Ministère de l'enseignement supérieure et de la recherche scientifique

Ecole Supérieure en Sciences Appliquées -ESSA- Tlemcen

Rappels de cours et exercices corrigés

1ère année formation préparatoire

Physique
Mécanique 1

Dr Souheyr Méziane

Dr. Souheyr Meziane
Ecole Supérieure en Sciences Appliquées -ESSAT- Tlemcen
Unité de Recherche des Matériaux et des Energies Renouvelables -URMER- Université de Tlemcen
Laboratoire d'Etude et Prédiction des Matériaux -LEPM-

Proposé par :

Dr Souheyr Meziane

Table des matières

Introduction : Préambule

Cet ouvrage de physique est destiné aux étudiants de niveau première année formation préparatoire. L'objectif de cet ouvrage est de faciliter l'acquisition des notions de base. Il est constitué de quatre chapitres synthétiques explorant les différentes parties du programme de physique du premier cycle universitaire. Pour chaque chapitre proposé dans ce polycopié de travaux dirigés de physique mécanique 1 (**Cinématique du point matériel, Principes de la dynamique newtonienne, Travail et énergie : Aspect énergétique de la dynamique du point, Moment cinétique et solide en rotation**). Le premier a pour but d'expliquer succinctement une notion de physique. Le second donne les définitions, les formules et les démonstrations essentielles à la compréhension de la notion abordée. Le troisième traite les notions fondamentales de la dynamique du point. Enfin, le quatrième permet à l'étudiant de mettre en application au travers d'exemples détaillés du moment cinétique. L'étudiant trouvera un résumé de cours pour l'aider à faire ses révisions tout au long de l'année. Ces résumés (rappels) sont illustrés avec des figures, des conseils, des méthodes, des mises en garde, et des exercices types pour entraîner l'étudiant à manipuler les notions présentées. Synthèse des programmes, cet ouvrage accompagnera l'étudiant avant tout contrôle ou examen.

L'ordre de présentation des notions a été pensé en fonction de cet objectif. Grâce au découpage en fiches et à la présence de rappels de cours très détaillés, vous retrouverez facilement, et à tout moment, les notions que vous souhaitez réviser. Cet ouvrage de la même série de première année vous sera utile car, rappelez-vous, le programme des concours que vous passerez porte sur les deux années de classes préparatoires.

Chapitre 1 : Cinématique du point matériel

Synthèse

Savoirs :

- Système de coordonnées cartésiennes, polaires, cylindriques et sphériques.
- Bases de projection associées,
- Coordonnées d'un point,
- Composantes d'un vecteur,
- Composantes du vecteur positions dans les différents systèmes de coordonnées,
- Vitesse moyenne ou instantanée,
- Lien entre l'évolution de la norme du vecteur et de la direction du vecteur accélération,
- Savoir que le vecteur accélération est dirigé dans la concavité de la trajectoire.

Savoir-faire :

- Déterminer les vecteurs déplacements infinitésimaux dans les différents systèmes de coordonnées et en déduire le vecteur vitesse,
- Projeter un vecteur sur une base,
- Dériver les vecteurs de la base mobile,
- Déterminer les vecteurs vitesse et accélération instantanées en coordonnées cartésiennes et cylindriques par déviation du vecteur position,
- Choisir un système de coordonnées adapté au problème au problème posé,
- Exprimer la vitesse et la position en fonction du temps et déterminer la trajectoire en coordonnées d'un mouvement de vecteur-accélération constante,
- Exprimer les vecteurs position, vitesse et accélération en coordonnées polaires planes d'un mouvement circulaire et uniforme.

Mots clés :

- Référentiel,
- Repère,
- Base,
- Coordonnées,
- Composantes,
- Trajectoire,
- Mouvement uniforme.

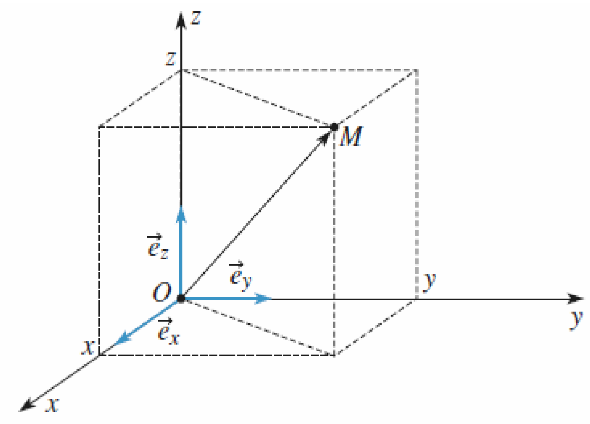
Rappels de cours :

Chapitre I. Cinématique du point matériel

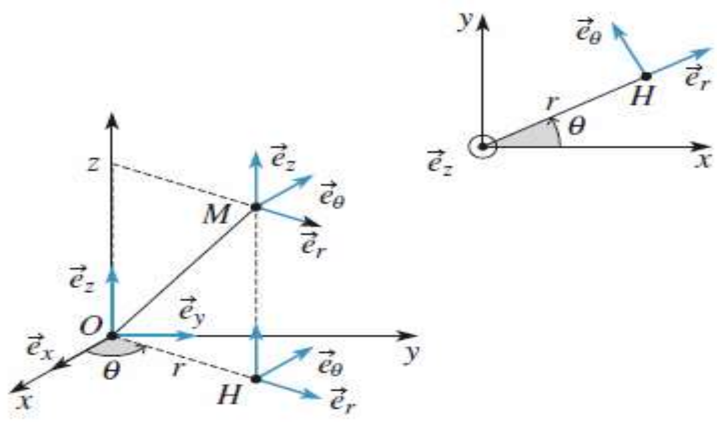
- **Systèmes usuels de coordonnées**
- Le mouvement d'un point M peut être décrit par les vecteurs position, vitesse et accélération. Ces vecteurs caractérisés par une direction, un sens et une norme qui peuvent être exprimés dans différents systèmes de coordonnées, à choisir selon le type de mouvement. Les systèmes les plus utilisés sont les systèmes : cartésien, cylindrique et sphérique.

La vitesse et l'accélération sont obtenues par déviation successives du vecteur position par rapport au temps. Le vecteur position s'exprime comme suit dans les différents systèmes :

Cartésien : $\vec{r} = \overrightarrow{OM} = x\,.\overrightarrow{U_x} + y\,.\overrightarrow{U_y} + z\,.\overrightarrow{U_z}$

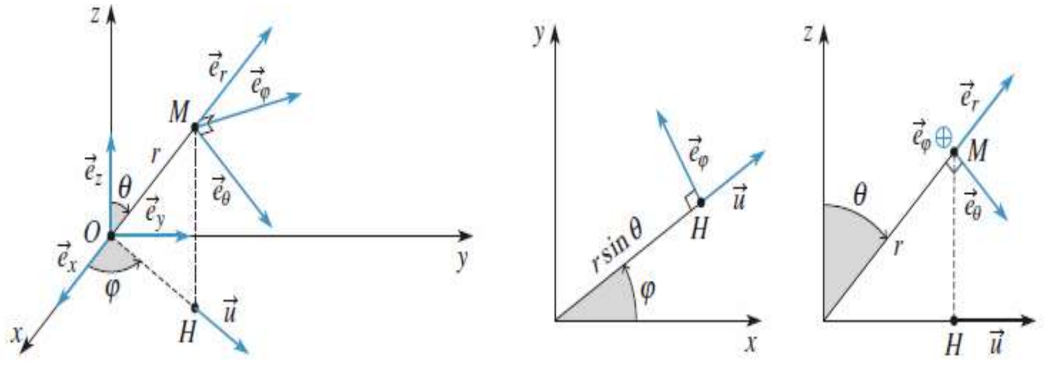


Cylindrique : $\vec{r} = \overrightarrow{OM} = \rho\,.\overrightarrow{U_\rho} + z\,.\overrightarrow{U_z}$



Dr. Souheyr Meziane
Ecole Supérieure en Sciences Appliquées -ESSAT- Tlemcen
Unité de Recherche des Matériaux et des Energies Renouvelables -URMER- Université de Tlemcen
Laboratoire d'Etude et Prédiction des Matériaux -LEPM-

Sphérique : $\vec{r} = \overrightarrow{OM} = r\,.\overrightarrow{U_r}$



- Dériver le vecteur position par rapport au temps revient à dériver ces composantes par rapport au temps mais aussi les vecteurs de la base dans laquelle il est exprimé. Dans ce dernier, il est souvent utile d'exprimer les vecteurs de cette base en fonction des vecteurs de la base cartésienne qui sont en général considérés comme invariants avec le temps.

- **Représentation du mouvement**

La trajectoire est constituée de l'ensemble des positions successives $\overrightarrow{OM}(t) = \vec{r}(t)$ du point mobile M étudié.

Dans l'espace des vitesses, l'espace des positions successives $\overrightarrow{ON}(t) = \vec{\vartheta}(t)$ constitue l'odographe du mouvement.

Dans l'espace des phases, le point P repéré par $\overrightarrow{OP} = \left(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON}\right)$ décrit la trajectoire de phase du mobile.

Pour un mouvement à un degré de liberté, le point de phase P se déplace dans le plan de phase : $\overrightarrow{OP} = \left(x(t), \vartheta(t)\right)$.

- **Vitesse d'un point**

Soit O un point fixe du référentiel $\mathcal{R}$. Le vecteur vitesse de M par rapport à ce référentiel est :

$$\left(\vec{\vartheta}(M)\right)_{/\mathcal{R}} = \left(\frac{d\left(\overrightarrow{OM}\right)}{dt}\right)_{/\mathcal{R}}$$

Expression en coordonnées cartésiennes : $\vec{\vartheta}(M)_{/\mathcal{R}} = \dot{x}\vec{e}_x + \dot{y}\vec{e}_y + \dot{z}\vec{e}_z$.

Expression en coordonnées cylindriques : $\vec{\vartheta}(M)_{/\mathcal{R}} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta + \dot{z}\vec{e}_z$.

- **Accélération d'un point**

Le vecteur accélération de M par rapport à ce référentiel est :

$$\vec{a}(M)_{/\mathcal{R}} = \frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2} = \frac{d\overrightarrow{\vartheta(M)}}{dt}$$

Expression en coordonnées cartésiennes : $\vec{a}(M)_{/\mathcal{R}} = \ddot{x}\vec{e}_x + \ddot{y}\vec{e}_y + \ddot{z}\vec{e}_z$.

Expression en coordonnées cylindriques : $\vec{a}(M)_{/\mathcal{R}=}\left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)\vec{e}_r + \left(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}\right)\vec{e}_\theta + \ddot{z}\vec{e}_z$.

- **Mouvement circulaire**

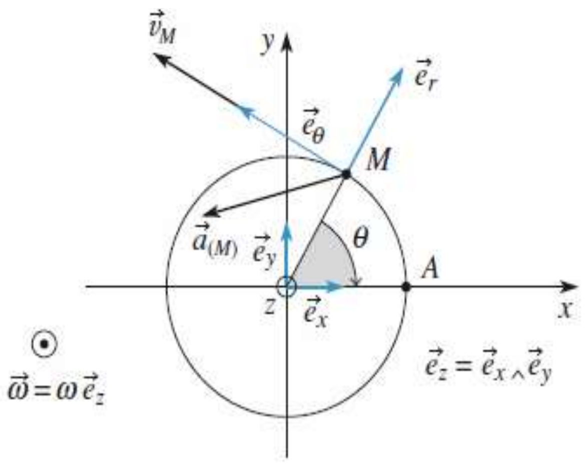
Le point M se déplace sur un cercle de centre O, de rayon R, d'axe (OZ). Il est repéré par ces coordonnées polaires sur le cercle : $(r = R, \theta)$.

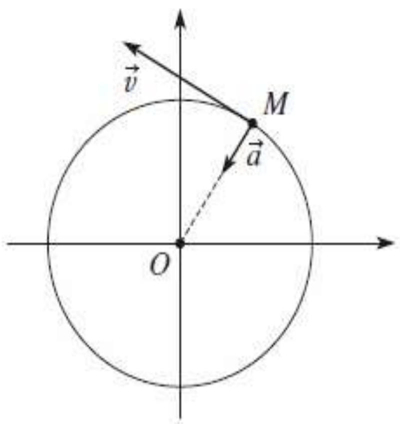
$\overrightarrow{OM} = R\,\vec{e}_r$;

$\vec{\vartheta}(M)_{/\mathcal{R}} = R\dot{\theta}\vec{e}_\theta = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OM}$, où $\vec{\omega} = \omega\vec{e}_z$;

$$\vec{a}(M)_{/\mathcal{R}} = -R\dot{\theta}^2\vec{e}_r + R\ddot{\theta}\vec{e}_\theta$$

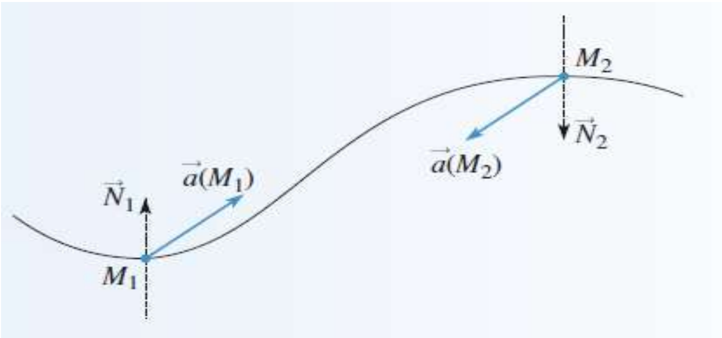
Si le mouvement est circulaire uniforme, $\vartheta = R\dot{\theta}$ est constante, donc $\vec{a}(M)_{/\mathcal{R}}$ est dirigée suivant $-\vec{e}_r$; Elle est centripète et $\vec{a} = -\frac{\vartheta^2}{R}\vec{e}_r$.





Conseils et pièges à éviter

- La vitesse ou l'accélération d'un point M dans un référentiel R donné peut s'exprimer sur différents vecteurs de projections, mais c'est toujours la même vitesse (ou la même accélération) !
- Lors d'une trajectoire courbe, il existe toujours une composante de l'accélération dirigée vers l'intérieure de la concavité de la trajectoire.



Dr. Souheyr Meziane
Ecole Supérieure en Sciences Appliquées -ESSAT- Tlemcen
Unité de Recherche des Matériaux et des Energies Renouvelables -URMER- Université de Tlemcen
Laboratoire d'Etude et Prédiction des Matériaux -LEPM-

Série de TD 1

Exercice 1 :

On considère un mobile M dont le mouvement repéré par rapport à un référentiel orthonormé $O, \vec{\imath}, \ \vec{\jmath}, \vec{k}$, est décrit par l'équation :

$\vec{r} = \overrightarrow{OM} = a(cos(\omega t)\vec{\imath} + sin(\omega t)\vec{\jmath})$ avec $a > 0$.

1. Donner les caractéristiques du mouvement de M : trajectoire, vitesse, accélération.

2. Calculer leurs valeurs numériques, avec $a = 3\ m$ et $\omega = 2\ rad.s^{-1}$

Exercice 2 :

La position d'une particule est donnée par : $\vec{r} = 3t\ \vec{\imath} - 4t^2\ \vec{\jmath} + 2\ \vec{k}$ où t est exprimé en secondes et les unités des coefficients sont telles qu'elles rendent r en mètres.

1. Exprimer le vecteur vitesse.

2. Donner les composantes du vecteur vitesse à cet instant ainsi que sa direction (en angle) à $t = 2\ s$.

3. Montrer que l'accélération est constante.

Exercice 3 :

Un point matériel se déplace le long d'un axe Ox, son abscisse étant donnée en fonction du temps par la loi : $x(t) = 3t^2 - t$.

1. Calculer en fonction du temps la vitesse v et l'accélération a.

2. Tracer les courbes $x(t)$ et $v(t)$: préciser la nature accélérée ou retardée du mouvement selon les valeurs de t.

Exercice 4 :

Un cascadeur prépare une cascade où il doit courir sur un toit puis en sauter sur un toit d'un autre bâtiment plus bas de 4,5 mètres et distant de 6,2 mètres.

1. Peut-il tenter de sauter si sa vitesse est de 16,2 km/h ?

Remarque : on néglige la résistance de l'air, l'accélération et celle de la pesanteur.

Exercice 5 :

Un ballon possède une vitesse d'ascension verticale v_0 indépendante de son altitude. Le vent lui communique une vitesse horizontale $v_x = \frac{z}{\tau}$ proportionnelle à l'altitude z atteinte.

1. Déterminer les lois du mouvement $z(t)$ puis $x(t)$.

2. Déterminer l'équation de la trajectoire $x(z)$.

Exercice 6 :

Dans un repère fixe orthonormé $(Ox,\ y,\ z)$, un point mobile **M** décrit une trajectoire donnée par les équations paramétriques suivantes :

$$x(t) = 4t^2 \quad y(t) = 4\left(t - \frac{t^3}{3}\right) \quad z(t) = 3t + t^3$$

1. Déterminer le vecteur vitesse.

2. Déterminer la norme de la vitesse.

3. Montrer que la tangente à la trajectoire du point **M** fait un angle constant avec l'axe Oz.

Exercice 7 :

Un point M décrit la spirale logarithmique définie par : $r(\theta) = r_0.exp(\theta)$, avec une vitesse angulaire $\omega = \frac{d\theta}{dt}$ constante. On prend $\theta = 0$ à l'instant $t = 0$.

1. Déterminer les composantes de la vitesse $\vec{v}$ et de l'accélération $\vec{a}$.

2. Déterminer les modules de la vitesse et de l'accélération.

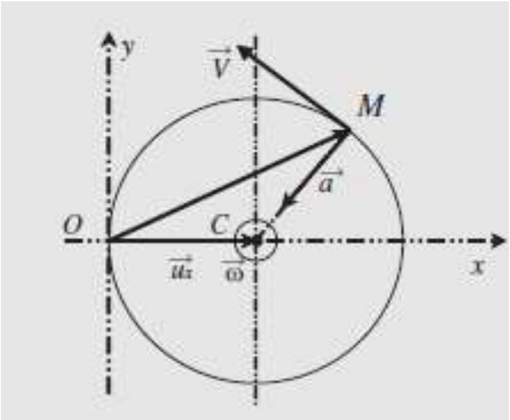
Exercice supplémentaire :

Exercice 8 :

Dans un repère cartésien $(Ox,\ y,\ z)$ muni de base $(\vec{U}_x, \vec{U}_y, \vec{U}_z)$, un point **M** en mouvement a pour équations horaires :

$$\begin{cases} x = 1 + \cos t \\ y = \sin t \\ z = 0 \end{cases}$$

1. Déterminer l'équation de la trajectoire et montrer que c'est un cercle dont le centre $\boldsymbol{C}$ est sur l'axe $\overrightarrow{Ox}$ $(\overline{OC} = 1\ m)$ et le rayon est $R = 1\ m$.



2. Exprimer le vecteur vitesse $\vec{v}$. Précisez sa direction par rapport à sa trajectoire.

Donner la valeur de la vitesse $\vec{v}$ du point M et montrer que le mouvement est uniforme.

3. Exprimer le vecteur vitesse angulaire $\vec{\omega}$ (ou vecteur rotation). Donner la valeur de ω.

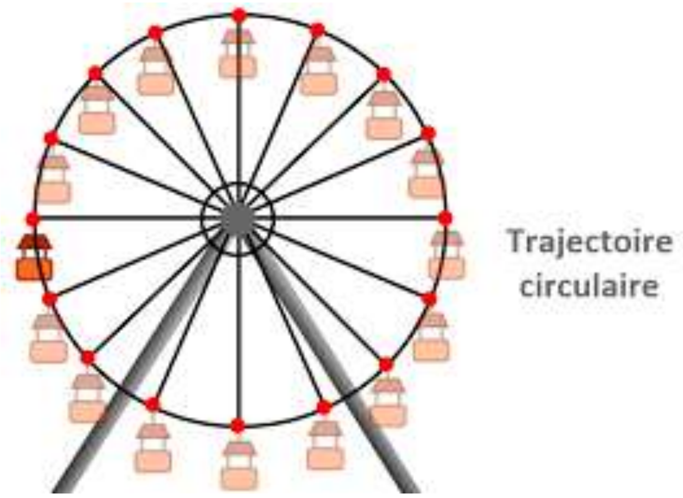
4. Exprimer le vecteur accélération $\vec{a}$. Le comparer avec le vecteur $\overrightarrow{CM}$. Que peut-on dire de ce vecteur par rapport au vecteur vitesse $\vec{v}$ et par rapport à la trajectoire. Donner la valeur de a.

5. Représentez la trajectoire, le vecteur vitesse angulaire $\vec{\omega}$, le vecteur vitesse $\vec{v}$ ainsi que vecteur accélération $\vec{a}$ en un point M quelconque.

Solutions des exercices de la série de TD 1

Solution de l'exercice 1 :

1. Le mouvement est plan à deux dimensions puisque la composante suivant $\vec{k}$ est nulle. C'est un mouvement périodique de période 2π : $\vec{r}(t+2\pi)=\vec{r}(t)$. Le mouvement est circulaire car le module de $\vec{r}$ est constant : $r = a\sqrt{cos^2(\omega t)+sin^2(\omega t)} = a$.



Le vecteur vitesse du point M est : $\vec{\vartheta}(M) = a\omega(-\sin(\omega t)\vec{\imath} + cos(\omega t)\vec{\jmath})$.

Le module de la vitesse est : $\vartheta(M) = a\omega\sqrt{cos^2(\omega t)+sin^2(\omega t)} = a\omega$.

La vitesse est constante, le mouvement est donc circulaire uniforme.

Le vecteur accélération du point M est $\vec{a}(M) = -a\omega^2(cos(\omega t)\vec{\imath} + sin(\omega t)\vec{\jmath})$.

On observe que $\vec{a}(M) = -\omega^2\vec{r}$, donc l'accélération est centripète et de module constant $a(M) = a\omega^2\sqrt{cos^2(\omega t)+sin^2(\omega t)} = a\omega^2$.

2. $r = 3\,m$; $\vartheta(M) = 6\,m\,.s^{-1}$; $a(M) = 12\,m\,.s^{-2}$.

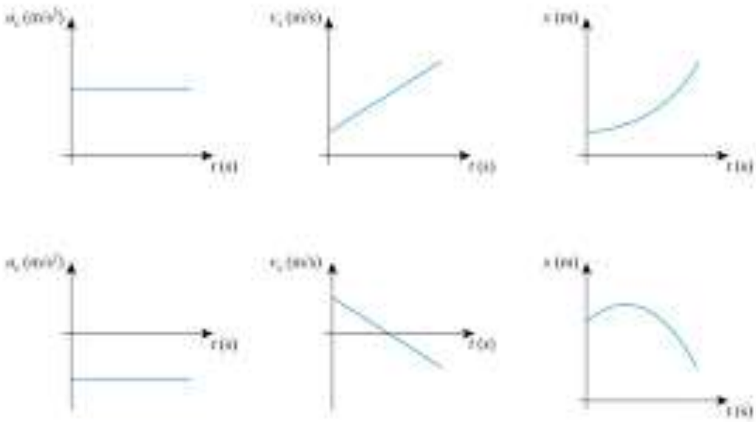
Dr. Souheyr Meziane
Ecole Supérieure en Sciences Appliquées -ESSAT- Tlemcen
Unité de Recherche des Matériaux et des Energies Renouvelables -URMER- Université de Tlemcen
Laboratoire d'Etude et Prédiction des Matériaux -LEPM-

Solution de l'exercice 2 :

1. $\vec{\vartheta} = 3\vec{\imath} + (-8t)\vec{\jmath}$.

2. à $t = 2\ s$; $\vec{\vartheta} = 3\vec{\imath} + (-16t)\vec{\jmath}$.

3. $\|\vec{\vartheta}(2\ s)\| = \sqrt{9+256} = \sqrt{267} = 16{,}3\ m\,.\,s^{-1}$.



Le vecteur vitesse est dans le plan Oxy. On a $cos(\vec{\vartheta},\vec{\imath}) = \frac{3}{\sqrt{267}}$, ce qui donne un angle de : $(\vec{\vartheta},\vec{\imath}) = -79{,}4°$.

4. $\vec{a} = -8\vec{\jmath}$, donc l'accélération est constante.

Solution de l'exercice 3 :

Un point matériel se déplace le long d'un axe Ox, son abscisse étant donnée en fonction du temps par la loi : $x(t) = 3t^2 - t$.

1. $\vartheta(t) = 9t^2 - 1$ et $a(t) = 18t$.

2. Le tableau de variation complet est le suivant :

t	0		+1/3		$+\infty$
$x(t)$	0	↘	−2/9	↗	$+\infty$
$v(t)$	−1	↗	0	↗	$+\infty$
$a(t)$	0		+		

Dr. Souheyr Meziane
Ecole Supérieure en Sciences Appliquées -ESSAT- Tlemcen
Unité de Recherche des Matériaux et des Energies Renouvelables -URMER- Université de Tlemcen
Laboratoire d'Etude et Prédiction des Matériaux -LEPM-

Le signe du produit $a(t)\,.\vartheta(t)$ permet de déterminer la nature accélérée ou retardée du mouvement. Ainsi, le mouvement est retardé sur les intervalles de t : $]-\infty,\ -1/3]$ et $[0, 1/3]$; le mouvement est accéléré sur les intervalles de t : $[-1/3, 0]$ et $[1/3, +\infty[$.

***Solution de l'exercice 4* :**

1. Lors de son saut, le cascadeur est soumis à la seule pesanteur, donc il a une accélération dirigée vers le bas et égale à g (on prend $g = 9{,}8\,m\,.s^{-2}$). Par deux intégrations successives, on a l'expression de la distance verticale parcourue (selon l'axe Oy, avec y_0 altitude de départ et y altitude d'arrivée, la différence d'altitude étant de 4,5 $mètres$) en fonction de l'accélération et du temps : $y - y_0 = -\frac{1}{2}gt^2$.

Pour parcourir les 4,5 $mètres$ de distance verticale, il faut au cascadeur un temps

$t = \sqrt{\frac{2(y-y_0)}{g}}$. La distance horizontale parcourue pendant ce temps est :

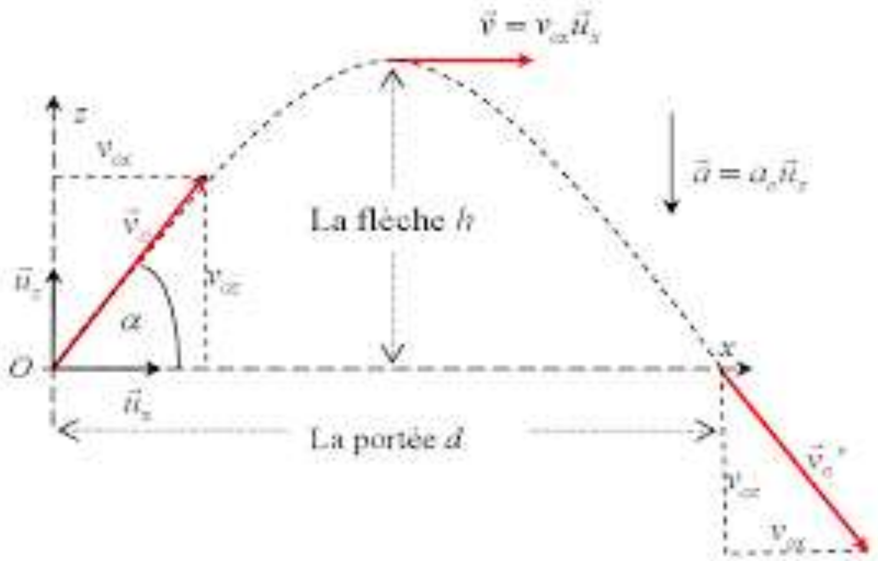
$x - x_0 = \vartheta_0 t = 4{,}32\,m$, ce qui n'est pas suffisant pour franchir la distance horizontale de 6,2 $mètres$ séparant les deux bâtiments.

Le cascadeur ne peut donc pas sauter avec une telle vitesse initiale.

***Solution de l'exercice 5* :**

1. $\frac{dz}{dt} = \vartheta_0$, donc $z(t) = \vartheta_0(t)$. On en déduit : $\frac{dx}{dt} = \frac{\vartheta_0 t}{\tau}$, soit $x(t) = \vartheta_0\frac{t^2}{2\tau}$.

2. La trajectoire est une parabole d'équation : $x(z) = \frac{z^2}{2\tau\vartheta_0}$.



Solution de l'exercice 6 :

1. Les composantes de la vitesse sont : $\vartheta_x = 8t, \vartheta_y = 4(1 - t^2), \vartheta_z = 3(1 + t^2)$.

2. La norme de la vitesse est : $\|\vec{\vartheta}\| = 5(1 + t^2)$.

3. Le vecteur vitesse est porté par la tangente à la courbe. On pose θ l'angle entre le vecteur vitesse $\vec{\vartheta}$ et l'axe Oz (de vecteur unitaire $\vec{k}$). On peut écrire : $cos\theta = \frac{\vec{\vartheta}\,.\,\vec{k}}{\|\vec{\vartheta}\|}$, ce qui donne un angle constant $\theta = 53°08'$.

Solution de l'exercice 7 :

1. $\vec{\vartheta} = (r_0\omega\,.\,\exp(\theta)).\overrightarrow{U_r} + (r_0\omega\,.\,\exp(\theta)).\overrightarrow{U_\theta}$; $\vec{a} = (2r_0\omega^2\,.\,\exp(\theta)).\overrightarrow{U_\theta}$.

2. $\|\vec{\vartheta}\| = r_0\omega\sqrt{2}\,.\exp(\theta)$ et $\|\vec{a}\| = 2r_0\omega^2.\exp(\theta)$.

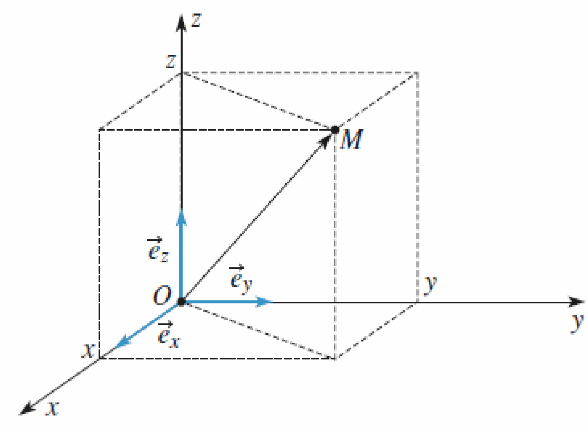
Rappels de cours :

Chapitre I. Cinématique du point matériel

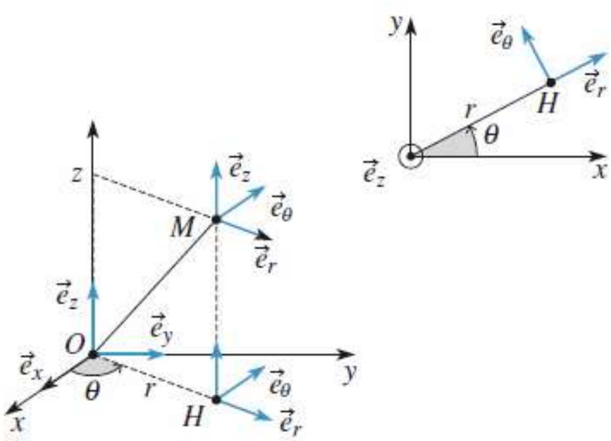
- Systèmes usuels de coordonnées
- Le mouvement d'un point M peut être décrit par les vecteurs position, vitesse et accélération. Ces vecteurs caractérisés par une direction, un sens et une norme qui peuvent être exprimés dans différents systèmes de coordonnées, à choisir selon le type de mouvement. Les systèmes les plus utilisés sont les systèmes : cartésien, cylindrique et sphérique.

La vitesse et l'accélération sont obtenues par déviation successives du vecteur position par rapport au temps. Le vecteur position s'exprime comme suit dans les différents systèmes :

Cartésien : $\vec{r} = \overrightarrow{OM} = x\,.\overrightarrow{U_x} + y\,.\overrightarrow{U_y} + z\,.\overrightarrow{U_z}$

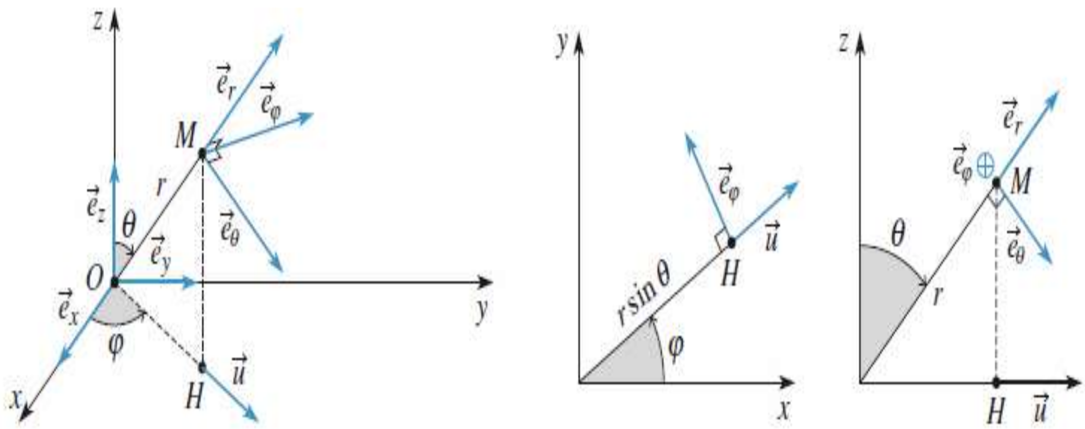


Cylindrique : $\vec{r} = \overrightarrow{OM} = \rho\,.\overrightarrow{U_\rho} + z\,.\overrightarrow{U_z}$



Dr. Souheyr Meziane
Ecole Supérieure en Sciences Appliquées -ESSAT- Tlemcen
Unité de Recherche des Matériaux et des Energies Renouvelables -URMER- Université de Tlemcen
Laboratoire d'Etude et Prédiction des Matériaux -LEPM-

Sphérique : $\vec{r} = \overrightarrow{OM} = r\,.\overrightarrow{U_r}$



- Dériver le vecteur position par rapport au temps revient à dériver ces composantes par rapport au temps mais aussi les vecteurs de la base dans laquelle il est exprimé. Dans ce dernier, il est souvent utile d'exprimer les vecteurs de cette base en fonction des vecteurs de la base cartésienne qui sont en général considérés comme invariants ave le temps.

- **Représentation du mouvement**

La trajectoire est constituée de l'ensemble des positions successives $\overrightarrow{OM}(t) = \vec{r}(t)$ du point mobile M étudié.

Dans l'espace des vitesses, l'espace des positions successives $\overrightarrow{ON}(t) = \vec{\vartheta}(t)$ constitue l'odographe du mouvement.

Dans l'espace des phases, le point P repéré par $\overrightarrow{OP} = \left(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON}\right)$ décrit la trajectoire de phase du mobile.

Pour un mouvement à un degré de liberté, le point de phase P se déplace dans le plan de phase : $\overrightarrow{OP} = \left(x(t), \vartheta(t)\right)$.

Dr. Souheyr Meziane
Ecole Supérieure en Sciences Appliquées -ESSAT- Tlemcen
Unité de Recherche des Matériaux et des Energies Renouvelables -URMER- Université de Tlemcen
Laboratoire d'Etude et Prédiction des Matériaux -LEPM-

- **Vitesse d'un point**

Soit O un point fixe du référentiel $\mathcal{R}$. Le vecteur vitesse de M par rapport à ce référentiel est :

$$\left(\vec{\vartheta}(M)\right)_{/\mathcal{R}} = \left(\frac{d\left(\overrightarrow{OM}\right)}{dt}\right)_{/\mathcal{R}}$$

Expression en coordonnées cartésiennes : $\vec{\vartheta}(M)_{/\mathcal{R}} = \dot{x}\vec{e}_x + \dot{y}\vec{e}_y + \dot{z}\vec{e}_z$.

Expression en coordonnées cylindriques : $\vec{\vartheta}(M)_{/\mathcal{R}} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta + \dot{z}\vec{e}_z$.

- **Accélération d'un point**

Le vecteur accélération de M par rapport à ce référentiel est :

$$\vec{a}(M)_{/\mathcal{R}} = \frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2} = \frac{d\overrightarrow{\vartheta(M)}}{dt}$$

Expression en coordonnées cartésiennes : $\vec{a}(M)_{/\mathcal{R}} = \ddot{x}\vec{e}_x + \ddot{y}\vec{e}_y + \ddot{z}\vec{e}_z$.

Expression en coordonnées cylindriques : $\vec{a}(M)_{/\mathcal{R}=}\left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)\vec{e}_r + \left(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}\right)\vec{e}_\theta + \ddot{z}\vec{e}_z$.

- **Mouvement circulaire**

Le point M se déplace sur un cercle de centre O, de rayon R, d'axe (OZ). Il est repéré par ces coordonnées polaires sur le cercle : $(r = R, \theta)$.

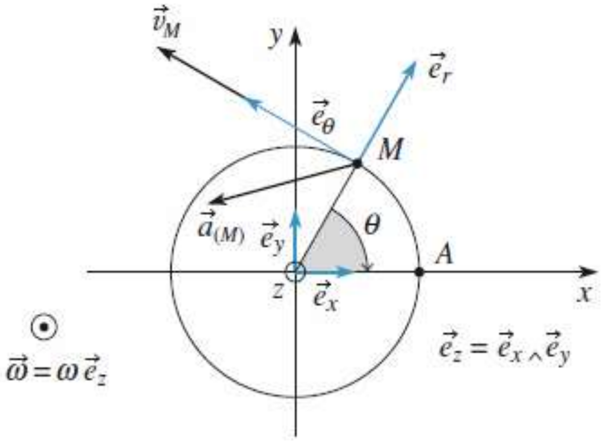
$\overrightarrow{OM} = R\,\vec{e}_r$;

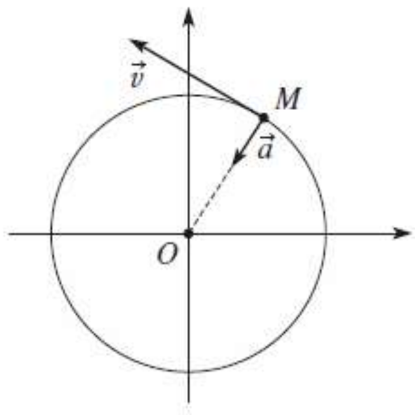
$\vec{\vartheta}(M)_{/\mathcal{R}} = R\dot{\theta}\vec{e}_\theta = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OM}$, où $\vec{\omega} = \omega\vec{e}_z$;

$$\vec{a}(M)_{/\mathcal{R}} = -R\dot{\theta}^2\vec{e}_r + R\ddot{\theta}\vec{e}_\theta$$

Si le mouvement est circulaire uniforme, $\vartheta = R\dot{\theta}$ est constante, donc $\vec{a}(M)_{/\mathcal{R}}$ est dirigée suivant $-\vec{e}_r$; Elle est centripète et $\vec{a} = -\frac{\vartheta^2}{R}\vec{e}_r$.

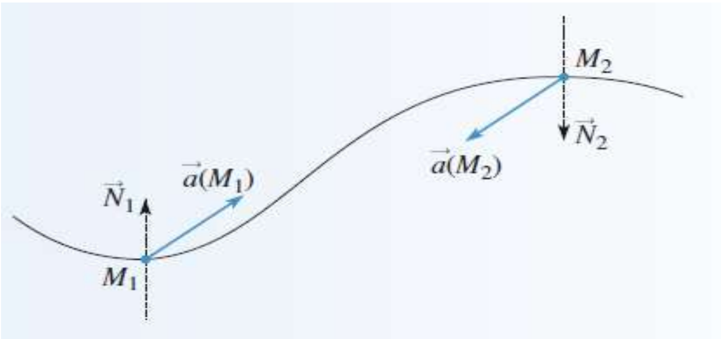
Dr. Souheyr Meziane
Ecole Supérieure en Sciences Appliquées -ESSAT- Tlemcen
Unité de Recherche des Matériaux et des Energies Renouvelables -URMER- Université de Tlemcen
Laboratoire d'Etude et Prédiction des Matériaux -LEPM-





Conseils et pièges à éviter

- La vitesse ou l'accélération d'un point M dans un référentiel R donné peut s'exprimer sur différents vecteurs de projections, mais c'est toujours la même vitesse (ou la même accélération) !
- Lors d'une trajectoire courbe, il existe toujours une composante de l'accélération dirigée vers l'intérieure de la concavité de la trajectoire.



Série de TD 2

Exercice 1 :

Sur le quai d'une gare, une voyageuse en retard, court pour essayer de prendre son train, à une vitesse constante $v = 8\ m.s^{-1}$.

Le train démarre alors qu'elle est encore à 110 mètres du dernier wagon. L'accélération constante du train est de $a = 0{,}5\ m.s^{-2}$.

1. La voyageuse rejoindrait- elle son train ? Sinon, à quelle vitesse minimale s'en trouverait-elle ?

2. Reprendre la question 1 dans le cas où le démarrage du train a lieu lorsque le dernier wagon est à 40 m de la voyageuse.

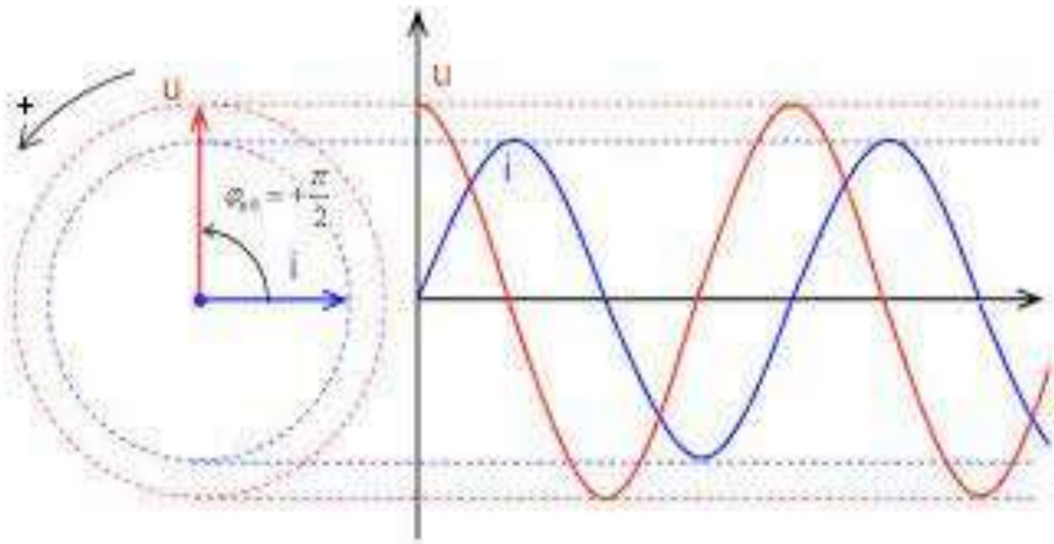
3. Quelle devrait être, à l'instant du démarrage, la distance minimale entre le train est la voyageuse pour que celle-ci atteigne effectivement le dernier wagon ?

Exercice 2 :

Deux points mobiles A et B se déplacent tous les deux le long d'un segment, muni d'un mouvement sinusoïdal d'amplitude 10 cm. Le point A possède une pulsation $\omega_A = 10\ rad.s^{-1}$ et B une pulsation $\omega_B = 11\ rad.s^{-1}$.

1. A la date $t = 0\ s$, ils passent dans le même sens à l'origine des abscisses. A quelle date se rencontrent-il à nouveau, avec chacun une vitesse de même signe ?

2. Quelle distance aura parcouru le moins rapide ? Le plus rapide ?



Dr. Souheyr Meziane
Ecole Supérieure en Sciences Appliquées -ESSAT- Tlemcen
Unité de Recherche des Matériaux et des Energies Renouvelables -URMER- Université de Tlemcen
Laboratoire d'Etude et Prédiction des Matériaux -LEPM-

Exercice 3 :

Un pilote de chasse fait une looping. La trajectoire circulaire est située dans un plan vertical. La vitesse est supposée constante et est égale à $1800\ km.h^{-1}$.

Sachant que le corps humain ne peut pas supporter une accélération supérieure à $10\ m.s^{-2}$, calculer le rayon minimal que le pilote peur donner à la trajectoire.

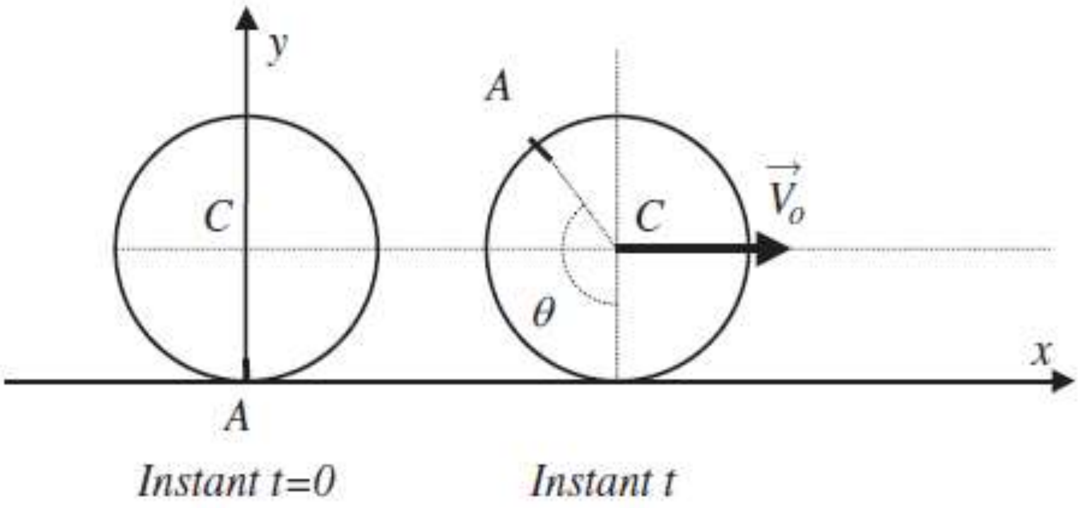
Exercice 4 :

Une roue circulaire de rayon a et de centre C, roule sans glisser sur Ox, tout en restant dans le plan Oxy. Un point A de la roue coïncide à l'instant $t = 0\ s$ avec l'origine O du repère. Le centre C a une vitesse constante V_0.

1. Déterminer les coordonnées de A à l'instant t.

2. Calculer le module du vecteur vitesse de A et étudier ses variations au cours du temps.

3. Pour quelle position de A ce vecteur vitesse est-il nul ?



Exercice 5

Le rotor d'une machine tourne à $1200\ tr.min^{-1}$. A l'instant $t = 0\ s$, il est soumis à une accélération angulaire $\ddot{\alpha}$ supposée constante jusqu'à l'arrêt complet. Il s'arrête en $300\ tours$.

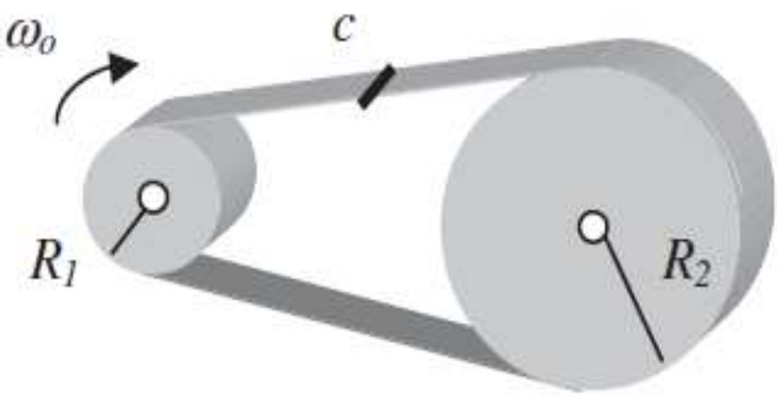
1. Donner les équations horaires de $\dot{\alpha}$ et α.

2. Calculer la durée du freinage. Que vaut $\ddot{\alpha}$?

Dr. Souheyr Meziane
Ecole Supérieure en Sciences Appliquées -ESSAT- Tlemcen
Unité de Recherche des Matériaux et des Energies Renouvelables -URMER- Université de Tlemcen
Laboratoire d'Etude et Prédiction des Matériaux -LEPM-

Exercice 6 :

On considère un système de deux poulies reliées par une courroie (voir figure).



La première poulie a un rayon $R_1 = 5cm$ et tourne à la vitesse angulaire constante $\omega_0 = 180\ rad.s^{-1}$, la seconde a un rayon $R_2 = 30\ cm$.

1. Calculer la vitesse angulaire de la seconde poulie.

2. La courroie porte une marque C. Calculer l'accélération du point C au cours du mouvement.

Exercice 7 :

Une voiture est chronométrée pour un test d'accélération avec départ arrêté (vitesse initiale nulle).

1. Elle est chronométrée à $26{,}6\ s$ au bout d'une distance $D = 180\ m$. Déterminer l'accélération (supposée constante) et la vitesse atteinte à la distance D.

2. Quelle est alors la distance d'arrêt pour une décélération de $7\ m.s^{-2}$?

Exercice 8 :

Un conducteur roule à une vitesse constante ϑ_0 sur une route rectiligne. Comme il est en excès de vitesse à $110\ km\ h^{-1}$, un gendarme à moto démarre à l'instant où la voiture passe à sa hauteur et accélère uniformément. La gendarme atteint la vitesse de $90\ kmh^{-1}$ au bout de $10\ s$.

1. Quel sera le temps nécessaire au motard pour rattraper la voiture ?

2. Quelle distance aurait-il parcourue ?

3. Quelle vitesse aurait-il alors atteinte ?

Solutions des exercices de la série de TD 2

Solution de l'exercice 1 :

Repère : axe Ox dans la direction du mouvement du train et de la voyageuse ; origine O position de la voyageuse lorsque le train démarre. A $t = 0\ s$, il se trouve à $D = 110\ m$ de O.

Voyageuse : mouvement rectiligne uniformément d'équation honoraire $x = \vartheta t = 8t$.

Train : mouvement rectiligne uniformément accéléré d'accélération $a = 0{,}5\ m\,.\,s^{-2}$.

La vitesse horaire est $\vartheta_t = at = 0{,}5t$ et l'équation horaire : $x_t = \frac{1}{2}at^2 + D = 0{,}25t^2 + 100$. La voyeuse rejoint le train si pour une même date t on a : $x = x_t \Rightarrow 0{,}25t^2 - 8t + 100 = 0$.

Le discriminent $\Delta = -36 < 0 \Rightarrow$ pas de solution. La distance qui sépare la voyageuse et le train est $x_t - x = \frac{1}{2}at^2 + D - \vartheta t$. Cette distance est minimale quand sa dérivée s'annule, soit quand $at - \vartheta = 0 \Rightarrow t = \frac{\vartheta}{a}$. On a donc : $t = 8/0{,}5 = 16\ s$ et la distance minimale est :

$d_m = \frac{1}{2}at^2 + D - \vartheta t = 36\ m$.

Pour $D = 40\ m$, $x = x_t \Rightarrow 0{,}25t^2 - 8t + 40 = 0$. Le discriminent $\Delta = 24 > 0$. Les solutions sont :

$t_1 = 16 - \sqrt{96} = 6{,}2\ s$ et la voyageuse a parcouru $x_1 = \vartheta t_1 = 49{,}6\ m$ (le train a effectué $9{,}6\ m$ et sa vitesse est alors de $3{,}1\ m.s^{-1}$. La voyageuse est plus rapide et commence à remonter le train).

$t_2 = 16 + \sqrt{96} = 25{,}8\ s$ et la voyageuse a parcouru $x_1 = \vartheta t_1 = 206{,}4\ m$ (le train accélérant, il deviendra plus rapide que la voyageuse et la dépassera si elle n'a pas pu monter en marche. Elle a pour cela $19{,}6\ s$).

Distance minimale D_m pour que la voyageuse atteigne le train : $x = x_t \Rightarrow 0{,}25t^2 - 8t + 40 = 0$.

Le discriminent doit être positif ou nul : soit $64 - t \geq 0 \Rightarrow D_m = 64\ m$. On a alors $t = 16\ s$ et la distance parcourue est de $x = 128\ m$. Le train a parcouru $28\ m$ et sa vitesse $\vartheta = 8m.s^{-1}$.

Solution de l'exercice 2 :

1. $\omega_A = 10\, rad.s^{-1} \Rightarrow T_A = \frac{2\pi}{\omega_A}$.

2. $\omega_B = 11\, rad.s^{-1} \Rightarrow T_B = \frac{2\pi}{\omega_B} < T_A$.

La période de A est supérieure à celle de B qui est donc la plus rapide. Lors de la première coïncidence, B aura effectué une oscillation de plus que A. On peut donc écrire que la rencontre se fera à l'instant : $T = nT_A = (n+1)T_B$ où n représente le nombre d'oscillations effectuées par A jusqu'à la coïncidence.

$$n = \frac{T_B}{T_A - T_B} = \frac{1}{\frac{\omega_B}{\omega_A} - 1} = \frac{1}{1{,}1 - 1} = 10 \Rightarrow t = 10T_A = 6{,}28\, s.$$

Le moins rapide aura effectué 10 oscillations, soit une distance de $10 \times 4X_m$ c'est-à-dire $4\, m$. Le plus rapide effectue une oscillation de plus et a donc parcouru $4{,}4\, m$.

Solution de l'exercice 3 :

1. Mouvement circulaire uniforme de vitesse constante $\vartheta = 1800\, km.h^{-1} = 0{,}5.10^3\, m.s^{-1}$. L'accélération est normale et centripète, ayant pour expression $a = \frac{\vartheta^2}{r} < 10 \Rightarrow r \geq \frac{\vartheta^2}{10g} = 2{,}5\, km$.

Solution de l'exercice 4 :

1. Roulement sans glissement : pendant la durée dt, le point C effectue un déplacement selon (Ox) avec une vitesse constante ϑ_0 de mouvement curviligne uniforme, égale à $\vartheta_0\, dt$ et autre déplacement circulaire tournée de $d\theta$ selon (Oy), en effectuant un mouvement circulaire uniformément variée avec une accélération angulaire constante, égale à $-a$.

On a donc : $a\, d\theta = \vartheta_0 dt \Rightarrow \dot{\theta} = \frac{\vartheta_0}{a} \Rightarrow \theta = \frac{\vartheta_0}{a} t$ (en orientant θ comme sur le schéma).

$$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CA} = [(\vartheta_0 t)\overrightarrow{U_x} + \vec{a}\,\overrightarrow{U_y}] + [-a\, sin\theta\, \overrightarrow{U_x} - a\cos\theta\, \overrightarrow{U_y}]$$

$$\overrightarrow{OA} = \left[\vartheta_0 t - a\, sin\frac{\vartheta_0}{a}t\right] \overrightarrow{U_x} + a\left[1 - cos\frac{\vartheta_0}{a}t\right] \overrightarrow{U_y}$$

$$\vec{\vartheta}_A = \frac{d\overrightarrow{OA}}{dt} = \vartheta_0\left[\left(1-\cos\frac{\vartheta_0}{a}t\right)\overrightarrow{U_x} + \overrightarrow{U_y}\sin\frac{\vartheta_0}{a}t\right]$$

$$\Rightarrow \left\|\vec{\vartheta}_A\right\| = \vartheta_0\sqrt{\left(1-cos\frac{\vartheta_0}{a}t\right)^2 + sin^2\frac{\vartheta_0}{a}t}$$

$\left\|\vec{\vartheta}_A\right\| = \vartheta_0\sqrt{2}\sqrt{1-\cos\frac{\vartheta_0}{a}t}$. Fonction périodique de période $T = \frac{2\pi a}{\vartheta_0}$ (temps mis pour faire un tour de roue complet $\theta = 2\pi$). Elle s'annule pour $t = nT$ (avec n nombre entier correspondant au nombre de tours effectués). Le point A est alors en contact avec le sol. Elle est maximale pour $t = nT + \frac{T}{2}$ et prend alors la valeur de $2\vartheta_0$. Le point A est alors est sommet de la roue.

***Solution de l'exercice 5* :**

***Rappel* : La formule pour convertir des tours par minutes (tr/min) en radians par secondes (rad/s) est donnée par :**

$$\boldsymbol{\omega = \frac{2\pi}{60}\times N}$$

$$\boldsymbol{\omega_{(rad/s)} = \frac{2\pi}{60}\times N_{(tr/min)}}$$

Où $N_{(tr/min)}$ est la vitesse angulaire en tours par minutes [tr/min].
$\omega_{(rad/s)}$ est la vitesse angulaire en radians par secondes [rad/s].
On en déduit les relations suivantes :
1 rad/s = 9.549296 tr/min
1 tr/min = 0,104719 rad/s

1. Rotation de $1200\,tr.min^{-1} \Rightarrow \dot{\alpha}_0 = 40\pi\,rad.s^{-1}$. Arrêt en $300\,tours \Rightarrow \alpha_1 = 600\pi$. Accélération angulaire constante $\ddot{\alpha} \Rightarrow \alpha \dot{=} \ddot{\alpha}t + \dot{\alpha}_0$ et $\alpha = \frac{1}{2}\ddot{\alpha}t^2 + \dot{\alpha}_0 \Rightarrow \ddot{\alpha} = \frac{\dot{\alpha}-\dot{\alpha}_0}{t}$ et $\alpha = \frac{1}{2}\frac{\dot{\alpha}-\dot{\alpha}_0}{t}t^2 + \dot{\alpha}_0$.

L'arrêt s'effectue pour :

$\alpha = \alpha_1$ et $\alpha \dot{=} 0 \Rightarrow \alpha_1 = -\frac{1}{2}\dot{\alpha}_0 t + \dot{\alpha}_0 t = \frac{1}{2}\dot{\alpha}_0 t \Rightarrow t = 2\frac{\alpha_1}{\dot{\alpha}_0} = 2\frac{600\pi}{40\pi} = 30\,s.$

$\ddot{\alpha}\,\frac{\dot{\alpha}-\dot{\alpha}_0}{t} = -\frac{\dot{\alpha}_0}{30} = -\frac{4}{3}\pi\,rad.s^{-2}.$

Dr. Souheyr Meziane
Ecole Supérieure en Sciences Appliquées -ESSAT- Tlemcen
Unité de Recherche des Matériaux et des Energies Renouvelables -URMER- Université de Tlemcen
Laboratoire d'Etude et Prédiction des Matériaux -LEPM-

Solution de l'exercice 6 :

Un point C de la courroie se déplace avec une vitesse constante. La courroie ne glissant pas sur les roues, on peut exprimer la vitesse du point lorsqu'il est en contact avec la roue de rayon R_1 ($\vartheta_c = R_1\omega_0$) et lorsqu'il est ne contact avec la roue de rayon R_2 ($\vartheta_c = R_2\ \omega_2$). On a donc : $R_1\omega_0 = R_2\omega_2 \Rightarrow \omega_2 = \omega_0\frac{R_1}{R_2} = 30\ rad.s^{-1}$.

Sur les roues, le point C a un mouvement circulaire uniforme. L'accélération est donc normale et centripète (vers le centre des roues) et a pour valeur :

- *Roue n°=1* : $a_1 = R_1\omega_0^2 = 1620\ rad.s^{-2}$.
- *Roue n°=2* : $a_2 = R_2\omega_2^2 = a_1\frac{R_1}{R_2} = 270\ rad.s^{-2}$.

Ente les deux roues, le mouvement est rectiligne uniforme et l'accélération est donc nulle.

Solution de l'exercice 7 :

1. Le mouvement est rectiligne à accélération constante $\vec{a}_0$. On choisit l'axe Ox (vecteur $\vec{u}_x$) comme axe du mouvement et le point O comme point de départ. L'intégration de l'accélération donne :

$$\vec{a} = \vec{a}_0 = a_0\vec{u}_x \Rightarrow\ \vec{\vartheta} = (a_0t + cte)\vec{u}_x$$

Or la vitesse initiale (à $t = 0$) est nulle. Donc, $cte = 0$. L'abscisse x est obtenue par :

$x = \frac{a_0t^2}{2} + cte'$ avec $x(0) = 0$ donc $cte' = 0$.

Si on note $t_D = 26{,}6\ s$, $a_0 = 2D/t_D^2 = 2\ \times 180/26{,}6^2 = 0{,}509\ m.s^{-2}$. On obtient ensuite la vitesse à$t = t_D$: $\vartheta_D = \vartheta_0 t_D = 13{,}5\ m.s^{-1}$.

2. Pour la phase de freinage, on peut changer l'origine ; la nouvelle vitesse initiale est alors ϑ_D. On note : $a_f = -7\ m.s^{-2}$ l'accélération lors de cette phase ($a_f < 0$ car il y a freinage). Les intégrations de l'accélérations amènent à :

$\vartheta = \dot{x} = a_f t + \vartheta_D$ et $x = \frac{a_f\,t^2}{2} + \vartheta_D t$.

L'arrêt a lieu pour $\vartheta = 0\ m.s^{-1}$ soit $t = \vartheta_D/a_f = 1{,}93\ s$ d'où une distance de $13\ m$.

Dr. Souheyr Meziane
Ecole Supérieure en Sciences Appliquées -ESSAT- Tlemcen
Unité de Recherche des Matériaux et des Energies Renouvelables -URMER- Université de Tlemcen
Laboratoire d'Etude et Prédiction des Matériaux -LEPM-

Solution exercice 8 :

1. Soit Ox l'axe duquel a lieu le mouvement.

La vitesse de la voiture est $\dot{x} = \vartheta_0$ et sa position $x = \vartheta_0 t$ en prenant l'origine à la position de la voiture ou celle de la moto (ce sont les mêmes) à $t = 0\ s$.

Quant à la moto, son accélération est $\ddot{x} = a_0$ dont on déduit par intégration sa vitesse $\dot{x} = a_0 t$ et sa position $x = \frac{1}{2} a_0 t_0^2$.

On cherche l'instant pour lequel les positions de la voiture et de la moto sont à nouveau identiques, de qui revient à résoudre l'équation : $\vartheta_0 t = \frac{1}{2} a_0 t_0^2$. Les solutions sont $t = 0$ qui n'est bien évidemment pas la solution recherchée et $t_0 = \frac{2\vartheta_0}{a_0} = 22{,}2\ s$. On note que pour faire l'application numérique transformer la vitesse en $m.s^{-1}$ soit $\vartheta_0 = 100\ km.h^{-1} = 27{,}8\ m.s^{-1}$ et déterminer l'accélération en considérant qu'au bout de $10\ s$, la moto va atteindre une vitesse de $90\ km.h^{-1}$ ou $25\ m.s^{-1}$, soit $a_0 = \frac{\vartheta_0}{t} = 2{,}5\ m.s^{-2}$.

2. La distance parcourue est alors $d = \vartheta_0 t_0 = 617\ m$. On note qu'on pourrait obtenir le même résultat si $d = \frac{1}{2} a_0 t_0^2$.

3. La moto possède alors une vitesse $\vartheta_m = a_0 t_0 = 55\ m.s^{-1} = 198\ km.h^{-1}$.

Exercices supplémentaires :

Exercice 9 :

Deux pilotes amateurs prennent le départ d'une course automobile sur un circuit présentant une longue ligne droite au départ. Ils s'élancent de la même ligne. Le premier, A, démarre avec une accélération constante de $4\ ms^{-2}$, le deuxième, B, a une voiture légèrement plus puissante et démarre avec une accélération constante de $5\ ms^{-2}$. A a cependant plus de réflexes et démarre une seconde avant.

1. Quelle durée faudra-t-il à B pour rattraper A ?

2. Quelle distance auront-ils parcourue quand B doublera A ?

3. Quelles seront les vitesses à cet instant-là ?

4. Représenter $x(t)$ et $\vartheta(t)$ ainsi que la trajectoire de phase de A et B, en précisant laposition de l'événement « B dépasse A » sur ces représentations de mouvements.

Exercice 10 :

Un satellite géostationnaire est en mouvement circulaire uniforme autour de la terre. Il ressent une accélération $= g_0 \left(\frac{R}{r}\right)^2$, où $R = 6400\ km$ est le rayon de la terre, $g_0 = 9{,}8\ ms^{-2}$ et r le rayon de l'orbite. La période de révolution du satellite est égale à la période de rotation de la terre sur elle-même.

1. Calculer la période T de rotation de la terre en seconds, puis la vitesse angulaire **Ω**.

2. Déterminer l'altitude de l'orbite géostationnaire.

Exercice 11 :

Deux modèles réduits de voitures radiocommandées ont des performances différentes : le premier a une accélération de $4{,}0\ ms^{-1}$, le second de $5{,}0\ ms^{-1}$. Cependant, l'utilisateur de la première voiture a plus de réflexes que celui de la seconde, ce qui lui permet de la faire démarrer $1{,}0\ s$ avant le second.

1. Déterminer le temps nécessaire au véhicule à plus grande accélération pour rattraper l'autre.

2. Les deux modèles réduits participent à des courses de $100\ m$ et de $200\ m$. Est-il possible que le perdant de $100\ m$ prenne sa revanche au $200\ m$?

3. Calculer pour les deux courses la vitesse finale de chacun des véhicules.

Dr. Souheyr Meziane
Ecole Supérieure en Sciences Appliquées -ESSAT- Tlemcen
Unité de Recherche des Matériaux et des Energies Renouvelables -URMER- Université de Tlemcen
Laboratoire d'Etude et Prédiction des Matériaux -LEPM-

Chapitre 2 : Principe de la dynamique newtonienne

Synthèse

Savoirs :

- Définition d'une force,
- Principe des actions réciproques,
- Principe de l'inertie,
- Définition d'un référentiel galiléen,
- Définition d'une quantité de mouvement,
- Principe fondamental de la dynamique,
- Expression des forces usuelles,
- Définition d'un portrait de phase,

Savoir-faire :

- Définir un système mécanique et un référentiel d'étude,
- Etablir un schéma clair du problème à résoudre,
- Etablir un bilan des forces qui s'exercent sur un système,
- Choisir un système de coordonnées et une base de projection adaptés au problème,
- Projeter des équations vectorielles,
- Reconnaître une équation différentielle,
- Etablir et intégrer l'équation différentielle du mouvement dans le cas du mouvement dans un champ de pesanteur terrestre en négligeant les frottements, puis en tenant compte des frottements,
- Analyser les résultats d'intégration numérique présentés sous la forme de courbes,
- Etablir et linéariser l'équation différentielle du pendule simple,
- Déterminer l'intégrale première de l'équation différentielle précédente pour établir son portrait de phase,
- Lire et exploiter un portrait de phase.

Mots clés :

- Masse,
- Force,
- Quantité de mouvement,
- Equation du mouvement,
- Conditions initiales,
- Equation différentielle,
- Portrait de phase,
- Chute libre,
- Pendule simple.

Rappels de cours :

Chapitre II. Principes de la dynamique newtonienne

- Issac Newton a énoncé **trois principes** importants qui permettent d'expliquer l'origine des mouvements des objets qui nous entourent.
- Le premier permet de définir les référentiels galiléens dans lesquels le **principe d'inertie** est vérifié. Le deuxième est le **principe fondamental de la dynamique** qui montre que la somme vectorielle des forces appliquées à un point est égale au produit de la masse ponctuelle par son accélération. Le troisième montre la **notion d'action et de réaction**. De nouvelles notions ont été introduites, notamment la notion de force à l'origine du mouvement des objets.
- Une autre approche de l'origine du mouvement est possible avec des lois de conservation d'énergie. Certaines forces sont dites conservatives, c'est-à-dire que leur travail ne dépend pas du chemin parcouru : ce travail étant égale à la variation d'énergies cinétique $E_c = \frac{1}{2} m\vartheta^2$ (théorème de l'énergie cinétique) peut, dans ce cas, aussi s'écrire sous forme d'une différence d'énergie potentielle (E_p). Pour des forces conservatives, on constate alors que l'énergie mécanique $(E_m = E_c + E_p)$ se conserve lors du mouvement. Pour les forces non conservatives (frottement par exemple), leur travail est égal à la différence d'énergie mécanique.

- **Quantité de mouvement ou impulsion**

La quantité de mouvement par rapport à un référentiel $\mathcal{R}$ d'un point matériel M, de masse m, est :

$$\vec{p}(M_{/\mathcal{R}}) = m\vec{\vartheta}(M_{/\mathcal{R}}).$$

- **Lois de Newton**

Les trois lois de Newton sont les lois fondamentales de la mécanique du point matériel.

Première loi : Principe d'inertie

Il existe une classe de référentiels galiléen par rapport auxquels un point matériel **isolé** est en mouvement rectiligne uniforme.

Dr. Souheyr Meziane
Ecole Supérieure en Sciences Appliquées -ESSAT- Tlemcen
Unité de Recherche des Matériaux et des Energies Renouvelables -URMER- Université de Tlemcen
Laboratoire d'Etude et Prédiction des Matériaux -LEPM-

Deuxième loi : Relation fondamentale de la dynamique

Dans un référentiel galiléen, la somme vectorielle des forces appliquées à un point M de masse m et son accélération sont liées par :

$$F_{\mathfrak{E},M} = \frac{d\vec{p}(M)}{dt} = m\vec{a}(M)$$

- **Troisième loi : Principe des actions réciproques**

Les forces d'interaction exercées par deux points matériels M_1 et M_2 l'un sur l'autre sont opposées et colinéaires à l'axe (M_1M_2).

- **Evolution d'un système mécanique**

Les systèmes mécaniques ont une évolution unique pour des conditions initiales données.

Pour un système autonome (ou libre), deux trajectoires de phase ne peuvent se couper.

Conseils et pièges à éviter

Il faut toujours bien étudier les forces qui s'exercent sur un système, ici un point matériel.

Dr. Souheyr Meziane
Ecole Supérieure en Sciences Appliquées -ESSAT- Tlemcen
Unité de Recherche des Matériaux et des Energies Renouvelables -URMER- Université de Tlemcen
Laboratoire d'Etude et Prédiction des Matériaux -LEPM-

Série de TD 3

Exercice 1 :

Un skieur de masse $m = 80\ kg$ est tiré à vitesse constante le long d'une pente inclinée d'un angle $\alpha = 30^{\circ}$ par rapport à l'horizontale. La perche, assimilable à un câble, fait un angle $\beta = 45°$ avec la pente. Le skieur est en translation. Au niveau des skis, il exerce une force de frottement $f = 50\ N$.

Donnée $g = 10\ ms^{-2}$.

1. Faire le bilan des forces extérieures appliquées à l'ensemble (skieur + skis).

2. Appliquer le principe de l'inertie en faisant une projection selon les axes : Ox parallèle à la pente montante et Oy perpendiculaire à la pente.

3. Déterminer l'expression littérale et la valeur numérique de :

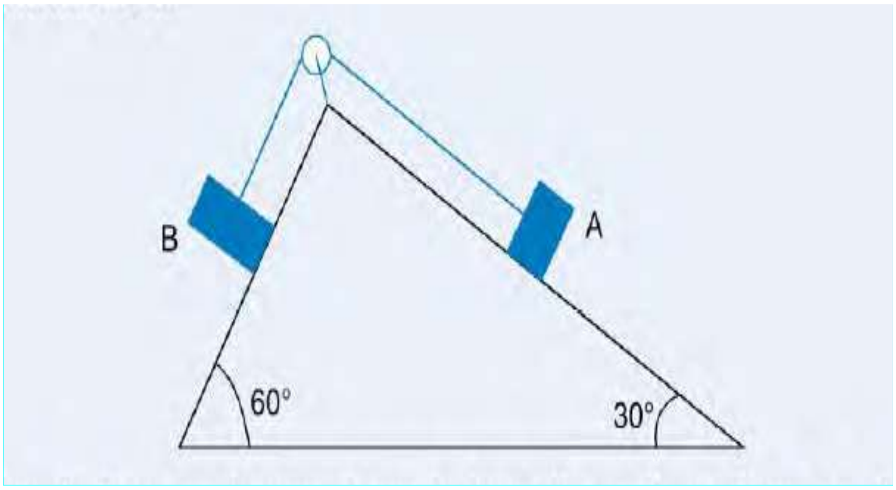
a. La tension T exercée par la perche ;
b. La composante normale N de la réaction du sol sur les skis.

Exercice 2 :

Deux solides A et B de même masse $M = 5\ kg$ peuvent glisser sans frottement sur deux plans inclinés de 30° et de 60° par rapport à l'horizontale, respectivement. Chacun d'eux est fixé à l'une des extrémités d'un fil inextensible passant par une poulie de masse négligeable.

1. Calculer l'accélération de chaque solide.

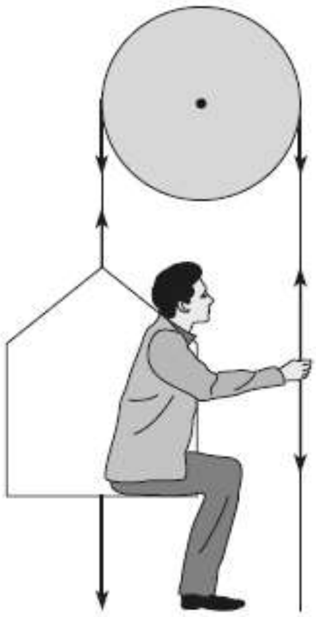
2. Calculer la tension du fil.



Dr. Souheyr Meziane
Ecole Supérieure en Sciences Appliquées -ESSAT- Tlemcen
Unité de Recherche des Matériaux et des Energies Renouvelables -URMER- Université de Tlemcen
Laboratoire d'Etude et Prédiction des Matériaux -LEPM-

Exercice 3 :

Un peintre en bâtiment (de masse $M = 90\ kg$) est assis sur une chaise le long du mur qu'il doit peindre. Sa chaise est suspendue à une corde reliée à une poulie parfaite. Pour grimper, le peintre tire sur l'autre extrémité de la corde avec une force de $680\ N$. La masse de la chaise est $m = 15\ g$.



1. Déterminer l'accélération du peintre et de la chaise. Commenter son signe.

2. Quelle force le peintre exerce-t-il sur la chaise ?

3. Quelle quantité de peinture peut-il hisser avec lui ?

Exercice 4 :

D'une plate-forme située à la hauteur $h = 30\ m$, on lance un projectile avec la vitesse $\vartheta_0 = 20\ ms^{-1}$, le vecteur initial $\overrightarrow{\vartheta_0}$ faisant un angle $\alpha = 60°$ avec l'horizontal. Le projectile tombe au sol. On néglige la résistance de l'air et on prend $\|\vec{g}\|$, l'accélération de la pesanteur, égale à $10\ ms^{-2}$.

1. Déterminer la distance d horizontale entre le point de lancement et le point d'impact sur le sol horizontal.

2. Déterminer le temps que dure le mouvement de chute.

3. Déterminer la vitesse du projectile lorsqu'il touche le sol.

4. Déterminer l'équation de la trajectoire du projectile.

Dr. Souheyr Meziane
Ecole Supérieure en Sciences Appliquées -ESSAT- Tlemcen
Unité de Recherche des Matériaux et des Energies Renouvelables -URMER- Université de Tlemcen
Laboratoire d'Etude et Prédiction des Matériaux -LEPM-

Exercice 5 :

On observe la chute dans l'air, d'une gouttelette sphérique de glycérine (assimilée à un point matériel A), de masse m et de rayon r. La force frottement visqueux qui s'exerce sur la gouttelette A est donnée par la loi de Stokes :

$$\vec{F} = -6\pi \,.\, \mu.\ r.\vec{V}$$

μ est le coefficient de viscosité de l'air, avec $\mu = 1{,}80.\,10^{-5}$ S.I.

1. A l'aide du principe fondamental de la dynamique, calculer la vitesse $V(t)$ de A (condition à l'origine : $V = 0\; ms^{-1}$ à $t = 0\; s$).

2. Montrer que $V(t)$ tend vers une valeur limite V_0 dont on donnera l'expression en fonction de m, r, μ et $\|\vec{g}\| = g$.

Exercice 6 :

Une particule M de masse m, pouvant se déplacer suivant un axe Ox (pour des valeurs de x positives) est soumise à une force conservative dérivant d'une énergie potentielle définie par :

$$E_p(x) = \frac{A\,.\,a\,.\,(x-a)^2}{x^3}$$ A et a sont des constantes positives.

1. Donner les tableaux de variation de $E_p(x)$. Quelles sont les positions d'équilibre stables et instables ?

2. Identifier les régions du semi-axe défini par $x > 0$ où la force est attractive (vers l'origine) et celles où la force est répulsive.

3. On considère le cas où l'énergie de la particule M est $E = \frac{A}{9}$ et se trouve, à un certain instant, à la position $x = 1{,}5\,.\,a$. Quelle énergie fait-il apporter à la particule pour la libérer ? Quelle est alors la vitesse de la particule à l'infini ?

Exercice 7 :

Un chariot de manège, glissant sans frottement sur des rails, arrive sur une boucle verticale circulaire de rayon R. De quelle hauteur doit-il être lâché, sans vitesse initiale, pour pouvoir faire le tour de la boucle ?

1. Envisager le cas où le chariot ne peut pas se décrocher des rails.

2. Envisager le cas où le chariot n'est pas retenu.

Dr. Souheyr Meziane
Ecole Supérieure en Sciences Appliquées -ESSAT- Tlemcen
Unité de Recherche des Matériaux et des Energies Renouvelables -URMER- Université de Tlemcen
Laboratoire d'Etude et Prédiction des Matériaux -LEPM-

Exercice supplémentaire :

Exercice 8 :

1. Trouver la valeur minimale de la vitesse d'un objet de masse m, nécessaire pour quitter la surface de la Terre sans y retourner (appelée vitesse de libération) ?

Données : $M_T = 6\,.\,10^{24}\ kg$ *(masse de la Terre) ;* $R_T = 6400\ km$ *(rayon de la Terre) ;* $G = 6{,}67\,.\,10^{-11}\ m^3 s^{-2} kg^{-1}$ *(constante de gravitation).*

2. Quelle serait cette vitesse de libération sur la Lune ?

Données : $M_T \approx 81\ M_L$ $(M_L = masse\ de\ la\ Lune)$; $R_T \approx 3{,}7\,.\,R_L$ $(R_L = rayon\ de\ laLune)$.

3. Quelle vitesse doit-on communiquer à la fusée de masse m pour qu'elle parvienne sur la Lune ? On ne tient pas compte de la rotation relative des deux astres.

Données : $d_{TL} = 60\,.\,R_T$ $(d_{TL} = distance\ Terre - Lune)$.

Solutions des exercices de la série de TD 3

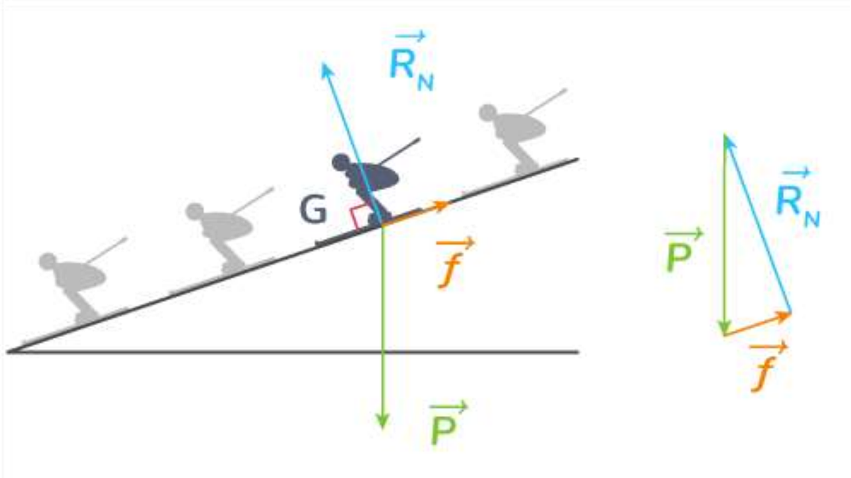
Solution de l'exercice 1 **:**

1. **1.** Le poids $\vec{P} = m\vec{g}$, l'action du sol sur les skis $\vec{R} = \vec{N} + \vec{f}$, la tension du câble parallèle à la direction du câble.
2. **2.** Le skieur est en mouvement rectiligne uniforme par rapport à un référentiel terrestre, considéré comme galiléen. La somme des forces extérieures appliquées est donc nulle : $\vec{P} + \vec{T} + \vec{R} = \vec{0}$.

Projetons cette relation dans le repère $(O,\ \vec{\imath}, \vec{\jmath})$:

- Sur $(O,\ \vec{\imath})$, on a : $-mgsin(\alpha) + Tcos(\beta) - f = 0$ (1)
- Sur $(O,\ \vec{\jmath})$, on a : $-mgcos(\alpha) + Tsin(\beta) + N = 0$ (2)

Dr. Souheyr Meziane
Ecole Supérieure en Sciences Appliquées -ESSAT- Tlemcen
Unité de Recherche des Matériaux et des Energies Renouvelables -URMER- Université de Tlemcen
Laboratoire d'Etude et Prédiction des Matériaux -LEPM-



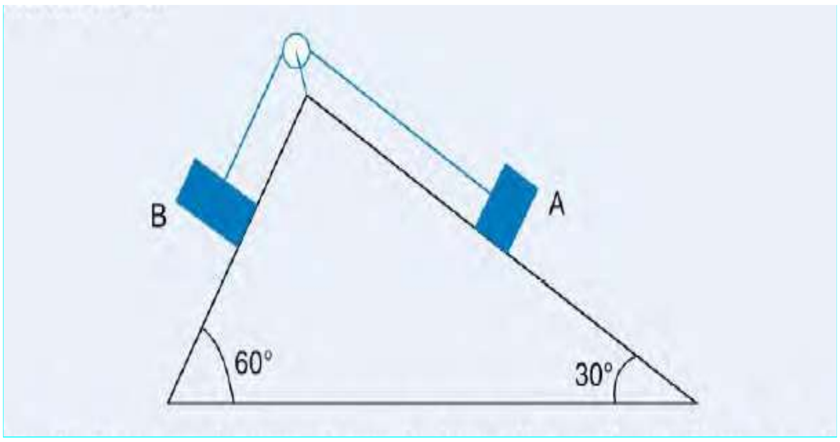
3. **a.** La relation (1) donne : $T = \frac{f+mgsin(\alpha)}{\cos(\beta)}$, d'où $T = 636\ N$.
   b. La relation (2) donne : $N = mgcos(\alpha) - Tsin(\beta)$, d'où $N = 243\ N$.

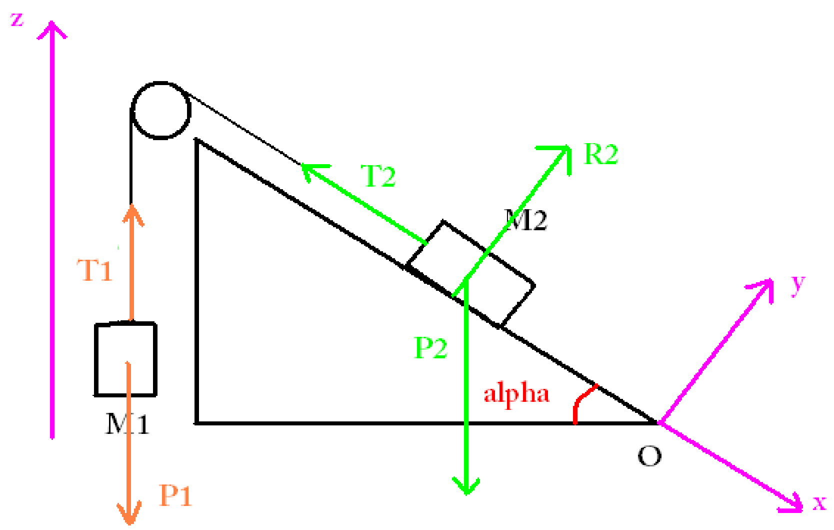
Solution de l'exercice 2 :

Le fil est inextensible, donc les deux solides A et B ont la même accélération : $a = a'$.

1. Considérons le solide A auquel on applique le principe fondamental de la dynamique :

$\vec{P} + \vec{N} + \vec{T} = M\vec{a}$. En projetant sur le plan incliné de 30°, on obtient alors : $T = Ma + Mgsin(30)$.





Considérons le solide B auquel on applique le principe fondamental de la dynamique : $\vec{P}' + \vec{N}' + \vec{N}' = M\vec{a}'$. En projetant sur le plan incliné de 60°, on obtient alors : $T' = M' \sin(60) - Ma'$.

Comme $T = T'$, car la poulie a une masse négligeable, et comme $a = a'$, il vient donc :$a = \frac{g(\sin(60)-\sin(30))}{2}$, ce qui donne avec les valeurs, $a = 1{,}8\ m\,.s^{-2}$.

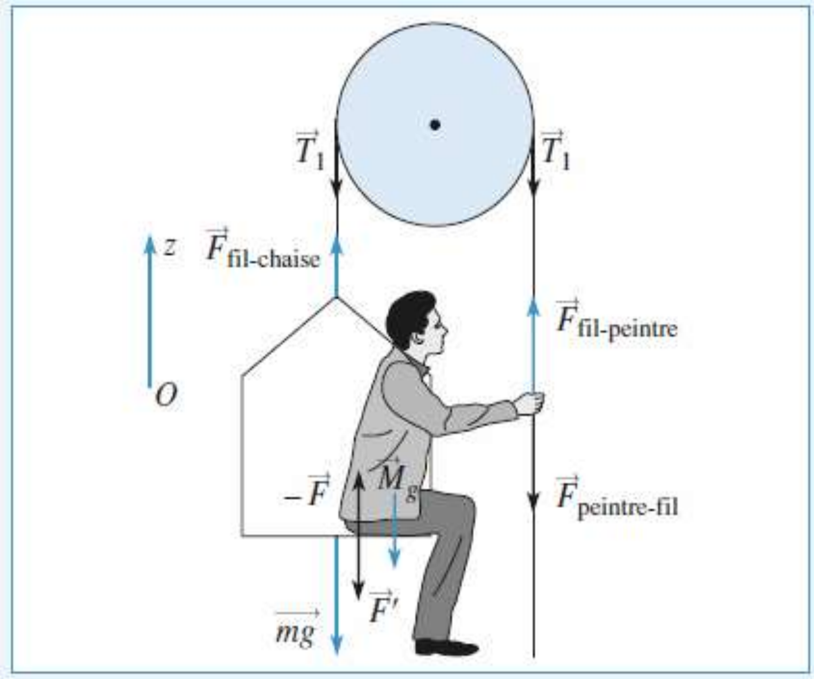
2. On obtient l'expression de T : $T = M(a + gsin(30))$, soit $T = 33{,}5\ N$.

Solution de l'exercice 3 :

1. Les forces appliquées au système $\{chaise + peinture\}$ sont le poids de l'ensemble, l'action du fil sur la chaise et l'action du fil sur la peinture ; ces forces sont indiquées en bleu sur *le schéma ci-dessous*.

Le fil étant inextensible et la poulie sans masse, les deux forces $\vec{T}_1$ sont égales et sont, en norme, égales à la force que le peintre exerce sur la corde (on notera T leur norme).

De même, $T = F_{fil-chaise}$.



La relation fondamentale de la dynamique appliquée à ce système s'écrit, en projection sur la verticale ascendante (Oz) :

$$(m+M)a = -(m+M)g + 2T$$

$$\Leftrightarrow a = -g + \frac{2T}{m+M} = 3{,}15\, m.s^{-2}.$$

Cette accélération est positive : partant du niveau du sol, le peintre s'élève.

2. Les forces appliquées à la chaise seule sont son poids, l'action du fil et l'action du penture $\left(\vec{F} = F\vec{e}_z\right)$. La relation fondamentale de la dynamique appliquée à la chaise seule, projetée sur (Oz), donne :

$$ma = -mg + F + T \Leftrightarrow F = m(a+g) - T = \frac{m-M}{m+M}T = -486\, N.$$

$F < 0$: cette force est bien dirigée vers le bas, le peinture « appuie » sur la chaise (il exerce une force équivalente au poids d'une masse de 49,6 kg environ).

3. Le peintre et la chaise de masse m' (peintures comprises) montent si $a > 0$, soit $m' < \frac{2T}{g} - M = 49\, kg$, donc la peinture n'excède pas 34 kg, ce qui est raisonnable.
4. (D'autre part, il faut aussi obtenir $F < 0$, sinon le peintre risque de monter sans la chaise et la peinture, soit $m' < M$, ce qui est une condition moins contraignante que la précédente).

Dr. Souheyr Meziane
Ecole Supérieure en Sciences Appliquées -ESSAT- Tlemcen
Unité de Recherche des Matériaux et des Energies Renouvelables -URMER- Université de Tlemcen
Laboratoire d'Etude et Prédiction des Matériaux -LEPM-

<u>Solution de l'exercice 4</u> :

a), **b)**, **c)** Poids appliqué au projectile + PFD : $\vec{P} = m\,.\,\vec{g} = m\,.\,\vec{a}$, donc $\vec{a} = \vec{g}$. Par intégrations successives + conditions aux limites, on trouve :

$$\vec{\vartheta} = (\vartheta_0 \cos\alpha)\,.\,\vec{\imath} + (-gt + \vartheta_0 sin\,\alpha)\,.\,\vec{\jmath}$$

$$\vec{r} = (\vartheta_0 t\cos\alpha)\,.\,\vec{\imath} + \left(-\frac{1}{2}gt^2 + \vartheta_0 t\sin\alpha + h\right)\,.\,\vec{\jmath}$$

Quand le projectile touche le sol, on a $y = 0$, soit : $\left(-\frac{1}{2}gt^2 + \vartheta_0 t\sin\alpha + h\right) = 0$.

La résolution de cette équation du second degré donne :

$$t_1 = \frac{\vartheta_0 sin\,\alpha - \sqrt{\vartheta_0^2(sin\,\alpha)^2 + 2gh}}{g}, t_1 < 0 \text{ Impossible}$$

$$t_2 = \frac{\vartheta_0 sin\,\alpha + \sqrt{\vartheta_0^2(sin\,\alpha)^2 + 2gh}}{g}, \text{ on trouve : } t_2 = 4{,}73\ s.$$

La distance d correspond au temps t_2 : donc, $d = 47{,}3\ m$.

La vitesse du projectile touchant le sol correspond au temps t_2 : $\vartheta = 31{,}6\ m\,.\,s^{-1}$.

d) On écrit : $t = \frac{x}{\vartheta_0 cos\alpha}$, et on remplace t dans l'expression de y. On obtient alors l'équation de la trajectoire :

$$y = \left(\frac{g}{2\vartheta_0^2(cos\alpha)^2}\right)x^2 + (tan\,\alpha)x + h$$

<u>Solution de l'exercice 5</u> :

1. On applique le PFD sur la gouttelette A : $\vec{P} + \vec{F} = m\,.\,\vec{a}$. On projet cette relation sur un axe OZ vertical (dirigé vers le haut) : dans ce cas, les vecteurs accélération et vitesse sont dirigés vers le bas (ses de la chute). Donc, on obtient :

$$-m\,.\frac{dV}{dt} = -mg + 6\pi\mu rV$$

Soit

$$\frac{dV}{dt} + \left(\frac{6\pi\mu r}{m}\right)V = g$$

L'équation sans second membre a pour solution :

$$V_1 = A\,.\,exp\left(\left(\left(\frac{-6\pi\mu r}{m}\right)t\right)\right)$$

Une solution particulière est : $V_2 = \frac{mg}{6\pi\mu r}$

La solution générale est donc :

$$V = V_1 + V_2 = A\,.\,exp\left(\left(\left(\frac{-6\pi\mu r}{m}\right)t\right)\right) + \frac{mg}{6\pi\mu r}$$

Avec les conditions aux limites : à $t = 0$, $V(0) = 0$, on arrive à l'expression suivante :

$$V = \frac{mg}{6\pi\mu r}\left[1 - exp\left(\left(\left(\frac{-6\pi\mu r}{m}\right)t\right)\right)\right]$$

2. Quand $t \to +\infty$, le terme exponentiel tend vers zéro, donc la vitesse tend vers une valeur limite : $V_0 = \frac{mg}{6\pi\mu r}$.

Solution de l'exercice 6 :

1. On a : $\frac{dE_p(x)}{dx} = \frac{Aax^{2(x-a)(3a-x)}}{x^6}$, donc $\frac{dE_p(x)}{dx}$ est du signe de $(x-a)(3a-x)$.

On a le tableau de variation suivant :

x	0		a		$3a$		$+\infty$
$x-a$		$-$	0	$+$		$+$	
$3a-x$		$+$		$+$	0	$-$	
$\frac{dE_p(x)}{dx}$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$E_p(x)$	$+\infty$	décroissant	0	croissant	$\frac{4A}{27}$	décroissant	0

On a équilibre stable en $x = a$ et instable en $x = 3a$.

2. La force appliquée à la particule est telle que :

$$F_x = -\frac{dE_p(x)}{dx}$$

Dr. Souheyr Meziane
Ecole Supérieure en Sciences Appliquées -ESSAT- Tlemcen
Unité de Recherche des Matériaux et des Energies Renouvelables -URMER- Université de Tlemcen
Laboratoire d'Etude et Prédiction des Matériaux -LEPM-

La force est attractive si : $F_x < 0$ soit $\frac{dE_p(x)}{dx} > 0$, soit x dans l'intervalle : $a < x < 3a$.

La force est répulsive si : $F_x > 0$ soit $\frac{dE_p(x)}{dx} < 0$, soit dans les intervalles où $x < a$ et $x > 3a$.

3. L'énergie mécanique $\frac{A}{9}$ est inférieure à $\frac{4A}{27}$, donc à la position $x = 1{,}5a$ la particule est dans le puits de potentiel (délimité par les points correspondant à $E_p(x) = \frac{A}{9}$, c'est-à-dire $E_m = E_p$ et donc $E_c = 0$soit la vitesse nulle).

Pour libérer la particule, il faut lui fournir "E_L" nécessaire pour franchir la barrière de potentiel, soit $E_L = \frac{4A}{27} - \frac{A}{9} = \frac{A}{27}$.

La conservation de l'énergie mécanique donne alors : $E_{mi} = \frac{A}{27} = E_{mf} = E_p(+\infty) + \frac{1}{2}m\vartheta^2$, avec $E_p(+\infty) = 0$, donc $\vartheta = \sqrt{\frac{8A}{27m}}$.

***<u>Solution de l'exercice 7</u>* :**

1. La conversion de l'énergie mécanique donne :

$$mgH = mgh + \frac{1}{2}m\vartheta^2$$

On obtient alors : $\vartheta^2 = 2g(H - h)$

Le PFD donne : $\vec{P} + \vec{R}_N = m\,.\,\vec{a}$; on projette cette relation suivant les axes du repère de Frenet.

NB : On définit l'angle de rotation θ du chariot lorsqu'il est sur la boucle, comme suit : l'angle θaugmente dans le sens trigonométrique et $\theta = 0$ quand le chariot est à la hauteur du centre de la boucle.

On arrive aux relations $\vec{T}$ et $\vec{N}$ suivantes, respectivement :

$$-mg\cos\theta = m\,\frac{d\vartheta}{dt} \text{ et } mg\sin\theta + R_N = m\frac{\vartheta^2}{R_c} \text{ (où } R_c = \text{rayon de courbure).}$$

En combinant les relations obtenues, on arrive à l'expression de R_N :

$$R_N = 2(H - h) - R_c\sin\theta$$

Le chariot reste accroché sur les rails si $R_N > 0$, donc $H > h + \frac{R_c}{2}\sin\theta$

Pour que le chariot fasse un tour complet, il doit atteindre le sommet de la boucle caractérisé par $\theta = \frac{\pi}{2}$ et $h = 2R_c$. Donc la condition sur H est :

$$H > \frac{5R_c}{2} = \frac{5R}{2}$$

2. Quand le chariot quitte les rails, on a $\vartheta = 0\ m/s$ et donc d'après la relation obtenue par conservation de l'énergie, on obtient : $H = h$. Quand le chariot tombe, $R_N = 0\ N$, donc $H = h\frac{R_c}{2} + \sin\theta$; donc le chariot tombe pour $\theta = 0$ (quand le chariot est à la hauteur du centre de la boucle).

Dr. Souheyr Meziane
Ecole Supérieure en Sciences Appliquées -ESSAT- Tlemcen
Unité de Recherche des Matériaux et des Energies Renouvelables -URMER- Université de Tlemcen
Laboratoire d'Etude et Prédiction des Matériaux -LEPM-

Chapitre 3 : Travail et énergie

Aspect énergétique de la dynamique du point

Synthèse :

Savoirs :

- Puissance et travail d'une force,
- Savoir que la puissance dépend du référentiel,
- Energie cinétique d'un système,
- Savoir qu'elle dépend du référentiel,
- Loi de l'énergie cinétique et de la puissance cinétique dans un référentiel galiléen,
- Définition d'une force conservatrice,
- Expressions des énergies potentielles de pesanteur (champ uniforme), gravitationnelle (champ créé par une charge ponctuelle), élastique, électrique (champ uniforme et champ créé par une charge ponctuelle),
- Définition d'une position d'équilibre,
- Savoir que les positions d'équilibre qui sont stables correspondent à des minimaux d'énergie potentielle et que les positions d'équilibre qui sont instables correspondent à des maximaux,
- Définition d'un état lié et d'un état de diffusion.

Savoir-faire :

- Reconnaître le caractère moteur ou résistant d'une force,
- Utiliser la loi de l'énergie cinétique ou la loi de la puissance cinétique à bon escient,
- Etablir les expressions des énergies potentielles dont on a besoin,
- Reconnaître les cas de conservation de l'énergie mécanique,
- Déterminer l'énergie mécanique initiale en exploitant les conditions initiales,
- Tracer un graphe d'énergie potentielle,
- Repérer les positions d'équilibre et déduire leur stabilité à partir d'un graphe d'énergie potentielle,
- Déduire le comportement qualitatif d'une entité mobile à partir d'un graphe d'énergie potentielle : trajectoire bornée ou ouverte, mouvement périodiques, position de vitesse nulle,
- Expliquer le lien entre le profil d'énergie potentielle et le portrait de phase qualitativement.

Mots clés :

- Puissance,
- Travail,
- Energie cinétique,
- Force conservatrice,
- Energie potentielle,
- Energie mécanique,
- Mouvement conservatif,
- Equilibre et stabilité,
- Etat lié,
- Etat de diffusion.

Rappels de cours :

Chapitre III : Travail et énergie

Aspect énergétique de la dynamique du point

- **Puissance et travail d'une force dans un référentiel**

La puissance P d'une force $\vec{F}$ est égale au produit scalaire de cette force par la vitesse de déplacement de ce point d'application :

$$P = \vec{F}.\vec{\vartheta}.$$

Le travail T d'une force entre les instants t_1 et t_2 est égal à $\int_{T_1}^{T_2} Pdt$. Pour un point matériel, ce travail T est égal à la circulation de $\vec{F}$:

$$T = \int_{\vec{r}_1}^{r_2} \vec{F}.d\vec{r}$$

- **Théorème de la puissance et de l'énergie cinétique**

La puissance cinétique $\frac{dE_K}{dt}$ (dérivée de l'énergie cinétique par rapport au temps) est égale à la puissance de toutes les forces s'exerçant sur le point matériel.

La variation de l'énergie cinétique $\Delta E_K = E_K(t_2) - E_K(t_1)$ est égale au travail T de toutes les forces pendant l'intervalle de temps $[t_1, t_2]$.

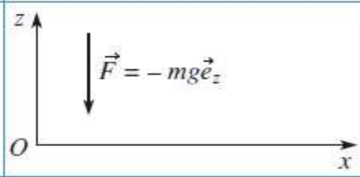
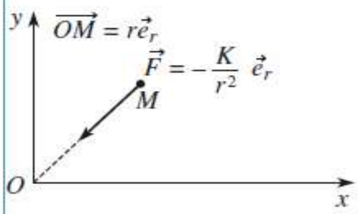
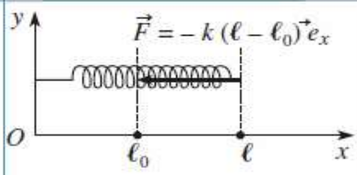
- **Champ de forces conservatif**

Un champ de forces est conservatif s'il dérive d'une force potentielle $E_P(\vec{r})$, telle que le travail élémentaire de la force vérifie :

Dr. Souheyr Meziane
Ecole Supérieure en Sciences Appliquées -ESSAT- Tlemcen
Unité de Recherche des Matériaux et des Energies Renouvelables -URMER- Université de Tlemcen
Laboratoire d'Etude et Prédiction des Matériaux -LEPM-

$$\delta T = \vec{F}.d\vec{r} = -dE_P$$

Quelques exemples d'énergies potentielles :

interaction	force	schéma	énergie potentielle
pesanteur	$\vec{F} = m\vec{g} = -mg\vec{e}_z$		$\mathscr{E}_P = mgz + \text{cte}$
interaction newtonienne	$\vec{F} = -\frac{K}{r^2}\vec{e}_r$		$\mathscr{E}_P = -\frac{K}{r} + \text{cte}$
ressort linéaire	$\vec{F} = -k(\ell - \ell_0)\vec{e}_x$		$\mathscr{E}_P = \frac{1}{2}k(\ell - \ell_0)^2 + \text{cte}$

- **Energie mécanique**

L'énergie mécanique d'un point matériel est : $E_M = E_P + E_K$.

La variation de E_M est égale au travail des forces qui ne dérivent pas de l'énergie potentielle, donc au travail des forces ne conservatives.

- **Mouvement conservatif à un degré de liberté**

L'équation de mouvement peut se déduire de $E_M = constante$:

L'évolution du point matériel est limitée aux zones où l'énergie potentielle reste inférieure à l'énergie mécanique : $E_P(x) \leq E_M$;

Dr. Souheyr Meziane
Ecole Supérieure en Sciences Appliquées -ESSAT- Tlemcen
Unité de Recherche des Matériaux et des Energies Renouvelables -URMER- Université de Tlemcen
Laboratoire d'Etude et Prédiction des Matériaux -LEPM-

Les trajectoires de phase d'un système conservatif sont des courbes à énergie mécanique constante ;

Les minimaux de E_P correspondent aux positions d'équilibre stables et les maximaux de E_P correspondent aux positions d'équilibre instables. La technique de linéarisation, lorsqu'elle est justifiée, permet de préciser la nature du mouvement au voisinage de l'équilibre.

Conseils et pièges à éviter

- Le travail d'une force $\vec{F}$ s'obtient ainsi :

$$\mathcal{T} = \int_{\vec{r}_1}^{r_2} \vec{F} \,.\, d\vec{r}$$

qui pour un point matériel se déduit de la formule générale toujours utilisable :

$$\mathcal{T} = \int_{\vec{t}_1}^{r_{t2}} \mathcal{P}(t) \,.\, dt$$

avec $\mathcal{P}(t) = \vec{F} \,.\vec{\vartheta}(t)$

et $\vec{\vartheta}(t)$ est le point d'application de la force, ici le point matériel.

- Pour un système conservatif, pensez dès que possible à l'invariance de l'énergie mécanique pour obtenir l'équation d'évolution du point matériel.

Dr. Souheyr Meziane
Ecole Supérieure en Sciences Appliquées -ESSAT- Tlemcen
Unité de Recherche des Matériaux et des Energies Renouvelables -URMER- Université de Tlemcen
Laboratoire d'Etude et Prédiction des Matériaux -LEPM-

Série de TD 4

Exercice 1 :

1. Rappeler la définition de la fonction énergie potentielle dérivant d'une force conservative.

2. En prenant l'exemple du poids d'un corps, exprimer l'énergie potentielle de pesanteur en considérant en vertical ascendant z.

3. Un projectile de masse $m = 10kg$ est lancé du sol sous une incidence de $45°$ à une vitesse initiale $\vartheta = 10ms^{-1}$. On suppose qu'il n'y a pas de frottement.

- **a.** Déterminer son énergie mécanique.
- **b.** Représenter l'évolution de son énergie potentielle en fonction de la variable z représentant l'altitude du projectile.
- **c.** En déduire l'évolution de l'énergie cinétique du projectile et l'altitude maximale atteinte par le projectile.
- **d.** Déterminer l'équation de la trajectoire du projectile et trouver le point d'impact sur le sol.

Exercice 2 :

Un bateau de masse m ayant atteint sa vitesse de croisière ϑ_0, coupe ses moteurs à l'instant

$t = 0$. L'eau exerce une force de frottement proportionnelle à la vitesse ϑ du bateau.

1. A l'aide de la relation fondamentale de la dynamique, donner l'expression de la vitesse en fonction du temps. Où le bateau s'arrêtera-t-il ?

2. Quel est le travail effectué par la force de frottement entre l'instant où le bateau coupe ses moteurs et celui où il s'arrête ? Le comparer à l'énergie cinétique du bateau à l'instant $t = 0s$.

Exercice 3 :

On considère un solide de masse $m = 2kg$ pouvant glisser sur un sol lisse dont le profil est donné par $z(x) = ax^2 + bx^3 + cx^4$, avec $a = 0{,}4$, $b = -0{,}1$ et $c = 2{,}2.10^{-4}$. On ne considère que l'intervalle de valeurs de x compris entre -3 et 3.

1. Représenter de la fonction énergie potentielle de pesanteur de ce solide.

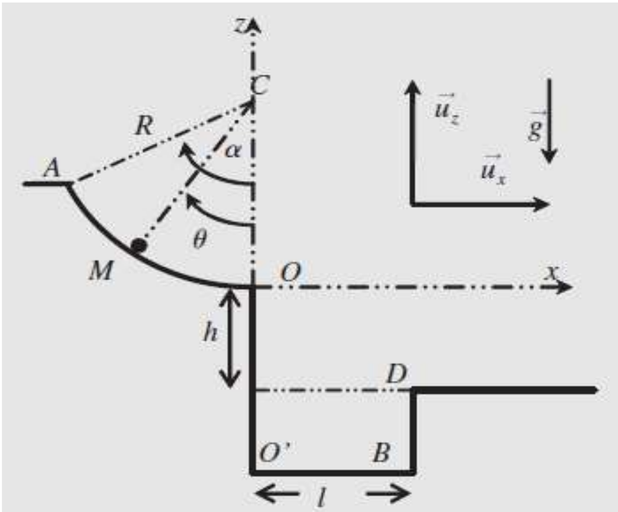
2. Montrer si au long de ce trajet le solide peut occuper des positions d'équilibre stable et instable. On exprimera les conditions de stabilité de façon quantitative.

Exercice 4 :

Un skieur décide de faire du hors-piste (*voir figure*). Il se retrouve sur un passage en forme d'arc de cercle AO de rayon $CA = CO = R$ et aboutissant sur un fossé de longueur l. Lae point O se trouve à une hauteur h par rapport à l'autre bord D du fossé. Le skieur estimant qu'il aura assez d'élan en O pour passer le fossé, part du point A sans vitesse initiale ($\vartheta_A = 0$).

Le référentiel d'étude est le référentiel terrestre considéré galiléen et le skieur est assimilé à un point matériel M de masse m. L'origine du point choisi est en O (voir la figure).

Données : $m = 60kg$; $g = 10m.s^{-2}$; $R = 40m$; $h = 3{,}2m$; $l = 7m$, $\alpha = 60° = \frac{\pi}{3}$.



I. Descente sur l'arc AO

1. On suppose que les frottements sont négligeables. Faire un bilan des forces appliquées à M (faire un schéma). Le système est-il conservatif ? Que peut-on dire alors de l'énergie mécaniques ?

2. Exprimer l'altitude z du point M en fonction de R et de l'angle $OCM = \theta$ (voir la figure).

On choisit le point O comme origine des énergies potentielles de pesanteur $E_P(O) = 0$.

Exprimer l'énergie potentielle de pesanteur $E_P(A)$ au point A (en A, $\theta(A) = \alpha$).

3. Exprimer l'énergie mécanique $E_m(A)$ en A et $E_m(O) = O$. En déduire l'expression de la vitesse $V(O) = V_0$ et faire l'application numérique.

4. Au fait, il existe des frottements solides et la vitesse V_0 en O est plus faible que prévue.

On appelle f la valeur de la force de frottement constante sur AO qui s'oppose au mouvement.

a. Exprimer le travail W_{OA} de cette force f entre A et O.

b. Que peut-on dire de la variation de l'énergie mécanique $\Delta E_m = E_m(O) - E_m(A)$?
c. En déduire une expression de f en fonction de m, g, R, V_0 et α.
d. *Application numérique* : On trouve $V_0 = 10m.s^{-1}$, calculer f.

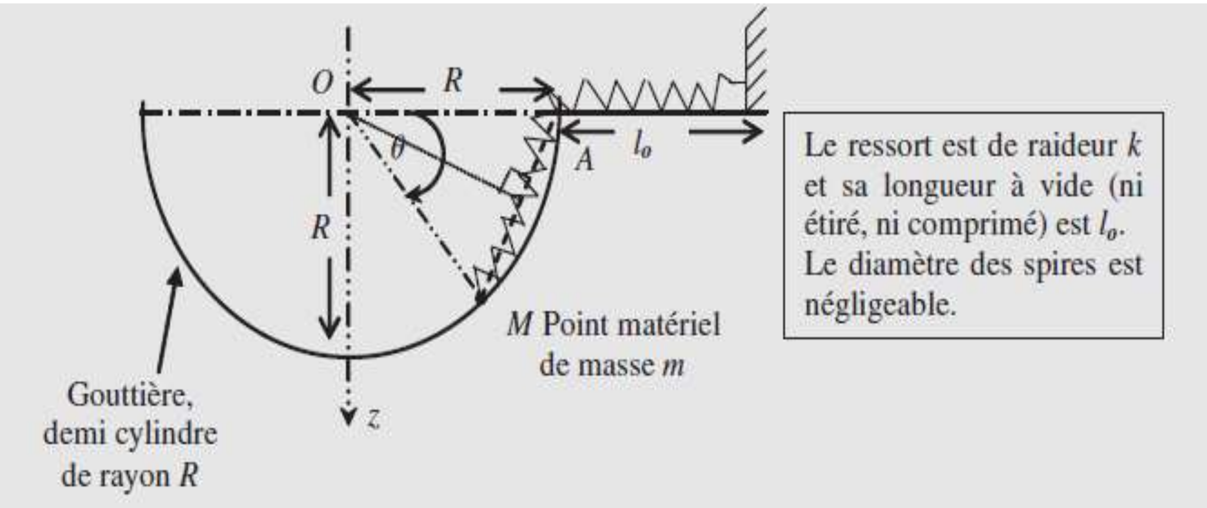
II. Chute libre

1. Donner l'expression du vecteur vitesse $\vec{V}_0$ au point O dans la base $(\vec{U}_x, \vec{U}_z)$.
2. Faire l'étude dans le repère (O, x, y, z), de la masse m en chute libre (on néglige tout frottement). En déduire l'équation de la trajectoire $z = f(x)$ et faire l'application numérique avec $V_0 = 10m.s^{-1}$.
3. En déduire si le skieur tombe de l'autre côté du fossé ou pas ?

Exercices supplémentaires

Exercice 5

Une bille assimilée à un point matériel M de masse m peut glisser *sans frottement* sur le fond d'une gouttière demi cylindrique de rayon R. Elle est reliée à une extrémité d'un ressort de raideur k et de longueur à vide l_0, l'autre extrémité étant fixé sur un support situé à la distance l_0 du rebord (voir schéma). La bille reste toujours en contact avec la gouttière.



Le point M est repéré par l'angle θ que fait OM avec l'horizontale OA.

Rappel de quelques formules trigonométriques :

$$\begin{cases} cos(a+b) = cosacosb - sinasinb \\ sin(a+b) = sinacosb + sinbcosa \\ cos2a = cos^2a - sin^2a = 2cos^2a - 1 = 1 - 2sin^2a \\ sin2a = 2sinacosa \end{cases}$$

On rappelle que la somme des trois angles d'un triangle est égale à π

Les parties I. et II. sont indépendantes

I. Equilibre de la bille (étude des forces)

1. Ecrire un bilan des forces agissant sur la masse et les représenter sur un schéma.

2. Ecrire la condition d'équilibre.

3. En projetant convenablement cette condition,

a. Déduire une relation entre la tension T du ressort, le poids P de la masse et l'angle $\theta = \theta_l$ (position à l'équilibre).

b. Déduire une relation entre la réaction R_N de la gouttière, la tension T du ressort, le poids P de la masse et l'angle θ_l.

4. Calculer l'allongement du ressort et montrer que la tension T du ressort s'écrit :

$$T = 2kRsin\frac{\theta_l}{2}$$

5. A partir des réponses 3.a. et 4., exprimer « $tan\theta_l$ » en fonction de m, g, k et R.

6. $A.N$: Calculer θ_l si $m = 0,1kg$, $g = 10m.s^{-2}$, $k = 10N.m^{-1}$ et $R = 10cm$.

II. Equilibre de la bille (étude de l'énergie potentielle)

La masse m se trouve dans une position quelconque définie par l'angle θ.

Exercice 6 :

On considère une masse m accrochée à l'une des extrémités M d'un fil de longueur l et de masse négligeable. L'autre extrémité O du fil est fixe dans le référentiel R terrestre considéré galiléen.

L'objectif de l'exercice est de calculer la valeur minimale de la vitesse V_A de la masse m au point A pour que celle-ci effectue un tour complet au tour du point O, le fil restant constamment tendu.

On repère la masse M sur la boucle par l'angle θ que fait OM avec la verticale OA. On notera V_A et V_M la vitesse de M respectivement en A et en M.

I. Etude énergétique :

1. En prenant l'origine de l'énergie potentielle de pesanteur au niveau du point A ($E_{PP}(A) = 0$, donner l'expression de l'énergie potentielle de pesanteur $E_{PP}(M)$ en M.

2. En déduire l'expression de l'énergie mécanique totale $E_m(A)$ en A et $E_m(M)$ en M.

3. Le système est-il conservatif ? En déduire une relation entre $E_m(A)$ et $E_m(M)$.

4. En déduire l'expression de V_M^2 en fonction de g, l, V_A et θ (relation n° 1).

II. Cinématique :

L'étude du mouvement de M sur le cercle $(ABCD)$ se fait naturellement en coordonnées polaires ($r = l, \theta$) et la base associée ($\vec{U}_r, \vec{U}_\theta$.

1. Exprimer le vecteur $\vec{V}_M$ en coordonnées polaires et en déduire la relation entre V_M, l et $\acute{\theta}$. Exprimer V_M^2 en fonction de l et $\acute{\theta}$ (relation n° 2).

2. Exprimer le vecteur accélération $\vec{a}_M$ en coordonnées polaires. En déduire, en utilisant la relation n°2 précédente, l'expression de la composante radiale a_r (suivant $\vec{U}_r$) de l'accélération en fonction de V_M et l.

III. Dynamique :

1. Faire l'étude dynamique de M sur la partie circulaire $(ABCD)$. On appellera $\vec{T}$ la tension du fil exercée sur la masse M.

2. En projetant le principe fondamental de la dynamique sur ($\vec{U}_r, \vec{U}_\theta$, exprimer le rapport T/m de la réaction T sur la masse m (relation n° 3).

3. En utilisant les relations n° 1 et n° 3, exprimer la tension T du support en fonction de l, g, V_A et θ.

4. Dire que la masse fait un tour complet le fil restant tendu se traduit par :

Dr. Souheyr Meziane
Ecole Supérieure en Sciences Appliquées -ESSAT- Tlemcen
Unité de Recherche des Matériaux et des Energies Renouvelables -URMER- Université de Tlemcen
Laboratoire d'Etude et Prédiction des Matériaux -LEPM-

Pour toute valeur de l'angle θ, la tension T existe : $\forall\theta, T(\theta) \geq 0$

a. Pour quelle valeur évidence de θ la relation T est-elle minimale ?

b. En déduire la valeur minimale que doit avoir la vitesse V_A de la masse m au point A pour que celle-ci effectue un tour complet le fil restant tendu.

c. Quelle est alors la vitesse V_C de masse au point C.

Exercice 7 :

Le jouet d'un enfant est constitué d'un petit chariot de masse m qui se déplace sur une piste se terminent par une boucle circulaire verticale (looping) de rayon R. L'objectif de l'exercice est de calculer la valeur minimale de l'altitude h du point A pour que le chariot abandonné en A *sans vitesse initiale* ($V_A = 0$ puisse faire le tour complet de la boucle en restant en contact avec la piste toute au long du trajet.

Le chariot assimilé à un point matériel M *glisse sur la piste* $(ABCDEF)$ *sans frottement.*

On repère la masse M sur la boucle par l'angle θ que fait OM avec la verticale OB.

I. Etude énergétique :

1. En prenant l'origine de l'énergie potentielle au niveau du sol ($E_{PP}(B) = 0 = E_{PP}(F)$, donner l'expression de l'énergie potentielle $E_{pp}(A)$ en A et $E_{PP}(M)$ en M (en fonction de $m, g, h, Ret\theta$.

2. On notera V_M la vitesse du point M dans la position repérée par θ. Ecrire l'énergie mécanique totale $E_m(A)$ en A et $E_m(M)$ en M.

3. Le système est-il conservatif ? En déduire une relation entre $E_m(A)$ et $E_m(M)$.

4. En déduire l'expression $\frac{V_M^2}{R}$ en fonction de g, R, h et $\acute{\theta}$ (relation n° 1).

II. Cinématique :

L'étude du mouvement de M sur la boucle $(BCDE)$ se fait naturellement en coordonnées polaires (R, θ) et la base associée $(\vec{U}_r, \vec{U}_\theta$.

1. Exprimer le vecteur vitesse $\vec{V}_M$ en coordonnées polaires et en déduire la relation entre V_M, R et $\acute{\theta}$ (relation n° 2).

Dr. Souheyr Meziane
Ecole Supérieure en Sciences Appliquées -ESSAT- Tlemcen
Unité de Recherche des Matériaux et des Energies Renouvelables -URMER- Université de Tlemcen
Laboratoire d'Etude et Prédiction des Matériaux -LEPM-

2. Exprimer le vecteur accélération $\vec{a}_M$ en coordonnées polaires et en déduire, en utilisant la relation n° 2 précédente, l'expression de la composante radiale (suivant $\vec{U}_r$) de l'accélération en fonction de V_M et R.

III. Dynamique :

1. On appellera $\vec{F}$ la réaction de la piste sur la masse M.

Faire l'étude dynamique de M sur la partie circulaire $(BCDE)$. Projeter le principe fondamental de la dynamique sur $(\vec{U}_r, \vec{U}_\theta$ et exprimer alors le rapport F/m (relation n° 3).

2. Utiliser les relations n° 1 et n° 3 pour exprimer F/m en fonction de h, g, R et θ.

3. Dire que la masse fait un tour complet en restant en contact avec la piste se traduit par :

Pour toute valeur de l'angle θ, la réaction F existe : $\forall\theta, F(\theta) \geq 0$.

Pour quelle valeur évidente de θ la réaction F est-elle minimale ?

En déduire la valeur minimale que doit avoir l'altitude h du point A pour que le chariot réalise la looping sans quitter la piste.

Solutions des exercices de la série de TD 4

Solution de l'exercice 1 :

1. La relation entre une force conservatrice et l'énergie potentielle dont elle dérive est :

$$\overrightarrow{grad}E_p = -\vec{F}^c_{ext}$$

2. Avec un axe vertical ascendant, nous avons :

$$dE_{pp} = -\vec{P}.d\vec{l} = mg\vec{u}_z.(dx\vec{u}_x + dz\vec{u}_z) = mgdz,$$

Soit : $E_{Pp}(z) = mgz + cste$.

3. ***a-*** $E = E_c + E_{Pp}(z) = \frac{1}{2}m\vartheta^2 + mgz$ (en prenant une valeur nulle de l'énergie potentielle : $E_{Pp}(z) = 0$).
   b- L'énergie potentielle croit linéairement avec l'altitude.
   c- A $t = 0s$, l'énergie potentielle est nulle donc : $E = E_{C0} = \frac{1}{2}m\vartheta^2$.

Dr. Souheyr Meziane
Ecole Supérieure en Sciences Appliquées -ESSAT- Tlemcen
Unité de Recherche des Matériaux et des Energies Renouvelables -URMER- Université de Tlemcen
Laboratoire d'Etude et Prédiction des Matériaux -LEPM-

A.N : $E = E_{C0} = 500J$.

L'énergie cinétique sera définie à un instant quelconque par : $E_C = E - E_{PP}(z) = E - mgz$, ce qui est une fonction décroissante de l'altitude z atteinte. L'altitude z_{max} atteinte sera obtenue pour $E_C(z_{max}) = 0$, soit $z_{max} = E/mg$.

A.N : $z_{max} = 5m$.

Cependant la vitesse ne peut pas s'annuler complètement. La composante ϑ_z suivant la verticale peut s'annuler mais la composante $\vartheta_x = \vartheta_0 sin\alpha$ suivant l'axe x reste constante. Don en réalité, il existe un minimum non nul pour l'énergie cinétique : $E_{Cmin} = \frac{1}{2}m(\vartheta_0 sin\alpha)^2 = \frac{1}{4}m\vartheta_0^2$ (avec l'angle $\alpha = 45°$).

On a donc : $E_{Cmin} = 500/2 = 250J$ ce qui donne alors pour l'altitude maximale atteinte $z_{max} = \frac{(E - E_{Cmin})}{mg} = 2{,}5m$.

***c*- Equation de la trajectoire (voir chapitre 2) :** $z = \frac{1}{2}a_0\frac{x^2}{\vartheta_0^2 cos^2\alpha} + xtan\alpha$**, et la portée** d **est donnée par :** $d = \frac{\vartheta_0^2}{a_0}2sin\alpha cos\alpha = \frac{\vartheta_0}{g}sin2\alpha$**. A.N :** $d = 10m$**.**

Solution de l'exercice 2 :

1. On considère le système bateau dans le référentiel galiléen R. Les forces extérieures appliqués au bateau sont :
   - $\vec{P}$ Le poids du bateau ;
   - $\vec{R}$ La poussée de l'eau sur le bateau ;
   - $\vec{f}$ La force de frottement.

   Le principe fondamental de la dynamique donne : $m\vec{a}_{G/R} = \vec{P} + \vec{R} + \vec{f}$, ce qui conduit par projection dans la direction x l'avancée du bateau à : $m\, d\vartheta_x/dt = -k\vartheta_x$.

   On en conclut que : $\vartheta_x = -\frac{k}{m}t + C$
   $d\vartheta_x/\vartheta_x = \frac{-k}{m}dt \Rightarrow ln$

$$C = ln\vartheta_{0m} \Rightarrow ln\frac{\vartheta_x}{\vartheta_0} = \frac{-k}{m}t \Rightarrow \vartheta_x = \vartheta_0 e^{\frac{-k}{m}t}$$

   Pour trouver la position d'arrêt, il faut intégrer la vitesse. Soit :

$$x = \int \vartheta_x dt = \vartheta_0 \int e^{\frac{-k}{m}t}dt = \frac{-\vartheta_0}{k}e^{\frac{-k}{m}t} + C_2$$

   A l'instant $t = 0$, le bateau était en $x = 0$, donc : $C_2 = \frac{\vartheta_0}{k} \Rightarrow x = \frac{\vartheta_0}{k}\left(1 - e^{\frac{-k}{m}t}\right)$. Le bateau s'arrêtera au bout d'un temps infini, à la position : $x_a = \frac{\vartheta_0}{k}$.

2. Par définition, le travail de la force de frottement est donné par :

$$W_{1\to2}(\vec{f}) = \int_1^2 \vec{f}\,.\,d\vec{l} = \int_1^2 \vec{f}\,.\,\vec{\vartheta}dt \Rightarrow W_{1\to2}(\vec{f}) = -k\vartheta_0^2 \int_{t_1}^{t_2} e^{-2\frac{k}{m}l}dt$$

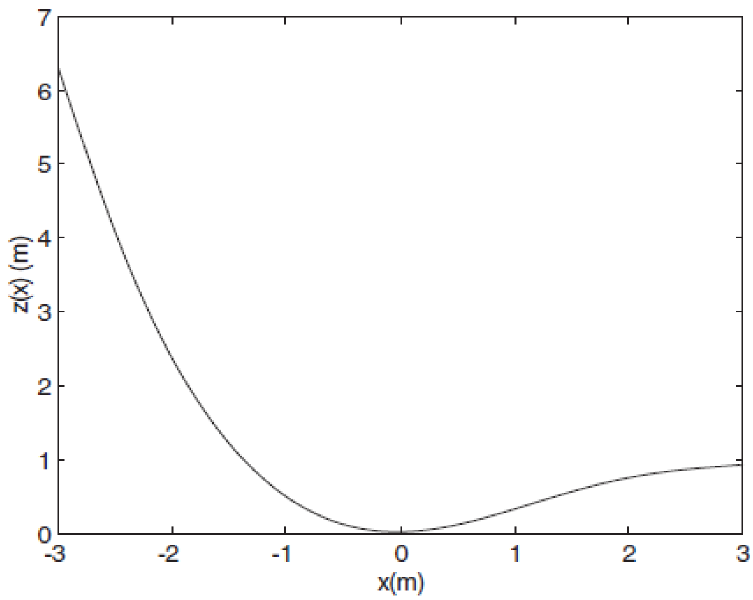
Soit entre l'origine du temps et l'infini :

$$W_{1\to2}(\vec{f}) = k\vartheta_0^2 \frac{m}{2k}\left[e^{-2\frac{k}{m}l}\right]_0^{\infty} = \frac{-1}{2}m\vartheta_0^2$$

Ce qui représente l'opposé de l'énergie cinétique de départ (ceci est logique dans la mesure où seule la force de frottement est en fonction « elle travaille »).

Solution de l'exercice 3 :

1. Voir la figure suivante :



2. Condition de stabilité en $x = x_0 = 0, \left.\frac{dE_P}{dx}\right|_{x_0} = 0$ et $\left.\frac{dE_P{}^2}{dx^2}\right|_{x_0} = 2a > 0$, donc l'équilibre est stable dans cette position. Par contre en $x_1 = 2{,}695m$, nous avons :

$$\left.\frac{dE_P}{dx}\right|_{x_1} = 0 \text{ et } \left.\frac{dE_P{}^2}{dx^2}\right|_{x_1} < 0$$

Donc cette position est une position d'équilibre instable.

3. En $x_M = 1{,}5m$, $z(x_M) = 0{,}563m$. Le solide va se déplacer du côté correspondant à la diminution de son énergie potentielle, soit vers les x décroissants. Son énergie potentielle va décroitre jusqu'à ce qu'il passe par $x = 0$ où elle deviendra nulle si l'on convient de prendre l'origine des énergies potentielles en $z = 0$. Comme il n'y a pas de frottements, l'énergie potentielle se conserve :

Dr. Souheyr Meziane
Ecole Supérieure en Sciences Appliquées -ESSAT- Tlemcen
Unité de Recherche des Matériaux et des Energies Renouvelables -URMER- Université de Tlemcen
Laboratoire d'Etude et Prédiction des Matériaux -LEPM-

$$E = E(M) \Rightarrow \frac{1}{2}m\vartheta^2 + mgz(x_M)$$

L'énergie cinétique sera donc : $\frac{1}{2}m\vartheta^2 + mgz(x_M) - mgz(x)$.

L'énergie cinétique passe par un maximum quand $z(x) = 0$, ce qui correspond à la position du point P. La vitesse en ce point est donnée par :

$$\vartheta = \sqrt{2gz(x_M)} = 3{,}32ms^{-1}.$$

Solution de l'exercice 4 :

I. Descente sur l'arc AO

1. Le poids $\vec{P} = m\vec{g} = -mg\vec{u}_x$

La réaction du sol : pas de frottement, donc la réaction est normale $\vec{N} = N\vec{u}_x$.

Le système est conservatif (pas de frottement et le poids est une force conservatrice). On a alors, conservation de l'énergie mécanique :

$$E_m = constante.$$

2. $z = R - Rcos\theta = R(1 - cos\theta)$

$E_P(A) = E_P(O) = mg(z_A - z_O)$, donc :

$$E_P(A) = mgz_A = mgR(1 - cos\theta) = 12000J$$

3. $E_m(A) = E_P(A) + E_c(A) = E_P(A) = mgR(1 - cos\theta)$

$$E_m(O) = E_P(O) + E_c(O) = E_c(O) = \frac{1}{2}mgV_0^2$$

$E_m(A) = E_m(O) \Rightarrow mgR(1 - cos\theta) = \frac{1}{2}mgV_0^2 \Rightarrow V_0 = \sqrt{2gR(1 - cos\theta)} = 20m.s^{-1}$.

4. a. $W_O^A = \int_A^O \vec{f}d.\vec{l} = \int_A^O -fdl = -f\int_A^O dl = -fL_{OA} = -fR\alpha = -fR\frac{\pi}{3}$

(la force de frottement s'oppose au déplacement et garde un module constant).

b. Théorème de l'énergie mécanique : la variation de l'énergie mécanique entre deux positions est égale au travail des forces non conservatrices entre ces deux positions :

$$\Delta E_m = E_m(O) - E_m(A) = W_{OA} = \frac{1}{2}mV_{0f}^2 - mgR(1 - cos\alpha) = -fR\alpha$$

c. $f = \frac{m}{2\alpha R} = (2gR(1 - cos\alpha) - V_0^2) = \frac{2700}{4\pi} = 214{,}86N$

d. $f = 214{,}9N$

II. Chute libre

1. $\vec{V}_0 = V_0\vec{u}_x$

2. La masse m n'est soumise donc, qu'à son poids (chute libre). En appliquant le principe fondamental de la dynamique :

$$\vec{P} = -mg\vec{u}_z = m\vec{a} \Rightarrow \vec{a} = -g\vec{u}_z \Rightarrow \acute{z} = -g$$

$$\vec{a} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \acute{z} = -g \end{bmatrix} \Rightarrow \vec{\vartheta} = \begin{bmatrix} \vartheta_{ox} = V_0 \\ \vartheta_{oy} = 0 \\ \vartheta_{oz} = - + \vartheta_{oz} = - \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\overrightarrow{OM} = \begin{bmatrix} x = V_0 t + x_0 = V_0 t \\ y = y_0 = 0 \\ \acute{z} = \dfrac{-1}{2} g t^2 + z_0 = \dfrac{-1}{2} g t^2 \end{bmatrix}$$

On a donc : $\begin{cases} x = V_0 t \\ z = \frac{-1}{2} g t^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = \frac{x}{V_0} \\ z = \frac{-1}{2} g \frac{x^2}{V_0^2} \end{cases} \Rightarrow z = \frac{-1}{2} g \frac{x^2}{V_0^2} = \frac{-x^2}{20}$

3. Pour $z = -h$ on a $h = \frac{1}{2} g \frac{x^2}{V_0^2} = \frac{x^2}{20} \Rightarrow x = \sqrt{20h} = \sqrt{64} = 8m > 7m$. Donc, le skieur traverse la faussée.

Chapitre 4 : Moment cinétique et solide en rotation

Synthèse

Savoirs :

- Moment cinétique d'un point matériel par rapport à un point ou un axe,
- Moment cinétique d'un système discret de points par rapport à un axe,
- Moment d'inertie et lien qualificatif à la répartition des masses,
- Moment cinétique d'un solide par rapport à un axe orientée,
- Notion de bras de levier,
- Définition d'un couple,
- Définition d'une liaison pivot,
- Loi du moment cinétique en un point fixe,
- Loi scalaire du moment cinétique pour un solide en rotation autour d'un axe fixe,
- Pendule pesant,
- Energie cinétique d'un solide en rotation.

Savoir-faire :

- Relier la direction et le sens d'un vecteur moment cinétique aux caractéristiques du mouvement,
- Maîtriser le caractère algébrique du moment cinétique scalaire,
- Utilise le bras de levier pour calculer le moment d'une force,
- Justifier le moment que peut fournir une liaison pivot,
- Reconnaître les cas de conservation du moment cinétique,
- Etudier le mouvement d'un pendule pesant. Lire et interpréter son portrait de phase,
- Etablir l'équivalence entre la loi de l'énergie cinétique et la loi scalaire du moment cinétique pour un solide en rotation autour d'un axe fixe.

Mots clés :

- Rotation,
- Moment cinétique,
- Moment d'une force,
- Moment d'inertie,
- Pendule pesant.

Dr. Souheyr Meziane
Ecole Supérieure en Sciences Appliquées -ESSAT- Tlemcen
Unité de Recherche des Matériaux et des Energies Renouvelables -URMER- Université de Tlemcen
Laboratoire d'Etude et Prédiction des Matériaux -LEPM-

Rappels de cours :

Chapitre IV. Moment cinétique et solide en rotation

- **Moment en un point**

Le moment en un point O de la force $\vec{F}$ appliquée en M est : $\vec{\mathcal{M}}_O = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F}$.

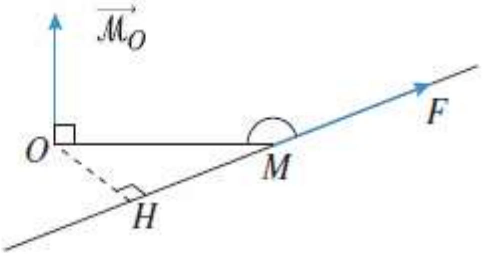
Si la force $\vec{F}$ « passe par le point O », son moment en O est nul.

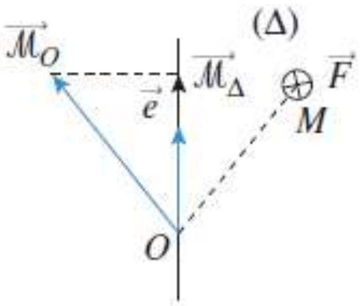
- **Moment par rapport à un axe**

Le produit scalaire $\vec{\mathcal{M}}_\triangle = \vec{\mathcal{M}}_O \,.\, \vec{e}$ est le moment de la force $\vec{F}$ par rapport à l'axe $\triangle$ qui passe par le point O, et qui est orienté par son vecteur unitaire $\vec{e}$.

$\vec{\mathcal{M}}_\triangle$ est indépendant du choix du point O sur l'axe $\triangle$.

Le moment par rapport à l'axe $\triangle$ d'une force $\vec{F}$ « parallèle à » ou « passant par » l'axe $\triangle$ est nul.





$\vec{\mathcal{M}}_O = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F} = \overrightarrow{OH} \wedge \vec{F}$

$\vec{\mathcal{M}}_\triangle = \mathcal{M}_\triangle \,.\, \vec{e}$ avec $\vec{\mathcal{M}}_\triangle = \vec{\mathcal{M}}_O \,.\, \vec{e}$

- **Théorème du moment cinétique**

Le moment cinétique au point O du point matériel M dans le référentiel $\Re$ est :

$$\vec{L}_O(M)_{/\Re} = m\,\overrightarrow{OM} \wedge \vec{\vartheta}(M)_{/\Re}$$

Dans un référentiel galiléen $\Re_g$, le théorème du moment cinétique peut être appliqué :

- En un point fixe O : $\frac{d\vec{L}_O(M)}{dt} = \vec{\mathcal{M}}_O$;

- en projection sur un axe fixe $\triangle$: $\frac{dL_\triangle}{dt} = \mathcal{M}_\triangle$;
- le théorème du moment cinétique est une conséquence de la deuxième loi de Newton. Dans certains cas, il donne accès rapidement à l'équation du mouvement (exemple : rotation autour d'un axe fixe).

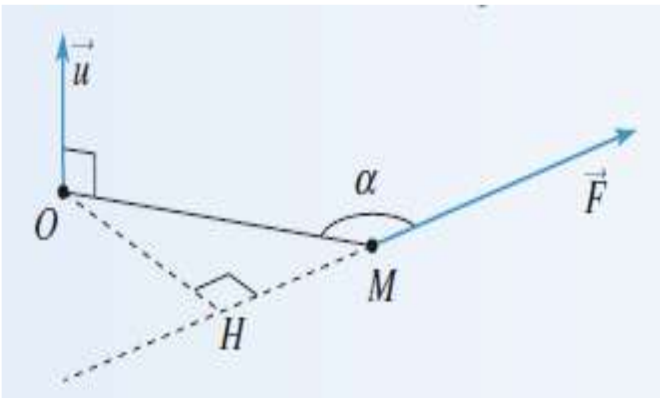
- **Mouvement à force centrale**

- Conservation du moment cinétique : pour un mouvement de force centrale de centre O fixe, le moment cinétique $\vec{L}_O$ est une constante du mouvement.
- La trajectoire du point matériel est contenue dans le plan contenant O et perpendiculaire à $\vec{L}_O$ (si le moment cinétique est nul, la trajectoire est sur la droite passant par O).
- La loi des aires est assurée : la vitesse est aréolaire $\frac{d\mathcal{A}}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \dot{\theta}$ est une constante du mouvement : $\frac{d\mathcal{A}}{dt} = \frac{C}{2}$.

Et C la constante des aires.

Conseils et pièges à éviter

- Bien connaître le calcul d'un produit vectoriel :



$\vec{u}$ normale au plan défini par $\overrightarrow{OM}$ et $\vec{F}$

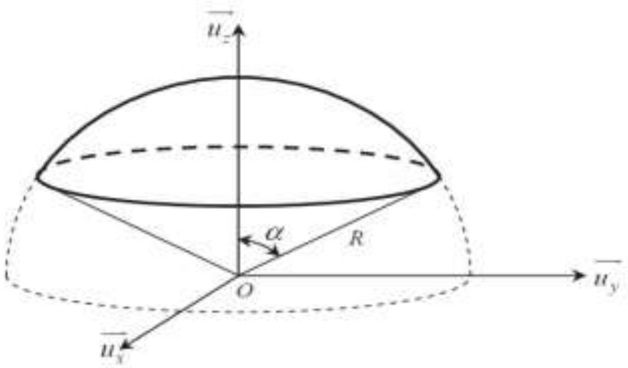
$\overrightarrow{\mathcal{M}}_O = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F} = OM\ F\ sin\alpha\ \vec{u} = \overrightarrow{OH} \wedge \vec{F} = OH\ F\ \vec{u}$

- Faire une analyse précise des forces qui s'exercent sur un point matériel avant d'appliquer le théorème du moment cinétique.
- Le théorème du moment cinétique est souvent intéressant pour étudier l'équation d'évolution d'un mouvement même si on ne connaît pas certaines forces (par exemple la tension du fil dans le cas du pendule pesant).

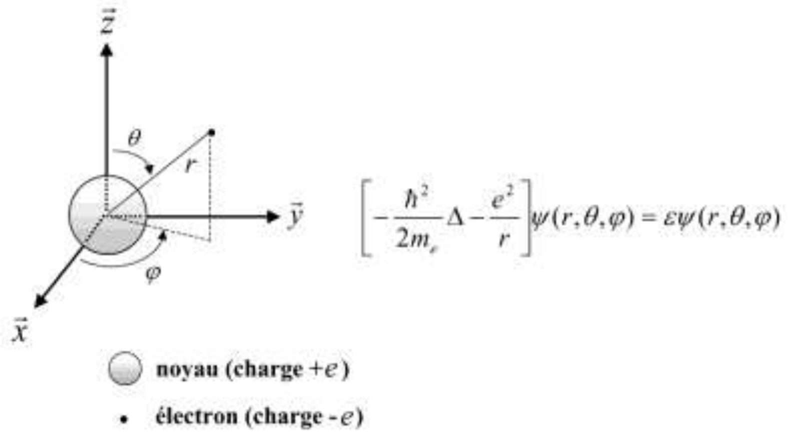
Série de TD 5

Exercice 1 :

1. Le moment d'inertie de la Terre en rotation uniforme autour de l'axe passant par ses pôles vaut $J = 0{,}33 M_T R_T^2$ avec $R_T = 6{,}0.10^{24}\ kg$ et $R_T = 6{,}4.10^3\ km$. Calculer le moment d'inertie de la Terre et son moment cinétique par rapport à l'axe de ses pôles.

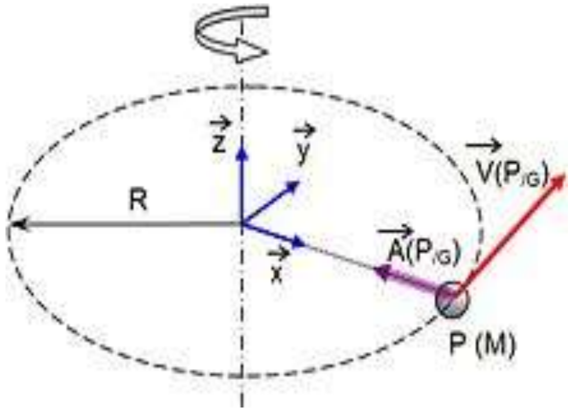


2. Dans le modèle de Bohr, le mouvement de l'électron autour du noyau est assimilé à un mouvement circulaire et uniforme de centre O confondu avec le noyau. La trajectoire de rayon $r_0 = 53\ pm$ est parcourue à la fréquence $f = 6{,}6.10^{15}\ Hz$. Calculer le moment cinétique de l'électron. On rappelle sa masse qui vaut : $m_e = 9{,}1.10^{-31}\ kg$.



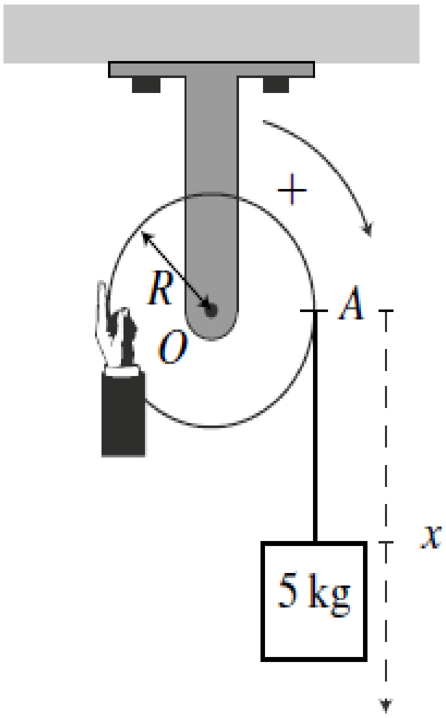
3. Un tambour de machine à laver de rayon $R = 25\ cm$ et de masse $m = 5\ kg$ tourne à la vitesse angulaire de $1000\ tr.min^{-1}$. Calculer son moment cinétique par rapport à son axe de rotation, sachant que son moment d'inertie par rapport à l'axe vaut $J = mR^2$.

Dr. Souheyr Meziane
Ecole Supérieure en Sciences Appliquées -ESSAT- Tlemcen
Unité de Recherche des Matériaux et des Energies Renouvelables -URMER- Université de Tlemcen
Laboratoire d'Etude et Prédiction des Matériaux -LEPM-



Exercice 2 :

Une masse $m = 5{,}0\ kg$ est suspendue à l'extrémité d'une corde enroulée sur une poulie de masse $m_p = 1{,}0\ kg$ et de rayon $R = 10\ cm$ en liaison pivot idéale autour de son axe avec un support fixe (voir figure). On prendra $g = 10\ m.s^{-2}$. Le moment d'inertie de la poulie par rapport à son axe vaut $I = \frac{1}{2}m_pR^2$.



A- Aspect cinématique : On suppose que la poulie est en rotation uniforme autour de son axe fixe (Oz) à la vitesse angulaire $\dot{\theta}$.

1. Quelle est la vitesse de la masse m ?

B- Aspect statique : Cette même poulie est retenue par un opérateur.

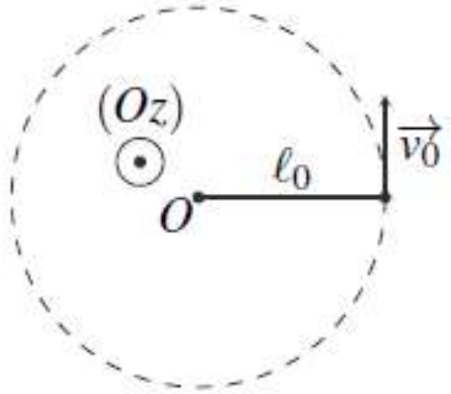
2. Quelle force l'opérateur doit-il exercer sur la poulie pour l'empêcher de tourner ?

C- Aspect dynamique : Avec le même dispositif, l'opérateur lâche la poulie.

3. Déterminer l'accélération angulaire du cylindre, l'accélération linéaire de la masse m et la tension de la corde.

Exercice 3 :

Une sphère de petite taille et de masse $m = 0{,}10\ kg$ est attachée à l'extrémité d'un fil sans masse de longueur $l_0 = 1{,}0\ m$ dont l'autre extrémité est fixée en O. Elle se déplace sur un cercle horizontal de rayon l_0. Sa vitesse est $\vartheta_0$est égale à $1{,}0\ m.s^{-1}$.



1. Déterminer son moment cinétique par rapport à O puis par rapport à (Oz).

2. En réduit brutalement la longueur du fil à $l_1 = 0{,}50\ m$. Que devient la vitesse de la sphère ?

3. Comparer l'énergie cinétique avant et après la réduction de la longueur du fil.

4. Quelle force provoque l'augmentation de l'énergie cinétique de la sphère ? Commenter.

Exercice 4 :

On assimile un arbre à une tige longue et homogène de longueur L et de masse m. On la scie à sa base et l'arbre bascule en tournant autour de son point d'appui au sol. On suppose que le point d'appui reste fixe et ne glisse pas, en repérant la position de l'arbre par l'angle θ qu'il fait avec la verticale. A $t = 0\ s$, l'arbre fait un angle θ_0=5° avec la verticale et est immobile.

On donne le moment d'inertie par rapport à son extrémité $I = \frac{1}{3}mL^2$.

1. Etablir l'équation du mouvement de la chute de l'arbre.

2. Montrer que, lorsque l'arbre fait un angle θ avec la verticale, sa vitesse angulaire vaut :

Dr. Souheyr Meziane
Ecole Supérieure en Sciences Appliquées -ESSAT- Tlemcen
Unité de Recherche des Matériaux et des Energies Renouvelables -URMER- Université de Tlemcen
Laboratoire d'Etude et Prédiction des Matériaux -LEPM-

$$\dot{\theta} = \sqrt{\frac{3g}{L}(cos\theta_0 - cos\theta)}$$

3. Montrer que cette relation peut être réécrite comme : $\sqrt{\frac{3g}{L}}dt = \frac{d\theta}{\sqrt{os\theta_0 - cos\theta}}$.

4. Déterminer le temps de la chute d'un arbre de 30 m. On prendra $g = 10\ m.s^{-2}$.

On donne pour $\theta_0 = 5°$: $\int_{\theta_0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{os\theta_0 - cos\theta}} = 5{,}1$.

Exercice 5 :

L'objectif du golf est de parvenir, en un nombre de coups le plus faible possible, à envoyer la balle dans chacun des 18 trous du parcours, en la frappant à l'aide d'un instrument appelé « club » : le geste effectué par le joueur avec le club pour frapper la balle est appelé « swing ». On étudie dans cette partie les caractéristiques mécaniques du club de golf.

On notera $\dot{X}$ et $\ddot{X}$ les dérivées temporelles première et seconde d'une fonction $X(t)$ quelconque.

Un club de golf est schématiquement composé de deux parties, rigidement liées entre elles : le manche et la tête de club. Le joueur tient le manche avec ses mains par l'extrémité A du manche, la tête de manche est fixée à l'autre extrémité B et entre en contact avec la balle lors de l'impact (voir figure). Attention, dans tout l'énoncé, le mot « club » représentera l'ensemble $\{manche\ et\ tête\ de\ club\}$.

Le manche est une tige rectiligne sans épaisseur de longueur $AB = L_c$. Le club possède un centre de masse G_c qu'on considèrera situé sur la manche, avec $AG_c = h_c$, une masse totale m_c et un moment d'inertie total J_c par rapport à un axe perpendiculaire passant par A. Il faut bien noter que la tête de club est prise en compte dans G_c, m_c et J_c.

1. Expliquer brièvement en s'appuyant sur un ou deux schéma(s) simple(s) et clair(s), pourquoi, en tendant son index à l'horizontale et on s'arrangeant pour poser le club en équilibre au-dessus de l'horizontale, on détermine la position de G_c.

Dr. Souheyr Meziane
Ecole Supérieure en Sciences Appliquées -ESSAT- Tlemcen
Unité de Recherche des Matériaux et des Energies Renouvelables -URMER- Université de Tlemcen
Laboratoire d'Etude et Prédiction des Matériaux -LEPM-

2. Afin de mesurer J_c, on réalise à l'aide du club un pendule pesant, en suspendant l'extrémité supérieure du manche ($point\ A$).

Solutions des exercices de la série de TD 5

Solution de l'exercice 1 :

1. Le moment d'inertie de la Terre par rapport à l'axe des pôles vaut : $J = 0{,}33 M_T R_T^2 = 8{,}1.10^{37} kg.m^2$. Son moment cinétique vaut : $L = J\dot{\theta}$ avec $\dot{\theta} = \frac{2\pi\, rad}{1\ jour} = 7{,}3.10^{-5}\ rads^{-1}$.

Numériquement, on trouve : $L \approx 6.10^{33}\ J.s$.

2. Le moment cinétique par rapport au centre de la trajectoire circulaire confondu avec le noyau vaut : $L = mr_0^2\dot{\theta} = mr_0^2 2\pi f$, avec $r_0 = 5{,}3 \,.\, 10^{-11}\ m$.

Numériquement, on trouve : $L = 1 \,.\, 10^{-34}\ J.s$

3. $L = J\dot{\theta}$ avec $J = mR^2 = 3{,}1 \,.\, 10^{-1}\ kg.m^2$ et $\dot{\theta} = \frac{1000 \times 2 \times 3{,}14}{60}\ 105\ rad.s^{-1}$ d'où $L = 33\ J.s$.

Solution de l'exercice 2 :

1. Lorsque la poulie tourne d'un angle θ, on déroule une longueur de fil $l = R\theta$. Avec le choix des orientations de l'angle θ et de l'axe (Ax), on a donc : $\dot{x} = R\dot{\theta}$.

2. On déduit le mouvement de la poulie dans le référentiel terrestre galiléen. Cette poulie est soumise à l'action de la liaison de l'action pivot d'axe (Oz), à la force exercée par l'opérateur et à la traction exercée par le fil. La poulie est à l'équilibre lorsque la somme des moments de toutes ces forces par rapport à l'axe de rotation (Oz) est nulle.
   Le moment de l'action de la liaison pivot est nul, reste celui des autres forces. Si l'on suppose le fil sans masse, il transmet intégralement le poids $m\vec{g}$ et l'applique en A avec un bras de levier en R. L'opérateur exerce une force $\vec{F}$ verticale au point B opposé à A avec un bras de levier R également. On trouve alors, $FR = mgR$ soit $F = mg = 50\ N$.

3. Une relation cinématique relie ces deux mouvements, puisque la masse est attachée à un fil qui s'enroule autour de la poulie. D'après la question 1, on a :

$$R\dot{\theta} = \dot{x}.$$

On applique le principe fondamental de la masse m soumise à son poids $m\vec{g}$ et à la tension du fil sur la masse : $\overrightarrow{T_1} = -T_1\overrightarrow{u_x}$. En projection sur la verticale, on obtient :

$$m\ddot{x} = mg - T_1.$$

On applique la loi du moment cinétique à la poulie en rotation autour d'un axe fixe soumis à la tension du fil qui s'applique au point I : $\overrightarrow{T_2} = -T_2\overrightarrow{u_x}$ dont le moment par rapport à l'axe de rotation vaut RT_2 :

$$I\ddot{\theta} = RT_2.$$

Si l'on suppose le fil sans masse, il transmet intégralement la tension et : $T_1 = T_2 = T$. En combinant ces équations et en utilisant l'expression de I fournie dans l'énoncé, on trouve :

$$\ddot{\theta} = \frac{g}{R}\frac{1}{1+0{,}5\frac{m_p}{m}}\ ;\ \ddot{x} = g\frac{1}{1+0{,}5\frac{m_p}{m}} \Longrightarrow T = mg - m\ddot{x} = mg\left(\frac{0{,}5\frac{m_p}{m}}{1+0{,}5\frac{m_p}{m}}\right).$$

Le mouvement de la masse m est uniformément accéléré avec une accélération inférieure à g, qui tend vers g si la poulie est de masse négligeable et vers 0 si la poulie est très massive comparativement à m.

<u>Solution de l'exercice 3 :</u>

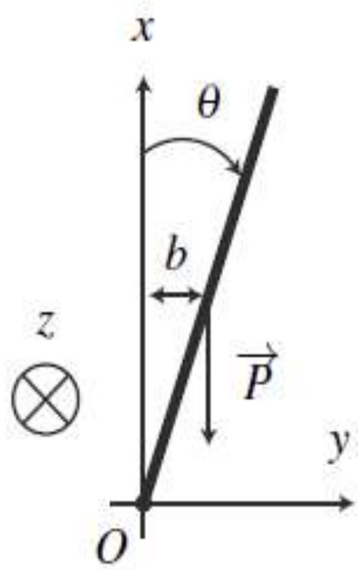
On étudie le mouvement de la sphère de petite taille dans le référentiel terrestre galiléen. Elle est soumise à son poids, à la réaction du support assurant le mouvement horizontal et à la tension du fil.

1. Le moment cinétique en O de la sphère vaut : $\overrightarrow{L_O} = ml_O\vartheta_0\overrightarrow{u_z}$. Son moment cinétique par rapport à l'axe (Oz) vaut : $L_{(Oz)} = ml_O\vartheta_0$.

2. Le moment du poids et de la réaction du support par rapport à l'axe (Oz) sont nuls car ces deux forces s'appliquent parallèlement à (Oz). Le moment de la tension du fil est également nul car cette force est parallèle à $\overrightarrow{OM}$ (force centrale de centre O). On est donc dans un cas de conservation du moment cinétique par rapport à l'axe (Oz).
   Le moment cinétique, après raccourcissement du fil, vaut $ml_1\vartheta_1$ puisque la trajectoire est à nouveau circulaire. On en déduit que $l_O\vartheta_0 = l_1\vartheta_1$. La vitesse de la sphère $\vartheta_1 = \vartheta_0 \frac{l_O}{l_1} = 2\ m.s^{-1}$, égale au double à la vitesse initiale.
3. L'énergie cinétique $E_c = \frac{1}{2}m\vartheta_0^2$ passe de $E_{c_0} = \frac{1}{2}m\vartheta_0^2$ à $E_{c_1} = \frac{1}{2}m\vartheta_1^2$. Elle est quadruplée et passe de $E_{c_0} = 0{,}05\,J$ à $0{,}20\,J$.
4. D'après le théorème de l'énergie cinétique, $\Delta E_c = E_{c_1} - E_{c_0} = W$ où W est le travail des forces appliquées à la bille. Or, le poids et la réaction du support sont perpendiculaires au mouvement, donc leur puissance est nulle. Seule la tension du fil a pu procurer cette énergie à la bille. On peut comprendre cela en observant que, pendant le raccourcissement du fil, la vitesse de la bille comporte une composante radiale $\dot{r}\overrightarrow{u_r}$ de sorte que la puissance de la tension du fil $\vec{T} = T\overrightarrow{u_r}$ vaut $P = T\dot{r}$. Cette puissance est positive puisque $r \dot{<} 0$ (le rayon de la trajectoire diminue) et on a $T < 0$ (le fil exerce une action sur la bille).
   En réalité, c'est la méthode qu'on utilise instinctivement pour faire tourner une masse accrochée au bout d'un fil de plus en plus vite.

<u>Solution de l'exercice 4 :</u>

On étudie le mouvement de la tige en rotation autour de son point d'appui considéré comme un point fixe. La chute se fait dans un plan vertical (xOy) et on repère la position de l'arbre par l'angle θ qu'il fait avec la verticale (voir figure).



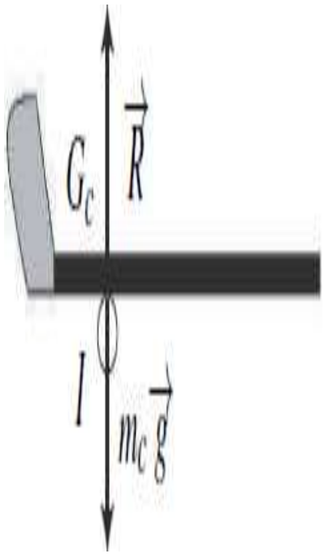
L'arbre est soumis à son poids $\vec{P} = m\vec{g}$ qui s'applique en son centre de gravité situé au milieu de la tige et à la réaction de du sol qui s'applique au point d'appui.

1. On applique le théorème du moment cinétique à l'arbre considéré comme un solide en rotation autour d'un axe fixe (Oz) dans le référentiel terrestre galiléen :

Dr. Souheyr Meziane
Ecole Supérieure en Sciences Appliquées -ESSAT- Tlemcen
Unité de Recherche des Matériaux et des Energies Renouvelables -URMER- Université de Tlemcen
Laboratoire d'Etude et Prédiction des Matériaux -LEPM-

$$\frac{dJ_{(Oz)}}{dt} = \mathcal{M}_{(Oz)}\text{(Forces)}.$$

Le moment par rapport à (Oz) de ma réaction du sol est nul car cette force s'applique sur l'axe de rotation. Le moment du poids est égal au produit de mg par le bras de levier $b = \frac{L}{2}\sin\theta$. Son signe est positif car le poids tend à faire tourner l'arbre dans le sens positif par rapport à l'axe de rotation. Le moment cinétique vaut : $J_{(Oz)} = I\dot{\theta} = \frac{1}{3}mL^2\dot{\theta}$.



On en déduit :

$$\frac{1}{3}mL^2\ddot{\theta} = mg\frac{L}{2}sin\theta.$$

2. On cherche une intégrale première de cette équation, en la multipliant par $\dot{\theta}$ et en intégrant une fois :

$$\frac{1}{3}mL^2\ddot{\theta}\dot{\theta} = mg\frac{L}{2}\sin(\theta)\,\dot{\theta} \Longrightarrow \frac{1}{3}mL^2\frac{\dot{\theta}^2}{2} = mg\frac{L}{2}\left(cos(\theta_0) - cos(\theta)\right),$$

En considérant que l'arbre fait initialement un angle θ_0 avec la verticale. Etant donné que $\theta > \theta_0$, $cos(\theta_0) - cos(\theta) > 0$ et comme $\dot{\theta} > 0$, on obtient :

3. On écrit : $\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt}$ et on sépare les variables pour obtenir : $\sqrt{\frac{3g}{L}}dt = \frac{d\theta}{\sqrt{cos(\theta_0)-cos(\theta)}}$.

4. Le temps de la chute de l'arbre est alors le temps nécessaire pour que θ passe de $\theta_0 = 5° = 0{,}0873\ rad$ à $\theta_f = \frac{\pi}{2}$ soit :

$$\Delta t = \sqrt{\frac{L}{3g}}\int_{\theta_0}^{2\pi}\frac{d\theta}{\sqrt{cos(\theta_0) - cos(\theta)}} = 5{,}1 \times \sqrt{\frac{30}{3\times 10}} = 5{,}1\ s.$$

<u>Solution de l'exercice 5</u> :

1. Si le club, posé sur le doigt, tient en équilibre, la somme des moments des actions extérieures sur le club, pris au point de contact I entre le doigt et le club est nulle. Or le club n'est soumis qu'à son poids et l'action de contact du doigt.

Le moment en I de cette dernière est nul, puisque c'est une force exercée en I, et donc le moment en I du poids du club est nul aussi. On en conclue que le centre d'inertie du club est sur la verticale passant par I.

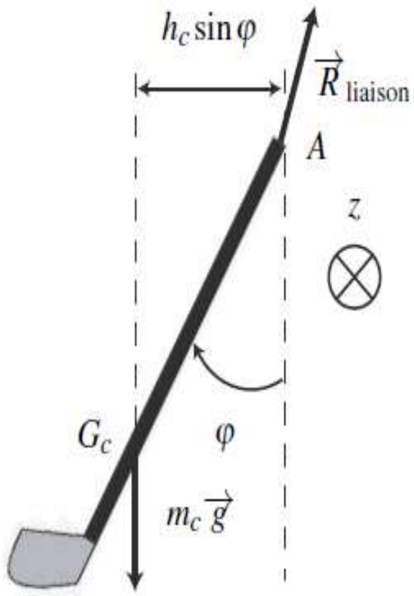
2. Détermination de J_c :

a. Les actions extérieures sur le système $\{club\}$ sont :

- Son poids $m_c\vec{g}$ appliqué en G_c, dont le moment par rapport à l'axe est :

$$\mathcal{M}_{(Az)}(poids) = -mgh_c sin\varphi.$$

En effet, le bras de levier vaut $h_c sin\varphi$ et le signe "$-$" provient du poids qui tend à faire tourner le club dans le sens indirect autour de l'axe (Az).



- L'action de liaison possède un moment nul par rapport à l'axe, puisque c'est une liaison pivot sans frottement.

Le théorème du moment cinétique par rapport à l'axe (Az) qui est appliqué au système $\{club\}$ dans le référentiel terrestre galiléen s'écrit :

$$\frac{dL_{(Az)}}{dt} = \mathcal{M}_{(Az)}(poids) + \mathcal{M}_{(Az)}(liaison) \Rightarrow J_c\ddot{\varphi} = -m_c g h_c sin\varphi$$

b. Pour les petites oscillations, $\varphi \ll \frac{\pi}{2}\ rad$

Donc $sin\varphi \approx \varphi$ et l'équation différentielle peut être approchée par :

$$\ddot{\varphi} = -\frac{m_c g h_c}{J_c}\varphi$$

C'est l'équation d'un oscillateur harmonique de pulsation : $\omega_0 = \sqrt{\frac{m_c g h_c}{J_c}}$ et de période : $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{J_c}{m_c g h_c}}$.

Dr. Souheyr Meziane
Ecole Supérieure en Sciences Appliquées -ESSAT- Tlemcen
Unité de Recherche des Matériaux et des Energies Renouvelables -URMER- Université de Tlemcen
Laboratoire d'Etude et Prédiction des Matériaux -LEPM-

On a donc : $J_c = \frac{T_0^2 m_c g h_c}{4\pi^2}$.

Application numérique : $J_c = 2{,}34\ kg.m^2$.

Références bibliographiques :

[1] Laurent Gautron. Physique tout le cours en fiche. Dunod, Paris, 2015.

[2] Alain Gibaud, Michel Henry. COURS DE PHYSIQUE MÉCANIQUE DU POINT. Seconde édition. Dunod, Paris, 1999, 2007.

[3] Bernard Salamito, damien Jurine, Stéphane Cardini, marie-noëlle Sanz. Physique tout-en-un. Dunod, Paris, 2013.

[4] Marie-Noëlle Sanz. PHYSIQUE TOUT-EN-UN. 1re année. 3e édition. Dunod, Paris, 2002, 2003, 2008.

[5] Jean-Marie BRÉBEC, Tania CHABOUD, Thierry DESMARAIS, Alain FAVIER, Marc MÉNÉTRIER, Régine NOËL. PHYSIQUE MPSI/PCSI/PTSI, EXERCICES ET PROBLÈMES. 1re année. Hachette Livre, Paris, 2010.

[6] Jean Michel Baudin, Thiery Bars, Mélanie Cousin, Yves Josse, Frédéric Legrand, Josiane Manasses, Hélène Michel. Physique chimie MPSI. Dunod, Paris, 2017.

[7] Laurent Gautron. PHYSIQUE TOUT-EN-UN POUR LA LICENCE. Dunod, Paris, 2010.

[8] André ARÈS, Jules MARCOUX. Physique Mécanique. TRANSCRIPTAI/CANADA, Bibliothèque nationale du Quebec, 1970.