un sous-espace vectoriel de E. ■

Exercice 3 Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.

1. Montrer que $F \cap G$ est un sous-espace vectoriel de E
2. Montrer que $F \cup G$ est un sous-espace vectoriel de E si, et seulement si, $F \subset G$ ou $G \subset F$.

■

Exercice 4 Les sous espaces vectoriels suivants sont ils supplémentaires :

$$\mathscr{A}_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x - 2y = z\} \qquad \mathscr{A}_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / (y = 0) \text{ et } (x + z = 0)\}$$

$$\mathscr{B}_1 = \{f \in \mathscr{F} / f(-x) = -f(x)\} \qquad \mathscr{B}_2 = \{f \in \mathscr{F} / f(-x) = f(x)\}$$

■

Exercice 5 Soient $E_k = \{P \in \mathbb{R}[X] / (X - k) \text{ divise } P \text{ avec } k \in \mathbb{R}\}$

1. Vérifier que E_k est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$
2. Montrer que $\forall a, b \in \mathbb{R} \quad a \neq b \Rightarrow \mathbb{R}[X] = E_a + E_b$
3. La somme est elle directe ?

■

Exercice 6

1. Soit $\mathscr{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ une base de E, les familles suivantes sont elles libres ?

$$\{-e_1, 2e_2, e_3\} \qquad \{e_2 - e_1, e_3 - e_2, e_1 - e_3\} \qquad \{e_1, 2e_2 + e_3, e_2 + e_3\}$$

2. Dans $\mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ montrer que les familles suivantes sont libres :

$$\{x, e^x\} \qquad \{x, sin(x)\} \qquad \{sin(x), cos(x)\}$$

■

Exercice 7 Soit $\mathscr{B}' = \{V_1, V_2, V_3\}$ une famille de vecteurs de $\mathbb{R}^3$ avec :
$V_1(1,0,1)$, $\quad V_2(1,1,1)$ et $V_3(1,1,0)$

1. Vérifier que $\mathscr{B}' = \{V_1, V_2, V_3\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$
2. Écrire le vecteur $V = (3,2,1)$ dans la base canonique $\mathscr{B}$ puis dans la base $\mathscr{B}'$

Exercice 8 Soient a, b, c trois réels distincts et $\mathscr{B}'$ une famille de $\mathbb{R}_2[X]$ définie par :

$$\mathscr{B}' = \left\{ \frac{(X-b)(X-c)}{(a-b)(a-c)}, \frac{(X-a)(X-c)}{(b-a)(b-c)}, \frac{(X-a)(X-b)}{(c-a)(c-b)} \right\}$$

1. Vérifier que $\mathscr{B}'$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Trouver $Q \in \mathbb{R}_2[X]$ tel que $Q(1) = -1$, $Q(2) = 3$ et $Q(3) = 5$.
3. Écrire le polynôme Q dans dans la base $\mathscr{B}'$ puis dans la base canonique $\mathscr{B}$.

Exercice 9 Soient α, β, γ trois réels fixés et f, g, h les fonctions définies par :
$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \cos(x+\alpha),\ g(x) = \cos(x+\beta)$ et $h(x) = \cos(x+\gamma)$

1. Vérifier que f, g, h appartiennent à $T = Vect < \cos x, \sin x >$
2. La famille $\{f, g, h\}$ est elle libre ?

Exercice 10

1. Dans $\mathbb{R}^3$, déterminer une base et un supplémentaire des sous-espaces vectoriels suivants :
   a) $F = \text{Vect}(U, V, W)$ où $U = (-1,1,0), V = (2,0,1)$ et $W = (1,1,1)$
   b) $F = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x - 2y + 3z = 0\right\}$.
2. Déterminer un supplémentaire de $F = vect\{U\}$ avec $U = (1,0,1)$

Exercice 11 Soit $F = \{P \in \mathbb{R}_2[X] / P(0) = P'(0)\}$

1. Vérifier que F est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}_2[X]$
2. Déterminer une base et la dimension de F
3. Déterminer un supplémentaire de F

Exercice 12 Calculer la dimension de $\mathbb{C}_2[X]$ vu comme un $\mathbb{C}$-espace vectoriel puis comme un $\mathbb{R}$-espace vectoriel

Exercice 1 Les sous ensembles suivants sont ils des sous espaces vectoriels ?

$\mathscr{A}_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x+y = 2z\}$

- $(0,0,0) \in \mathscr{A}_1$ car $0+0 = 2(0)$
- Soient $V_1 = (x_1,y_1,z_1)$ et $V_2 = (x_2,y_2,z_2)$ deux vecteurs de $\mathscr{A}_1$
  $\left\{\begin{array}{l} x_1+y_1 = 2z_1 \\ x_2+y_2 = 2z_2 \end{array}\right. \Rightarrow (x_1+x_2)+(y_1+y_2) = 2(z_1+z_2) \Rightarrow V_1+V_2 \in \mathscr{A}_1$
- Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $V = (x,y,z)$ un vecteur de $\mathscr{A}_1$
  $x+y = 2z \Rightarrow \lambda x + \lambda y = 2\lambda z \Rightarrow \lambda V \in \mathscr{A}_1$

Donc $\mathscr{A}_1$ est un sev de $\mathbb{R}^3$

$\mathscr{A}_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / sin(x+y) = 0\}$

- $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \in \mathscr{A}_2$ car : $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right) = \sin\pi = 0$
  Mais $\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \notin \mathscr{A}_2$ car : $\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\right) = \sin\frac{\pi}{2} = 1 \neq 0$
  Donc $\mathscr{A}_2$ n'est pas un sev de $\mathbb{R}^2$

$\mathscr{B}_1 = \{f \in \mathscr{F} / f(-x) = -f(x)\}$

- $0 \in \mathscr{B}_1$ car : $0(-x) = -0(x) = 0$
- Soient f et g deux vecteurs de $\mathscr{B}_1$
  $\left\{\begin{array}{l} f(-x) = -f(x) \\ g(-x) = -g(x) \end{array}\right. \Rightarrow (f+g)(-x) = -(f+g)(x) \Rightarrow f+g \in \mathscr{B}_1$
- Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et f un vecteur de $\mathscr{B}_1$
  $f(-x) = -f(x) \Rightarrow \lambda f(-x) = -\lambda f(x) \Rightarrow \lambda f \in \mathscr{B}_1$
  Donc, $\mathscr{B}_1$ est un sev de $\mathscr{F}$
  $\mathscr{B}_2 = \{f \in \mathscr{F} / f(1) = 0 \text{ ou } f(2) = 0\}$
  $f(x) = x-1$ et $g(x) = x-2 \Rightarrow (f+g)(x) = 2x-3$
  f et $g \in \mathscr{B}_2$ mais $f+g \notin \mathscr{B}_2$
  Donc, $\mathscr{B}_2$ n'est pas un sev de $\mathscr{F}$

$\mathscr{C} = \{P \in \mathbb{R}[X] / P(0) = 0\}$

- $0 \in \mathscr{C}$ car $0(0) = 0$
- Soient P_1 et P_2 deux vecteurs de $\mathscr{C}$
  $\left\{\begin{array}{l} P_1(0) = 0 \\ P_2(0) = 0 \end{array}\right. \Rightarrow (P_1+P_2)(0) = 0 \Rightarrow P_1+P_2 \in \mathscr{C}$
- Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et P un vecteur de $\mathscr{C}$
  $P(0) = 0 \Rightarrow \lambda P(0) = 0 \Rightarrow \lambda P \in \mathscr{C}$
  Donc, $\mathscr{C}$ est un sev de $\mathbb{R}[X]$

■

Exercice 2 Soient $E = \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, $\mathscr{C}$ l'ensemble des fonctions de E croissantes et

$$\Delta = \{f - g / f, g \in \mathscr{C}\}$$

Montrer que Δ est un sous-espace vectoriel de E.

- $0 \in \Delta$ car $0 = 0-0$ et $0 \in \mathscr{C}$
- Soient V_1 et V_2 deux vecteurs de Δ
  $$\left\{\begin{array}{l} V_1 = f_1 - g_1 \\ V_2 = f_2 - g_2 \end{array}\right. \Rightarrow V_1+V_2 = (f_1+f_2)-(g_1+g_2)$$
  $f_1+f_2 \in \mathscr{C}$ et $g_1+g_2 \in \mathscr{C} \Rightarrow V_1+V_2 \in \Delta$
- Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $V \in \Delta$

$V = f - g \Rightarrow \lambda V = \lambda f - \lambda g$
$\lambda > 0 \Rightarrow \lambda f \in \mathscr{C}$ et $\lambda g \in \mathscr{C} \Rightarrow \lambda V \in \Delta$
$\lambda < 0 \Rightarrow -\lambda f \in \mathscr{C}$ et $-\lambda g \in \mathscr{C}$
$\lambda V = (-\lambda g) - (-\lambda f) \Rightarrow \lambda V \in \Delta$
$\lambda = 0 \Rightarrow \lambda V = 0 \Rightarrow \lambda V \in \Delta$
Donc $\forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \lambda V \in \Delta$
Conclusion : Δ est un sous-espace vectoriel de E

■

Exercice 3 Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.

1. Montrer que $F \cap G$ est un sous-espace vectoriel de E
   — $0 \in F$ et $0 \in G \Rightarrow 0 \in F \cap G$
   — Soient V_1 et V_2 deux vecteurs de $F \cap G$
   $$\begin{cases} V_1 \in F \cap G \\ V_2 \in F \cap G \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} V_1 \in F \text{ et } V_2 \in F \\ V_1 \in G \text{ et } V_2 \in G \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} V_1 + V_2 \in F \\ V_1 + V_2 \in G \end{cases} \Rightarrow V_1 + V_2 \in F \cap G$$
   — Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $V \in F \cap G$
   $$V \in F \cap G \Rightarrow \begin{cases} V \in F \\ V \in G \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda V \in F \\ \lambda V \in G \end{cases} \Rightarrow \lambda V \in F \cap G$$
   Donc $F \cap G$ est un sous-espace vectoriel de E
2. Montrer que $F \cup G$ est un sous-espace vectoriel de E si, et seulement si, $F \subset G$ ou $G \subset F$.
   <u>$\Rightarrow$:</u>
   $$\begin{cases} V_1 \in F \\ \text{et} \\ V_2 \in G \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} V_1 \in F \cup G \\ \text{et} \\ V_2 \in F \cup G \end{cases} \Rightarrow V_1 + V_2 \in F \cup G \Rightarrow \left[\begin{array}{l} V_1 + V_2 \in F \\ \text{ou} \\ V_1 + V_2 \in G \end{array} \right.$$
   $$\text{Donc, } \left[\begin{array}{l} (V_1 + V_2) + (-V_1) \in F \\ \text{ou} \\ (V_1 + V_2) + (-V_2) \in G \end{array} \right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} V_2 \in F \\ \text{ou} \\ V_1 \in G \end{array} \right. \Rightarrow F \subset G \text{ ou } G \subset F.$$
   <u>$\Leftarrow$:</u>
   $$\left[\begin{array}{l} F \subset G \\ \text{ou} \\ G \subset F \end{array} \right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} F \cup G = G \\ \text{ou} \\ F \cup G = F \end{array} \right. \Rightarrow F \cup G \text{ sev de } E$$

■

Exercice 4 Les sous espaces vectoriels suivants sont ils supplémentaires :

$$\mathscr{A}_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x - 2y = z\} \qquad \mathscr{A}_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / (y = 0) \text{ et } (x + z = 0)\}$$

Commencons par voir si $\mathbb{R}^3 = \mathscr{A}_1 + \mathscr{A}_2$
Soit $V = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ et soient $V_1 = (x_1,y_1,z_1) \in \mathscr{A}_1 \quad V_2 = (x_2,y_2,z_2) \in \mathscr{A}_2$
$V = V_1 + V_2 \Rightarrow (x,y,z) = (x_1,y_1,z_1) + (x_2,y_2,z_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$
Il nous faut résoudre le système :

$$\begin{cases} x_1+x_2=x \\ y_1+y_2=y \\ z_1+z_2=z \\ x_1-2y_1=z_1 \\ y_2=0 \\ x_2+z_2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_2=0 \\ y_1=y \\ x_1+x_2=x \\ z_1+z_2=z \\ z_1=x_1-2y \\ z_2=-x_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_2=0 \\ y_1=y \\ x_1+x_2=x \\ (x_1-2y)+(-x_2)=z \\ z_1=x_1-2y \\ z_2=-x_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_2=0 \\ y_1=y \\ x_1+x_2=x \\ x_1-x_2=z+2y \\ z_1=x_1-2y \\ z_2=-x_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_2=0 \\ y_1=y \\ x_1=\frac{1}{2}(x+z+2y) \\ x_2=\frac{1}{2}(x-z-2y) \\ z_1=\frac{1}{2}(x+z-2y) \\ z_2=\frac{1}{2}(-x+z+2y) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} V_1=\left(\frac{1}{2}(x+z+2y),y,\frac{1}{2}(x+z-2y)\right) \\ V_2=\left(\frac{1}{2}(x-z-2y),0,\frac{1}{2}(-x+z+2y)\right) \end{cases}$$

Donc, $V=V_1+V_2$ avec $V_1\in\mathscr{A}_1$ et $V_2\in\mathscr{A}_2$
Voyons si $A_1\cap A_2=\{0\}$
Soit $V=(x,y,z)\in A_1\cap A_2 \Rightarrow \begin{cases} V\in A_1 \\ V\in A_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-2y=z \\ (y=0) \text{ et } (x+z=0) \end{cases} \Rightarrow x=y=z=0$
Donc, $A_1\cap A_2=\{0\}$
On en conclut que : $\mathbb{R}^3=A_1\oplus A_2$

$$\mathscr{B}_1=\{f\in\mathscr{F}/f(-x)=-f(x)\} \qquad \mathscr{B}_2=\{f\in\mathscr{F}/f(-x)=f(x)\}$$

Soit $f\in\mathscr{F}$ et soient $f_1\in\mathscr{B}_1 \quad f_2\in\mathscr{B}_2$

$$f=f_1+f_2 \Rightarrow \begin{cases} f_1(x)+f_2(x)=f(x) \\ f_1(-x)+f_2(-x)=f(-x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f_1(x)+f_2(x)=f(x) \\ -f_1(x)+f_2(x)=f(-x) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f_1(x)=\dfrac{f(x)-f(-x)}{2} \\ f_2(x)=\dfrac{f(x)+f(-x)}{2} \end{cases}$$

Donc $\forall f\in\mathscr{F}$, $f=f_1+f_2$ avec $f_1\in\mathscr{B}_1$ et $f_2\in\mathscr{B}_2$
Voyons si $\mathscr{B}_1\cap\mathscr{B}_2=\{0\}$
$f\in\mathscr{B}_1\cap\mathscr{B}_2 \Rightarrow \begin{cases} f(x)=-f(-x) \\ f(x)=f(-x) \end{cases} \Rightarrow f(x)=0$
Donc $\mathscr{B}_1\cap\mathscr{B}_2=\{0\}$
On en conclut que $\mathscr{B}_1\oplus\mathscr{B}_2=\mathscr{F}$

■

Exercice 5 Soient $E_k=\{P\in\mathbb{R}[X]/(X-k) \text{ divise } P \text{ avec } k\in\mathbb{R}\}$

1. Vérifier que E_k est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$
   — Le polynôme nul O vérifie $O(X)=0(X-k)\Rightarrow(X-k)$ divise O, donc $O\in E_k$.
   — Soient P et Q deux polynômes de E_k
   $\begin{cases} P(X)=P_1(X)(X-k) \\ Q(X)=Q_1(X)(X-k) \end{cases} \Rightarrow P(X)+Q(X)=[P_1(X)+Q_1(X)](X-k)$

Donc, $P+Q \in E_k$

— Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $P \in E_k$
$P(X) = P_1(X)(X-k) \Rightarrow \lambda P(X) = [\lambda P_1(X)](X-k) \Rightarrow \lambda P \in E_k$

2. Montrer que $\forall a,b \in \mathbb{R} \quad a \neq b \Rightarrow \mathbb{R}[X] = E_a + E_b$
$a \neq b \Rightarrow (X-a) \wedge (X-b) = 1$
D'après théorème de Bézout, $\exists U,V \in \mathbb{R}[X]$ tels que $U(X)(X-a)+V(X)(X-b) = 1$
Soit $P \in \mathbb{R}[X]$
$U(X)(X-a)+V(X)(X-b) = 1 \Rightarrow P(X)U(X)(X-a)+P(X)V(X)(X-b) = P(X)$
$\Rightarrow P(X) = P_a(X)+P_b(X)$ avec $P_a(X) = P(X)U(X)(X-a)$ et $P_b(X) = P(X)V(X)(X-b)$
$P_a \in E_a$ et $P_b \in E_b \Rightarrow \mathbb{R}[X] = E_a + E_b$
3. La somme est elle directe ?
$C(X) = (X-a)(X-b) \in E_a \cap E_b \Rightarrow E_a \cap E_b \neq \{O\}$
La somme n'est donc pas directe

■

Exercice 6 1. Soient $\mathscr{B} = \{e_1,e_2,e_3\}$ une base de $\mathbb{R}^3$, les familles suivantes sont elles libres ?

$$\{-e_1,2e_2,e_3\} \qquad \{e_2-e_1,e_3-e_2,e_1-e_3\} \qquad \{e_1,2e_2+e_3,e_2+e_3\}$$

(a) $\{-e_1,2e_2,e_3\}$
Soient $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3 \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda_1(-e_1)+\lambda_2(2e_2)+\lambda_3 e_3 = 0$
$\Rightarrow (-\lambda_1)e_1 + (2\lambda_2)e_2 + \lambda_3 e_3 = 0$
$\{e_1,e_2,e_3\}$ base de $\mathbb{R}^3 \Rightarrow \{e_1,e_2,e_3\}$ libre $\Rightarrow \left\{\begin{array}{lcl} -\lambda_1 & = & 0 \\ 2\lambda_2 & = & 0 \\ \lambda_3 & = & 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \end{array}\right.$
Donc la famille $\{-e_1,2e_2,e_3\}$ est libre.

(b) $\{e_2-e_1,e_3-e_2,e_1-e_3\}$
Soient $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3 \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda_1(e_2-e_1)+\lambda_2(e_3-e_2)+\lambda_3(e_1-e_3) = 0$
$\Rightarrow (\lambda_3-\lambda_1)e_1 + (\lambda_1-\lambda_2)e_2 + (\lambda_2-\lambda_3)e_3 = 0$
$\{e_1,e_2,e_3\}$ base de $\mathbb{R}^3 \Rightarrow \{e_1,e_2,e_3\}$ libre $\Rightarrow \left\{\begin{array}{lcl} \lambda_3-\lambda_1 & = & 0 \\ \lambda_1-\lambda_2 & = & 0 \\ \lambda_2-\lambda_3 & = & 0 \end{array}\right. \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$
On peut choisir $\lambda_1 = 1 \Rightarrow \lambda_2 = \lambda_3 = 1$
Donc la famille $\{e_2-e_1,e_3-e_2,e_1-e_3\}$ est liée.

(c) $\{e_1,2e_2+e_3,e_2+e_3\}$
Soient $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3 \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda_1 e_1+\lambda_2(2e_2+e_3)+\lambda_3(e_2+e_3) = 0$
$\Rightarrow \lambda_1 e_1 + (2\lambda_2+\lambda_3)e_2 + (\lambda_2+\lambda_3)e_3 = 0$
$\{e_1,e_2,e_3\}$ base de $\mathbb{R}^3 \Rightarrow \{e_1,e_2,e_3\}$ libre $\Rightarrow \left\{\begin{array}{lcl} \lambda_1 & = & 0 \\ 2\lambda_2+\lambda_3 & = & 0 \\ \lambda_2+\lambda_3 & = & 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \end{array}\right.$
Donc la famille $\{e_1,2e_2+e_3,e_2+e_3\}$ est libre.

2. Dans $\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ montrer que les familles suivantes sont libres :

$$\{x,e^x\} \qquad \{x,sin(x)\} \qquad \{sin(x),cos(x)\}$$

Montrons que : $\{x,e^x\}$ est libre
Soient $\lambda_1,\lambda_2 \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda_1 x + \lambda_2 e^x = 0(x)$
$x = 0 \Rightarrow \lambda_2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 x = 0(x)$

$x = 1 \Rightarrow \lambda_1 = 0$
Montrons que {x,sin(x)} est libre
Soient $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda_1 x + \lambda_2 \sin(x) = 0(x)$
$x = \pi \Rightarrow \lambda_1 \pi = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0 \Rightarrow \lambda_2 \sin(x) = 0(x)$
$x = \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow \lambda_2 = 0$
Montrons que $\{sin(x), cos(x)\}$ est libre
Soient $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda_1 sin(x) + \lambda_2 \cos(x) = 0(x)$
$x = 0 \Rightarrow \lambda_2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 sin(x) = 0(x)$
$x = \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow \lambda_1 = 0$

■

Exercice 7 Soit $\mathscr{B}' = \{V_1, V_2, V_3\}$ une famille de vecteurs de $\mathbb{R}^3$ avec :
$V_1(1,0,1)$, $V_2(1,1,1)$ et $V_3(1,1,0)$

1. Vérifier que $\mathscr{B}' = \{V_1, V_2, V_3\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
   Soient $V(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, supposons que : $V = aV_1 + bV_2 + cV_3$
   $\Rightarrow (x,y,z) = a(1,0,1) + b(1,1,1) + c(1,1,0) = (a+b+c, b+c, a+b)$
   On résoud le système :
   $$\begin{cases} x = a+b+c \\ y = b+c \\ z = a+b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = x-y \\ b = y-x+z \\ c = x-z \end{cases} \Rightarrow V = (x-y)V_1 + (y-x+z)V_2 + (x-z)V_3$$
   Donc $\mathscr{B}' = \{V_1, V_2, V_3\}$ est famille génératrice de $\mathbb{R}^3$.
   $\dim \mathbb{R}^3 = \mathrm{Card}\mathscr{B}' = 3 \Rightarrow \mathscr{B}'$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Ecrire le vecteur $V = (3,2,1)$ dans la base canonique $\mathscr{B}$ puis dans la base $\mathscr{B}'$.
   $$V = (3,2,1) = 3(1,0,0) + 2(0,1,0) + 1(0,0,1) = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}_{\mathscr{B}}$$
   $$V = (3,2,1) = 1(1,0,1) + 0(1,1,1) + 2(1,1,0) = 1V_1 + 0V_2 + 2V_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}_{\mathscr{B}'}$$

■

Exercice 8

1. Vérifier que $\mathscr{B}'$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$
   $Card\, \mathscr{B}' = dim\, \mathbb{R}_2[X] = 3 \Rightarrow$ Il suffit de montrer que la famille $\mathscr{B}'$ est libre.
   Soient $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tels que :
   $$\lambda_1 \frac{(X-b)(X-c)}{(a-b)(a-c)} + \lambda_2 \frac{(X-a)(X-c)}{(b-a)(b-c)} + \lambda_3 \frac{(X-a)(X-b)}{(c-a)(c-b)} = 0$$
   $X = a \Rightarrow \lambda_1 = 0$
   $X = b \Rightarrow \lambda_2 = 0$
   $X = c \Rightarrow \lambda_3 = 0$
   On en conclut que $\mathscr{B}'$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Trouver $Q \in \mathbb{R}_2[X]$ tel que $Q(1) = -1$, $Q(2) = 3$ et $Q(3) = 5$
   $$\forall Q \in \mathbb{R}_2[X],\ Q(X) = u_1 \frac{(X-b)(X-c)}{(a-b)(a-c)} + u_2 \frac{(X-a)(X-c)}{(b-a)(b-c)} + u_3 \frac{(X-a)(X-b)}{(c-a)(c-b)}$$
   On remarque que :
   $Q(a) = u_1 \quad Q(b) = u_2 \quad Q(c) = u_3$
   En posant $a = 1,\ b = 2,\ c = 3$ on obtient :
   $$Q(X) = Q(1)\frac{(X-2)(X-3)}{2} - Q(2)(X-1)(X-3) + Q(3)\frac{(X-1)(X-2)}{2}$$

$Q(X) = -\frac{1}{2}(X-2)(X-3) - 3(X-1)(X-3) + \frac{5}{2}(X-1)(X-2)$

3. Ecrire le polynôme Q dans dans la base $\mathscr{B}'$ puis dans la base canonique $\mathscr{B}$

$$Q = \begin{bmatrix} Q(a) \\ Q(b) \\ Q(c) \end{bmatrix}_{\mathscr{B}'} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}_{\mathscr{B}'}$$

$$Q(X) = -\frac{1}{2}(X-2)(X-3) - 3(X-1)(X-3) + \frac{5}{2}(X-1)(X-2) = -X^2 + 7X - 7$$

$$Q = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}_{\mathscr{B}'} = \begin{bmatrix} -7 \\ 7 \\ -1 \end{bmatrix}_{\mathscr{B}'}$$

■

Exercice 9 Soient α, β, γ trois réels fixés et f, g, h les fonctions définies par :

$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \cos(x+\alpha),\ g(x) = \cos(x+\beta)$ et $h(x) = \cos(x+\gamma)$

1. Vérifier que f, g, h appartiennent à $T = Vect < \cos x, \sin x >$

   $f(x) = \cos(x+\alpha) = \cos(\alpha)\cos(x) - \sin(\alpha)\sin(x)$

   Donc, $f \in T$.

   De la même manière, on montre que $g, h \in T$.

2. La famille $\{f, g, h\}$ est elle libre ?

   $Card\{f, g, h\} = 3$ et $dim T = 2 \Rightarrow Card\{f, g, h\} > dim T$.

   D'après le théorème de la base incomplète, $\{f, g, h\}$ est liée.

■

Exercice 10

1. Dans $\mathbb{R}^3$, déterminer une base et un supplémentaire des sous-espaces vectoriels suivants :

   a) $F = \text{Vect}(U, V, W)$ où $U = (-1, 1, 0), V = (2, 0, 1)$ et $W = (1, 1, 1)$

   $\{U, V, W\}$ est une famille génératrice de F, voyons si elle est libre.

   Soient $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda_1 U + \lambda_2 V + \lambda_3 W = 0$

   $\Rightarrow \lambda_1(-1,1,0) + \lambda_2(2,0,1) + \lambda_3(1,1,1) = (0,0,0)$

   $\Rightarrow (-\lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3, \lambda_1 + \lambda_3, \lambda_2 + \lambda_3) = (0,0,0)$

   $$\Rightarrow \begin{cases} -\lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 & = & 0 \\ \lambda_1 + \lambda_3 & = & 0 \\ \lambda_2 + \lambda_3 & = & 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -(-\lambda_3) + 2(-\lambda_3) + \lambda_3 & = & 0 \\ \lambda_1 & = & -\lambda_3 \\ \lambda_2 & = & -\lambda_3 \end{cases}$$

   $$\Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -\lambda_3 \\ \lambda_2 = -\lambda_3 \\ \lambda_3 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

   On peut choisir $\lambda_3 = 1 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = -1$, on aura :

   $-U - V + W = 0 \Rightarrow U = -V + W \Rightarrow \{V, W\}$ est une famille génératrice de F

   $\{V, W\}$ est elle libre ?

   Les deux vecteurs V et W ne sont pas colinéaires, donc la famille $\{V, W\}$ est libre.

   On en conclut que $\{V, W\}$ est une base de F.

   Notons par G un suppléméntaire de F.

   $dim F + dim G = 3 \Rightarrow dim G = 3 - 2 = 1$

   il nous faut chercher un vecteur Y tel que $G = Vect\{Y\}$

   $F \cap G = \{0\} \Rightarrow Y \notin F$

   $X \in F \Rightarrow X = aV + bW$ avec $a, b \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow X = a(2,0,1) + b(1,1,1) = (2a+b, b, a+b)$
On choisit $a = 0$ et $b = 1 \Rightarrow 2a + b = 1 \qquad b = 1 \qquad a + b = 1$
En choisissant $Y = (0,1,1)$ on est sur que $Y \notin F$
Donc, $G = vect(Y)$ est un supplémentaire de F.

b) $F = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x - 2y + 3z = 0\right\}$.
$V = (x,y,z) \in F \Rightarrow x - 2y + 3z = 0 \Rightarrow x = 2y - 3z$
$\Rightarrow V = (2y - 3z, y, z) = y(2,1,0) + z(-3,0,1)$
Donc $\{V_1, V_2\}$ est une famille génératrice de F avec $V_1 = (2,1,0)$ et $V_2 = (-3,0,1)$
Voyons si cette famille est libre.
Soient $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda_1 V_1 + \lambda_2 V_2 = 0 \Rightarrow \lambda_1(2,1,0) + \lambda_2(-3,0,1) = (0,0,0)$
$\Rightarrow (2\lambda_1 - 3\lambda_2, \lambda_1, \lambda_2) = (0,0,0) \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0$
On en conclut que $\{V_1, V_2\}$ est une base de $F \Rightarrow dim F = 2$.

Notons par G un suppléméntaire de F.
$dim F + dim G = 3 \Rightarrow dim G = 3 - 2 = 1$
il nous faut chercher un vecteur Y tel que $G = Vect\{Y\}$
$F \cap G = \{0\} \Rightarrow Y \notin F$
$X = (x,y,z) \in F \Rightarrow x - 2y + 3z = 0 \quad (*)$
Y ne doit pas vérifier l'équation $(*)$, on peut choisir $Y = (0,0,1) \Rightarrow Y \notin F$.
$G = Vect\{Y\}$ est donc un supplémentaire de F.

2. Déterminer un supplémentaire de $F = vect\{U\}$ avec $U = (1,0,1)$
Notons par G un supplémentaire de F.
$dim F + dim G = 3 \Rightarrow dim G = 3 - 1 = 2$
il nous faut chercher deux vecteurs S, T tel que $G = Vect\{S, T\}$
$X \in F \Rightarrow X = a(1,0,1) = (a,0,a) \Rightarrow F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x = z, y = 0\}$
$F \cap G = \{0\} \Rightarrow S \notin F$ et $T \notin F$
On choisit S tel que $x = z$ soit vérifiée et $y = 0$ ne soit pas vérifiée et
T tel que $y = 0$ soit vérifiée et $x = z$ ne soit pas vérifiée.
Par exemple, on peut prendre :
$S = (1,1,1)$ et $T = (0,0,1)$
$G = Vect\{S, T\}$ est un supplémentaire de F.

■

Exercice 11 Soit $F = \{P \in \mathbb{R}_2[X] / P(0) = P'(0)\}$

1. Vérifier que F est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}_2[X]$
   (a) Le polynôme nul O vérifie $O(0) = O'(0) = 0$
   Donc, $O \in F$
   (b) Soient $P, Q \in F$
   $$\begin{cases} P(0) = P'(0) \\ Q(0) = Q'(0) \end{cases} \Rightarrow P(0) + Q(0) = P'(0) + Q'(0)$$
   C'est à dire que $(P+Q)(0) = (P+Q)'(0)$ et donc $P + Q \in F$
   (c) Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $P \in F$.
   $P(0) = P'(0) \Rightarrow \lambda P(0) = \lambda P'(0)$
   Donc $\lambda P \in F$.
2. Déterminer une base et la dimension de F

Soit $P \in F$ avec $P(X) = aX^2 + bX + c$
$P(0) = P'(0) \Rightarrow c = b$
Donc $P \in F \Rightarrow P(X) = aX^2 + bX + b = aX^2 + b(X+1)$
$\{X^2, X+1\}$ est une base de $F \Rightarrow \dim F = 2$

3. Déterminer un supplémentaire de F
Soit G un supplémentaire de F alors $\dim G = 3 - 2 = 1$
On pose $G = Vect < T >$, avec $T \notin F$.
On choisit $T(X) = X \Rightarrow T(0) = 0 \neq T'(0) = 1 \Rightarrow T \notin F$

■

Exercice 12 Calculer la dimension de $\mathbb{C}_2[X]$ vu comme un $\mathbb{C}$-espace vectoriel puis comme un $\mathbb{R}$-espace vectoriel

On voit $\mathbb{C}_2[X]$ comme un $\mathbb{C}$-espace vectoriel.
$P \in \mathbb{C}_2[X] \Rightarrow P(X) = z_0 + z_1X + z_2X^2$ avec $z_0, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$
$\Rightarrow P(X) = z_0(1) + z_1(X) + z_2(X^2)$ avec $z_0, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$
$\Rightarrow \{1, X, X^2\}$ est une famille génératrice de $\mathbb{C}_2[X]$.
Montrons que la famille $\{1, X, X^2\}$ est libre.
Soient $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ tels que : $\lambda_0(1) + \lambda_1(X) + \lambda_2(X^2) = 0 \Rightarrow \lambda_0 = \lambda_1 = \lambda_2 = 0$
$\{1, X, X^2\}$ est libre $\Rightarrow \{1, X, X^2\}$ est une base de $\mathbb{C}_2[X] \Rightarrow dim(\mathbb{C}_2[X]) = 3$.
On voit $\mathbb{C}_2[X]$ comme un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
$P \in \mathbb{C}_2[X] \Rightarrow P(X) = z_0 + z_1X + z_2X^2$ avec $z_0, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$

$$= (a_0 + ib_0) + (a_1 + ib_1)X + (a_2 + ib_2)X^2$$
$$= a_0(1) + b_0(i) + a_1(X) + b_1(iX) + a_2(X^2) + b_2(iX^2)$$

$\Rightarrow \{1, i, X, iX, X^2, iX^2\}$ est une famille génératrice de $\mathbb{C}_2[X]$.
Montrons que la famille $\{1, i, X, iX, X^2, iX^2\}$ est libre.
Soient $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5 \in \mathbb{R}$ tels que :
$\lambda_0(1) + \lambda_1(i) + \lambda_2(X) + \lambda_3(iX) + \lambda_4(X^2) + \lambda_5(iX^2) = 0$
$(\lambda_0 + \lambda_1 i) + (\lambda_2 + \lambda_3 i)X + (\lambda_4 + \lambda_5 i)X^2 = 0 \Rightarrow \lambda_0 = \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = \lambda_5 = 0$
$\{1, i, X, iX, X^2, iX^2\}$ est libre $\Rightarrow \{1, i, X, iX, X^2, iX^2\}$ est une base de $\mathbb{C}_2[X]$
Donc, $dim(\mathbb{C}_2[X]) = 6$ ■

2. Applications linéaires

2.1 Définitions

Définition 2.1.1 Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. L'application $f : E \to F$ est dite linéaire et on note $f \in \mathscr{L}(E;F)$ si et seulement si :

1. $\forall V_1, V_2 \in E,\ f(V_1 + V_2) = f(V_1) + f(V_2)$
2. $\forall \lambda \in \mathbb{K},\ \forall V \in E,\ f(\lambda V) = \lambda f(V)$

R

Si f est bijective alors f est dite isomorphisme.

Si $E = F$ alors f est un endomorphisme.

un automorphisme est un endomorphisme bijectif.

■ **Exemple 2.1** $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$(x,y) \mapsto (x+1, y+2)$

$f(0,1) = (1,3) \quad f(1,0) = (2,2)$ mais $f(1,1) = (2,3)$

$f(0,1) + f(1,0) \neq f(1,1)$

Donc la translation f n'est pas une application linéaire. ■

■ **Exemple 2.2** $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$(x,y) \mapsto (-2x, -2y)$

Soient $V_1(x_1, y_1)$ et $V_2(x_2, y_2)$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$.

$h(V_1) + h(V_2) = (-2x_1, -2y_1) + (-2x_2, -2y_2) = (-2(x_1 + x_2), -2(y_1 + y_2))$

$h(V_1 + V_2) = h(x_1 + x_2, y_1 + y_2) = (-2(x_1 + x_2), -2(y_1 + y_2))$

$\Rightarrow h(V_1) + h(V_2) = h(V_1 + V_2)$

Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $V(x,y) \in \mathbb{R}^2$

$\lambda h(V) = \lambda(-2x, -2y) = (-2\lambda x, -2\lambda y)$

$h(\lambda V) = h(\lambda x, \lambda y) = (-2\lambda x, -2\lambda y)$

$\Rightarrow \lambda h(V) = h(\lambda V)$

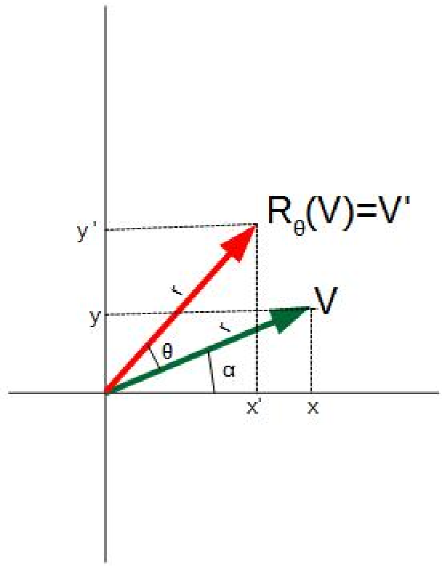
Donc, l'homothétie h est une application linéaire. ■

■ **Exemple 2.3** (Rotation dans le plan)

$$\begin{cases} \cos(\alpha+\theta) & = & \dfrac{x'}{r} \\ \\ \sin(\alpha+\theta) & = & \dfrac{y'}{r} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x' & = & r\cos(\alpha+\theta) \\ \\ y' & = & r\sin(\alpha+\theta) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x' & = & r\cos\alpha\cos\theta - r\sin\alpha\sin\theta \\ \\ y' & = & r\sin\alpha\cos\theta + r\cos\alpha\sin\theta \end{cases} \qquad (*$$



$$\text{Or : } \begin{cases} \cos\alpha & = & \dfrac{x}{r} \\ \\ \sin\alpha & = & \dfrac{y}{r} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x & = & r\cos\alpha \\ \\ y & = & r\sin\alpha \end{cases}$$

$$\text{D'où } (*) \Rightarrow \begin{cases} x' & = & x\cos\theta - y\sin\theta \\ \\ y' & = & y\cos\theta + x\sin\theta \end{cases}$$

$R_\theta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$
$\quad (x,y) \mapsto (x\cos\theta - y\sin\theta, x\sin\theta + y\cos\theta)$
On peut vérifier que la rotation R_θ est une application linéaire.
Soient $V_1(x_1,y_1)$ et $V_2(x_2,y_2)$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} R_\theta(V_1+V_2) &= R_\theta(x_1+x_2, y_1+y_2) \\ &= ((x_1+x_2)\cos\theta - (y_1+y_2)\sin\theta, (x_1+x_2)\sin\theta + (y_1+y_2)\cos\theta) \\ &= (x_1\cos\theta - y_1\sin\theta, x_1\sin\theta + y_1\cos\theta) + (x_2\cos\theta - y_2\sin\theta, x_2\sin\theta + y_2\cos\theta) \\ &= R_\theta(x_1,y_1) + R_\theta(x_2,y_2) \\ &= R_\theta(V_1) + R_\theta(V_2) \end{aligned}$$

Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $V(x,y) \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} R_\theta(\lambda V) &= R_\theta(\lambda x, \lambda y) \\ &= (\lambda x\cos\theta - \lambda y\sin\theta, \lambda x\sin\theta + \lambda y\cos\theta) \\ &= \lambda(x\cos\theta - y\sin\theta, x\sin\theta + y\cos\theta) \\ &= \lambda R_\theta(V) \end{aligned}$$

■

Theorème 2.1.1 Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $f : E \to F$ une application linéaire

1. $f(0_E) = 0_F$
2. A sev de $E \Rightarrow f(A)$ sev de F
3. B sev de $F \Rightarrow f^{-1}(B)$ sev de E

2.2 Noyau et image d'une application linéaire

Définition 2.2.1 Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $f : E \to F$ une application linéaire

On définit le noyau de f par :

$$Ker f = \{V \in E / f(V) = 0\}$$

On définit l'image de f par :

$$Im f = \{W \in F / W = f(V) \text{ avec } V \in E\} = f(E)$$

Lemme 2.2.1 $Ker f$ est un sous espece vectoriel de E et $Im f$ est un sous espece vectoriel de F.

Theorème 2.2.2 Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $f : E \to F$ une application linéaire

1. $Ker f = \{0\} \Leftrightarrow f$ est injective.
2. $Im f = F \Leftrightarrow f$ est surjective.

2.3 Application linéaire dans un espace de dimension finie

Dans tout le reste du chapitre, on suppose que E et F sont deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie et $f : E \to F$ une application linéaire.

Définition 2.3.1 On appelle rang d'une application linéaire f la dimension de l'image de f et on note :

$$rg f = dim Im f$$

Theorème 2.3.1 Soit $\{e_1, e_2, \cdots, e_p\}$ une base de E, alors :
$\{f(e_1), f(e_2), \cdots, f(e_p)\}$ est une famille génératrice de $Im f$

Theorème 2.3.2 — Théorème du rang.

$$\boxed{dim E = dim Ker f + rg f}$$

Corollaire 2.3.3 Si $dim E = dim F$, alors les propositions suivantes sont équivalentes :

1. f est injective.
2. f est surjective.
3. f est bijective.
4. $Ker f = \{0\}$.
5. $Im f = F$.

■ **Exemple 2.4** $R_\theta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$(x, y) \mapsto (x\cos\theta - y\sin\theta, x\sin\theta + y\cos\theta)$$

Déterminons $KerR_\theta$

$$(x, y) \in KerR_\theta \Rightarrow R_\theta(x, y) = (0, 0) \Rightarrow (x\cos\theta - y\sin\theta, x\sin\theta + y\cos\theta) = (0, 0) \Rightarrow \begin{cases} x\cos\theta - y\sin\theta = 0 \\ x\sin\theta + y\cos\theta = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (\times\cos\theta) & x\cos\theta - y\sin\theta = 0 \\ (\times\sin\theta) & x\sin\theta + y\cos\theta = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\cos^2\theta - y\sin\theta\cos\theta = 0 & (1) \\ x\sin^2\theta + y\cos\theta\sin\theta = 0 & (2) \end{cases}$$

$$(1) + (2) \Rightarrow x\cos^2\theta + x\sin^2\theta = 0 \Rightarrow x(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$\begin{cases} x\cos\theta - y\sin\theta = 0 \\ x\sin\theta + y\cos\theta = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -y\sin\theta & = & 0 \\ y\cos\theta & = & 0 \end{cases} \Rightarrow y = 0$$

On en conclut que $KerR_\theta = \{0\} \Rightarrow dimKerR_\theta = 0$
D'après le corollaire, R_θ est bijective, sa réciproque est $R_{-\theta}$

Déterminons ImR_θ :
$\{(1,0),(0,1)\}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^2$.
On sait d'après le théorème 2.3.1 que :
$\{R_\theta((1,0)), R_\theta((0,1))\}$ est une famille génératrice de ImR_θ.
$\begin{cases} R_\theta((1,0)) = (\cos\theta, \sin\theta) = V_1 \\ R_\theta((0,1)) = (-\sin\theta, \cos\theta) = V_2 \end{cases} \Rightarrow \{V_1, V_2\}$ famille génératrice de ImR_θ.
$\{V_1,V_2\}$ libre $\Rightarrow \{V_1,V_2\}$ base de $ImR_\theta \Rightarrow rgR_\theta = 2$

Le théorème du rang est vérifié car :

$$dim\mathbb{R}^2 = dimKerR_\theta + dimImR_\theta$$

■

■ **Exemple 2.5**

$$\begin{array}{rcl} g : \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \mapsto & (x+y-z, y+z, x-2z) \end{array}$$

■

On commence par déterminer le noyau de g

$$V(x,y,z) \in \ker g \Rightarrow g(x,y,z) = (0,0,0) \Rightarrow \begin{cases} x+y-z=0 \\ y+z=0 \\ x-2z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0z=0 \\ y=-z \\ x=2z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2z \\ y=-z \\ z\in\mathbb{R} \end{cases}$$

Donc $V(x,y,z) \in \ker g \Rightarrow V = (2z,-z,z) = z(2,-1,1)$
$\Rightarrow \ker g = \text{Vect} < V_1 >$ avec $V_1 = (2,-1,1)$
C'est à dire que $\{V_1\}$ est une base de $\ker g \Rightarrow \dim \ker g = 1$
Donc g n'est pas injective.

Il nous reste à trouver l'image de g.
D'après le théorème du rang, $\dim \text{Im} = \dim E - \dim \ker g = 3-1 = 2$.
Il suffit de trouver deux vecteurs libres dans $Im\ g$
On peut prendre par exemple $W_1 = g(1,0,0) = (1,0,1)$ et $W_2 = g(0,1,0) = (1,1,0)$
$\{W_1,W_2\}$ est une famille libre de $\text{Im}\, g$ donc c'est une base de $\text{Im}\, g$
On note $\text{Im}\, g = \text{Vect} < W_1, W_2 > \Rightarrow \text{Im}\, g \neq \mathbb{R}^3$.
Donc g n'est pas surjective.

Theorème 2.3.4 Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications linéaires.
$g \circ f$ est aussi une application linéaire.

■ **Exemple 2.6** $\begin{array}{l} h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ (x,y) \mapsto (-2x,-2y) \end{array}$ $\qquad \begin{array}{l} R_\theta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ (x,y) \mapsto (x\cos\theta - y\sin\theta, x\sin\theta + y\cos\theta) \end{array}$

On a déjà vu que h et R_θ étaient linéaires.

$$\begin{array}{rcl} h\circ R_\theta : \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y) & \mapsto & (\alpha x\cos\theta - \alpha y\sin\theta, \alpha x\sin\theta + \alpha y\cos\theta) \end{array}$$

De la même manière, on peut montrer que $h \circ R_\theta$ est linéaire. ■

2.4 série d'exercices

Exercice 1 Les applications suivantes sont elles linéaires ?

$$f : \begin{array}{rcl}\mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (x+2y, x-y)\end{array} \qquad g : \begin{array}{rcl}\mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (xy, y)\end{array} \qquad h : \begin{array}{rcl}\mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (x+y, x-2)\end{array}$$

$$\Psi : \begin{array}{rcl}\mathscr{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R}) & \to & \mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R}) \\ f & \mapsto & ff'\end{array} \qquad \Gamma : \begin{array}{rcl}\mathbb{R}[X] & \to & \mathbb{R}[X] \\ P & \mapsto & P-P'\end{array}$$

Exercice 2 Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ tel que :
$f(1,1) = (3,-2)$ et $f(-2,3) = (-1,-11)$
Déterminer de deux façons différentes l'expression de $f(x,y)$

Exercice 3 Déterminer le noyau et l'image des applications linéaires suivantes :

$$f : \begin{array}{rcl}\mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \mapsto & (x+2y+z, x-z, y+z)\end{array}$$

$$h : \begin{array}{rcl}\mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \mapsto & (x-2y-z, y+3z, z)\end{array} \qquad k : \begin{array}{rcl}\mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y) & \mapsto & (2x+3y, 0, x-2y)\end{array}$$

Ces applications sont elles bijectives ?

Exercice 4

$$f : \begin{array}{rcl}\mathbb{R}_3[X] & \to & \mathbb{R}_3[X] \\ P & \mapsto & P(X)-P(X+1)\end{array}$$

1. Vérifier que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$
2. Déterminer le noyau et l'image de f

Exercice 5 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et $\mathscr{B} = \{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ une base de E
Soit $f \in \mathscr{E}nd(E)$ telle que :

$$\begin{cases} f(e_i) = e_{i+1} & \text{pour } i \in \{1, \cdots, n-1\} \\ f(e_n) = e_1 \end{cases}$$

1. Déterminer le noyau et l'image de f
2. f est elle bijective ?
3. Vérifier que $f^n = Id$

Exercice 6 Soient E un K-espace vectoriel de dimension finie et f un endomorphisme de E tel que : $rg(f^2) = rg(f)$.
1. Établir que $Imf^2 = Imf$ et $kerf^2 = kerf$.
2. Montrer que Imf et $kerf$ sont supplémentaires dans E.

Exercice 7 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et soit p un endomorphisme de E

On dit que p est un projecteur si et seulement si $p \circ p = p$

1. Montrer que : [p projecteur]$\Rightarrow$ [$E = \text{Ker } p \oplus \text{Im } p$]
2. Soient $\mathscr{A}_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x - y = 0\}$ et$\mathscr{A}_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x + y = 0\}$ deux sev de $\mathbb{R}^2$
   (a) Vérifier que $\mathscr{A}_1 \oplus \mathscr{A}_2 = \mathbb{R}^2$
   (b) On définit l'endomorphisme p par :
   $$\begin{array}{rcl} p : \mathbb{R}^2 & \rightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & \left(\frac{1}{2}(x+y), \frac{1}{2}(x+y)\right) \end{array}$$
   Vérifier que p est un projecteur
   (c) Déterminer $\operatorname{Ker} p$ puis $\operatorname{Im} p$

Exercice 8 On définit l'application f par :

$$\begin{array}{rcll} f : \mathbb{R}_2[X] & \rightarrow & \mathbb{R}_2[X] & \\ P & \rightarrow & f(P) = Q & \text{avec } Q(X) = P(X) - XP^{(1)}(0) \end{array}$$

1. f est-il un projecteur ?
2. Déterminer $Kerf$ puis Imf

Exercice 9 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et soit p un projecteur de E.

1. En posant $s = 2p - Id$, vérifier que $s \circ s = Id$ (on dira que s est une symétrie)
2. Déterminer $\operatorname{Ker} s$ puis $\operatorname{Im} s$
3. On définit l'endomorphisme s par :
   $$\begin{array}{rcl} s : \mathbb{R}^2 & \rightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (y,x) \end{array}$$
   Vérifier que s est une symétrie.

Exercice 10 On définit l'application f par :

$$\begin{array}{rcll} f : \mathbb{R}_2[X] & \rightarrow & \mathbb{R}_2[X] & \\ P & \rightarrow & f(P) = Q & \text{avec } Q(X) = P(X) - 2XP^{(1)}(0) \end{array}$$

1. f est-il une symétrie ?
2. Déterminer $Kerf$ puis Imf

Exercice 1 Les applications suuivantes sont elles linéaires ?

$$f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \quad (x,y) \mapsto (x+2y,x-y) \qquad g:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \quad (x,y)\mapsto (xy,y) \qquad h:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \quad (x,y)\mapsto (x+y,x-2)$$

Soient $V_1(x_1,y_1)$ et $V_2(x_2,y_2)$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned} f(V_1)+f(V_2) &= f(x_1,y_1)+f(x_2,y_2)\\ &= (x_1+2y_1,x_1-y_1)+(x_2+2y_2,x_2-y_2)\\ &= ((x_1+x_2)+2(y_1+y_2),(x_1+x_2)-(y_1+y_2))\\ &= f((x_1,y_1)+(x_2,y_2))\\ &= f(V_1+V_2)\end{aligned}$$

Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $V(x,y)\in\mathbb{R}^2$.
$f(V)=(x+2y,x-y) \Rightarrow \lambda f(V)=\lambda(x+2y,x-y)=(\lambda x+2\lambda y,\lambda x-\lambda y)$
$f(\lambda V)=f(\lambda(x,y))=f(\lambda x,\lambda y)=(\lambda x+2\lambda y,\lambda x-\lambda y)=\lambda f(V)$
Donc, f est une application linéaire.

Posons $V_1(1,1)$ et $V_2(1,0)$.
$g(V_1)+g(V_2)=(1,1)+(0,0)=(1,1)$
$g(V_1+V_2)=g(2,1)=(2,1)$
$g(V_1)+g(V_2)\neq g(V_1+V_2)$
Donc, g n'est pas une application linéaire.

$h(0,0)=(2,-1)\neq(0,0)$
Donc, h n'est pas une application linéaire.

$$\Psi:\mathscr{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R}) \to \mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R}) \quad f\mapsto ff' \qquad \Gamma: \mathbb{R}[X]\to\mathbb{R}[X] \quad P\mapsto P-P'$$

Soient f et g deux vecteurs de $\mathscr{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$.
$\Psi(f)+\Psi(g)=ff'+gg'$
$\Psi(f+g)=(f+g)(f+g)'=(f+g)(f'+g')=ff'+gg'+fg'+gf'$
$\Psi(f+g)\neq\Psi(f)+\Psi(g)$
Donc Ψ n'est pas une application linéaire.

Soient P_1 et P_2 deux vecteurs de $\mathbb{R}[X]$.
$\Gamma(P_1)+\Gamma(P_2)=(P_1-P_1')+(P_2-P_2')$
$\Gamma(P_1+P_2)=(P_1+P_2)-(P_1+P_2)'=(P_1-P_1')+(P_2-P_2')=\Gamma(P_1)+\Gamma(P_2)$

Soient $\lambda\in\mathbb{R}$ et $P\in\mathbb{R}[X]$
$\lambda\Gamma(P)=\lambda(P-P')=\lambda P-\lambda P'$
$\Gamma(\lambda P)=\lambda P-(\lambda P)'=\lambda P-\lambda P'=\lambda\Gamma(P)$
Donc, Γ est bien une application linéaire. ■

Exercice 2 Soit $f\in End(\mathbb{R}^2)$ tel que : $f(1,1)=(3,-2)$ et $f(-2,3)=(-1,-11)$
Déterminer de deux façons différentes l'expression de $f(x,y)$
$f(x,y)=f(x,0)+f(0,y)=xf(1,0)+yf(0,1)$

première méthode :
$f(1,0)=(a,b)$ et $f(0,1)=(c,d) \Rightarrow f(x,y)=x(a,b)+y(c,d)=(ax+cy,bx+dy)$

$$\left\{\begin{array}{lll} f(1,1) & = & (3,-2) \\ f(-2,3) & = & (-1,-11) \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{lll} a+c & = & 3 \\ b+d & = & -2 \\ -2a+3c & = & -1 \\ -2b+3d & = & -11 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{lll} a & = & 2 \\ b & = & 1 \\ c & = & 1 \\ d & = & -3 \end{array}\right.$$

seconde méthode :

$$f(x,y)=f(x,0)+f(0,y)=xf(1,0)+yf(0,1) \Rightarrow \left\{\begin{array}{lll} f(1,0)+f(0,1) & = & (3,-2) \\ -2f(1,0)+3f(0,1) & = & (-1,-11) \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{lll} f(1,0) & = & (2,1) \\ f(0,1) & = & (1,-3) \end{array}\right.$$

$\Rightarrow f(x,y)=xf(1,0)+yf(0,1)=x(2,1)+y(1,-3)=(2x+y,x-3y)$ ■

Exercice 3 Déterminer le noyau et l'image des applications linéaires suivantes :

$$\begin{array}{rcl} f:\mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \mapsto & (x+2y+z,x-z,y+z) \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} h:\mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \mapsto & (x-2y-z,y+3z,z) \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} k:\mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y) & \mapsto & (2x+3y,0,x-2y) \end{array}$$

$V(x,y,z) \in Ker f \Rightarrow f(V)=0 \Rightarrow (x+2y+z,x-z,y+z)=(0,0,0)$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{lll} x+2y+z & = & 0 \\ x-z & = & 0 \\ y+z & = & 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{lll} x & = & z \\ y & = & -z \\ z & \in & \mathbb{R} \end{array}\right.$$

$V(x,y,z) \in Ker f \Rightarrow V=(z,-z,z)=z(1,-1,1) \Rightarrow Ker f = vect <(1,-1,1)>$
f n'est pas injective car $Ker f \neq \{0\}$.
$dimE = dim ker f + dim Im f \Rightarrow dim Im f = 3-1=2$
Il suffit de trouver deux vecteurs libres de $Im f$.
$f(1,0,0)=(1,1,0)$ et $f(0,1,0)=(2,0,1)$ sont par définition des vecteurs de $Im f$.
$\{(1,1,0),(2,0,1)\}$ est libre, donc c'est une base de $Im f$.
On peut alors dire que $Im f = Vect <W_1,W_2>$ avec $W_1(1,1,0)$ et $W_2(2,0,1)$.
f n'est pas surjective car $Im f \neq \mathbb{R}^3$.

$V(x,y,z) \in Ker h \Rightarrow h(V)=0 \Rightarrow (x-2y-z,y+3z,z)=(0,0,0)$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{lll} x-2y-z & = & 0 \\ y+3z & = & 0 \\ z & = & 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{lll} x & = & 0 \\ y & = & 0 \\ z & = & 0 \end{array}\right.$$

h est injective car $Ker h = \{(0,0,0)\}$.
$dimE = dim ker h + dim Im h \Rightarrow dim Im h = dimE - dim ker h = 3-0=3$
Donc h est surjective car $Im h = \mathbb{R}^3$
On en conclut que h est bijective.
$V(x,y,z) \in Ker k \Rightarrow k(V)=0 \Rightarrow (2x+3y,0,x-2y)=(0,0,0)$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{lll} 2x+3y & = & 0 \\ x-2y & = & 0 \end{array}\right. \Rightarrow x=y=0$$

k est injective car $Ker k = \{(0,0,0)\}$.
$dimE = dim ker k + dim Im k \Rightarrow dim Im k = 2-0=2$.
Il suffit de trouver deux vecteurs libres de $Im k$.
$k(1,0)=(2,0,1)$ et $k(0,1)=(3,0,-2)$ sont par définition des vecteurs de $Im k$.

$\{(2,0,1),(3,0,-2)\}$ est libre, donc c'est une base de Imk
on peut alors dire que $Imk = Vect < T_1, T_2 >$ avec $T_1(2,0,1)$ et $T_2(3,0,-2)$.
k n'est pas surjective car $Imk \neq \mathbb{R}^3$.

■

Exercice 4

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}_3[X] & \rightarrow & \mathbb{R}_3[X] \\ P & \mapsto & P(X) - P(X+1) \end{array}$$

1. Vérifier que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$
   Soient P et Q deux vecteurs de $\mathbb{R}_3[X]$.
   $f(P+Q) = (P+Q)(X) - (P+Q)(X+1) = P(X) - P(X+1) + Q(X) - Q(X+1) = f(P) + f(Q)$
   Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $P \in \mathbb{R}_3[X]$
   $f(\lambda P) = \lambda P(X) - \lambda P(X+1) = \lambda(P(X) - P(X+1)) = \lambda f(P)$
2. Déterminer le noyau et l'image de f
   $P \in Kerf \Rightarrow f(P) = 0 \Rightarrow P(X) - P(X+1) = 0 \Rightarrow P(X) = P(X+1)$
   Posons $P(0) = c \in \mathbb{R} \Rightarrow c = P(0) = P(1) = P(2) = \cdots$
   On pose $Q(X) = P(X) - c \Rightarrow Q(0) = Q(1) = Q(2) = \cdots = 0$
   Le polynôme Q possède une infinité de racines $\Rightarrow Q = 0 \Rightarrow P(X) = c \in \mathbb{R}$
   $Kerf = \{P \in \mathbb{R}_3[X] / P(X) = c \in \mathbb{R}\}$
   $\mathscr{B} = \{1, X, X^2, X^3\}$ est la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$
   D'après théorème, $\{f(1), f(X), f(X^2), f(X^3)\}$ est une famille génératrice de Imf
   $f(1) = 1 - 1 = 0 \qquad f(X) = X - (X+1) = -1 \qquad f(X^2) = X^2 - (X+1)^2 = -2X - 1$
   $f(X^3) = X^3 - (X+1)^3 = -3X^2 - 3X - 1$
   $f(1) = 0 \Rightarrow \{f(X), f(X^2), f(X^3)\}$ est une famille génératrice de Imf
   les trois vecteurs $f(X), f(X^2), f(X^3)$ sont des polynômes de degré différent.
   Donc $\{f(X), f(X^2), f(X^3)\}$ est une famille libre.
   On en conclut que $\{f(X), f(X^2), f(X^3)\}$ est une base de Imf.
   Autrement dit, $Imf = Vect < f(X), f(X^2), f(X^3) >$

■

Exercice 5 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et $\mathscr{B} = \{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ une base de E
Soit f une application de E dans E telle que :

$$\begin{cases} f(e_i) = e_{i+1} & \text{pour } i \in \{1, n-1\} \\ f(e_n) = e_1 \end{cases}$$

1. Déterminer le noyau et l'image de f
   $V \in E \Rightarrow V = a_1e_1 + a_2e_2 + \cdots + a_ne_n$
   $V \in Kerf \Rightarrow f(V) = 0 \Rightarrow f(a_1e_1 + a_2e_2 + \cdots + a_ne_n) = 0$
   $\Rightarrow a_1f(e_1) + a_2f(e_2) + \cdots + a_nf(e_n) = 0$
   $\Rightarrow a_1e_2 + a_2e_3 + \cdots + a_ne_1 = 0$
   Comme $\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ est libre, alors $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0 \Rightarrow V = 0$
   Donc $Kerf = \{0\}$.
   Comme f est un endomorphisme, alors $Imf = E$.
2. f est elle bijective ?
   f est bijective car $Kerf = \{0\}$.
3. Montrer que $f^n = f$

$f^n(V) = f^n(a_1e_1 + a_2e_2 + \cdots + a_ne_n) = a_1f^n(e_1) + a_2f^n(e_2) + \cdots + a_nf^n(e_n)$
$= a_1e_1 + a_2e_2 + \cdots + a_ne_n = Id(V)$

■

Exercice 6 Soient E un K-espace vectoriel de dimension finie et $f \in End(E)$ tel que : $rg(f^2) = rg(f)$.

1. Établir que $Imf^2 = Imf$ et $kerf^2 = kerf$.
   $w \in Imf^2 \Rightarrow \exists x \in E,\ f^2(x) = w \Rightarrow w = f(f(x)) = f(y)$ avec $y = f(x) \in E \Rightarrow w \in Imf$
   Ce qui équivaut à dire que : $Imf^2 \subset Imf$.
   Comme $rg(f^2) = rg(f)$, alors $Imf^2 = Imf$.
   $X \in Kerf \Rightarrow f(X) = 0 \Rightarrow f(f(X)) = 0 \Rightarrow X \in Kerf^2$
   Ce qui équivaut à dire que : $Kerf \subset Kerf^2$.
   Comme $rg(f^2) = rg(f)$, alors d'après le théorème du rang :
   $dim kerf^2 = dim kerf$
   Donc, $kerf = kerf^2$.
2. Montrer que Imf et $kerf$ sont supplémentaires dans E.
   D'après le theorème du rang $dimE = rgf + dimKerf$
   $V \in Imf \cap Kerf \Rightarrow V = f(X)$ avec $X \in E$ et $f(V) = 0 \Rightarrow f(f(X)) = 0$
   $\Rightarrow X \in Kerf^2 \Rightarrow X \in Kerf \Rightarrow f(X) = 0 \Rightarrow V = 0$.
   Donc, $Im f \cap Ker f = \{0\}$.
   On en conclut que Imf et $kerf$ sont supplémentaires dans E.

■

Exercice 7 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et soit p un endomorphisme de E
On dit que p est un projecteur ssi $p \circ p = p$

1. Montrer que : [p projecteur]$\Rightarrow$ [$E =$ Ker $p \oplus$ Im p]
   $V \in Ker\, p \cap Im\, p \Rightarrow \begin{cases} p(V) = 0 \\ V = p(W) \text{ avec } W \in E \end{cases} \Rightarrow p(p(W)) = 0$
   Or $p \circ p = p \Rightarrow p(p(W)) = p(W) \Rightarrow p(W) = 0 \Rightarrow V = 0$
   Donc, $Ker\, p \cap Im\, p = \{0\}$
   Montrons que $E =$ Ker $p +$ Im p
   $\forall V \in E, V = [V - p(V)] + p(V)$
   on pose $V_1 = V - p(V)$ et $V_2 = p(V) \Rightarrow V = V_1 + V_2$
   $V_2 \in$ Im p (par définition)
   $p(V_1) = p(V - p(V)) = p(V) - p(p(V)) = p(V) - p(V) = 0 \Rightarrow V_1 \in$ Ker p
   Conclusion : $E =$ Ker $p \oplus$ Im p
2. Soient $\mathscr{A}_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x - y = 0\}$ et$\mathscr{A}_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x + y = 0\}$ deux sev de $\mathbb{R}^2$
   (a) Vérifier que $\mathscr{A}_1 \oplus \mathscr{A}_2 = \mathbb{R}^2$
   Soit $V(x,y) \in \mathscr{A}_1 \cap \mathscr{A}_2 \Rightarrow \begin{cases} x - y = 0 \\ x + y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \mathscr{A}_1 \cap \mathscr{A}_2 = \{(0,0)\}$
   Analyse(brouillon)
   $(x,y) = (x_1,y_1) + (x_2,y_2)$ avec $(x_1,y_1) \in \mathscr{A}_1$ et $(x_2,y_2) \in \mathscr{A}_2$

$$\begin{cases} x_1+x_2=x \\ y_1+y_2=y \\ x_1-y_1=0 \\ x_2+y_2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1-y_2=x \\ y_1+y_2=y \\ x_1=y_1 \\ x_2=-y_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1=\frac{1}{2}(x+y) \\ y_2=\frac{1}{2}(y-x) \\ x_1=\frac{1}{2}(x+y) \\ x_2=\frac{1}{2}(x-y) \end{cases}$$

Synthèse(propre)

$\forall V(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ (x,y)=\left(\frac{1}{2}(x+y),\frac{1}{2}(x+y)\right)+\left(\frac{1}{2}(x-y),\frac{1}{2}(y-x)\right)$

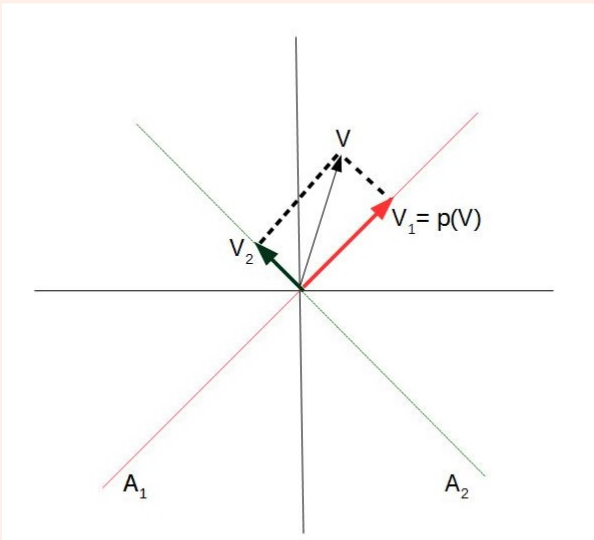
On pose $V_1=\left(\frac{1}{2}(x+y),\frac{1}{2}(x+y)\right)$ et $V_2=\left(\frac{1}{2}(x-y),\frac{1}{2}(y-x)\right)$

Donc, $V=V_1+V_2$ avec $V_1\in\mathscr{A}_1$ et $V_2\in\mathscr{A}_2$

On en conclut que $\mathscr{A}_1\oplus\mathscr{A}_2=\mathbb{R}^2$

(b) On définit l'endomorphisme p par :

$$\begin{array}{rcl} p:\mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & \left(\frac{1}{2}(x+y),\frac{1}{2}(x+y)\right) \end{array}$$



Vérifier que p est un projecteur

$(p\circ p)(x,y)=p\left(\frac{1}{2}(x+y),\frac{1}{2}(x+y)\right)=\left(\frac{1}{2}(x+y),\frac{1}{2}(x+y)\right)\Rightarrow p\circ p=p$

(c) Déterminer $\operatorname{Ker} p$ puis $\operatorname{Im} p$

$\operatorname{Ker} p=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2/p(x,y)=(0,0)\}$

$(x,y)\in\operatorname{Ker} p\Leftrightarrow p(x,y)=(0,0)\Leftrightarrow\left(\frac{1}{2}(x+y),\frac{1}{2}(x+y)\right)=(0,0)\Leftrightarrow x+y=0$

Donc $\operatorname{Ker} p=\mathscr{A}_2$

D'après théorème, $\{p(1,0),p(0,1)\}$ est une famille génératrice de $\operatorname{Im} p$

Donc, $\{\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\}$ est une famille génératrice de $\operatorname{Im} p\Rightarrow\{\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\}$ base de $\operatorname{Im} p$

On peut aussi remarquer que $\left\{\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\right\}$ est aussi une base de $\mathscr{A}_1$ donc, $\operatorname{Im} p = \mathscr{A}_1$ ■

Exercice 8 On définit l'application f par :

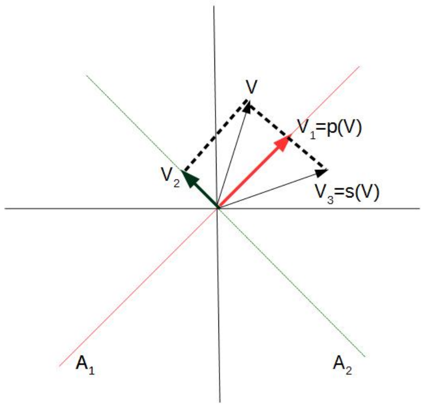
$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}_2[X] & \rightarrow & \mathbb{R}_2[X] \\ P & \rightarrow & f(P) = Q \quad \text{avec } Q(X) = P(X) - XP'(0) \end{array}$$

1. f est-il un projecteur ?
   Montrons que f est linéaire
   $$\begin{aligned} f(P_1+P_2) &= (P_1+P_2)(X) - X(P_1+P_2)'(0) = P_1(X) - XP_1'(0) + P_2(X) - XP_2'(0) \\ &= f(P_1)+f(P_2) \end{aligned}$$
   $f(\lambda P) = (\lambda P)(X) - X(\lambda P)'(0) = \lambda(P(X) - XP'(0)) = \lambda f(P)$
   Il reste à montrer que $f \circ f = f$
   $(f \circ f)(P) = f(Q) = Q(X) - XQ'(0)$
   Or $Q'(X) = P'(X) - P'(0) \Rightarrow Q'(0) = P'(0) - P'(0) = 0$
   D'où $(f \circ f)(P) = Q = f(P)$
2. Déterminer $Kerf$ puis Imf
   Soit $P \in \mathbb{R}_2[X] \Rightarrow P(X) = aX^2 + bX + c \Rightarrow P'(X) = 2aX + b \Rightarrow P'(0) = b$
   $P \in Kerf \Rightarrow f(P) = 0 \Rightarrow P(X) - XP'(0) = 0 \Rightarrow (aX^2 + bX + c) - Xb = 0$
   $$\Rightarrow aX^2 + c = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b \in \mathbb{R} \\ c = 0 \end{cases}$$
   Donc, $P \in Kerf \Rightarrow P(X) = bX \Rightarrow Kerf = \text{Vect} < X > \Rightarrow dimKerf = 1$
   $\dim \operatorname{Im} f = dim\mathbb{R}_2[X] - dimKerf = 3 - 1 = 2$
   $\{1, X, X^2\}$ est la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$
   $f(1) = 1 \qquad f(X^2) = X^2 \Rightarrow Imf = \text{Vect} < 1, X^2 >$

■

Exercice 9 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et soit p un projecteur de E.

1. En posant $s = 2p - Id$, vérifier que $s \circ s = Id$ (on dira que s est une symétrie)
2. Déterminer $\operatorname{Ker} s$ puis $\operatorname{Im} s$
   $V \in \operatorname{Ker} s \Rightarrow s(V) = 0$
   Comme s est linéaire alors, $s(s(V)) = s(0) = 0$.
   On sait que $(s \circ s)(V) = s(s(V)) = Id(V) = V$
   Ce qui implique que $V = 0$.
   Donc, $\operatorname{Ker} s = \{0\}$
   $s \circ s = Id \Rightarrow s^{-1} = s$.
   Cela équivaut à dire que s est bijective.
   Comme s est aussi surjective, alors $\operatorname{Im} s = E$.
3. On définit l'endomorphisme s par :
   $$\begin{array}{rcl} s : \mathbb{R}^2 & \rightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (y,x) \end{array}$$



Vérifier que s est une symétrie
$(s \circ s)(x,y) = s(s(x,y)) = s(y,x) = (x,y) = Id(x,y) \Rightarrow s \circ s = Id$

Exercice 10 On définit l'application f par :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}_2[X] &\to \mathbb{R}_2[X] \\ P &\to f(P) = Q \quad \text{avec } Q(X) = P(X) - 2XP'(0) \end{aligned}$$

1. f est-il une symétrie ?
   Montrons que f est linéaire
   $$\begin{aligned} f(P_1+P_2) &= (P_1+P_2)(X) - 2X(P_1+P_2)'(0) = P_1(X) - 2XP_1'(0) + P_2(X) - 2XP_2'(0) \\ &= f(P_1) + f(P_2) \end{aligned}$$
   $f(\lambda P) = (\lambda P)(X) - 2X(\lambda P)'(0) = \lambda(P(X) - 2XP'(0)) = \lambda f(P)$
   Il reste à montrer que $f \circ f = Id$
   $(f \circ f)(P) = f(Q) = Q(X) - 2XQ'(0)$
   Or $Q'(X) = P'(X) - 2P'(0) \Rightarrow Q'(0) = P'(0) - 2P'(0) = -P'(0)$
   D'où $(f \circ f)(P) = P(X) - 2XP'(0) - 2X(-P'(0)) = P(X)$
   Donc, f est bien une symétrie car : $f \circ f = Id$.
2. Déterminer $Kerf$ puis Imf
   Soit $P \in \mathbb{R}_2[X] \Rightarrow P(X) = aX^2 + bX + c \Rightarrow P'(X) = 2aX + b \Rightarrow P'(0) = b$
   $P \in Kerf \Rightarrow f(P) = 0 \Rightarrow P(X) - 2XP'(0) = 0 \Rightarrow (aX^2 + bX + c) - 2bX = 0$

$\Rightarrow aX^2 - bX + c = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c = 0 \end{cases}$
Donc, $Kerf = \{0\} \Rightarrow dimKerf = 0$
$\dim \operatorname{Im} f = dim\mathbb{R}_2[X] - dimKerf = 3 - 0 = 3$
Donc, $Imf = \mathbb{R}_2[X]$
seconde méthode
Comme f est une symétrie, alors $Kerf = \{0\}$ et $Imf = \mathbb{R}_2[X]$

3. Matrices et détérminants

3.1 Définitions

Définition 3.1.1 On pose $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ $\quad L = \{1, \cdots, n\}$ et $C = \{1, \cdots, p\}$ avec $p, n \in \mathbb{N}^*$
On appelle matrice à n lignes et p colonnes à coéfficients dans $\mathbb{K}$ toute application :

$$\begin{array}{rcl} A : L \times C & \to & \mathbb{K} \\ (i, j) & \mapsto & A(i, j) = a_{ij} \end{array}$$

On appelle :
i : indice de lignes
j : indice de colonnes
a_{ij} : (i, j)ème élément de la matrice A
L'ensemble des matrices à n lignes et p colonnes à coéfficients dans $\mathbb{K}$ est noté $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

Exemple 3.1

$$\begin{array}{rcl} A : \{1, 2\} \times \{1, 2, 3\} & \to & \mathbb{R} \\ (i, j) & \mapsto & a_{ij} \quad \text{avec} \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} A(1,1) = a_{1,1} = 1 & A(1,2) = a_{1,2} = -2 & A(1,3) = a_{1,3} = 6 \\ A(2,1) = a_{2,1} = -4 & A(2,2) = a_{2,2} = 0 & A(2,3) = a_{2,3} = -3 \end{array}$$

Il est plus simple décrire les a_{ij} sous forme de tableau :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 6 \\ -4 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

■

Dans le càs general, toute matrice A à n lignes et p colonnes à coéfficients dans $\mathbb{K}$ s'écrit :

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix}$$

3.2 Opérations sur les matrices

3.2.1 Addition de matrices

Pour pouvoir additionner deux matrices, il faut qu'elles soient du meme type :
Soient $A, B \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$
Notons par $a_{i,j}$ les éléments de A et par $b_{i,j}$ les éléments de B
Les éléments de la matrice $A+B$ sont $c_{i,j} = a_{i,j} + b_{i,j}$

■ Exemple 3.2

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 6 \\ -4 & 0 & -3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix} \qquad A+B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ -3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

■

Propriétés

1. La matrice dont tous les éléments sont nulles est dite matrice nulle, elle est noté 0

$$\forall A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K}),\ A+0 = 0+A = A$$

2. $\forall A, B \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K}),\ A+B = B+A$
3. $\forall A, B, C \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K}),\ (A+B)+C = A+(B+C)$

3.2.2 Multiplication d'une matrice par un scalaire

Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ et $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$
Notons par $a_{i,j}$ les éléments de A
Les éléments de la matrice λA sont $c_{i,j} = \lambda a_{i,j}$

■ Exemple 3.3

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \qquad 3A = \begin{pmatrix} 3 & 9 \\ 3 & 3 \\ -6 & 3 \end{pmatrix}$$

■

3.2.3 Produit de matrices

Pour pouvoir multiplier deux matrices, il faut que le nombre de colonnes de la premiere soit égal au nombre de lignes de la deuxième.
Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K})$
Notons par $a_{i,j}$ les éléments de A et par $b_{i,j}$ les éléments de B
Le produit de A et B est défini par la matrice $AB \in \mathscr{M}_{n,q}(\mathbb{K})$ dont les éléments sont notés $c_{i,j}$ avec :

$$AB = \begin{pmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i,1} & a_{i,2} & \cdots & a_{i,p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cdots & b_{1,j} & \cdots \\ \cdots & b_{2,j} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \cdots & b_{p,j} & \cdots \end{pmatrix}$$

$$\forall i \in \{1,\cdots,n\},\ j \in \{1,\cdots,q\} \quad c_{i,j} = a_{i,1}b_{1,j} + a_{i,2}b_{2,j} + \cdots + a_{i,p}b_{p,j} = \sum_{k=1}^{p} a_{i,k}b_{k,j}$$

■ **Exemple 3.4**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix} \qquad AB = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 13 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & -5 & 9 \end{pmatrix}$$

■

Propriétés

1. $(AB)C = A(BC)$
2. En général, $AB \neq BA$

■ **Exemple 3.5**

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \qquad BA = \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ -8 & 9 \end{pmatrix} \Rightarrow AB \neq BA$$

■

3.2.4 Transposée d'une matrice

Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ avec $a_{i,j}$ les éléments de A

La transposée de A est définie par la matrice ${}^tA \in \mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ dont les éléments sont : $a_{j,i}$

■ **Exemple 3.6**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \qquad {}^tA = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

■

Propriétés

$\forall A, B \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

1. ${}^t(A+B) = {}^tA + {}^tB$
2. ${}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA$
3. ${}^t({}^tA) = A$

3.3 Matrices carrées et déterminant

Définition 3.3.1 Si $n = p$ on dit que A est une matrice carrée. Dans ce càs, on note $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{a_{1,1}} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & \boxed{a_{2,2}} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & \boxed{a_{n,n}} \end{pmatrix}$$

$a_{1,1}, a_{2,2}, \cdots, a_{n,n}$ sont dits éléments diagonaux de A
$(a_{1,1}, a_{2,2}, \cdots, a_{n,n})$ est dite diagonale de A

Exemple 3.7

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{3} & 4 \\ -2 & \boxed{1} \end{pmatrix} \Rightarrow A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$$

Theorème 3.3.1 $\forall A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}),\ AB \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$
$\forall A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}),\ {}^tA \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$

Exemple 3.8

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow {}^t A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow AB = \begin{pmatrix} 15 & 5 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Définition 3.3.2

1. Une matrice dont tous les termes non diagonaux sont nuls est dite matrice diagonale.
2. Une matrice diagonale dont tous les termes diagonaux sont égales à 1 est dite matrice identité. Elle est noté I_n

Exemple 3.9

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad I_1 = 1 \quad I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Theorème 3.3.2 $\forall A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}),\ I_nA = AI_n = A$

Exemple 3.10

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -5 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow I_3A = AI_3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -5 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} = A$$

Définition 3.3.3

1. Une matrice A est dite symétrique seulement si elle est égale à sa transposée, càd $A = {}^t A$
2. Si $A = -{}^tA$, A est dite antisymétrique.

Exemple 3.11

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 5 \\ -1 & 5 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -4 & -3 \\ 4 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A = {}^t A \quad \text{et} \quad B = -{}^tB$$

3.3.1 Déterminant d'une matrice carrée

Définition 3.3.4 Il existe une unique application $det : \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ appelée déterminant telle que :

1. le déterminant est linéaire par rapport à chaque colonne.
2. Si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ a deux colonnes identiques, alors son déterminant est nul.
3. Le déterminant de la matrice identité I_n vaut 1.

Calcul pratique du déterminant

Exemple 3.12

$$A_1 = a_{1,1} \quad A_2 = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix}$$

$$det\,A_1 = a_{1,1} \quad det\,A_2 = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{vmatrix} = a_{1,1}a_{2,2} - a_{2,1}a_{1,2}$$

■

Exemple 3.13

$$A_1 = 5 \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$det\,A_1 = 5 \quad det\,A_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = 1(2) - (-3)2 = 8$$

■

Définition 3.3.5
Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et A_{ij} la matrice A à laquelle on a enlevé la $i$eme ligne et la $j$eme colonne.
On appelle mineur d'ordre $n-1$ le nombre $detA_{ij}$
On appelle cofacteur de A relativement à l'élément a_{ij} le nombre $C_{ij} = (-1)^{i+j}\det A_{ij}$

Theorème 3.3.3 Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$

$$\forall i \in \{1, \cdots, n\},\ \det A = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}C_{ij}$$

$$\forall j \in \{1, \cdots, n\},\ \det A = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}C_{ij}$$

Exemple 3.14

$$A_3 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

On peut calculer le déterminant par rapport à la première ligne en choisissant $i = 1$

$$i = 1 \Rightarrow \det A = \sum_{j=1}^{3} a_{1j}C_{1j} = a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + a_{13}C_{13} = 3\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} + (-1)\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow \det A = 3(8) - 2(2) + (-1)4 = 16$$

On peut aussi calculer le déterminant par rapport à la deuxième colonne en choisissant $j = 2$

$$j = 2 \Rightarrow \det A = \sum_{i=1}^{3} a_{i2}C_{i2} = a_{12}C_{12} + a_{22}C_{22} + a_{32}C_{32} = -2\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow \det A = -2(2)+2(8)-2(-2) = 16$$

■

Theorème 3.3.4 Le déterminant possède les propriétés suivantes :
1. $det\,AB = det\,A \times det\,B$.
2. $det\,{}^tA = det\,A$.

■ **Exemple 3.15**

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow {}^t A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\det{}^tA = 3\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = 3(8) - 8 - 0 = 16 = \det A$$

■

Définition 3.3.6 Une matrice carrée A est dite triangulaire supérieure si tous les termes situés sous la diagonale sont nuls. Elle est dite triangulaire inférieure si tous les termes situés au dessus de la diagonale sont nuls.

Theorème 3.3.5 Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$

Si A est diagonale, triangulaire supérieure ou triangulaire inférieure alors son déterminant est égal au produit de ses éléments diagonaux.

■ **Exemple 3.16**

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow det\,A = 2(-1)3 = -6$$

$$L = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow det\,L = 3(2)3 = 18$$

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow det\,L = 1(1)1 = 1$$

■

Theorème 3.3.6 Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$

On pose $A = (C_1, C_2, \cdots, C_j, \cdots, C_k, \cdots, C_p)$ avec C_j la j ème colonne de A, alors :
1. $\det(C_1, C_2, \cdots, \alpha C_j, \cdots, C_k, \cdots, C_p) = \alpha \det(C_1, C_2, \cdots, C_j, \cdots, C_k, \cdots, C_p) = \alpha \det A$
2. $\det(C_1, C_2, \cdots, C_j + \alpha C_k, \cdots, C_k, \cdots, C_p) = \det(C_1, C_2, \cdots, C_j, \cdots, C_k, \cdots, C_p) = \det A$
3. $\det(C_1, C_2, \cdots, C_k, \cdots, C_j, \cdots, C_p) = -\det(C_1, C_2, \cdots, C_j, \cdots, C_k, \cdots, C_p) = -\det A$

R Le théorème reste valable si on remplace les colonnes par les lignes car $\det{}^tA = \det A$

■ **Exemple 3.17**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \begin{matrix} \leftarrow L_1 \\ \leftarrow L_2 \\ \leftarrow L_3 \end{matrix} \quad = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -4 & 2 \\ 0 & 4 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} \leftarrow L'_1 & = & L_1 \\ \leftarrow L'_2 & = & L_2 - 3L_1 \\ \leftarrow L'_3 & = & L_3 + L_1 \end{matrix} \quad = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} \begin{matrix} \leftarrow L''_1 & = & L'_1 \\ \leftarrow L''_2 & = & L'_2 \\ \leftarrow L''_3 & = & L'_3 + L'_2 \end{matrix}$$

Donc $\det A = 1 \times (-4) \times 4 = -16$ ■

3.3.2 Inverse d'une matrice carrée

Theorème 3.3.7 $\forall A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, $\det A \neq 0 \Leftrightarrow \exists! A^{-1} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ tel que $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$
A^{-1} est dite matrice inverse de A

Définition 3.3.7 Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$
On appelle comatrice de A la matrice dont les éléments sont les cofacteurs associées aux éléments de A càd

$$\text{Com } A = (C_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \qquad \text{avec } C_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ij}$$

■ **Exemple 3.18**

$$A = \begin{pmatrix} + & - & + \\ 3 & 2 & -1 \\ & & \\ - & + & - \\ 1 & 2 & -1 \\ & & \\ + & - & + \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Com } A = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -2 & 4 \\ -8 & 8 & -8 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

■

Theorème 3.3.8 Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, tel que $\det A \neq 0$

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{\det A}\, {}^t\text{Com } A}$$

■ **Exemple 3.19**

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{\det A}\, {}^t\text{Com } A = \frac{1}{16} \begin{pmatrix} 8 & -8 & 0 \\ -2 & 8 & 2 \\ 4 & -8 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & 0 \\ -1/8 & 1/2 & 1/8 \\ 1/4 & -1/2 & 1/4 \end{pmatrix}$$

■

Propriétés

$\forall A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$

1. $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
2. $({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1})$
3. $(A^{-1})^{-1} = A$

3.3.3 Rang d'une matrice

Définition 3.3.8 Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

1. On appelle sous matrice de A, la matrice A à laquelle on a enlevé k lignes et l colonnes.
2. On appelle rang de A et on note $rg(A)$ la taille (cad le nombre de ligne ou de colonnes) de la plus grande sous matrice carrée inversible de A(cad dont le déterminant est non nul).

■ **Exemple 3.20**

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

La plus grande sous matrice carrée de A est necessairement de taille 2×2

$$\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -6 \neq 0$$

On en conclut que $rg(A) = 2$

La plus grande sous matrice carrée de B est necessairement de taille 2×2

$$\begin{vmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow rg(B) < 2$$

$-4 \neq 0 \Rightarrow rg(B) = 1$

■

3.4 Exercices

Exercice 1

$$A=\begin{pmatrix}3 & -1 & 1\\ 2 & 0 & 3\\ -1 & 1 & 4\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & -2 & 3\\ -1 & -3 & 2\end{pmatrix}\qquad C=\begin{pmatrix}-2 & 0 & 1\\ 1 & 4 & -2\\ 0 & 3 & 1\end{pmatrix}$$

1. Calculer AB puis BA
2. A-t-on $(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$?
3. Vérifier que $(AB)^T=B^TA^T$
4. Calculer $(AB)C$ puis $A(BC)$

Exercice 2 On considère la matrice

$$A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ 0 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$$

1. Déterminer l'expression de A^n.
2. Calculer A^{10}

Exercice 3 On définit la trace d'une matrice par la somme de ses éléments diagonaux

1. Vérifier que : $\forall A,B\in\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$,
   $\mathrm{Tr}(A-B)=\mathrm{Tr}(A)-\mathrm{Tr}(B)$ puis que $\mathrm{Tr}(AB)=\mathrm{Tr}(BA)$
2. Résoudre dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ l'équation suivante : $AB-BA=I$

Exercice 4 Calculer le determinant des matrices suivantes en utilisant les cofacteurs puis par la méthode de Gauss

$$A=\begin{pmatrix}3 & -1 & 1\\ 2 & 0 & 3\\ -1 & 1 & 4\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 1\\ 0 & -2 & 3 & 4\\ -1 & -3 & 2 & 0\\ 3 & 4 & 0 & -2\end{pmatrix}\qquad C=\begin{pmatrix}1 & 2 & 2 & 1\\ 1 & 2 & 4 & 2\\ 2 & 7 & 5 & 2\\ -1 & 4 & -6 & 3\end{pmatrix}$$

Exercice 5 Soient a,b,c trois réels distincts et soit :

$$A=\begin{pmatrix}1 & a & a^2\\ 1 & b & b^2\\ 1 & c & c^2\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}a+b & a & a & a\\ a & a+b & a & a\\ a & a & a+b & a\\ a & a & a & a+b\end{pmatrix}$$

1. Vérifier que $\det A=(c-a)(c-b)(b-a)$
2. En déduire que A est toujours inversible.
3. Calculer $\det B$

Exercice 6

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 3 \\ -1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Vérifier que $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ puis que $({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1})$
2. Résoudre dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ l'équation suivante : $(A - AX)^{-1} = X^{-1}B$

Exercice 7 Déterminer l'inverse (s'il existe) des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 4 & 2 \\ 0 & -2 & 6 & 1 & 6 \\ 1 & 3 & -5 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

Exercice 8 On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

1. Calculer $A^2 - 3A + 2I$.
2. En déduire que A est inversible et calculer son inverse.
3. Pour $n \geq 2$, déterminer le reste de la division euclidienne de X^n par $X^2 - 3X + 2$.
4. En déduire l'expression de la matrice A^n.

Exercice 1

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 3 \\ -1 & -3 & 2 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & -2 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Calculer AB puis BA
$$AB = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 3 \\ -1 & -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & -7 & 6 \\ -5 & -15 & 11 \end{pmatrix}$$
$$BA = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 3 \\ -1 & -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 4 \\ -7 & 3 & 6 \\ -11 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$
On remarque que $AB \neq BA$
2. A-t-on $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$?
$(A+B)^2 = (A+B)(A+B) = A^2 + AB + BA + B^2$
Comme $AB \neq BA$, alors $AB + BA \neq 2AB$
D'où $(A+B)^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$
3. Vérifier que $(AB)^T = B^T A^T$
$$(AB)^T = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & -7 & 6 \\ -5 & -15 & 11 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -5 \\ 2 & -7 & -15 \\ -1 & 6 & 11 \end{pmatrix}$$
$$B^T A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & -3 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -5 \\ 2 & -7 & -15 \\ -1 & 6 & 11 \end{pmatrix}$$
4. Calculer $(AB)C$ puis $A(BC)$
$$(AB)C = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & -7 & 6 \\ -5 & -15 & 11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & -2 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 5 & -3 \\ -5 & -10 & 19 \\ -5 & -27 & 36 \end{pmatrix}$$
$$A(BC) = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 4 & -1 \\ -2 & 1 & 7 \\ -1 & -6 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 5 & -3 \\ -5 & -10 & 19 \\ -5 & -27 & 36 \end{pmatrix}$$
On voit que $(AB)C = A(BC)$

■

Exercice 2 On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer l'expression de A^n.
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
On pose $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$A = D + N \Rightarrow A^n = (D+N)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k N^k D^{n-k}$ avec $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$

Car : $ND = DN$

On remarque que : $N^3 = 0$

D'où $A^n = (D+N)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k N^k D^{n-k} = C_n^0 D^n + C_n^1 N D^{n-1} + C_n^2 N^2 D^{n-2}$

avec $D^k = \begin{pmatrix} 2^k & 0 & 0 \\ 0 & 2^k & 0 \\ 0 & 0 & 2^k \end{pmatrix}$

(remarque : ne pas utiliser $D = 2^k I$ car on n'a pas tjs $D = \alpha I$)

2. Calculer A^{10}

$A^n = C_n^0 D^n + C_n^1 N D^{n-1} + C_n^2 N^2 D^{n-2} \Rightarrow A^{10} = C_{10}^0 D^{10} + C_{10}^1 N D^9 + C_{10}^2 N^2 D^8$

$$\Rightarrow A^{10} = C_{10}^0 \begin{pmatrix} 2^{10} & 0 & 0 \\ 0 & 2^{10} & 0 \\ 0 & 0 & 2^{10} \end{pmatrix} + C_{10}^1 \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^9 & 0 & 0 \\ 0 & 2^9 & 0 \\ 0 & 0 & 2^9 \end{pmatrix}$$

$$+ C_{10}^2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^8 & 0 & 0 \\ 0 & 2^8 & 0 \\ 0 & 0 & 2^8 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A^{10} = \begin{pmatrix} 2^{10} & 0 & 0 \\ 0 & 2^{10} & 0 \\ 0 & 0 & 2^{10} \end{pmatrix} + 10 \begin{pmatrix} 0 & 2^9 & 2^9 \\ 0 & 0 & 2^9 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + 45 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2^8 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A^{10} = \begin{pmatrix} 2^{10} & 2^9 10 & 2^9 10 + 2^8 45 \\ 0 & 2^{10} & 2^9 10 \\ 0 & 0 & 2^{10} \end{pmatrix}$$

■

Exercice 3 On définit la trace d'une matrice par la somme de ses éléments diagonaux

1. Vérifier que : $\forall A, B \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$,

$\mathrm{Tr}(A-B) = \mathrm{Tr}(A) - \mathrm{Tr}(B)$ puis que $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$

On pose $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} j & k & l \\ m & n & o \\ p & q & r \end{pmatrix}$

$$A - B = \begin{pmatrix} a-j & \times & \times \\ \times & e-n & \times \\ \times & \times & i-r \end{pmatrix}$$

$\mathrm{Tr}(A-B) = (a-j) + (e-n) + (i-r) = (a+e+i) - (j+n+r) = \mathrm{Tr}(A) - \mathrm{Tr}(B)$

$$AB = \begin{pmatrix} aj+bm+cp & \times & \times \\ \times & dk+en+fq & \times \\ \times & \times & gl+ho+ir \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \mathrm{Tr}(AB) = aj + bm + cp + dk + en + fq + gl + ho + ir$

$$BA = \begin{pmatrix} ja+kd+lg & \times & \times \\ \times & mb+ne+oh & \times \\ \times & \times & pc+qf+ri \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \mathrm{Tr}(BA) = ja + kd + lg + mb + ne + oh + pc + qf + ri$

On en conclut que $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$

2. Résoudre dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ l'équation suivante : $AB - BA = I$ avec $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$AB - BA = I \Rightarrow \text{Tr } (AB - BA) = \text{Tr } I = 3 \Rightarrow \text{Tr } (AB) - \text{Tr } (BA) = 3$
Or, $\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA) \Rightarrow \text{Tr } (AB) - \text{Tr } (BA) = 0$
Donc, l'équation $AB - BA = I$ n'admet pas de solutions ■

Exercice 4 Calculer le determinant des matrices suivantes en utilisant les cofacteurs puis par la méthode de Gauss

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 3 & 4 \\ -1 & -3 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & -2 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 2 \\ 2 & 7 & 5 & 2 \\ -1 & 4 & -6 & 3 \end{pmatrix}$$

— Calcul à l'aide des cofacteurs :

$$\det B = \begin{vmatrix} + & - & + & - \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 3 & 4 \\ -1 & -3 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} -2 & 3 & 4 \\ -3 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & -2 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 0 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & -2 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 0 & -2 & 3 \\ -1 & -3 & 2 \\ 3 & 4 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\det B = 1(-42) - 1(-30) - 1(3) = -15$$

— Méthode de Gauss

$$\det B = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 3 & 4 \\ -1 & -3 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & -2 \end{vmatrix} \begin{matrix} \leftarrow L_1 \\ \leftarrow L_2 \\ \leftarrow L_3 \\ \leftarrow L_4 \end{matrix} \qquad = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -5 \end{vmatrix} \begin{matrix} \leftarrow L'_1 & = & L_1 \\ \leftarrow L'_2 & = & L_2 \\ \leftarrow L'_3 & = & L_3 + L_1 \\ \leftarrow L'_4 & = & L_4 - 3L_1 \end{matrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 3/2 & -3 \end{vmatrix} \begin{matrix} \leftarrow L''_1 & = & L'_1 \\ \leftarrow L''_2 & = & L'_2 \\ \leftarrow L''_3 & = & L'_3 - L'_2 \\ \leftarrow L''_4 & = & L'_4 - \frac{1}{2}L_2 \end{matrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -15/2 \end{vmatrix} \begin{matrix} \leftarrow L'''_1 & = & L''_1 \\ \leftarrow L'''_2 & = & L''_2 \\ \leftarrow L'''_3 & = & L''_3 \\ \leftarrow L'''_4 & = & L''_4 + \frac{3}{2}L''_3 \end{matrix}$$

Donc, $\det B = 1 \times -2 \times -1 \times -15/2 = -15$
On applique le meme calcul pour les matrices A et C. ■

Exercice 5 Soient a_1, a_2, a_3 trois réels distincts et soit :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 \\ 1 & a_2 & a_2^2 \\ 1 & a_3 & a_3^2 \end{pmatrix}$$

1. Vérifier que $\det A = (a_3-a_1)(a_3-a_2)(a_2-a_1)$

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 \\ 1 & a_2 & a_2^2 \\ 1 & a_3 & a_3^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 \\ 0 & a_2-a_1 & a_2^2-a_1^2 \\ 0 & a_3-a_1 & a_3^2-a_1^2 \end{vmatrix}$$

On calcule le déterminant par rapport à la première colonne

$$\begin{aligned} \det A &= (a_2-a_1)(a_3^2-a_1^2)-(a_3-a_1)(a_2^2-a_1^2) \\ &= (a_2-a_1)(a_3-a_1)(a_3+a_1)-(a_3-a_1)(a_2-a_1)(a_2+a_1) \\ &= (a_2-a_1)(a_3-a_1)\big[(a_3+a_1)-(a_2+a_1)\big] \\ &= (a_2-a_1)(a_3-a_1)(a_3-a_2) \end{aligned}$$

2. En déduire que A est toujours inversible.

$a_1 \neq a_2 \neq a_3 \Rightarrow \det A \neq 0 \Rightarrow A$ est inversible.

R Dans le càs géneral, $\det A = \prod_{n \geq i > j \geq 1} (x_i - x_j)$

$$\det B = \begin{vmatrix} a+b & a & a & a \\ a & a+b & a & a \\ a & a & a+b & a \\ a & a & a & a+b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+b & -b & -b & -b \\ a & b & 0 & 0 \\ a & 0 & b & 0 \\ a & 0 & 0 & b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4a+b & 0 & 0 & 0 \\ a & b & 0 & 0 \\ a & 0 & b & 0 \\ a & 0 & 0 & b \end{vmatrix}$$

On calcule le déterminant par rapport à la première ligne :

$\det B = (4a+b)b^3$

■

Exercice 6

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 3 \\ -1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Vérifier que $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ puis que $({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1})$

$$AB = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 3 \\ -1 & -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & -7 & 6 \\ -5 & -15 & 11 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow (AB)^{-1} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 13 & -7 & 5 \\ -19 & 17 & -11 \\ -20 & 20 & -12 \end{pmatrix}$$

$$(B)^{-1}(A)^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 5 & -2 & 3 \\ -3 & 2 & -3 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -3 & 5 & -3 \\ -11 & 13 & -7 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 13 & -7 & 5 \\ -19 & 17 & -11 \\ -20 & 20 & -12 \end{pmatrix}$$

On en déduit que $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

$$({}^tA)^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -3 & -11 & 2 \\ 5 & 13 & -2 \\ -3 & -7 & 2 \end{pmatrix}$$

$${}^t(A^{-1}) = \frac{1}{4}\,{}^t\begin{pmatrix} -3 & 5 & -3 \\ -11 & 13 & -7 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -3 & -11 & 2 \\ 5 & 13 & -2 \\ -3 & -7 & 2 \end{pmatrix}$$

Finalement, on a bien $({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1})$.

2. Résoudre dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ l'équation suivante : $(A-AX)^{-1} = X^{-1}B$

$(A-AX)^{-1} = X^{-1}B \Rightarrow (A-AX)X^{-1}B = I \Rightarrow AX^{-1}B - AB = I \Rightarrow AX^{-1}B = I + AB$

$X^{-1} = A^{-1}(I+AB)B^{-1} = (A^{-1}+B)B^{-1} = A^{-1}B^{-1} + I \Rightarrow X = [A^{-1}B^{-1}+I]^{-1}$

■

Exercice 7 Déterminer l'inverse (s'il existe) des matrices suivantes :

$$A=\begin{pmatrix}3&-1&0&0\\2&0&0&0\\0&0&-1&1\\0&0&3&2\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}1&1&-2&4&2\\0&-2&6&1&6\\1&3&-5&6&7\\0&0&0&4&-6\\0&0&0&-2&3\end{pmatrix}$$

A est une matrice diagonale par blocs, d'où :

$\det A=\begin{vmatrix}3&-1\\2&0\end{vmatrix}\times\begin{vmatrix}-1&1\\3&2\end{vmatrix}=2\times-5=-10$

$\det A\neq 0\Rightarrow A$ est inversible.

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}\begin{pmatrix}3&-1\\2&0\end{pmatrix}^{-1}&\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\\\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}&\begin{pmatrix}-1&1\\3&2\end{pmatrix}^{-1}\end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix}3&-1\\2&0\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}0&1/2\\-1&3/2\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}-1&1\\3&2\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}-2/5&1/5\\3/5&1/5\end{pmatrix}$

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}0&1/2&0&0\\-1&3/2&0&0\\0&0&-2/5&1/5\\0&0&3/5&1/5\end{pmatrix}$$

B est une matrice triangulaire par blocs $\Rightarrow \det B=\begin{vmatrix}1&1&-2\\0&-2&6\\1&3&-5\end{vmatrix}\times\begin{vmatrix}4&-6\\-2&3\end{vmatrix}=0$

$\det B=0\Rightarrow B$ n'est pas inversible ■

Exercice 8 On considère la matrice

$$A=\begin{pmatrix}-1&-2\\3&4\end{pmatrix}$$

1. Calculer $A^2-3A+2I$.
   $A^2-3A+2I=\begin{pmatrix}-5&-6\\9&10\end{pmatrix}-3\begin{pmatrix}-1&-2\\3&4\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$
2. En déduire que A est inversible et calculer son inverse.
   $A^2-3A+2I=0\Rightarrow A^2-3A=-2I\Rightarrow \dfrac{-1}{2}(A^2-3A)=I\Rightarrow A\left[\frac{-1}{2}(A-3I)\right]=I$
   On en déduit que A est inversible et son inverse est $A^{-1}=\frac{-1}{2}(A-3I)$
3. Pour $n\geq 2$, déterminer le reste de la division euclidienne de X^n par X^2-3X+2.
   $X^n=Q(X)(X^2-3X+2)+R(X)\cdots(*)$
   $degR<2\Rightarrow R(X)=aX+b$
   $(*)\Rightarrow X^n=Q(X)(X^2-3X+2)+aX+b$
   $X=1\Rightarrow 1^n=a+b$
   $X=2\Rightarrow 2^n=2a+b$
   Donc, $a=2^n-1$ et $b=2-2^n\Rightarrow R(X)=(2^n-1)X+2-2^n$
4. En déduire l'expression de la matrice A^n.
   $(*)\Rightarrow A^n=Q(A)(A^2-3A+2I)+aA+bI=aA+bI$

$$A^n = (2^n - 1)\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + (2 - 2^n)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

■

4. Résolution de systèmes linéaires

4.1 Généralités

Définition 4.1.1 On appelle système linéaire de n équations à p inconnues tout système de la forme :

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 & + & a_{1,2}x_2 & + & \cdots + a_{1,p}x_p & = & b_1 \\ a_{2,1}x_1 & + & a_{2,2}x_2 & + & \cdots + a_{2,p}x_p & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1}x_1 & + & a_{n,2}x_2 & + & \cdots + a_{n,p}x_p & = & b_n \end{cases}$$

Tout système linéaire s'ecrit sous forme matricielle :

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 & + & a_{1,2}x_2 & + & \cdots + a_{1,p}x_p & = & b_1 \\ a_{2,1}x_1 & + & a_{2,2}x_2 & + & \cdots + a_{2,p}x_p & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1}x_1 & + & a_{n,2}x_2 & + & \cdots + a_{n,p}x_p & = & b_n \end{cases} \Rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,p} \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{bmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}}_{B}$$

Définition 4.1.2 — nouvelle définition. On appelle système linéaire toute équation de la forme $AX = B$ avec $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $X, B \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$

4.2 Système de Cramer

Définition 4.2.1 Un système linéaire $AX = B$ est dit de Cramer si et seulement si :

1. $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, autrement dit le nombre d'équations n est égal au nombre d'inconnues p.
2. $\det A \neq 0$

Theorème 4.2.1 Tout système de Cramer $AX = B$ admet une solution unique donnée par $S = A^{-1}B$.

4.3 Résolution pratique des systèmes de Cramer

4.3.1 Inversion de matrices

$$\boxed{AX = B \Leftrightarrow X = A^{-1}B}$$

■ **Exemple 4.1**

$$\begin{cases} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 2 \\ 2x_1 & & & & -x_3 & = & 1 \\ x_1 & & -x_2 & + & 2x_3 & = & 3 \end{cases} \Rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}}_{B}$$

$$X = A^{-1}B = \frac{-1}{8}\begin{bmatrix} -1 & -3 & -1 \\ -5 & 1 & 3 \\ -2 & 2 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 & = & 1 \\ x_2 & = & 0 \\ x_3 & = & 1 \end{cases} \Rightarrow S = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

■

4.3.2 Règle de Cramer

Theorème 4.3.1 Soit le système linéaire $AX = B$ avec $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et $X, B \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$
Supposons que A est inversible (i.e : $\det A \neq 0$).
Soit A_j est la matrice obtenue en remplaçant la j-ème colonne de A par le second membre B. Alors l'unique solution $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ du système est donnée par :

$$\boxed{\forall j \in \{1, \cdots, n\},\ x_j = \frac{\det A_j}{\det A}}$$

■ **Exemple 4.2**

$$\begin{cases} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 2 \\ 2x_1 & & & & -x_3 & = & 1 \\ x_1 & & -x_2 & + & 2x_3 & = & 3 \end{cases} \Rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}}_{B}$$

$$x_1 = \frac{\det A_1}{\det A} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix}}{-8} = \frac{-8}{-8} = 1 \qquad x_2 = \frac{\det A_2}{\det A} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix}}{-8} = \frac{0}{-8} = 0$$

$$x_3 = \frac{\det A_3}{\det A} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix}}{-8} = \frac{-8}{-8} = 1 \Rightarrow S = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

4.3.3 méthode de Gauss

Le principe de la méthode est de transformer le système $AX = B$ en un système $A'X = B'$ avec A' une matrice triangulaire supérieure.

■ **Exemple 4.3**

$$\begin{cases} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 2 \\ 2x_1 & & & & -x_3 & = & 1 \\ x_1 & & -x_2 & + & 2x_3 & = & 3 \end{cases} \Rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}}_{B}$$

■

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \end{array}\right] \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -3 & -3 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} L_1' = L_1 \\ L_2' = L_2 - 2L_1 \\ L_3' = L_3 - L_1 \end{array} \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \end{array}\right] \begin{array}{l} L_1'' = L_1'' \\ L_2'' = L_2' \\ L_3'' = L_3' - L_2' \end{array}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}}_{A'} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{bmatrix}}_{B} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{ccccccc} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 2 \\ & & -2x_2 & & -3x_3 & = & -3 \\ & & & & 4x_3 & = & 4 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{ccc} x_1 & = & 1 \\ x_2 & = & 0 \\ x_3 & = & 1 \end{array} \right.$$

■

Exercice 1 Résoudre par la méthode de Cramer le système linéaire suivant :

$$(I)\begin{cases} x-y+2z & = & -2 \\ -2x+3y-5z & = & 0 \\ 3x-y-z & = & -4 \end{cases}$$

Exercice 2 Résoudre par la méthode de Gauss le système linéaire suivant :

$$(II)\begin{cases} 2x+3y-4z & = & -2 \\ x-5y+z & = & 2 \\ -4x+5y-2z & = & -6 \end{cases}$$

Exercice 3 Soit $A \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$, $X, B \in \mathbb{R}^3$ et $a \in \mathbb{R}$ avec

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ a & 1 & a \\ 0 & a & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

1. Pour quelles valeurs de $a \in \mathbb{R}$ le système $AX = B$ admet-il une solution unique.
2. Résoudre dans ce càs le système $AX = B$ par la méthode de Gauss.

Exercice 4

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 6 & -3 & 3 \\ 9 & -1 & 9 \end{pmatrix} \quad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad U = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad B' = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

1. Vérifier que $A = LU$
2. En déduire que A est inversible
3. Résoudre le système linéaire $AX = B$ puis le système $AX = B'$

Exercice 5 Soit le système linéaire $AX = B$ avec :

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \qquad a, b, c \in \mathbb{R}$$

1. Résoudre le système par la méthode de Gauss
2. En déduire la matrice inverse A^{-1}

Exercice 1 Résoudre par la méthode de Cramer le système linéaire suivant :

$$(I)\left\{\begin{array}{lcl} x-y+2z & = & -2 \\ -2x+3y-5z & = & 0 \\ 3x-y-z & = & -4 \end{array}\right.$$

$$(I) \Leftrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 3 & -5 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 3 & -5 \\ 3 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -5$$

$\det A \neq 0 \Rightarrow (I)$ admet une solution unique

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -2 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -5 \\ -4 & -1 & -1 \end{vmatrix}}{\det A} = \frac{20}{-5} = -4 \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 0 & -5 \\ 3 & -4 & -1 \end{vmatrix}}{\det A} = \frac{30}{-5} = -6$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -2 & 3 & 0 \\ 3 & -1 & -4 \end{vmatrix}}{\det A} = \frac{10}{-5} = -2$$

■

Exercice 2 Résoudre par la méthode de Gauss le système linéaire suivant :

$$(II)\left\{\begin{array}{lcl} 2x+3y-4z & = & -2 \\ x-5y+z & = & 2 \\ -4x+5y-2z & = & -6 \end{array}\right.$$

$$(II) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 1 & -5 & 1 \\ -4 & 5 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -4 & -2 \\ 1 & -5 & 1 & 2 \\ -4 & 5 & -2 & -6 \end{array}\right] \begin{array}{l} \leftarrow L_1 \\ \leftarrow L_2 \\ \leftarrow L_3 \end{array} \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -4 & -2 \\ 0 & -13/2 & 3 & 3 \\ 0 & 11 & -10 & -10 \end{array}\right] \begin{array}{l} \leftarrow L'_1 = L_1 \\ \leftarrow L'_2 = L_2 - \frac{1}{2}L_1 \\ \leftarrow L'_3 = L_3 + 2L_1 \end{array}$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -4 & -2 \\ 0 & -13/2 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & -64/13 & -64/13 \end{array}\right] \begin{array}{l} \leftarrow L''_1 = L'_1 \\ \leftarrow L''_2 = L'_2 \\ \leftarrow L''_3 = L'_3 + \frac{22}{13}L'_2 \end{array}$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{lcl} 2x+3y-4z & = & -2 \\ -\frac{13}{2}y+3z & = & 3 \\ -\frac{64}{13}z & = & -\frac{64}{13} \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x=1 \\ y=0 \\ z=1 \end{array}\right.$$

■

Exercice 3 Soit $A \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$, $X, B \in \mathbb{R}^3$ et $a \in \mathbb{R}$ avec

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ a & 1 & a \\ 0 & a & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

1. Pour quelles valeurs de $a \in \mathbb{R}$ le système $AX = B$ admet-il une solution unique.

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & a & 0 \\ a & 1 & a \\ 0 & a & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1-a^2 & a \\ 0 & a & 1 \end{vmatrix} = (1-a^2) - a^2 = 1 - 2a^2$$

$$\det A \neq 0 \Leftrightarrow 1 - 2a^2 \neq 0 \Leftrightarrow a \notin \left\{ -\sqrt{\frac{1}{2}}, \sqrt{\frac{1}{2}} \right\}$$

2. Résoudre dans ce càs le système $AX = B$ par la méthode de Gauss

Par la méthode de Gauss :

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 0 & 1 \\ a & 1 & a & 0 \\ 0 & a & 1 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \leftarrow L_1 \\ \leftarrow L_2 \\ \leftarrow L_3 \end{array} \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 0 & 1 \\ 0 & 1-a^2 & a & -a \\ 0 & a & 1 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \leftarrow L_1' = L_1 \\ \leftarrow L_2' = L_2 - aL_1 \\ \leftarrow L_3' = L_3 \end{array}$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 0 & 1 \\ 0 & 1-a^2 & a & -a \\ 0 & 0 & \frac{1-2a^2}{1-a^2} & \frac{1}{1-a^2} \end{array}\right] \begin{array}{l} \leftarrow L_1'' = L_1' \\ \leftarrow L_2'' = L_2' \\ \leftarrow L_3'' = L_3' - \dfrac{a}{1-a^2} L_2' \end{array}$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} x + ay & = & 1 \\ (1-a^2)y + az & = & -a \\ \frac{1-2a^2}{1-a^2} z & = & \frac{1}{1-a^2} \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} x & = & 1 - ay \\ y & = & \dfrac{az+a}{a^2-1} = \dfrac{1}{a^2-1}\left(a\dfrac{1}{1-2a^2} + a\right) \\ z & = & \dfrac{1}{1-2a^2} \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} x & = & 1 - ay \\ y & = & \dfrac{1}{a^2-1}\left(\dfrac{a + a(1-2a^2)}{1-2a^2}\right) \\ z & = & \dfrac{1}{1-2a^2} \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} x & = & 1 - \dfrac{2a^2(1-a)}{(a^2-1)(1-2a^2)} \\ y & = & \dfrac{2a(1-a)}{(a^2-1)(1-2a^2)} \\ z & = & \dfrac{1}{1-2a^2} \end{array} \right.$$

■

Exercice 4

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 6 & -3 & 3 \\ 9 & -1 & 9 \end{pmatrix} \qquad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad U = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

1. Vérifier que $A = LU$

$$LU = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 6 & -3 & 3 \\ 9 & -1 & 9 \end{pmatrix} = A$$

2. En déduire que A est inversible

$\det A = \det L \times \det U = (-1) \times 3 = -3 \neq 0 \Rightarrow A$ inversible

3. Résoudre le système linéaire $AX = B$

$A = LU \Rightarrow LUX = B$

En posant $UX = Y$, le système devient : $LY = B$
On doit donc résoudre deux systèmes triangulaires :

$$\begin{cases} LY & = & B & (I) \\ UX & = & Y & (II) \end{cases}$$

$$LY = B \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} y_1 & = & -1 \\ 2y_1 - y_2 & = & 1 \\ 3y_1 + 2y_2 + y_3 & = & 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y_1 & = & -1 \\ y_2 & = & 2y_1 - 1 = -3 \\ y_3 & = & 1 - 3y_1 - 2y_2 = 10 \end{cases}$$

$$UX = Y \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 10 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 & = & -1 \\ x_2 + x_3 & = & -3 \\ x_3 & = & 10 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 & = & \frac{1}{3}(-1 + x_2 - 2x_3) = -34/3 \\ x_2 & = & -3 - x_3 = -13 \\ x_3 & = & 10 \end{cases}$$

■

Exercice 5 Soit le système linéaire $AX = B$ avec :

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \qquad a, b, c \in \mathbb{R}$$

1. Résoudre le système par la méthode de Gauss

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 3 & a \\ -1 & 1 & -2 & b \\ 1 & 0 & 1 & c \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 3 & a \\ 0 & 3/2 & -5/4 & b + (a/4) \\ 0 & -1/2 & 1/4 & c - (a/4) \end{array}\right]$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 3 & a \\ 0 & 3/2 & -5/4 & b + (a/4) \\ 0 & 0 & -1/6 & c - (a/6) + (b/3) \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x & = & -a + 2b + 7c \\ y & = & a - b - 5c \\ z & = & a - 2b - 6c \end{cases}$$

2. En déduire la matrice inverse A^{-1}

$AX = B \Rightarrow X = A^{-1}B$

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a + 2b + 7c \\ a - b - 5c \\ a - 2b - 6c \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 2 & 7 \\ 1 & -1 & -5 \\ 1 & -2 & -6 \end{pmatrix}}_{A^{-1}} \underbrace{\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}}_{B}$$

On en déduit que :

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 7 \\ 1 & -1 & -5 \\ 1 & -2 & -6 \end{pmatrix}$$

5. Réduction des endomorphismes

5.1 Application du calcul matriciel aux espaces vectoriels

Theorème 5.1.1 Soit E un K-espace vectoriel de dimension n.
$\mathscr{F} = \{V_1, V_2, \cdots, V_n\}$ est une famille libre ssi det $(V_1|V_2|\cdots|V_n) \neq 0$

■ **Exemple 5.1** Soit $\mathscr{F} = \{\underbrace{(1,1,1)}_{V_1}, \underbrace{(1,0,1)}_{V_2}, \underbrace{(0,-1,1)}_{V_3}\}$ une famille de vecteurs de $\mathbb{R}^3$

Pour vérifier que la famille $\mathscr{F}$ est libre, on pose :

$\lambda_1 V_1 + \lambda_2 V_2 + \lambda_3 V_3 = 0 \Rightarrow \lambda_1(1,1,1) + \lambda_2(1,0,1) + \lambda_3(0,-1,1) = (0,0,0)$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 & = & 0 \\ \lambda_1 - \lambda_3 & = & 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 & = & 0 \end{cases} \Rightarrow \underbrace{\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \overbrace{}^{V_1} & \overbrace{}^{V_2} & \overbrace{}^{V_3} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}}_{(V_1|V_2|V_3)} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\det(V_1|V_2|V_3) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 2 = -1 \neq 0$$

Donc, $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (0,0,0)$ est l'unique solution du système.

On en conclut que $\mathscr{F} = \{V_1, V_2, , V_3\}$ est une famille libre de $\mathbb{R}^3$ ■

Theorème 5.1.2 Soit E un K-espace vectoriel de dimension n et soit $p \leq n$.
$\mathscr{F} = \{V_1, V_2, \cdots, V_p\}$ est une famille libre si et seulement si rg $(V_1|V_2|\cdots|V_p) = p$.

■ **Exemple 5.2** Soit $\mathscr{F} = \{\underbrace{(1,1,1,1)}_{V_1}, \underbrace{(1,0,1,0)}_{V_2}, \underbrace{(0,-1,1,-1)}_{V_3}\}$ une famille de vecteurs de $\mathbb{R}^4$

$$(V_1|V_2|V_3) = \begin{pmatrix} \overbrace{1}^{V_1} & \overbrace{1}^{V_2} & \overbrace{0}^{V_3} \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1-2 = -1 \neq 0$$

Donc, $rg(V_1|V_2|V_3) = 3$

D'après le théorème précèdent, $\mathscr{F} = \{V_1, V_2, , V_3\}$ est une famille libre de $\mathbb{R}^4$. ∎

Theorème 5.1.3 Soit E un K-espace vectoriel de dimension n et soit $p \leq n$

$$\dim \text{Vect}\,\{V_1, V_2, \cdots, V_p\} = \text{rg}\,(V_1|V_2|\cdots|V_p)$$

■ **Exemple 5.3** Soit $\mathscr{F} = \{\underbrace{(1,0,1)}_{V_1}, \underbrace{(1,-2,-1)}_{V_2}, \underbrace{(0,1,1)}_{V_3}\}$ une famille de vecteurs de $\mathbb{R}^3$.

Déterminons la dimension de Vect $\{V_1, V_2, V_3\}$.

$$(V_1|V_2|V_3) = \begin{pmatrix} \overbrace{1}^{V_1} & \overbrace{1}^{V_2} & \overbrace{0}^{V_3} \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$$

Donc, rg $(V_1|V_2|V_3) = 2$

D'après le théorème précèdent, dim Vect $\{V_1, V_2, V_3\} = 2$. ∎

5.1.1 Changement de base et matrice de passage

Définition 5.1.1 Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie et soient $\mathscr{B}_1, \mathscr{B}_2$ deux bases de E.

On appelle matrice de passage de la base $\mathscr{B}_1$ vers la base $\mathscr{B}_2$ et on note $P_{\mathscr{B}_1 \to \mathscr{B}_2}$ la matrice carrée dont les colonnes sont les vecteurs de $\mathscr{B}_2$ écrits dans la base $\mathscr{B}_1$.

Theorème 5.1.4

$$\boxed{V_{\mathscr{B}_2} = P^{-1}_{\mathscr{B}_1 \to \mathscr{B}_2} V_{\mathscr{B}_1}}$$

R De plus, $P_{\mathscr{B}_2 \to \mathscr{B}_1} = P^{-1}_{\mathscr{B}_1 \to \mathscr{B}_2}$

■ **Exemple 5.4** Soit $\mathscr{B}_1 = \{\underbrace{(1,0,0)}_{e_1}, \underbrace{(0,1,0)}_{e_2}, \underbrace{(0,0,1)}_{e_3}\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$

Ecrire le vecteur $V(x,y,z)$ dans la base canonique $\mathscr{B}_1$ puis dans la base $\mathscr{B}_2$ avec :

$\mathscr{B}_2 = \{\underbrace{(1,1,1)}_{V_1}, \underbrace{(1,0,1)}_{V_2}, \underbrace{(0,-1,1)}_{V_3}\}$ une base de $\mathbb{R}^3$

$V = xe_1 + ye_2 + ze_3$

Donc, le vecteur V s'écrit dans la base canonique :

$$V = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_{\mathscr{B}_1}$$

Ecrivons V dans la base $\mathscr{B}_2$:

$$\begin{aligned} V = \alpha V_1 + \beta V_2 + \gamma V_3 \Rightarrow (x,y,z) &= \alpha(1,1,1) + \beta(1,0,1) + \gamma(0,-1,1) \\ &= (\alpha+\beta, \alpha-\gamma, \alpha+\beta+\gamma) \end{aligned}$$

Par identification, on obtient :

$$\begin{cases} x &= \alpha+\beta \\ y &= \alpha-\gamma \\ z &= \alpha+\beta+\gamma \end{cases}$$

Qu'on peut réécrire sous forme matricielle :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{V_{\mathscr{B}_1}} = \underbrace{\begin{pmatrix} \overbrace{1}^{V_1} & \overbrace{1}^{V_2} & \overbrace{0}^{V_3} \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{P} \underbrace{\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}}_{V_{\mathscr{B}_2}}$$

$$V_{\mathscr{B}_1} = PV_{\mathscr{B}_2} \Rightarrow V_{\mathscr{B}_2} = P^{-1}V_{\mathscr{B}_1} \Rightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}}_{V_{\mathscr{B}_2}} = \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{P^{-1}} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{V_{\mathscr{B}_1}}$$

■

5.2 Applications linéaires et matrices

Définition 5.2.1 Soit $f : E \to F$ une application linéaire et soient :

$\mathscr{B}_1 = \{e_1, e_2, \cdots, e_p\}$ une base de E et

$\mathscr{C}_1 = \{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n\}$ une base de F.

On appelle matrice associée à l'application f et note $M(f)_{\mathscr{B}_1,\mathscr{C}_1}$ la matrice dont les colonnes sont les images des vecteurs de $\mathscr{B}_1$ écrits dans la base $\mathscr{C}_1$.

$$M(f)_{\mathscr{B}_1,\mathscr{C}_1} = \begin{array}{c} \\ \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} f(e_1) & f(e_2) & \cdots & f(e_p) \end{array} \\ \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix} \end{array}$$

Theorème 5.2.1 $\forall V \in E,\ f(V)_{\mathscr{C}_1} = M(f)_{\mathscr{B}_1,\mathscr{C}_1} V_{\mathscr{B}_1}$

■ **Exemple 5.5** $\begin{array}{rcl} Id : E & \to & E \\ V & \mapsto & Id(V) = V \end{array}$

$$M(Id)_{\mathscr{B}_1} = \begin{array}{c} \\ e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_p \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} f(e_1) & f(e_2) & \cdots & f(e_p) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \end{array} = I_p$$

■

■ **Exemple 5.6** Soit $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ une application linéaire.
$(x,y,z) \mapsto (x+y-z, y-2z)$
Soient $\mathscr{B}_1 = \{\underbrace{(1,0,0)}_{e_1}, \underbrace{(0,1,0)}_{e_2}, \underbrace{(0,0,1)}_{e_3}\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et

$\mathscr{C}_1 = \{\underbrace{(1,0)}_{\varepsilon_1}, \underbrace{(0,1)}_{\varepsilon_2}\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

$f(e_1) = f(1,0,0) = (1,0)$, $\quad f(e_2) = f(0,1,0) = (1,1)$, $\quad f(e_3) = f(0,0,1) = (-1,-2)$

$\Rightarrow f(e_1) = 1\varepsilon_1 + 0\varepsilon_2 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}_{\mathscr{C}_1}$ $\quad f(e_2) = 1\varepsilon_1 + 1\varepsilon_2 = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}_{\mathscr{C}_1}$ $\quad f(e_1) = -1\varepsilon_1 - 2\varepsilon_2 = \begin{pmatrix}-1\\-2\end{pmatrix}_{\mathscr{C}_1}$

La matrice associée à l'application f par rapport aux bases canoniques $\mathscr{B}_1, \mathscr{C}_1$ est donnée par :

$$A = M(f)_{\mathscr{B}_1,\mathscr{C}_1} = \begin{array}{c} \\ \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} f(e_1) & f(e_2) & f(e_3) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \end{array}$$

■

Theorème 5.2.2 Le rang d'une application linéaire est égale au rang de sa matrice associée.

Corollaire 5.2.3 Soient $f \in \mathscr{L}(E,F)$ et soient $\mathscr{B}_1$ base de E et $\mathscr{C}_1$ base de F

1. $\text{rg } M(f) = \dim F \Leftrightarrow f$ est surjective.
2. $\text{rg } M(f) = \dim E \Leftrightarrow f$ est injective.

■ **Exemple 5.7** Soit $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ une application linéaire.
$(x,y,z) \mapsto (x+y-z, y-2z)$
f est elle injective ? surjective ?
On a deja vu que la matrice associée à f par rapport aux bases $\mathscr{B}_1, \mathscr{C}_1$ est donnée par :

$$A = M(f)_{\mathscr{B}_1,\mathscr{C}_1} = \begin{array}{c} \\ \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} f(e_1) & f(e_2) & f(e_3) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \end{array}$$

Calculons le rang de A :
$\begin{vmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{vmatrix} = 1 \neq 0 \Rightarrow \text{rg } A = 2$
$\dim F = \dim \mathbb{R}^2 = 2$ et $\dim E = \dim \mathbb{R}^3 = 3$
$\dim F = \text{rg } A$ et $\dim E \neq \text{rg } A$.
D'après le corollaire 5.2.3, f est surjective mais n'est pas injective.

■

Theorème 5.2.4 Soient $f \in \mathscr{L}(E,F)$, $g \in \mathscr{L}(F,G)$ et soient B_1 une base de E, C_1 une base de F et D_1 une base de G

$$\boxed{M(g\circ f)_{B_1,D_1} = M(g)_{C_1,D_1} M(f)_{B_1,C_1}}$$

preuve : $(g\circ f)(V) = g(f(V)) = M(g)_{C_1,D_1} f(V)_{C_1} = M(g)_{C_1,D_1} M(f)_{B_1,C_1} V_{B_1}$
Or $(g\circ f)(V) = M(g\circ f)_{B_1,D_1} V_{B_1}$
On en déduit que $M(g\circ f)_{B_1,D_1} = M(g)_{C_1,D_1} M(f)_{B_1,C_1}$

Theorème 5.2.5 Soient $f \in \mathscr{L}(E,F)$ et soient $\mathscr{B}_1$ une base de E et $\mathscr{C}_1$ une base de F
Supposons que $\dim E = \dim F = n$

Alors, f est bijective si et seulement si $M(f)_{\mathscr{B}_1,\mathscr{C}_1}$ est inversible, de plus

$$\boxed{M(f^{-1})_{\mathscr{C}_1,\mathscr{B}_1} = [M(f)_{\mathscr{B}_1,\mathscr{C}_1}]^{-1}}$$

preuve :
$Id = f \circ f^{-1} \Rightarrow M(Id)_{\mathscr{B}_1} = M(f)_{\mathscr{B}_1,\mathscr{C}_1} M(f^{-1})_{\mathscr{C}_1,\mathscr{B}_1} = I \Rightarrow M(f^{-1})_{\mathscr{C}_1,\mathscr{B}_1} = [M(f)_{\mathscr{B}_1,\mathscr{C}_1}]^{-1}$

■ **Exemple 5.8** $R_\theta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$(x,y) \mapsto (x\cos\theta - y\sin\theta, x\sin\theta + y\cos\theta)$

La matrice associée à R_θ est donnée par :

$$A = M(R_\theta)_{\mathscr{B}_1,\mathscr{C}_1} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

$\det A = 1 \neq 0$, donc d'après le théorème R_θ est bijective.
De plus la matrice associée à l'application réciproque R_θ^{-1} est donnée par :
$M(R_\theta^{-1})_{\mathscr{C}_1,\mathscr{B}_1} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ ■

5.3 Matrice associée et changement de base

Theorème 5.3.1 Soient $f \in \mathscr{L}(E,F)$ et soient $\mathscr{B}_1, \mathscr{B}_2$ deux bases de E et $\mathscr{C}_1, \mathscr{C}_2$ deux bases de F

$$\boxed{M(f)_{\mathscr{B}_2,\mathscr{C}_2} = P^{-1}_{\mathscr{C}_1\to\mathscr{C}_2} M(f)_{\mathscr{B}_1,\mathscr{C}_1} P_{\mathscr{B}_1\to\mathscr{B}_2}}$$

preuve : $f(V)_{\mathscr{C}_2} = P^{-1}_{\mathscr{C}_1\to\mathscr{C}_2} f(V)_{\mathscr{C}_1}$ avec $f(V)_{\mathscr{C}_1} = M(f)_{\mathscr{B}_1,\mathscr{C}_1} V_{\mathscr{B}_1} \Rightarrow f(V)_{\mathscr{C}_2} = P^{-1}_{\mathscr{C}_1\to\mathscr{C}_2} M(f)_{\mathscr{B}_1,\mathscr{C}_1} V_{\mathscr{B}_1}$
Or $V_{\mathscr{B}_2} = P^{-1}_{\mathscr{B}_1\to\mathscr{B}_2} V_{\mathscr{B}_1} \Rightarrow V_{\mathscr{B}_1} = P_{\mathscr{B}_1\to\mathscr{B}_2} V_{\mathscr{B}_2}$
Doù $f(V)_{\mathscr{C}_2} = P^{-1}_{\mathscr{C}_1\to\mathscr{C}_2} M(f)_{\mathscr{B}_1,\mathscr{C}_1} P_{\mathscr{B}_1\to\mathscr{B}_2} V_{\mathscr{B}_2}$
Dun autre coté, $f(V)_{\mathscr{C}_2} = M(f)_{\mathscr{B}_2,\mathscr{C}_2} V_{\mathscr{B}_2}$
Par identification $M(f)_{\mathscr{B}_2,\mathscr{C}_2} = P^{-1}_{\mathscr{C}_1\to\mathscr{C}_2} M(f)_{\mathscr{B}_1,\mathscr{C}_1} P_{\mathscr{B}_1\to\mathscr{B}_2}$

R On dit aussi que $M(f)_{\mathscr{B}_2,\mathscr{C}_2}$ et $M(f)_{\mathscr{B}_1,\mathscr{C}_1}$ sont semblables

■ **Exemple 5.9** Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ une application linéaire.

$(x,y,z) \mapsto (x+y-z, y-2z)$

Soient $\mathscr{B}_1 = \{\underbrace{(1,0,0)}_{e_1}, \underbrace{(0,1,0)}_{e_2}, \underbrace{(0,0,1)}_{e_3}\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et

$\mathscr{C}_1 = \{\underbrace{(1,0)}_{\varepsilon_1}, \underbrace{(0,1)}_{\varepsilon_2}\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

$$M(f)_{\mathscr{B}_1,\mathscr{C}_1} = \begin{array}{c} \\ \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} f(e_1) & f(e_2) & f(e_3) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \end{array}$$

Soient $\mathscr{B}_2 = \{\underbrace{(1,1,1)}_{V_1}, \underbrace{(1,0,1)}_{V_2}, \underbrace{(0,-1,1)}_{V_3}\}$ une base de $\mathbb{R}^3$ et :

$\mathscr{C}_2 = \{\underbrace{(1,1)}_{w_1}, \underbrace{(1,-1)}_{w_2}\}$ une base de $\mathbb{R}^2$

$$P_{\mathscr{B}_1\to\mathscr{B}_2}= \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} V_1 & V_2 & V_3 \end{array} \\ \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \\ e_2 \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \qquad P_{\mathscr{C}_1\to\mathscr{C}_2}= \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} W_1 & W_2 \end{array} \\ \begin{array}{c} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \end{array} \Rightarrow P^{-1}_{\mathscr{C}_1\to\mathscr{C}_2}=\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

$$M(f)_{\mathscr{B}_2,\mathscr{C}_2}=P^{-1}_{\mathscr{C}_1\to\mathscr{C}_2}M(f)_{\mathscr{B}_1,\mathscr{C}_1}P_{\mathscr{B}_1\to\mathscr{B}_2}=\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M(f)_{\mathscr{B}_2,\mathscr{C}_2}=\begin{pmatrix} 0 & -1 & -5/2 \\ 1 & 1 & 1/2 \end{pmatrix}$$

■

5.4 Réduction des endomorphismes

Définition 5.4.1 Un endomorphisme f de E est dit diagonalisable si et seulement s'il existe une base B' de E telle que la matrice associée à f dans la base B' soit diagonale.

Définition 5.4.2 — Valeurs propres et vecteurs propres. Soit f un endomorphisme de E et soit V un vecteur non nul de E tel que :

$\exists\lambda \in \mathbb{K}/\ f(V)=\lambda V$

V est appelé vecteur propre et λ valeur propre.

Theorème 5.4.1 f est diagonalisable si et seulement S'il existe $\mathscr{B}'=\{V_1,V_2,\cdots,V_n\}$ une base de vecteurs propres de E.

En effet, supposons que $\mathscr{B}'=\{V_1,V_2,\cdots,V_n\}$ soit une base de vecteurs propres de E.

$$f(V_1)=\lambda_1V_1=\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathscr{B}'}, \quad f(V_2)=\lambda_2V_2=\begin{pmatrix} 0 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathscr{B}'}, \quad \cdots, \quad f(V_n)=\lambda_nV_n=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}_{\mathscr{B}'}$$

$$M(f)_{\mathscr{B}'}= \begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} f(V_1) & f(V_2) & \cdots & f(V_n) \end{array} \\ \begin{array}{c} V_1 \\ V_2 \\ \vdots \\ V_n \end{array} & \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} \end{array}$$

5.4.1 Recherche des valeurs et des vecteurs propres

Définition 5.4.3 — polynôme caractéristique. Soit $\mathscr{B}=\{e_1,e_2,\cdots,e_p\}$ une base de E et posons $A=M(f)_{\mathscr{B}}$

$P_f(X)=\det(A-XI)$ est appelé polynôme caractéristique de f

R $P_f(A)=\det(A-AI)=0$

Theorème 5.4.2 Les valeurs propres de f sont les racines du polynôme P_f

Définition 5.4.4 — spectre. L'ensemble de toutes les valeurs propres de f est dit spectre de f, il est noté $Sp(f)$

■ **Exemple 5.10**

$$\begin{array}{rcl} f:\mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \mapsto & (-4x+3y+6z, 6x-y-6z, -6x+3y+8z) \end{array}$$

Notons par $\mathscr{B} = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ la base cnonique de $\mathbb{R}^3$.

$$M(f)_{\mathscr{B}} = A = \begin{pmatrix} -4 & 3 & 6 \\ 6 & -1 & -6 \\ -6 & 3 & 8 \end{pmatrix}$$

$$P_f(X) = \det(A - XI) = \begin{vmatrix} -4-X & 3 & 6 \\ 6 & -1-X & -6 \\ -6 & 3 & 8-X \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2-X & 2-X & 0 \\ 6 & -1-X & -6 \\ 0 & 2-X & 2-X \end{vmatrix}$$

$$= (2-X)\begin{vmatrix} -1-X & -6 \\ 2-X & 2-X \end{vmatrix} - 6\begin{vmatrix} 2-X & 0 \\ 2-X & 2-X \end{vmatrix}$$

$$= (2-X)[(-1-X)(2-X)+6(2-X)] - 6(2-X)^2$$

$$= (-1-X)(2-X)^2 + 6(2-X)^2 - 6(2-X)^2$$

$$= -(1+X)(2-X)^2$$

Le spectre de f est $Sp(f) = \{-1,2\}$. ■

Définition 5.4.5 — Sous espace propre. L'ensemble $E_\lambda = \{V \in E / f(V) = \lambda V\}$ est appelé sous espace propre associé à la valeur propre λ.

R $V \in E_\lambda \Leftrightarrow f(V) = \lambda V \Leftrightarrow f(V) = \lambda Id(V) \Leftrightarrow (f - \lambda Id)(V) = 0 \Leftrightarrow (A - \lambda I)V = 0$
Donc $E_\lambda = \{V \in E / (A - \lambda I)V = 0\}$

Theorème 5.4.3 E_λ est un sous espace vectoriel de E.

preuve :
$f(0) = \lambda 0 = 0 \Rightarrow 0 \in E_\lambda$

$$V_1, V_2 \in E_\lambda \Rightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} f(V_1) & = & \lambda V_1 \\ f(V_2) & = & \lambda V_2 \end{array} \right. \Rightarrow f(V_1) + f(V_2) = \lambda V_1 + \lambda V_2 \Rightarrow f(V_1 + V_2) = \lambda (V_1 + V_2)$$

Donc, $(V_1 + V_2) \in E_\lambda$
Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et $V \in E_\lambda \Rightarrow f(V) = \lambda V \Rightarrow \alpha f(V) = \alpha\lambda V \Rightarrow f(\alpha V) = \lambda(\alpha V)$
Donc $\alpha V \in E_\lambda$

■ **Exemple 5.11** $E_{-1} = \{V \in E / (A + I)V = 0\}$

$$\begin{pmatrix} -3 & 3 & 6 \\ 6 & 0 & -6 \\ -6 & 3 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -3 & 3 & 6 \\ 0 & 6 & 6 \\ 0 & -3 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} -3x+3y+6z & = & 0 \\ y & = & -z \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} -3x-3z+6z & = & 0 \\ y & = & -z \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & z \\ y & = & -z \\ z \in \mathbb{R} & & \end{array} \right.$$

$V \in E_{-1} \Rightarrow V = (z, -z, z) = z(1,-1,1) \Rightarrow E_{-1} = \text{Vect} < V_1 >$ avec $V_1 = (1,-1,1)$

$E_2 = \{V \in E/(A-2I)V = 0\}$

$$\begin{pmatrix} -6 & 3 & 6 \\ 6 & -3 & -6 \\ -6 & 3 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \quad -6x+3y+6z \quad = \quad 0 \quad \Rightarrow \begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ y = 2x-2z \\ z \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$V \in E_2 \Rightarrow V = (x, 2x-2z, z) = x(1,2,0) + z(0,-2,1) \Rightarrow E_2 = \text{Vect } < V_2, V_3 >$
avec $V_2 = (1,2,0) \quad V_3 = (0,-2,1)$
Conclusion :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad A' = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

■

Theorème 5.4.4 un endomorphisme f est diagonalisable si et seulement si :
1. le polynôme caractéristique est scindé.
2. la dimension de l'espace propre associé à chaque valeur propre est égal à la multiplicité de celle-çi cad : $\forall \lambda \in \text{SP}(f)$, $\dim E_\lambda = \text{mult}(\lambda)$.

■ **Exemple 5.12** Soit $A = \begin{pmatrix} 5/2 & 1/2 \\ -1/2 & 3/2 \end{pmatrix}$ la matrice associée à l'endomorphisme $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$P_f(X) = \det(A - XI) = \begin{vmatrix} 5/2-\lambda & 1/2 \\ -1/2 & 3/2-\lambda \end{vmatrix} = \left(\frac{5}{2}-\lambda\right)\left(\frac{3}{2}-\lambda\right) + \frac{1}{4} = (\lambda-2)^2$$

Donc, $Sp(A) = \{2\}$
$E_2 = \{V \in E/(A-2I)V = 0\}$

$$V \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in E_2 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & -1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x+y=0 \Rightarrow y=-x \Rightarrow V = (x,-x) = x(1,-1)$$

Donc, $E_2 = \text{Vect } < V_1 >$ avec $V_1 = (1,-1)$
$\dim E_2 = 1$ et $\text{mult}(\lambda) = 2$

Donc, d'après le théorème précèdent f n'est pas diagonalisable, mais comme le polynôme caractéristique est scindé on peut trigonaliser f. ■

Définition 5.4.6 Un endomorphisme f de E est dit trigonalisable si et seulement s'il existe une base B' de E telle que la matrice associée à f dans la base B' soit triangulaire.

Theorème 5.4.5 Un endomorphisme f est trigonalisable seulement si le polynôme caractéristique est scindé.

■ **Exemple 5.13** Reprenons l'exemple précèdent.

on a vu f n'etait pas diagonalisable, mais comme le polynôme caractéristique est scindé on peut trigonaliser f :

On cherche une base $B' = \{V_1, V_2\}$ telle que A' la matrice associée à f dans la base B' soit triangulaire. ce qui revient à chercher deux matrices P et A' telles que :

$$P = \begin{pmatrix} \overbrace{1}^{V_1} & \overbrace{a}^{V_2} \\ -1 & b \end{pmatrix} \qquad A' = \begin{pmatrix} 2 & \alpha \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ avec } \alpha \neq 0$$

par exemple prenons $\alpha = 1 \Rightarrow A' = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

$f(V_2) = V_1 + 2V_2 \Rightarrow f(V_2) - 2V_2 = V_1 \Rightarrow (A-2I)V_2 = V_1$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & -1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow x+y=2 \Rightarrow y = 2-x$$

On choisit $x = 1 \Rightarrow y = 1$

Donc, $V_2 = (1,1)$

Conclusion

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad A' = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

■

■ **Exemple 5.14** Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ la matrice associée à l'endomorphisme $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$$P_A(X) = \det(A - XI) = \begin{vmatrix} 3-X & 2 & -2 \\ -1 & -X & 1 \\ 1 & 1 & -X \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-X & 0 & -2 \\ 0 & 1-X & 1 \\ 1-X & 1-X & -X \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-X & 0 & -2 \\ 0 & 1-X & 1 \\ 1-X & 0 & -1-X \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1-X & 0 & -2 \\ 0 & 1-X & 1 \\ 0 & 0 & 1-X \end{vmatrix} = (1-X)^3$$

$P_A(X) = (1-X)^3$ est scindé. $Sp(A) = \{1\}$

Détermination des vecteurs propres :

$E_1 = \{V \in E/(A-I)V = 0\}$

$$V \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_1 \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x+y-z=0 \Rightarrow \begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ y \in \mathbb{R} \\ z = x+y \end{cases}$$

$$V = \begin{pmatrix} x \\ y \\ x+y \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Donc, $E_1 = \text{Vect} < V_1, V_2 >$ avec $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, V_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\dim E_1 = 2$ et $\text{mult}(1) = 3$

Donc, f n'est pas diagonalisable, mais comme le polynôme caractéristique est scindé on peut trigonaliser f.

On cherche une base $B' = \{V_1, V_2, V_3\}$ telle que A' la matrice associée à f dans la base B' soit triangulaire. ce qui revient à chercher deux matrices P et A' telles que :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & y \\ 1 & 1 & z \end{pmatrix} \qquad A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \alpha \\ 0 & 1 & \beta \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$AV_3 = \alpha V_1 + \beta V_2 + V_3 \Rightarrow (A-I)V_3 = \alpha V_1 + \beta V_2$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

On obtient le système :

$$\begin{cases} 2x+2y-2z = \alpha \\ -x-y+z = \beta \\ x+y-z = \alpha+\beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y-z = \frac{1}{2}\alpha \\ x+y-z = -\beta \\ x+y-z = \alpha+\beta \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{2}\alpha = -\beta = \alpha+\beta \Rightarrow \alpha = -2\beta$$

$$x+y-z = -\beta \Rightarrow \begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ y \in \mathbb{R} \\ z = x+y+\beta \end{cases}$$

On choisit $x = y = 0 \Rightarrow z = \beta$

Donc, $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & \beta \end{pmatrix}$

$\det P$ ne doit pas s'annuler, on peut choisir $\beta = 2 \Rightarrow \alpha = -1$

Conclusion

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

■

5.5 Série d'exercices

Exercice 1 Les familles suivantes sont-elles libres ?

$$\mathscr{F}_1 = \{\underbrace{(1,1,1,-1)}_{V_1}, \underbrace{(-1,0,1,2)}_{V_2}, \underbrace{(2,0,1,-2)}_{V_3}\}$$
$$\mathscr{F}_2 = \{\underbrace{(3,-3,0)}_{V_1}, \underbrace{(1,-1,1)}_{V_2}, \underbrace{(2,-2,-1)}_{V_3}\}$$
$$\mathscr{F}_3 = \{\underbrace{(x,-1,-3)}_{V_1}, \underbrace{(1,1,0)}_{V_2}, \underbrace{(-1,1,1)}_{V_3}\}$$

Déterminer dans chaque cas la dimension de Vect $< V_1, V_2, V_3 >$ ■

Exercice 2 Soit $P_1(X) = 1 + X^2, \quad P_2(X) = X + X^2 \quad P_3(X) = 1 - 2X + X^2$

1. A l'aide du déterminant, vérifier que $\mathscr{B}' = \{P_1, P_2, P_3\}$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$
2. Donner la matrice de passage de la base canonique vers la base $\mathscr{B}'$
3. Ecrire le polynôme $Q(X) = X^2 + X + 1$ dans la base $\mathscr{B}'$

■

Exercice 3 Soient $V_1 = (1,1,1)$ et $V_2 = (-2,0,1)$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$.

1. Déterminer un vecteur $V_3 \in \mathbb{R}^3$ tel que $B_1 = \{V_1, V_2, V_3\}$ soit une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Ecrire le vecteur $W_1(-4,-3,-3)$ dans la base B_1
3. Vérifier que $B_2 = \{\underbrace{(-4,-3,-3)}_{W_1}, \underbrace{(-1,-1,1)}_{W_2}, \underbrace{(1,1,1)}_{W_3}\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$
4. Déterminer la matrice de passage de la base B_1 vers la base B_2

■

Exercice 4 Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ tel que $f(x,y,z) = (ax + by + cz, x + z, x + 2y - z)$

1. Ecrire la matrice associée à f dans la base canonique.
2. Quelle condition doivent vérifier a, b, c pour que f soit bijective.
3. Déterminer dans ce cas l'application réciproque f^{-1}

■

Exercice 5 On définit l'application f par :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}_2[X] &\rightarrow \mathbb{R}_2[X] \\ P &\mapsto f(P) = Q \quad \text{avec } Q(X) = P(X) - XP^{(1)}(0) \end{aligned}$$

1. Déterminer la matrice associée à f dans la base canonique qu'on notera A
2. f est elle bijective ?
3. Déterminer le rang de f
4. Calculer A^2, que peut on en déduire ?

■

Exercice 6

$$\begin{array}{rcl} f:\mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \mapsto & (4x-3y-3z, x-2y-z, 5x-3y-4z) \end{array}$$

Soit $\mathscr{B}' = \{\underbrace{(1,1,1)}_{V_1}, \underbrace{(1,0,1)}_{V_2}, \underbrace{(0,-1,1)}_{V_3}\}$ une famille de vecteurs de $\mathbb{R}^3$

1. Vérifier que $\mathscr{B}' = \{V_1, V_2, V_3\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$
2. Déterminer la matrice associée à f dans la base canonique qu'on notera A
3. Montrer que $A' = P^{-1}AP$ avec A' la matrice associée à f dans la base $\mathscr{B}'$
4. Calculer A', en déduire A^n

■

Exercice 7

1. Diagonaliser $A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -3 \\ 3 & -2 & 3 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix}$
2. Soient $(U_n)_n, (V_n)_n, (W_n)_n$ trois suites réelles définies par :

$$\begin{cases} U_{n+1} & = & -2U_n + 3V_n - 3W_n \\ V_{n+1} & = & 3U_n - 2V_n + 3W_n \\ W_{n+1} & = & 3U_n - 3V_n + 4W_n \end{cases}$$

Calculer le terme géneral des suites $(U_n)_n, (V_n)_n, (W_n)_n$

■

Exercice 8

1. Trigonaliser $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ puis $B = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 1 \\ -4 & 3 & 0 \\ -5 & 2 & 2 \end{pmatrix}$
2. Résoudre le système différentiel :

$$(I) \begin{cases} y_1'(t) & = & 3y_1(t) + y_2(t) + 2y_3(t) \\ y_2'(t) & = & y_1(t) + y_2(t) \\ y_3'(t) & = & -y_1(t) + y_2(t) + 2y_3(t) \end{cases}$$

■

Exercice 9

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad A' = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad D' = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad N' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer $P \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ tel que $A' = P^{-1}AP$
2. Vérifier que N' est nilpotente.
3. A l'aide de la formule du binôme de Newton, Calculer $(A')^n$
4. En déduire A^n

■

Exercice 1 Les familles suivantes sont-elles libres ?

$$\mathscr{F}_1 = \{\underbrace{(1,1,1,-1)}_{V_1},\underbrace{(-1,0,1,2)}_{V_2},\underbrace{(2,0,1,-2)}_{V_3}\}$$
$$\mathscr{F}_2 = \{\underbrace{(3,-3,0)}_{V_1},\underbrace{(1,-1,1)}_{V_2},\underbrace{(2,-2,-1)}_{V_3}\}$$
$$\mathscr{F}_3 = \{\underbrace{(x,-1,-3)}_{V_1},\underbrace{(1,1,0)}_{V_2},\underbrace{(-1,1,1)}_{V_3}\}$$

Déterminer dans chaque cas la dimension de Vect $< V_1,V_2,V_3 >$

- $(V_1|V_2|V_3) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$

  $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0 \Rightarrow rg\,(V_1|V_2|V_3) = 3$

  Donc $\mathscr{F}_1$ est libre et dim Vect $< V_1,V_2,V_3 >= 3$
- $(V_1|V_2|V_3) = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -3 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

  $\det(V_1|V_2|V_3) = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -3 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow rg\,(V_1|V_2|V_3) < 3$

  Donc, $\mathscr{F}_2$ n'est pas libre.

  $\begin{vmatrix} -3 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0 \Rightarrow \text{rg}\, A_2 = 2$

  Donc, dim Vect $< V_1,V_2,V_3 >= 2$
- $(V_1|V_2|V_3) = \begin{pmatrix} x & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

  $\det(V_1|V_2|V_3) = \begin{vmatrix} x & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x+1 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = x+1-6 = x-5$

  Donc $\mathscr{F}_3$ est libre si et seulement si $x \neq 5$

  Si $x \neq 5$, alors dim Vect $< V_1,V_2,V_3 >= 3$

  Si $x = 5 \Rightarrow \det(V_1|V_2|V_3) = 0$

  $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \Rightarrow \text{rg}\ (V_1|V_2|V_3) = 2$

  Donc, dim Vect $< V_1,V_2,V_3 >= 2$.

■

Exercice 2 Soit $P_1(X) = 1+X^2, \quad P_2(X) = X+X^2 \quad P_3(X) = 1-2X+X^2$

1. A l'aide du déterminant, vérifier que $\mathscr{B}' = \{P_1,P_2,P_3\}$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$

   Soit $\mathscr{B} = \{1,X,X^2\}$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$

   $P_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathscr{B}} \qquad P_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathscr{B}} \qquad P_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathscr{B}}$

$$(P_1|P_2|P_3) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3-1 = 2 \neq 0 \Rightarrow rg\,(P_1|P_2|P_3) = 3$$

Donc,$\mathscr{B}'$ est libre.
Comme Card $\mathscr{B}' = 3$ alors $\mathscr{B}'$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$

2. Donner la matrice de passage de la base canonique vers la base $\mathscr{B}'$

$$P_{\mathscr{B}\to\mathscr{B}'} = (P_1|P_2|P_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

3. Ecrire le polynôme $Q(X) = X^2 + X + 1$ dans la base $\mathscr{B}'$

$$Q(X) = X^2 + X + 1 \Rightarrow Q_{\mathscr{B}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$Q_{\mathscr{B}'} = P^{-1}_{\mathscr{B}\to\mathscr{B}'} Q_{\mathscr{B}} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/2 \\ 0 \\ -1/2 \end{pmatrix}$$

■

Exercice 3 Soient $V_1 = (1,1,1)$ et $V_2 = (-2,0,1)$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$.

1. Déterminer un vecteur $V_3 \in \mathbb{R}^3$ tel que $B_1 = \{V_1, V_2, V_3\}$ soit une base de $\mathbb{R}^3$.

On pose $V_3(a,b,c)$

$$\det(V_1|V_2|V_3) = \begin{vmatrix} 1 & -2 & a \\ 1 & 0 & b \\ 1 & 1 & c \end{vmatrix} = -b + 2c + a - 2b = a - 3b + 2c$$

B_1 est une base de $\mathbb{R}^3$ si et seulement si $\det(V_1|V_2|V_3) \neq 0$
On doit choisir a,b,c tels que $a - 3b + 2c \neq 0$
Prenons $a = 0, b = 0$ et $c = 1$, on aura $V_3(0,0,1)$

2. Ecrire le vecteur $W_1(-4,-3,-3)$ dans la base B_1

La matrice de passage est donnée par :

$$P_{B_0\to B_1} = (V_1|V_2|V_3) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} [W_1]_{B_1} &= P^{-1}_{B_0\to B_1}[W_1]_{B_0} \\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

3. Vérifier que $B_2 = \{\underbrace{(-4,-3,-3)}_{W_1}, \underbrace{(-1,-1,1)}_{W_2}, \underbrace{(1,1,1)}_{W_3}\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$

$$\det(W_1|W_2|W_3) = \begin{vmatrix} -4 & -1 & 1 \\ -3 & -1 & 1 \\ -3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \Rightarrow B_2 \text{ est une base de } \mathbb{R}^3$$

4. Déterminer la matrice de passage de la base B_1 vers la base B_2

$P_{B_1\to B_2} = P_{B_1\to B_0}P_{B_0\to B_2} = P^{-1}_{B_0\to B_1}P_{B_0\to B_2}$

$$P_{B_1\to B_2} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -4 & -1 & 1 \\ -3 & -1 & 1 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -1 & 1 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ -1/2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

■

Exercice 4 Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ tel que $f(x,y,z) = (ax+by+cz, x+z, x+2y-z)$

1. Ecrire la matrice associée à f dans la base canonique.
$$A = M(f) = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$
2. Quelle condition doivent vérifier a,b,c pour que f soit bijective.
f bijective $\Leftrightarrow detA \neq 0$
$$detA = \begin{vmatrix} a & b & c \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c-a \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} b & c-a \\ 2 & -2 \end{vmatrix}$$
$$= -(-2b-2(c-a)) = -2a+2b+2c$$
Donc, f est bijective si et seulement si $a-b-c \neq 0$
3. Déterminer dans ce cas l'application réciproque f^{-1}
$$M(f^{-1}) = A^{-1} = \frac{1}{-2a+2b+2c}\begin{pmatrix} -2 & b+2c & b \\ 2 & -a-c & -a+c \\ 2 & -2a+b & -b \end{pmatrix}$$

■

Exercice 5 On définit l'application f par :
$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}_2[X] &\rightarrow \mathbb{R}_2[X] \\ P &\mapsto f(P) = Q \quad \text{avec } Q(X) = P(X) - XP^{(1)}(0) \end{aligned}$$

1. Déterminer la matrice associée à f dans la base canonique qu'on notera A
$$f(1) = 1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad f(X) = X - X(1) = 0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad f(X^2) = X^2 - X(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
2. f est elle bijective ?
$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \text{rg } f < 3$$
Donc, f n'est pas bijective.
3. Déterminer le rang de f
$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \Rightarrow \text{rg } f = 2$$
4. Calculer A^2, que peut on en déduire ?
$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} A \Rightarrow A^2 = A$$
Celà équivaut à dire que $f \circ f = f$, donc f est un projecteur.

■

Exercice 6

$$\begin{array}{rcl} f:\mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \mapsto & (4x-3y-3z, x-2y-z, 5x-3y-4z) \end{array}$$

Soit $\mathscr{B}' = \{\underbrace{(1,1,1)}_{V_1}, \underbrace{(1,0,1)}_{V_2}, \underbrace{(0,-1,1)}_{V_3}\}$ une famille de vecteurs de $\mathbb{R}^3$

1. Vérifier que $\mathscr{B}' = \{V_1, V_2, V_3\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$
   $P = (V_1|V_2|V_3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \det P = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$
   $\mathscr{B}'$ est libre car $rg\, P = 3$.
   de plus, $Card\mathscr{B}' = 3$, donc $\mathscr{B}'$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer la matrice associée à f dans la base canonique qu'on notera A
   $A = \begin{pmatrix} 4 & -3 & -3 \\ 1 & -2 & -1 \\ 5 & -3 & -4 \end{pmatrix}$
3. Montrer que $A' = P^{-1}AP$ avec A' la matrice associée à f dans la base $\mathscr{B}'$
   $\forall V \in E,\ f(V)_{\mathscr{B}'} = A'V_{\mathscr{B}'}$
   Or, $V_{\mathscr{B}'} = P^{-1}V_{\mathscr{B}} \Rightarrow f(V)_{\mathscr{B}'} = A'P^{-1}V_{\mathscr{B}}$
   D'un autre coté, $f(V)_{\mathscr{B}'} = P^{-1}f(V)_{\mathscr{B}} = P^{-1}AV_{\mathscr{B}}$
   Par identification, $A'P^{-1} = P^{-1}A \Rightarrow A' = P^{-1}AP$
4. Calculer A', en déduire A^n
   $A' = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -3 & -3 \\ 1 & -2 & -1 \\ 5 & -3 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$
   $A' = P^{-1}AP \Rightarrow A = PA'P^{-1} \Rightarrow A^n = (PA'P^{-1})(PA'P^{-1})\cdots(PA'P^{-1}) = P(A')^nP^{-1}$

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-2)^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

■

Exercice 7

1. Diagonaliser $A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -3 \\ 3 & -2 & 3 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix}$

<u>Recherche des valeurs propres</u>

$$P_A(X) = \det(A - XI) = \begin{vmatrix} -2-X & 3 & -3 \\ 3 & -2-X & 3 \\ 3 & -3 & 4-X \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2-X & 3 & -3 \\ 1-X & 1-X & 0 \\ 1-X & 0 & 1-X \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1-X & 3 & -3 \\ 1-X & 1-X & 0 \\ 0 & 0 & 1-X \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2-X & 3 & -3 \\ 0 & 1-X & 0 \\ 0 & 0 & 1-X \end{vmatrix} \Rightarrow P_A(X) = -(2+X)(1-X)^2$$

$Sp(A) = \{-2, 1\}$

<u>Recherche des vecteurs propres</u>

$E_\lambda = \{V \in E,\ (A - \lambda I)V = 0\} \Rightarrow E_{-2} = \{V \in \mathbb{R}^2,\ (A + 2I)V = 0\}$

$$V\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in E_{-2}\Rightarrow\begin{pmatrix}0&3&-3\\3&0&3\\3&-3&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow\left\{\begin{array}{lcl}y-z&=&0\\x+z&=&0\\x-y+2z&=&0\end{array}\right.\Rightarrow\left\{\begin{array}{lcl}y&=&z\\x&=&-z\\z&\in&\mathbb{R}\end{array}\right.$$

$$V=\begin{pmatrix}-z\\z\\z\end{pmatrix}=z\underbrace{\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}}_{V_1}\Rightarrow E_{-2}=\text{Vect}<V_1>$$

$$E_1=\{V\in\mathbb{R}^2,\ (A-I)V=0\}$$

$$V\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in E_1\Rightarrow\begin{pmatrix}-3&3&-3\\3&-3&3\\3&-3&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\Rightarrow x-y+z=0\Rightarrow x=y-z$$

$$V=\begin{pmatrix}y-z\\y\\z\end{pmatrix}=y\underbrace{\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}}_{V_2}+z\underbrace{\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}}_{V_3}\Rightarrow E_1=\text{Vect}<V_2,V_3>$$

$\dim E_{-2}=\text{Mult}(-2)=1$ et $\dim E_1=\text{Mult}(1)=2$

Donc A est diagonalisable, de plus :

$$A'=\begin{pmatrix}-2&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\qquad P=\begin{pmatrix}-1&1&-1\\1&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}$$

2. Soient $(U_n)_n,(V_n)_n,(W_n)_n$ trois suites réelles définies par :

$$(I)\left\{\begin{array}{lcl}U_{n+1}&=&-2U_n+3V_n-3W_n\\V_{n+1}&=&3U_n-2V_n+3W_n\\W_{n+1}&=&3U_n-3V_n+4W_n\end{array}\right.$$

Calculer le terme géneral des suites $(U_n)_n,(V_n)_n,(W_n)_n$

$$(I)\Rightarrow\underbrace{\begin{pmatrix}U_{n+1}\\V_{n+1}\\W_{n+1}\end{pmatrix}}_{X_{n+1}}=\underbrace{\begin{pmatrix}-2&3&-3\\3&-2&3\\3&-3&4\end{pmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{pmatrix}U_{n+1}\\V_{n+1}\\W_{n+1}\end{pmatrix}}_{X_n}$$

$X_{n+1}=AX_n\Rightarrow X_n=A^nX_0$

Or, $A=PA'P^{-1}\Rightarrow A^n=P(A')^nP^{-1}$

$$A^n=\begin{pmatrix}-1&1&-1\\1&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}(-2)^n&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&1&-1\\1&0&1\\1&-1&2\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}(-2)^n&1-(-2)^n&(-2)^n-1\\1-(-2)^n&(-2)^n&1-(-2)^n\\1-(-2)^n&(-2)^n-1&2-(-2)^n\end{pmatrix}$$

$$X_n=A^nX_0\Rightarrow\begin{pmatrix}U_n\\V_n\\W_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(-2)^n&1-(-2)^n&(-2)^n-1\\1-(-2)^n&(-2)^n&1-(-2)^n\\1-(-2)^n&(-2)^n-1&2-(-2)^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}U_0\\V_0\\W_0\end{pmatrix}$$

$$\boxed{\begin{array}{lcl} U_n &=& (-2)^n U_0 + \Big(1-(-2)^n\Big)V_0 + \Big((-2)^n - 1\Big)W_0 \\ V_n &=& \Big(1-(-2)^n\Big)U_0 + (-2)^n V_0 + \Big(1-(-2)^n\Big)W_0 \\ W_n &=& \Big(1-(-2)^n\Big)U_0 + \Big((-2)^n - 1v)V_0 + \Big(2-(-2)^n\Big)W_0 \end{array}}$$

■

Exercice 8 1. Trigonaliser $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ puis $B = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 1 \\ -4 & 3 & 0 \\ -5 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} P_A(X) =& \det(A - XI) \\ =& \begin{vmatrix} 3-X & 1 & 2 \\ 1 & 1-X & 0 \\ -1 & 1 & 2-X \end{vmatrix} \\ =& \begin{vmatrix} 3-X & 1 & 2 \\ 1 & 1-X & 0 \\ 0 & 2-X & 2-X \end{vmatrix} \\ =& \begin{vmatrix} 3-X & -1 & 2 \\ 1 & 1-X & 0 \\ 0 & 0 & 2-X \end{vmatrix} \\ =&(2-X)\big[(3-X)(1-X)+1\big] \\ =&(2-X)(X^2-4X+4) = (2-X)(X-2)^2 \\ =&-(X-2)^3 \end{aligned}$$

Comme $P_A(X) = -(X-2)^3$ est scindé alors, A est trigonalisable.
$Sp(A) = \{2\}$
Détermination des vecteurs propres :
$E_2 = \{V \in E/(A-2I)V = 0\}$

$$V\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_2 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x+y+2z = 0 \\ x-y = 0 \\ -x+y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = y \\ y \in \mathbb{R} \\ z = -y \end{cases}$$

$$V = \begin{pmatrix} y \\ y \\ -y \end{pmatrix} = y\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Donc, $E_2 = \text{Vect} < V_1 >$ avec $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Comme $dim(E_2) \neq mult(2)$ alors, A n'est pas diagonalisable mais elle est trigonalisable.

$$P = \begin{pmatrix} 1 & u & x \\ 1 & v & y \\ -1 & w & z \end{pmatrix} \qquad A' = \begin{pmatrix} 2 & \alpha & \beta \\ 0 & 2 & \gamma \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

On choisit $\alpha = 1 \Rightarrow A' = \begin{pmatrix} 2 & 1 & \beta \\ 0 & 2 & \gamma \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

$AV_2 = V_1 + 2V_2 \Rightarrow (A-2I)V_2 = V_1 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \begin{cases} x+y+2z = 1 \\ x-y = 1 \\ -x+y = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = y+1 \\ y \in \mathbb{R} \\ 2z = 1-(y+1)-y \Rightarrow z = -y \end{cases}$

On choisit $y = 0 \Rightarrow x = 1$ et $z = 0$

Donc, $V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$AV_3 = \beta V_1 + \gamma V_2 + 2V_3 \Rightarrow (A-2I)V_3 = \beta V_1 + \gamma V_2$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

On obtient le système :

$\Rightarrow \begin{cases} x+y+2z = \beta+\gamma \\ x-y = \beta \\ -x+y = -\beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = y+\beta \\ y \in \mathbb{R} \\ 2z = \beta+\gamma-(y+\beta)-y \Rightarrow z = \dfrac{\gamma-2y}{2} \end{cases}$

On choisit $y = 0 \Rightarrow x = \beta$ et $z = \dfrac{\gamma}{2}$

Donc, $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \beta \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & \dfrac{\gamma}{2} \end{pmatrix} \Rightarrow \det P = -\dfrac{\gamma}{2}$

$\det P$ ne doit pas s'annuler, on peut choisir $\beta = 0$ et $\gamma = 2$

Conclusion

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad A' = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$B = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 1 \\ -4 & 3 & 0 \\ -5 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

$P_B(X) = \det(B-XI) = \begin{vmatrix} -4-X & 2 & 1 \\ -4 & 3-X & 0 \\ -5 & 2 & 2-X \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -4-X & 2 & 1 \\ -4 & 3-X & 0 \\ -1+X & 0 & 1-X \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} -3-X & 2 & 1 \\ -4 & 3-X & 0 \\ 0 & 0 & 1-X \end{vmatrix} = (1-X)[-(3+X)(3-X)+8] = -(1-X)(X-1)^2$

Comme $P_B(X) = -(X+1)(X-1)^2$ est scindé alors, B est trigonalisable.

$Sp(A) = \{-1, 1\}$

Détermination des vecteurs propres :

$E_{-1} = \{V \in E/(B+I)V = 0\}$

$V \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_2 \Rightarrow \begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ -4 & 4 & 0 \\ -5 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\left[\begin{array}{ccc|c} -3 & 2 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 & 0 \\ -5 & 2 & 3 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} -3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 4/3 & -4/3 & 0 \\ 0 & -4/3 & 4/3 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} -3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 4/3 & -4/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$

$$\Rightarrow \begin{cases} -3x+2y+z=0 \\ \frac{4}{3}y-\frac{4}{3}z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=z \\ y=z \\ z\in\mathbb{R} \end{cases}$$

$$V=\begin{pmatrix} z\\ z\\ z\end{pmatrix}=z\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

Donc, $E_2=\text{Vect} < V_1 >$ avec $V_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

$E_1=\{V\in E/(B-I)V=0\}$

$$V\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in E_2 \Rightarrow \begin{pmatrix}-5&2&1\\-4&2&0\\-5&2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c}-5&2&1&0\\-4&2&0&0\\-5&2&1&0\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc|c}-5&2&1&0\\0&2/5&-4/5&0\\0&0&0&0\end{array}\right]\Rightarrow\begin{cases}-5x+2y+z=0\\ \frac{2}{5}y-\frac{4}{5}z=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=z\\y=2z\\z\in\mathbb{R}\end{cases}$$

$$V=\begin{pmatrix}z\\2z\\z\end{pmatrix}=z\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$$

Donc, $E_1=\text{Vect} < V_2 >$ avec $V_1=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$

Comme $dim(E_1)\neq mult(1)$ alors, B n'est pas diagonalisable mais elle est trigonalisable.

$$P=\begin{pmatrix}1&1&x\\1&2&y\\1&1&z\end{pmatrix}\qquad B'=\begin{pmatrix}-1&0&\beta\\0&1&\gamma\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$BV_3=\beta V_1+\gamma V_2+V_3\Rightarrow(B-I)V_3=\beta V_1+\gamma V_2$

$$\Rightarrow\begin{pmatrix}-5&2&1\\-4&2&0\\-5&2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\beta\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+\gamma\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\beta+\gamma\\\beta+2\gamma\\\beta+\gamma\end{pmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c}-5&2&1&\beta+\gamma\\-4&2&0&\beta+2\gamma\\-5&2&1&\beta+\gamma\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc|c}-5&2&1&\beta+\gamma\\0&2/5&-4/5&\frac{1}{5}(\beta+\gamma)\\0&0&0&0\end{array}\right]$$

$$\Rightarrow\begin{cases}-5x+2y+z=0\\ \frac{2}{5}y-\frac{4}{5}z=\frac{1}{5}(\beta+\gamma)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}5x=2y+z=5z+\beta+\gamma\\ y=2z+\frac{1}{2}(\beta+\gamma)\\ z\in\mathbb{R}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=z+\frac{1}{5}(\beta+\gamma)\\ y=2z+\frac{1}{2}(\beta+\gamma)\\ z\in\mathbb{R}\end{cases}$$

On choisit $z=0\Rightarrow V_3=\begin{pmatrix}\frac{1}{5}(\beta+\gamma)\\ \frac{1}{2}(\beta+\gamma)\\ 0\end{pmatrix}\Rightarrow P=\begin{pmatrix}1&1&\frac{1}{5}(\beta+\gamma)\\1&2&\frac{1}{2}(\beta+\gamma)\\1&1&0\end{pmatrix}$

$$detP = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{5}(\beta+\gamma) \\ 1 & 2 & \frac{1}{2}(\beta+\gamma) \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{5}(\beta+\gamma) \\ 1 & 2 & \frac{1}{2}(\beta+\gamma) \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -\frac{1}{5}(\beta+\gamma)$$

$\det P$ ne doit pas s'annuler, on peut choisir $\beta = 0$ et $\gamma = 10$
Conclusion

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad B' = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Résoudre le système différentiel :

$$(I)\begin{cases} y_1'(t) &=& 3y_1(t)+y_2(t)+2y_3(t) \\ y_2'(t) &=& y_1(t)+y_2(t) \\ y_3'(t) &=& -y_1(t)+y_2(t)+2y_3(t) \end{cases}$$

$$(I) \Leftrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} y_1'(t) \\ y_2'(t) \\ y_3'(t) \end{pmatrix}}_{Y'} = \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{pmatrix}}_{Y}$$

$A = PA'P^{-1} \Rightarrow Y'(t) = PA'P^{-1}Y(t) \Rightarrow P^{-1}Y'(t) = A'P^{-1}Y(t) \quad (*)$
On pose $U(t) = P^{-1}Y(t) \Rightarrow U'(t) = P^{-1}Y'(t)$

$$(*) \Rightarrow \begin{cases} U'(t) = A'U(t) \\ Y(t) = PU(t) \end{cases}$$

avec $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad A' = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

$$U'(t) = A'U(t) \Rightarrow \begin{cases} u_1'(t) &=& 2u_1(t)+u_2(t) \\ u_2'(t) &=& 2u_2(t)+2u_3(t) \\ u_3'(t) &=& 2u_3(t) \end{cases}$$

$u_3'(t) = 2u_3(t) \Rightarrow u_3(t) = k_3e^{2t}$
On résoud l'equation suivante : $u_2'(t) = 2u_2(t)+2u_3(t)$
<u>ESSM</u>
$u_2'(t) = 2u_2(t) \Rightarrow u_2(t) = k_2e^{2t}$
<u>EASM</u>
$u_2(t) = k_2(t)e^{2t} \Rightarrow u_2'(t) = 2k_2(t)e^{2t} + k_2'(t)e^{2t}$
D'un autre côté, $u_2'(t) = 2u_2(t)+2u_3(t) = 2k_2(t)e^{2t} + 2k_3e^{2t}$
$\Rightarrow 2k_2(t)e^{2t} + k_2'(t)e^{2t} = 2k_2(t)e^{2t} + 2k_3e^{2t}$
$\Rightarrow k_2'(t) = 2k_3 \Rightarrow k_2(t) = 2k_3t$
Donc, $u_2(t) = 2k_3te^{2t}$
Finalement, $u_2(t) = k_2e^{2t} + 2k_3te^{2t} = (2k_3t+k_2)e^{2t}$

Il nous reste à résoudre $u_1'(t) = 2u_1(t)+u_2(t)$
<u>ESSM</u>
$u_1'(t) = 2u_1(t) \Rightarrow u_1(t) = k_1e^{2t}$

EASM

$u_1(t)=k_1(t)e^{2t} \Rightarrow u_1'(t)=2k_1(t)e^{2t}+k_1'(t)e^{2t}$

D'un autre côté, $u_1'(t)=2u_1(t)+u_2(t)=2k_1(t)e^{2t}+(2k_3t+k_2)e^{2t}$

$\Rightarrow 2k_1(t)e^{2t}+k_1'(t)e^{2t}=2k_1(t)e^{2t}+(2k_3t+k_2)e^{2t}$

$\Rightarrow k_1'(t)=2k_3t+k_2 \Rightarrow k_1(t)=k_3t^2+k_2t$

Donc, $u_1(t)=(k_3t^2+k_2t)e^{2t}$

Finalement, $u_1(t)=k_1e^{2t}+(k_3t^2+k_2t)e^{2t}=(k_3t^2+k_2t+k_1)e^{2t}$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix}u_1(t)\\u_2(t)\\u_3(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(k_3t^2+k_2t+k_1)e^{2t}\\(2k_3t+k_2)e^{2t}\\k_3e^{2t}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}k_3t^2+k_2t+k_1\\2k_3t+k_2\\k_3\end{pmatrix}e^{2t}$$

$$Y(t)=PU(t)\Rightarrow Y(t)=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&0&0\\-1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}k_3t^2+k_2t+k_1\\2k_3t+k_2\\k_3\end{pmatrix}e^{2t}$$

$$\Rightarrow Y(t)=\begin{pmatrix}k_3t^2+(2k_3+k_2)t+k_1+k_2\\k_3t^2+k_2t+k_1\\-k_3t^2-k_2t-k_1+k_3\end{pmatrix}e^{2t}$$

En conclusion

$$\boxed{\begin{cases}y_1(t) &= (k_3t^2+(2k_3+k_2)t+k_1+k_2)e^{2t}\\ y_2(y) &= (k_3t^2+k_2t+k_1)e^{2t}\\ y_3(y) &= (-k_3t^2-k_2t-k_1+k_3)e^{2t}\end{cases}}$$

■

Exercice 9

$$A=\begin{pmatrix}2&0&0\\1&3&1\\-1&-1&1\end{pmatrix}\qquad A'=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&1\\0&0&2\end{pmatrix}\qquad D'=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}\qquad N'=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

1. Déterminer $P\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ tel que $A'=P^{-1}AP$

$$A'=\begin{pmatrix}2&0&1\\0&2&1\\0&0&2\end{pmatrix}\Rightarrow Sp(A)=\{2\}$$

$E_2=\{V\in\mathbb{R}^3/(A-2I)V=0\}$

$$V\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in E_2\Rightarrow\begin{pmatrix}0&0&0\\1&1&1\\-1&-1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\Rightarrow x+y+z=0\Rightarrow\begin{cases}x\in\mathbb{R}\\y\in\mathbb{R}\\z=-x-y\end{cases}$$

$$V=\begin{pmatrix}x\\y\\-x-y\end{pmatrix}=x\underbrace{\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}}_{V_1}+y\underbrace{\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}}_{V_2}\Rightarrow E_2=Vect<V_1,V_2>$$

Recherche de V_3

$$AV_3=V_2+2V_3\Rightarrow(A-2I)V_3=V_2\Rightarrow\begin{pmatrix}0&0&0\\1&1&1\\-1&-1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}\Rightarrow x+y+z=1$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x \in \mathbb{R} \\ y \in \mathbb{R} \\ z = 1 - x - y \end{array} \right.$$

On choisit $x = y = 0 \Rightarrow z = 1 \Rightarrow V_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Vérifier que N' est nilpotente.

$$N' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow N'^2 = 0 \Rightarrow N' \text{ est nilpotente.}$$

3. A l'aide de la formule du binôme de Newton, Calculer $(A')^n$

$$\begin{aligned} A' = D' + N' \Rightarrow (A')^n &= (D' + N')^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k (D')^{n-k} (N')^k \\ &= C_n^0 (D')^n I + C_n^1 (D')^{n-1} N' \end{aligned}$$

$$C_n^0 = \frac{n!}{0!(n-0)!} = 1 \qquad C_n^1 = \frac{n!}{1!(n-1)!} = n$$

Donc,

$$(A')^n = (D')^n I + n(D')^{n-1} N' = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} + n \begin{pmatrix} 2^{n-1} & 0 & 0 \\ 0 & 2^{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 2^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(A')^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} + n \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2^{n-1} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & n2^{n-1} \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$$

4. En déduire A^n

$A = PA'P^{-1} \Rightarrow A^n = P(A')^n P^{-1}$

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & n2^{n-1} \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -3 & -4 \\ 0 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A^n = 2^{n-1} \begin{pmatrix} 2-n & -n & -n \\ 3n & 3n+2 & 3n \\ -2n & -2n & 2-2n \end{pmatrix}$$

■

Bibliographie

[1] Jean M. Monier : *Les méthodes et exercices de mathematiques MPSI*, Dunod (2008), 423 pages.

[2] Marie Allano-Chevalier , Xavier Oudot : *Maths MPSI 1e année*, Hachette (2008), 672 pages.

[3] Hervé Gianella, Franck Taieb : *Maths MPSI : tests de cours*, Dunod (2011), 313 pages.

[4] Daniel Fredon : *Mathématiques : résumé du cours en fiches MPSI.MP*, Dunod (2010), 268 pages.

[5] Jean M. Arnaudiès, Henri Fraysse : *Cours de mathématiques-1 : Algèbre*, Dunod Université (1992), 680 pages.