République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Ecole Supérieure en Sciences Appliquées de Tlemcen

Département de la formation préparatoire

Algèbre 1

Cours et exercices corrigés

Auteur : Bouizem Nacéra

Année universitaire : 2020/2021

Table des matières

Préface

Dans ce polycopié, on donne un cours et des exercices corrigés du programme de la matière d'algébre 1 de la première année de la formation préparatoire à l'école supérieure des sciences appliquées Tlemcen (E.S.S.A.T). Ce cours interesserait aussi les étudiants de la première année (MI, ST et SM). Le contenu de ce document est inspiré des enseignements donnés à l'école E.S.S.A.T durant la période $2009-2021$.

Ce document couvre les notions fondamentales utiles non seulement pour la matière d'algébre mais aussi pour les matières d'analyse et probabilité comme la logique et les applications.
Le contenu concerne les notions de logique, ensembles et applications, on l'enrichie par une série d'exrcices avec leur corrigés.

Après on présente les structures algébriques qui contient les groupes, les anneaux et les corps.

A la fin de ce manuscrit on donne les notions de polynômes et de fractions rationnelles qui sont indisponsables dans le calcul des intégrales en analyse et en probabilité.

Chapitre 1

Logique, ensembles et applications

1.1 Notions élémentaires de logique

Définition 1. *(Proposition)*
Une proposition est une phrase mathématique à laquelle on peut lui associée vraie ou fausse.

Exemple 1. 1 *est un nombre naturel, cette phrase est vraie. Donc c'est une proposition.*
-1 *est un nombre naturel, cette phrase est fausse. Donc c'est une proposition.*

Définition 2. *(Négation)*
Soit P une proposition, no note la négation de P par $\overline{P}$ qui est une proposition confirmant le contraire de P.

Si P est vraie alors $\overline{P}$ est fausse, et si P est fausse alors $\overline{P}$ est vraie.

Le tableau de vérité est le suivant

P	0	1
$\overline{P}$	1	0

Remarque 1. *La valeur* 1 *représente la proposition vraie, tandis que la valeur* 0 *représente la proposition fausse.*

1.1.1 Connecteurs logiques

Soient P et Q deux propositions.

Définition 3. *(Conjonction)*
La conjonction de P et Q veut dire P et Q et on le note par $P \wedge Q$.

Exemple 2. P : $\frac{1}{2}$ *est un nombre rationnel.*
Q : 5 *est un nombre naturel.*

Le tableau de vérité est

P	1	0	1	0
Q	1	1	0	0
$P \wedge Q$	1	0	0	0

Remarque 2. *$P \wedge Q$ est vraie si et seulement si les deux propositions P et Q sont vraies.*

Définition 4. *(Disjonction)*
La disjonction de P et Q veut dire P ou Q et on le note par $P \vee Q$.

Exemple 3. *P : $\frac{1}{2}$ est un nombre rationnel.*
Q : 5 est un nombre naturel.

Le tableau de vérité est

P	1	0	1	0
Q	1	1	0	0
$P \vee Q$	1	1	1	0

Remarque 3. *$P \vee Q$ est fausse si et seulement si les deux propositions P et Q sont fausses.*

Définition 5. *(Implication)*
P implique Q veut dire si P alors Q et on la note par $P \Rightarrow Q$.
P est une hypothèse tandis que Q est un résultat.
$Q \Rightarrow P$ est la réciproque.

Exemple 4. *P : soient $x \in \mathbb{R}$ et $x = 5$,*
Q :soit $x \in \mathbb{R}$ et $|x| = 5$,
$P \Rightarrow Q$: si $x = 6$ alors $x + 3 = 9$.

Remarque 4. *La réciproque n'est pas toujours vraie.*
Contre exemple $Q \Rightarrow P$: si $|x| = 5$ alors $x = 5$, (fausse).
Si P est vérifiée alors Q est vérifiée, par contre si P n'est pas vérifiée on ne peut rien dire sur Q.

Le tableau de vérité est

P	1	0	1	0
Q	1	1	0	0
$P \Rightarrow Q$	1	1	0	1

Définition 6. *(Equivalence)*
P est équivalente à Q si $(P \Rightarrow Q)$ et $(Q \Rightarrow P)$, on la note par $P \Longleftrightarrow Q$.

Exemple 5. *P : Soient a et b deux nombres naturels premiers entre eux,*
Q : $a \wedge b = 1$,
$P \Longleftrightarrow Q$: a et b sont premiers entre eux $\Longleftrightarrow a \wedge b = 1$.

Le tableau de vérité est

P	1	0	1	0
Q	1	1	0	0
$P \Rightarrow Q$	1	1	0	1
$Q \Rightarrow P$	1	0	1	1
$P \Longleftrightarrow Q$	1	0	0	1

Remarque 5. *Pour que $P \Longleftrightarrow Q$ soit vraie il faut et il suffit que P et Q soient toutes les deux vraies ou les deux fausses.*

1.1.2 Propriétés des connecteurs logiques

1) Réflexivité : $P \Longleftrightarrow P$.
2) Négation : $\overline{(P \Rightarrow Q)} \Longleftrightarrow (P \wedge \overline{Q})$.
3) Contraposée : $(P \Rightarrow Q) \Longleftrightarrow (\overline{Q} \Rightarrow \overline{P})$.
4) Double Négation : $\overline{\overline{P}} \Longleftrightarrow P$.
5) Transitivité : $(P \Longleftrightarrow Q) \wedge (Q \Longleftrightarrow S) \Rightarrow (P \Longleftrightarrow S)$,
$(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow S) \Rightarrow (P \Rightarrow S)$.
6) Idempotence : $P \wedge P \Longleftrightarrow P$, et $P \vee P \Longleftrightarrow P$.
7) Commutativité : $(P \wedge Q) \Longleftrightarrow (Q \wedge P)$, et $(P \vee Q) \Longleftrightarrow (Q \vee P)$.
8) Associativité : $P \wedge (Q \wedge S) \Longleftrightarrow (P \wedge Q) \wedge S$, et $P \vee (Q \vee S) \Longleftrightarrow (P \vee Q) \vee S$.
9) Distributivité : $P \wedge (Q \vee S) \Longleftrightarrow (P \wedge Q) \vee (P \wedge S)$, et $P \vee (Q \wedge S) \Longleftrightarrow (P \vee Q) \wedge (P \vee S)$.
10) Loi de Morgan : $\overline{P \wedge Q} \Longleftrightarrow \overline{P} \vee \overline{Q}$, et $\overline{P \vee Q} \Longleftrightarrow \overline{P} \wedge \overline{Q}$.

1.1.3 Quantificateurs logiques

Définition 7. *(Quantificateur universel)*
$\forall x,\ P(x)$ *veut dire pour tout* x, P *est vraie.*

Définition 8. *(Quantificateur extentiel)*
$\exists x,\ P(x)$ *veut dire il existe un* x *tel que* P *est vraie.*

Remarque 6. $\exists! x\ P(x)$ *veut dire il existe un unique* x *tel que* P *est vraie.*
a) $\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 \geqslant 0$.
b) $\exists x \in \mathbb{Q},\ x \geqslant \frac{1}{2}$.
c) $\exists! x \in \mathbb{R},\ \ln x = 0$.

Remarque 7. *L'ordre des quantificateurs est très important par exemple les deux propositions*
(1) $\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists m \in \mathbb{N}^*,\ n < m$.
(2) $\exists m \in \mathbb{N}^*, \forall n \in \mathbb{N}^*,\ n < m$
sont différentes.

Théorème 1. *(Négation des quantificateurs)*
Soit P *une proposition, alors*
1) $\overline{\forall x\ P(x)} \Longleftrightarrow \exists x\ \overline{P(x)}$.
2) $\overline{\exists x\ P(x)} \Longleftrightarrow \forall x\ \overline{P(x)}$.

Exemple 6. $\forall x \in \mathbb{R},\ x \geqslant 0 \Rightarrow x + 1 > 0$.
$\exists x \in \mathbb{R},\ x \geqslant 0$ *et* $x + 1 \leqslant 0$ *(négation).*
$\forall x \in \mathbb{R},\ x + 1 \leqslant 0 \Rightarrow x < 0$ *(contraposée).*

1.2 Types de raisonnement mathématique

1.2.1 Raisonnement par contraposée

Pour montrer que $P \Rightarrow Q$ il suffit de montrer que $\overline{Q} \Rightarrow \overline{P}$.

Exemple 7. *Montrer par contraposée que*
$2^n - 1$ *est premier* $\Rightarrow n$ *premier.*
Contraposée : n **n'est pas premier** $\Rightarrow 2^{n-1}$ **n'est pas premier.**
n **n'est pas premier** $\Rightarrow$ $n = ab$ **avec** $a \neq b$ **et** $a \neq n$ $\Rightarrow$ $2^n - 1 = 2^{ab} - 1 = (2^a)^b - 1$.
On pose $P(X) = X^b - 1$
$P(1) = 0 \Rightarrow P(X) = (X-1)S(X) \Rightarrow P(2^b) = (2^a)^b - 1$.
$P(2^a) = (2^a - 1)S(2^a) \Rightarrow (2^a - 1)$ **divise** $2^n - 1$.
$a \neq 1$ **et** $a \neq n \Rightarrow 2^a - 1 \neq 1$ **et** $2^a - 1 \neq 2^n - 1$.
Donc $2^n - 1$ **n'est pas premier.**

1.2.2 Raisonnement par l'absurde

Pour montrer qu'une proposition P est vraie, on suppose que sa négation $\overline{P}$ est vraie et on obtient une contradiction.

Exemple 8. *Soit* $x \in \mathbb{R}$ *tel que* $\forall \varepsilon > 0,\ x \leqslant \varepsilon$.
Montrer par l'absurde que $x \leqslant 0$.
on suppose que $x > 0$, *on choisit* $\varepsilon = \dfrac{x}{2} > 0$ *car on a* $\forall \varepsilon > 0$, *ceci implique que* $x > \varepsilon$ *ce qui contredit l'hypothése que* $x \leqslant \varepsilon$.

1.2.3 Raisonnement par récurrence

Pour montrer que $\forall n \geqslant n_0$, $P(n)$ est vraie avec $n_0 \in \mathbb{N}$.
1) On suppose que $P(n)$ est vraie pour $n = n_0$.
2) On suppose que $P(n)$ est vraie pour un certain $n \geqslant n_0$, c'est l'hypothèse de récurrence. On montre que $P(n+1)$ est vraie.

Exemple 9. *On définie pour tout entier naturel* $n \in \mathbb{N}$
$A_{n+1} - 2A_n = 7(3^{2n+2})$ *avec* $A_n = 3^{2n+2} - 2^{n+1}$.
Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, A_n *est divisible par* 7.
1) Pour $n = 0$, $A_0 = 7$ *est divisible par* 7.
2) On suppose que A_n *est divisible par* 7, *c'est à dire* $A_n = 7k$ *avec* $k \in \mathbb{Z}$.
or $A_{n+1} - 2A_n = 7(3^{2n+2}) \Rightarrow A_{n+1} = 2A_n + 7(3^{2n+2}) = 2(7k) + 7(3^{2n+2}) = 7(2k + 3^{2n+2}) = 7k'$ *avec* $k' \in \mathbb{Z}$.
Donc A_{n+1} *est divisible par* 7.
Par suite $\forall n \in \mathbb{N}$, A_n *est divisible par* 7.

1.2.4 Raisonnement par contre exemple

$\overline{\forall x\ P(x)} \Longleftrightarrow \exists x\ P(x)$. Pour montrer que $\forall x\ P(x)$ est fausse il suffit de trouver un x_0 tel que $P(x_0)$ est fausse.

Exemple 10. *La proposition suivante*
$\exists x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ x + y > 0$ *est fausse.*
Contre exemple : $y = -x - 1 \Rightarrow x + y = x + (-x - 1) = -1 < 0$.

1.3 Généralités sur les ensembles

Soit x appartenant à E veut dire que x est un élément de E.
Si x n'appartenant pas à E, on le note par $x \notin E$.
On définit un ensemble par deux façons
Soit en donnant ses éléments par exemple

$$A = \{1, 3, 5, 7, 9\},$$

ou on précise les propriétés de cet ensemble par exemple

$$A = \{x \in \mathbb{N},\ x \text{ est impair tel que } 1 \leqslant x \leqslant 9\}.$$

Définition 9. *Le cardinal d'un ensemble A est le nombre des éléments de l'ensemble A, il est noté $card(A)$.*
On dit que A est fini si $card(A) < +\infty$, sinon il est infini.
L'ensemble vide ne contient aucun élément et il est noté $\emptyset$.

Exemple 11. $card(A) = 5,\ card(\emptyset) = 0,\ card(\mathbb{N}) = +\infty.$

1.3.1 Sous ensemble et ensemble de parties

Définition 10. *(Inclusion)*
Soient A et B deux ensembles. On dit que A est inclu dans B et on le note $A \subset B$ si tout élément de A est aussi un élément de B, c'est à dire $x \in A \Rightarrow x \in B$, on peut dire que A est un sous ensemble ou une partie de B.
A et B sont égaux si et seulement si $A \subset B$ et $B \subset A$, et on le note $A = B$.

Exemple 12. $B = \{2, 3\}$, $A = \{2\} \ \Rightarrow A \subset B$.

Définition 11. *$P(B)$ est l'ensemble des parties de E dont les éléments sont tous les sous ensembles de B, c'est à dire $P(B) = \{X \text{ tel } \ \text{que } X \subset B\}$.*

Exemple 13. $B = \{2, 3, 5\} \Rightarrow P(B) = \{\emptyset,\ \{2\},\ \{3\},\ \{5\},\ \{2, 3\},\ \{2, 5\},\ \{3, 5\},\ \{2, 3, 5\}\}$.

1.3.2 Opérations sur les ensembles

Soient A et B deux sous ensembles d'un ensemble E.

Définition 12. *(Union)*
L'union de deux ensembles A et B veut dire tous les éléments qui se trouvent dans A ou B, on le note par $A \cup B$, avec

$$A \cup B = \{x \in E\ /x \in A \text{ ou } x \in B\}.$$

Définition 13. *(Intersection)*
L'intersection de deux ensembles A et B veut dire des éléments qui se trouvent dans A et B simultanément et on le note par $A \cap B$, avec

$$A \cap B = \{x \in E\ /x \in A \text{ et } x \in B\}.$$

Remarque 8. *A et B sont disjoints $\Rightarrow$ $A \cap B = \emptyset$.*

Définition 14. *(Différence)*
La différence de deux ensembles A et B veut dire les éléments qui se trouvent dans A et ne se trouvent pas dans B et on note par $A \diagdown B$, avec

$$A \diagdown B = \{x \in E \ / x \in A \ et\ x \notin B\}.$$

Définition 15. *(Complémentaire)*
Le complémentaire veut dire les éléments qui ne se trouvent pas dans A mais se trouvent dans l'ensemble tout entier E et on le note par C_E^A avec

$$C_E^A = \{x \in E \ / x \notin A\} = E \diagdown A \ ou\ \overline{A}.$$

Théorème 2. *Soit E un ensemble non vide et A, B deux ensembles de E c'est à dire $A,\ B \in P(E)$, on dit que A et B sont complémentaires dans E i.e*

$$\overline{A} = B \Longleftrightarrow (A \cap B = \emptyset) \wedge (A \cup B = E).$$

1.3.3 Propriétés des opérations sur les ensembles

a) Commutativité :

$$A \cup B = B \cup A$$
$$A \cap B = B \cap A.$$

b) Associativité :

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$
$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C).$$

c) Distributivité :

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$
$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

d) Transitivité :

$$(A \subset B) \wedge (B \subset C) \Rightarrow (A \subset C).$$

e) Idempotence :

$$\overline{\overline{A}} = A.$$

f) Inclusion et complémentaire :

$$A \subset B \Rightarrow \overline{B} \subset \overline{A}.$$

Loi de Morgan :

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$
$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}.$$

Définition 16. *(Produit cartésien)*
Soient $A_1,\ A_2,\ ...\ A_n$ des ensembles non vides, on appelle produit cartésien et on le note par
$A_1 \times A_2 \times ... \times A_n = \{(x_1, x_2, ..., x_n)\ avec\ x_1 \in A_1,\ x_2 \in A_2,\ ...,\ x_n \in A_n\}$.

Exemple 14. $\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z)\ /\ x, y, z \in \mathbb{R}\}$
$(1, -1, 2) \in \mathbb{R}^3$.

Remarque 9. *$A_1 \times A_2 \not\subset A_1 \times A_2 \times A_3$,*
$card(A \times B) = caed(A) \times card(B)$.

1.4 Applications

Définition 17. *Une applicaton f d'un ensemble E vers un ensemble F et on le note par $f : E \longrightarrow F$ est une relation qui à chaque élément x de E associe un et un seul élément y de F.*
Ainsi

$$f : E \longrightarrow F$$

$$x \mapsto y = f(x)$$

y est l'image de x, et x est l'antécédent de y.
E est l'ensemble de départ tandis que F est l'ensemble d'arrivée.
L'image de f est notée par

$$Imf = \{y \in F \ / \ y = f(x) \ avec \ x \in E\}.$$

Exemple 15.

$$f : \mathbb{R}^{+*} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \ln x$$

f est une application.

Exemple 16.

$$g : \mathbb{R}^{*} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \ln x$$

f n'est pas une application.

Exemple 17.

$$Id : E \longrightarrow F$$

$$x \mapsto x$$

est une application appelée identité.

Définition 18. *Soient $A \subset E$, et*

$$f : E \longleftrightarrow F$$

$$x \mapsto f(x)$$

une application, alors l'application

$$h : A \longleftrightarrow F$$

$$x \mapsto f(x)$$

est dite restrinction de f à A de E et on la note par $f_{|A}$.
On dit que f est un prolongement de h sur l'ensemble E.

Définition 19. *(Composition d'applications)*
Soient E, F et G trois ensembles non vides et deux applications $f : E \longleftrightarrow F$ et $g : F \longleftrightarrow G$, l'application composée de f et g est notée $g \circ f$ où

$$g \circ f : E \longleftrightarrow G$$

$$x \mapsto g(f(x)).$$

Remarque 10. *En général*

$$g \circ f \neq f \circ g.$$

Exemple 18. *Soient*

$$f : \mathbb{R}^{+*} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \ln x$$

et

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow]0,\ +\infty[$$

$$x \mapsto 2e^{x}$$

alors

$$g \circ f : \mathbb{R}^{+*} \longrightarrow]0,\ +\infty[$$

$$x \mapsto 2x.$$

1.4.1 Injéctivité, surjectivité, bijectivité et applications réciproques

Définition 20. *(Injectivité)*
Soit f une application de E dans F, on dit que f est injective si tout élément de F a au plus un élément dans E, c'est à dire

$$\forall x_1,\ x_2 \in E,\ x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2).$$

Remarque 11. *Pour montrer l'injectivité d'une application, on utilise généralement sa contraposée.*

Exemple 19.

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto 2x + 3$$

est injective car :
soient $x_1,\ x_2 \in \mathbb{R}$ tels que $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow 2x_1 + 3 = 2x_2 + 3 \Rightarrow 2x_1 = 2x_2 \Rightarrow x_1 = x_2$.
Donc f est injective.

Exemple 20.

$$g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \sqrt{1 - x^2}$$

n'est pas injective car $g(1) = g(-1) = 0$, mais $-1 \neq 1$.

Définition 21. *(Surjectivité)*
f est dite surjective si tout élément de F a au moins un antécédent de E, c'est à dire

$$\forall y \in F,\ \exists x \in E \ / \ y = f(x).$$

Remarque 12. *Pour montrer qu'une application $f : E \longrightarrow F$ est surjective, il suffit de montrer que l'ensemble d'arrivée est égale à Imf, c'est à dire $Imf = F$.*

Exemple 21.

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \mapsto 2x + 3$$

f est surjective car :
$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = 2x + 3 \Rightarrow x = \dfrac{1}{2}(f(x) - 3).$
$\forall y \in \mathbb{R},\ \exists x \in \mathbb{R},$ *tel que* $y = f(x) = 2x + 3,$ *avec* $x = \dfrac{1}{2}(y - 3).$
Donc $Imf = F = \mathbb{R}.$

Exemple 22.

$$g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \mapsto exp(x + 2)$$

g n'est pas surjective car :
$\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) > 0 \Rightarrow g^{-1}(-2)$ *n'existe pas.*
Donc g n'est pas surjective, ainsi $Img \neq \mathbb{R}$.

Définition 22. *(Bijectivité)*
Une application f de E dans F est dite bijective si pour tout élément de F il existe un seul antécédent de E c'est à dire

$$\forall y \in F,\ \exists! x \in E \ / \ y = f(x).$$

Exemple 23.

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \mapsto 2x + 3$$

est bijective.

Exemple 24.

$$g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \sqrt{1 - x^2}$$

n'est pas bijective.

Théorème 3. *Soit f une application de E dans F, f est bijective $\Longleftrightarrow \exists!\ g : F \longrightarrow E$ telle que $f \circ g = Id_F$ et $g \circ f = Id_E$.*
g est la réciproque de f et on la note f^{-1}.

Exemple 25.

$$f : \mathbb{R}^{+*} \longrightarrow \mathbb{R}^{+*}$$
$$x \mapsto \ln x$$

alors

$$f^{-1} : \mathbb{R}^{+*} \longrightarrow \mathbb{R}^{+*}$$
$$y \mapsto e^y$$

avec $y = \ln x \Longleftrightarrow x = e^y.$

1.4.2 Résultats fondamentaux

Théorème 4.

1. *La composée de deux applications injectives est injective.*
2. *La composée de deux applications surjectives est surjective.*
3. *La composée de deux applications bijectives est bijective, et la réciproque de $f \circ g$ est donnée par : $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.*

Preuve. 1) Injectivité :
Soient deux applications injectives f de $E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$.
Soient $x_1,\ x_2\ \in E,\ (g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2) \Rightarrow g(f(x_1)) = g(f(x_2))$ et puisque g est injective alors $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$ car f est injective. Par suite $g \circ f$ est injective.

2) Surjectivité :
Soient deux applications surjectives f de $E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$.
Puisque g est surjective alors

$$\forall z \in G,\ \exists y \in F \ /\ z = g(y)$$

et puisque f est surjective alors

$$\forall y \in F,\ \exists x \in E \ /\ y = f(x),$$

ce qui implique que
$\forall z \in G,\ \exists x \in E \ /\ z = g(f(x)) \Rightarrow \forall z \in G,\ \exists x \in E \ /\ z = (g \circ f)(x)$.
Donc $(g \circ f)$ est surjective.

2) Bijectivité :
$(g \circ f) \circ (g \circ f)^{-1} = Id_G \Rightarrow g^{-1} \circ (g \circ f) \circ (g \circ f)^{-1} = g^{-1} \circ Id_G = g^{-1}$.
Ce qui implique que
$f \circ (g \circ f)^{-1} = g^{-1} \Rightarrow f^{-1} \circ f \circ (g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1} \Rightarrow (g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$. ■

Théorème 5. *Soient $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$ deux applications.*
1) $(g \circ f)$ injective $\Rightarrow$ f injective.
1) $(g \circ f)$ surjective $\Rightarrow$ g surjective.

Preuve. 1) Soient $x_1,\ x_2 \in E,\ f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow g(f(x_1)) = g(f(x_2))$
ce qui implique que
$(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$ (car $g \circ f$ est injective). Donc f est injective.

2) $(g \circ f)$ surjective $\Rightarrow \forall z \in G,\ \exists x \in E,\ z = (g \circ f)(x) \Rightarrow \forall z \in G,\ \exists x \in E,\ z = (g(f(x))$.
On pose $y = f(x) \Rightarrow y \in F \Rightarrow \forall z \in G,\ \exists y \in F,\ z = g(y)$.
Donc g est surjective. ■

Exemple 26. *$g \circ f$ injective, f injective mais g n'est pas injective en général.*

$$g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$$

$$x \mapsto x^2$$

g n'est pas injective. Et

$$f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \sqrt{x}$$

f est injective.

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(\sqrt{x}) = (\sqrt{x})^2 = x$$

alors $(g \circ f)$ est injective,avec $g \circ f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$.

$$\begin{array}{rcl}(g \circ f)(x) & = & g(f(x)) \\ & = & g(\sqrt{x}),\ x \in \mathbb{R}^+ \\ & = & (\sqrt{x})^2 \\ & = & x \in \mathbb{R}^+.\end{array}$$

Exemple 27. *$g \circ f$ surjective, g surjective mais f n'est pas surjective.*

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \mapsto e^{x^2}$$

f n'est pas surjective. Et

$$g : \mathbb{R}^{+*} \longrightarrow \mathbb{R}^+$$
$$x \mapsto \ln x$$

g est surjective.

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(e^{x^2}) = \ln(e^{x^2}) = x^2$$

alors $(g \circ f)$ est surjective, avec $g \circ f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$.

1.4.3 Image directe et image réciproque

Définition 23. *Soient $f : E \longrightarrow F$ une application et deux ensembles A et B avec $A \subset E$ et $B \subset F$*
1) L'image directe d'une partie A de E notée $f(A)$ est définie par

$$f(A) = \{f(a) \ / \ a \in A\}.$$

2) L'image réciproque d'une partie B de F notée $f^{-1}(B)$ est définie par

$$f^{-1}(B) = \{x \in E \ / \ f(x) \in B\}.$$

Remarque 13. *$f(A) \subset E$ et $f^{-1}(B) \subset E$.*
$f^{-1}(F) = E$ et $f(E) = Imf$.

Exemple 28.

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \mapsto x^2 + 5$$

On pose $A = [-5,\ 5]$ et $B = [5,\ 10]$, calculer $f(A)$ et $f^{-1}(B)$.

On a $-5 \leqslant x \leqslant 5 \Rightarrow 0 \leqslant x^2 \leqslant 5^2 \Rightarrow 5 \leqslant x^2+5 \leqslant 5^2+5 \Rightarrow 5 \leqslant f(x) \leqslant 30$.
Ce qui implique $f(A) = [5,\ 30]$.
D'autre part $5 \leqslant f(x) \leqslant 10 \Rightarrow 5 \leqslant x^2+5 \leqslant 10 \Rightarrow 0 \leqslant x^2 \leqslant 5 \Rightarrow 0 \leqslant |x| \leqslant \sqrt{5}$
$\Rightarrow -\sqrt{5} \leqslant x \leqslant \sqrt{5}$.
Ce qui implique que $f^{-1}(B) = [-\sqrt{5},\ \sqrt{5}]$.

Théorème 6. *Soit* $f : E \longrightarrow F$ *avec* $A \neq \emptyset \neq F$.
1) $f(E) = F \Longleftrightarrow f$ *est surjective.*
2) $\forall A \in P(E),\ f(A) \cap f(\overline{A}) = \emptyset \Longleftrightarrow f$ *est injective.*

Preuve. Montrons que
1) $f(E) = F \Longleftrightarrow f$ est surjective.
$(\Longrightarrow)$
$y \in F \Rightarrow y \in f(E) \Rightarrow y = f(x)$ avec $x \in E \Rightarrow f$ est surjective.
$(\Longleftarrow)$
$f(E) \subset F$ (par définition.)
Montrons que $F \subset f(E)$.
Soit $y \in F \Rightarrow \exists x \in E \ /\ y = f(x)$ (car f est surjective.)
$\Rightarrow y \in f(E) \Rightarrow F \subset f(E)$. D'où $f(E) = F$.
2) $\forall A \in P(E),\ f(A) \cap f(\overline{A}) = \emptyset \Longleftrightarrow f$ est injective.
$(\Longrightarrow)$
Soient $x_1,\ x_2 \in E,\ x_1 \neq x_2$, on pose $A = \{x_1\} \Rightarrow f(x_1) \in f(A)$.
$x_1 \neq x_2 \Rightarrow x_2 \in \overline{A} \Rightarrow f(x_2) \in f(\overline{A})$
$f(A) \cap f(\overline{A}) = \emptyset \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$ d'où f est injective.
$(\Longleftarrow)$
Montrons par l'absurde que $f(A) \cap f(\overline{A}) = \emptyset$.
Supposons que $f(A) \cap f(\overline{A}) \neq \emptyset \Rightarrow \exists y \in f(A) \cap f(\overline{A}) \Rightarrow y \in f(A)$ et $y \in f(\overline{A})$
($y = f(a)$ avec $a \in A$) et ($y = f(x)$ avec $x \in \overline{A}$) $\Rightarrow f(a) = f(x) \Rightarrow a = x$ car f est injective $\Rightarrow a \in \overline{A}$.
Contradiction car $a \in A$, donc $f(A) \cap f(\overline{A}) = \emptyset$. ■

1.5 Séries d'exercices

Exercice 1 :
Etablir les propriétés suivantes en utilisant le tableau de vérité

1) $\overline{S \wedge Q} \Longleftrightarrow \overline{S} \vee \overline{Q}$
2) $\overline{S \vee Q} \Longleftrightarrow \overline{S} \wedge \overline{Q}$
3) $S \Longrightarrow Q \Longleftrightarrow \overline{Q} \Longrightarrow \overline{S}$
4) $\overline{S \Longrightarrow Q} \Longleftrightarrow S \wedge \overline{Q}$
5) $(\overline{S} \Longrightarrow \overline{Q}) \vee (S \Longrightarrow \overline{Q}) \Longleftrightarrow (S \vee \overline{S}) \vee \overline{Q}$.

Exercice 2 :
1) La proposition suivante est-elle une tautologie ?
$[\overline{S} \Longrightarrow (P \vee R)] \Longleftrightarrow [(S \Longrightarrow \overline{P}) \wedge (R \Longrightarrow S)]$.
2) Donner la négation et la contraposée de la proposition suivante
$\forall x \in \mathbb{R} : [x < 0 \Longrightarrow x \leqslant x^2]$.

Exercice 3 :
Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?
Justifier votre réponse puis donner leurs négation.
a) $\forall x \in \mathbb{N},\ \exists y \in \mathbb{N},\ y > x + 1$
b) $\exists x \in \mathbb{N},\ \forall y \in \mathbb{N},\ x \leqslant y$
c) $\exists x \in \mathbb{N},\ \forall y \in \mathbb{N},\ x < y$
d) $\exists x \in \mathbb{N},\ \exists y \in \mathbb{N}^*,\ (x - y)(x + y) = y^2$.

Exercice 4 :
1) Montrer que $\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{3} \notin Q$.
2) Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N},\ 4^n + 6n - 1$ divise 9.
3) Monter que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 2^{n-1} \leqslant n!$. avec $n! = n(n-1)(n-2)...1$ et $0! = 1$.

Exercice 5 :
Soient $A,\ B$ et C trois parties d'un ensemble E.
1) Montrer que $A \cup B = A \cap C \Longleftrightarrow B \subset A \subset C$.
2) Montrer que
$A \subset B \Longleftrightarrow C_E^B \subset C_E^A \Longleftrightarrow A \cup B = B$.
3) A-t-on $P(A \cup B) = P(A) \cup P(B)$? justifier votre réponse.
4) A-t-on $P(A \cap B) = P(A) \cap P(B)$? justifier votre réponse.

Exercice 6 :
Soit E un ensemble non vide et $A,\ B \in P(E)$.
On définit la différence symétrique des ensembles A et B par
$A \Delta B = (A \cup B) \diagdown (A \cap B)$.
1) Montrer que $A \Delta B = (A \diagdown B) \cup (B \diagdown A)$.
2) Calculer $B \Delta B,\ \overline{B} \Delta B,\ E \Delta B,\ \emptyset \Delta B$.

Exercice 7 :
On définit l'application caractéristique par

$\Psi_A \longrightarrow \{0,\ 1\}$
$x \mapsto \Psi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \in A \\ 0 & \text{si} \quad x \notin A \end{cases}$
1) Montrer que $\Psi_A = \Psi_B \Longleftrightarrow A = B$.
2) Vérifier les propriétés suivantes
(a) $\Psi_{\overline{A}} = 1 - \Psi_A$.
(b) $\Psi_{A \cap B} = \Psi_A \Psi_B$.
3) Etablir les égalités de Morgan.

Exercice 8 : Soit
$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \mapsto 2x - 1$
et
$g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \mapsto \dfrac{1}{x^2 + 1}$
1) Montrer que f est bijective.
2) g est-elle injective ? surjective ? justifier.
3) A-t-on $f \circ g = g \circ f$, justifier.

Exercice 9 :
Soit f une application définie par
$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \mapsto \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$
1) f est-elle bijective ?
2) Si oui déterminer sa réciproque, et si non donner les plus grands ensembles A et B tels que f soit bijective, puis trouver f^{-1}.

Exercice 10 :
Soit $f : E \longrightarrow F$ une application et soient A et B deux ensembles de E.
Montrer que les deux propriétés suivantes sont équivalentes.
f est injective.
$A \cap B = \emptyset \Longrightarrow f(A) \cap f(B) = \emptyset$.

Exercice 11 :
Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $]-1,\ +1[$ définie par$f(x) = \dfrac{x}{1 + |x|}$.
1) f est-elle injective ?
2) f est-elle surjective ?
3) f est-elle bijective ? si oui déduire sa réciproque.

Exercice 12 :
Soient $a,\ b,\ c,\ d$ des réels non nuls donnés et soit g une fonction définie par
$g : E \longrightarrow F$
$x \mapsto g(x) = \dfrac{2ax - b}{-cx + d}$.
1) Comment doit-on choisir E pour que g soit une applicaion.
2) Comment doit-on choisir $a,\ b,\ c$ et d pour que g soit une applicaion injective.
3) Comment doit-on choisir $a,\ b,\ c,\ d$ et F pour que g soit une applicaion surjective.

4) Comment doit-on choisir $a,\ b,\ c,\ d,\ E$ et F pour que g soit une applicaion bijective.

1.6 Corrigé de la série d'exercices

<u>Exercice 1 :</u>
Etablir les propriétés suivantes en utilisant le tableau de vérité

1) $\overline{S \wedge Q} \Longleftrightarrow \overline{S} \vee \overline{Q}$

S	1	1	0	0
Q	1	0	1	0
$\overline{S}$	0	0	1	1
$\overline{Q}$	0	1	0	1
$S \wedge Q$	1	0	0	0
$\overline{S \wedge Q}$	0	1	1	1
$\overline{S} \vee \overline{Q}$	0	1	1	1

2) $\overline{S \vee Q} \Longleftrightarrow \overline{S} \wedge \overline{Q}$

S	1	1	0	0
Q	1	0	1	0
$\overline{S}$	0	0	1	1
$\overline{Q}$	0	1	0	1
$S \vee Q$	1	1	1	0
$\overline{S \vee Q}$	0	0	0	1
$\overline{S} \wedge \overline{Q}$	0	0	0	1

3) $S \Longrightarrow Q \Longleftrightarrow \overline{Q} \Longrightarrow \overline{S}$

S	1	1	0	0
Q	1	0	1	0
$\overline{S}$	0	0	1	1
$\overline{Q}$	0	1	0	1
$S \Longrightarrow Q$	1	0	1	1
$\overline{Q} \Longrightarrow \overline{S}$	1	0	1	1

4) $\overline{S \Longrightarrow Q} \Longleftrightarrow S \wedge \overline{Q}$

S	1	1	0	0
Q	1	0	1	0
$\overline{S}$	0	0	1	1
$\overline{Q}$	0	1	0	1
$S \Longrightarrow Q$	1	0	1	1
$\overline{S \Longrightarrow Q}$	0	1	0	0
$S \wedge \overline{Q}$	0	1	0	0

5) $(\overline{S} \Longrightarrow \overline{Q}) \vee (S \Longrightarrow \overline{Q}) \Longleftrightarrow (S \vee \overline{S}) \vee \overline{Q}$.

S	1	1	0	0
Q	1	0	1	0
$\overline{S}$	0	0	1	1
$\overline{Q}$	0	1	0	1
$\overline{S} \Longrightarrow \overline{Q}$	1	1	0	1
$S \Longrightarrow \overline{Q}$	0	1	1	1
$(\overline{S} \Longrightarrow \overline{Q}) \vee (S \Longrightarrow \overline{Q})$	1	1	1	1
$S \vee \overline{S}$	1	1	1	1
$(S \vee \overline{S}) \vee \overline{Q}$	1	1	1	1

Exercice 2 :
1) La proposition suivante est-elle une tautologie ?
$[\overline{S} \Longrightarrow (P \vee R)] \Longleftrightarrow [(S \Longrightarrow \overline{P}) \wedge (R \Longrightarrow S)]$.

P	1	1	1	0	0	0	1	0
R	1	1	0	0	0	1	0	1
S	1	0	1	0	1	0	0	1
$\overline{S}$	0	1	0	1	0	1	1	0
$\overline{P}$	0	0	0	1	1	1	0	1
$P \vee R$	1	1	1	0	0	1	1	1
$\overline{S} \Longrightarrow (P \vee R)$	1	1	1	0	1	1	1	1
$S \Longrightarrow \overline{P}$	0	1	0	1	1	1	1	1
$R \Longrightarrow S$	1	0	1	1	1	0	1	1
$(S \Longrightarrow \overline{P}) \wedge (R \Longrightarrow s)$	0	0	0	1	1	0	1	1

Elle n'est pas toujours vraie, donc ce n'est pas une tautologie.
2) Donner la négation et la contraposée de la proposition suivante
$\forall x \in \mathbb{R} : [x < 0 \Longrightarrow x \leqslant x^2]$.
Négation : $\exists x \in \mathbb{R} : [x < 0 \wedge x > x^2]$.
Contraposée : $\forall x \in \mathbb{R} : [x > x^2 \Longrightarrow x \geqslant 0]$.

Exercice 3 :
Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?
Justifier votre réponse puis donner leurs négation.
a) $\forall x \in \mathbb{N},\ \exists y \in \mathbb{N},\ y > x + 1$ vraie car :
Il suffit de prendre $y = x + 2$.
De plus la négation est : $\exists x \in \mathbb{N},\ \forall y \in \mathbb{N},\ y \leqslant x + 1$.

b) $\exists x \in \mathbb{N},\ \forall y \in \mathbb{N},\ x \leqslant y$ vraie car :
Il suffit de prendre $x = 0$.

c) $\exists x \in \mathbb{N},\ \forall y \in \mathbb{N},\ x < y$ fausse car pour $y = 0$ le x n'existe pas.
De plus la négation est : $\forall x \in \mathbb{N},\ \exists y \in \mathbb{N},\ x \geqslant y$.

d) $\exists x \in \mathbb{N},\ \exists y \in \mathbb{N}^*,\ (x - y)(x + y) = y^2$. fausse car :

$(x-y)(x+y) = y^2 \Longrightarrow x^2 - y^2 = y^2 \Longrightarrow x^2 = 2y^2 \Longrightarrow \sqrt{2} = \dfrac{x}{y} \in \mathbb{Q}$, mais $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ d'où lacontradiction.
De plus la négation est : $\forall x \in \mathbb{N},\ \forall y \in \mathbb{N}^*,\ (x-y)(x+y) \neq y^2$.

<u>Exercice 4 :</u>
1) Montrer que $\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{3} \notin Q$.
Raisonnons par l'absurde, supposons que $\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{3} \in Q \Longrightarrow \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{3} = \dfrac{a}{b}$ avec $a \wedge b = 1$ et $b \neq 0$, alors
$\sqrt{3} + \sqrt{6} = \dfrac{a}{b} - \sqrt{2} \Longrightarrow (\sqrt{3} + \sqrt{6})^2 = (\dfrac{a}{b} - \sqrt{2})^2 \Longrightarrow 3 + 6 + 2\sqrt{18} = \dfrac{a^2}{b^2} + 2 - 2\sqrt{2}\,\dfrac{a}{b}$
$9 + 6\sqrt{2} = \dfrac{a^2}{b^2} + 2 - 2\sqrt{2}\,\dfrac{a}{b} \Longrightarrow (6 + 2\dfrac{a}{b})\sqrt{2} = \dfrac{a^2}{b^2} - 7 \Longrightarrow \dfrac{6b + 2a}{b}\sqrt{2} = \dfrac{a^2 - 7b^2}{b^2}$.
Ce qui donne $\sqrt{2} = \dfrac{a^2 - 7b^2}{6b^2 + 2ab} \in \mathbb{Q}$. (Contradiction car $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.)

2) Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N},\ 4^n + 6n - 1$ divise 9 $\quad (R_n)$
Pour $n = 0$, on a $4^0 + 6(0) - 1 = 0 = 0.(9) \Longrightarrow 4^0 + 6(0) - 1$ est un multiple de $9 \Longrightarrow (R_0)$ est vraie.
Supposons que (R_n) est vraie pour pour un $n \in \mathbb{N}$ (l'hypothése de récurrence), et montrons que (R_{n+1}) l'est aussi, alors

$$\begin{aligned}
4^{n+1} + 6(n+1) - 1 &= 4.4^n + 6n + 6 - 1 \\
&= 3.4^n + 4^n + 6n - 1 + 6 \\
&= 9k + 3.4^n + 6 \text{ car } 4^n + 6n - 1 = 9k \text{ avec } k \in \mathbb{Z} \\
&= 9k + 3(9k - 6n + 1) + 6 \text{ car } 4^n = 9k - 6n + 1 \\
&= 9k + 3(9k) - 18n + 9 \\
&= 9(k + 3k - 2n + 1) \\
&= 9(4k - 2n + 1) \\
&= 9k' \text{ avec } k' \in \mathbb{Z}.
\end{aligned}$$

Ce qui implique que $4^{n+1} + 6(n+1) - 1$ est un multiple de 9.
Donc $\forall n \in \mathbb{N},\ 4^n + 6n - 1$ est un multiple de 9.

3) Monter que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 2^{n-1} \leqslant n!$. avec $n! = n(n-1)(n-2)...1$ et $0! = 1$.
Pour $n = 1$, on a $2^{1-1} = 2^0 \leqslant 0! = 1 \leqslant 1! = 1 \Longrightarrow (R_0)$ est vraie.
Supposons que R_n est vraie pour un $n \in \mathbb{N}^*$ (l'hypothése de récurrence), et montrons que (R_{n+1}) l'est aussi, alors
$2^n = 2.2^{n-1} \leqslant 2n! \leqslant (n+1)n! = (n+1)!$ car $2^{n-1} \leqslant n!$.
Donc $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 2^{n-1} \leqslant n!$.

<u>Exercice 5 :</u>
Soient A, B et C trois parties d'un ensemble E.
1) Montrer que $A \cup B = A \cap C \Longleftrightarrow B \subset A \subset C$.
$\Longrightarrow$
Supposons que $A \cup B = A \cap C$ et montrons que $B \subset A \subset C$.
a) Montrons que $B \subset A$
Soit $x \in B \Longrightarrow x \in A \cup B \Longrightarrow x \in A \cap C \Longrightarrow x \in A$.
Don $B \subset A$.

b) Montrons que $A \subset C$
Supposons que $x \in A \Longrightarrow x \in A \cup B \Longrightarrow x \in A \cap C \Longrightarrow x \in A$ et $x \in C \Longrightarrow x \in C$.
Donc $A \subset C$, et par suite $B \subset A \subset C$.

$\Longleftarrow$
Supposons que $B \subset A \subset C$ et montrons que $A \cup B = A \cap C$.
a) Montrons que $A \cup B \subset A \cap C$
Soit $x \in A \cup B \Longrightarrow \begin{cases} x \in A & \Longrightarrow \quad x \in C \\ x \in B & \Longrightarrow \quad x \in A \Longrightarrow x \in C. \end{cases}$
Car $B \subset A \subset C$, ce qui implique que $x \in A \cap C$.
Donc $A \cup B \subset A \cap C$.
b) Montrons que $A \cap C \subset A \cup B$
Soit $x \in A \cap C \Longrightarrow x \in A \Longrightarrow x \in A \cup B$.
Donc $A \cap C \subset A \cup B$, et par suite $A \cup B = A \cap C$.

2) Montrer que
$A \subset B \Longleftrightarrow C_E^B \subset C_E^A \Longleftrightarrow A \cup B = B$.
a) Montrons que $A \subset B \Longleftrightarrow C_E^B \subset C_E^A$

$\Longrightarrow$
Supposons que $A \subset B$ et montrons que $C_E^B \subset C_E^A$.
Soit $x \in C_E^B \Longrightarrow x \in E$ et $x \notin B \Longrightarrow x \in E$ et $x \notin A$ car $A \subset B \Longrightarrow x \in C_E^A$.
Donc $C_E^B \subset C_E^A$.

$\Longleftarrow$
Supposons que $C_E^B \subset C_E^A$ et montrons que $A \subset B$.
Soit $x \in A \Longrightarrow x \notin C_E^A \Longrightarrow x \notin C_E^B$ car $C_E^B \subset C_E^A \Longrightarrow x \in B$.
Donc $A \subset B$.
b) Montrons que $C_E^B \subset C_E^A \Longleftrightarrow A \cup B = B$.

$\Longrightarrow$
Supposons que $C_E^B \subset C_E^A$ et montrons que $A \cup B = B$.
- Montrons que $A \cup B \subset B$
Soit $x \in A \cup B \Longrightarrow \begin{cases} x \in A & \Longrightarrow \quad x \notin C_E^A \Longrightarrow x \notin C_E^B \Longrightarrow x \in B \\ x \in B. & \end{cases}$
Donc $A \cup B \subset B$.
- 0n a $B \subset A \cup B$ évident dans tous les cas.
Par suite $A \cup B = B$.

$\Longleftarrow$
Supposons que $A \cup B = B$ et montrons que $C_E^B \subset C_E^A$.
Soit $x \in C_E^B \Longrightarrow x \notin B \Longrightarrow x \notin A \cup B$ car $A \cup B = B \Longrightarrow x \notin A \Longrightarrow x \in C_E^A$.
Donc $C_E^B \subset C_E^A$.

3) A-t-on $P(A \cup B) = P(A) \cup P(B)$? justifier votre réponse.
$P(A \cup B) = P(A) \cup P(B)$ est fausse car il suffit de prendre $A = \{1\}$ et $B = \{2\}$ alors $A \cup B = \{1, 2\}$.
Donc $P(A \cup B) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,\ 2\}\}$.

D'autre part
$P(A) = \{\emptyset, \{1\}\}$ et $P(B) = \{\emptyset, \{2\}\} \Longrightarrow P(A) \cup P(B) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}\} \neq P(A \cup B)$.

4) A-t-on $P(A \cap B) = P(A) \cap P(B)$? justifier votre réponse.
$P(A \cap B) = P(A) \cap P(B)$ est vraie car :

- Montrons que $P(A \cap B) \subset P(A) \cap P(B)$
Soit $F \in P(A \cap B) \Longrightarrow F \subset (A \cap B) \Longrightarrow F \subset A$ et $F \subset B \Longrightarrow F \in P(A)$
et $F \in P(B) \Longrightarrow F \in P(A) \cap P(B)$.
Donc $P(A \cap B) \subset P(A) \cap P(B)$.

- Montrons que $P(A) \cap P(B) \subset P(A \cap B)$
Soit $F \in P(A) \cap P(B) \Longrightarrow F \in P(A)$ et $F \in P(B) \Longrightarrow F \subset A$ et $F \subset B$
$\Longrightarrow F \subset (A \cap B) \Longrightarrow F \in P(A \cap B)$.
Donc $P(A) \cap P(B) \subset P(A \cap B)$, par suite $P(A \cap B) = P(A) \cap (B)$.

<u>Exercice 6 :</u>
Soit E un ensemble non vide et $A,\ B \in P(E)$.
On définit la différence symétrique des ensembles A et B par
$A\Delta B = (A \cup B)\diagdown(A \cap B)$.
1) Montrer que $A\Delta B = (A\diagdown B) \cup (B\diagdown A)$.

$$\begin{aligned}
A\Delta B &= (A \cup B)\diagdown(A \cap B) \\
&= (A \cup B) \cap (\overline{A \cap B}) \\
&= (A \cup B) \cap (\overline{A} \cup \overline{B}) \\
&= [(A \cup B) \cap \overline{A}] \cup [(A \cup B) \cap \overline{B}] \\
&= (A \cap \overline{A}) \cup (B \cap \overline{A}) \cup (A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{B}) \\
&= (B \cap \overline{A}) \cup (A \cap \overline{B}) \\
&= (B\diagdown A) \cup (A\diagdown B) \\
&= (A\diagdown B) \cup (B\diagdown A).
\end{aligned}$$

2) Calculer $B\Delta B,\ \overline{B}\Delta B,\ E\Delta B,\ \emptyset\Delta B$.
$B\Delta B = (B\diagdown B) \cup (B\diagdown B) = (B \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{B}) = \emptyset$.
$\overline{B}\Delta B = (\overline{B}\diagdown B) \cup (B\diagdown \overline{B}) = (\overline{B} \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{\overline{B}}) = (\overline{B} \cap \overline{B}) \cup (B \cap B) = \overline{B} \cup B = E$.
$E\Delta B = (E\diagdown B) \cup (B\diagdown E) = (E \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{E}) = (E \cap \overline{B}) \cup (B \cap \emptyset) = \overline{B} \cup \emptyset = \overline{B}$.
$\emptyset\Delta B = (\emptyset\diagdown B) \cup (B\diagdown\emptyset) = (\emptyset \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{\emptyset}) = (\emptyset \cap \overline{B}) \cup (B \cap E) = \emptyset \cup B = B$.

<u>Exercice 7 :</u>
On définit l'application caractéristique par

$\Psi_A \longrightarrow \{0,\ 1\}$
$x \mapsto \Psi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \in A \\ 0 & \text{si} \quad x \notin A \end{cases}$
1) Montrer que $\Psi_A = \Psi_B \Longleftrightarrow A = B$.

$\Longrightarrow$
Supposons que $\Psi_A = \Psi_B$ et montrons que $A = B$.

a) Montrons que $A \subset B$.
Soit $x \in A \Longrightarrow \Psi_A(x) = 1 \Longrightarrow \Psi_B(x) = 1 \Longrightarrow x \in B$ car $\Psi_A = \Psi_B$.
Donc $A \subset B$.

b) Montrons que $B \subset A$.
Soit $x \in B \Longrightarrow \Psi_B(x) = 1 \Longrightarrow \Psi_A(x) = 1 \Longrightarrow x \in A$ car $\Psi_A = \Psi_B$.
Donc $B \subset A$, par suite $A = B$.

$\Longleftarrow$
Supposons que $A = B$ et montrons que $\Psi_A = \Psi_B$.
Il suffit de remplacer A par B c'est-à-dire
$\Psi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \in A \\ 0 & \text{si} \quad x \notin A \end{cases} = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \in B \\ 0 & \text{si} \quad x \notin B \end{cases} = \Psi_B(x)$ car $A = B$.

2) Vérifier les propriétés suivantes
(a) $\Psi_{\overline{A}} = 1 - \Psi_A$.
Si $x \in A \Longrightarrow x \notin \overline{A} \Longrightarrow \Psi_A(x) = 1$ et $\Psi_{\overline{A}}(x) = 0$.
Si $x \notin A \Longrightarrow x \in \overline{A} \Longrightarrow \Psi_A(x) = 0$ et $\Psi_{\overline{A}}(x) = 1$.
Donc $\forall x \in E,\ \Psi_{\overline{A}}(x) = 1 - \Psi_A(x)$.

(b) $\Psi_{A\cap B} = \Psi_A \Psi_B$.
Si $x \in A \cap B \Longrightarrow x \in A$ et $x \in B \Longrightarrow \Psi_{A\cap B}(x) = \Psi_A(x) = \Psi_B(x) = 1$.
Si $x \notin A \cap B \Longrightarrow x \in \overline{A \cap B} \Longrightarrow x \notin A$ ou $x \notin B \Longrightarrow \Psi_{A\cap B}(x) = 0$
et $\Psi_A(x) = 0$ ou $\Psi_B(x) = 0$.
Donc $\forall x \in E,\ \Psi_{A\cap B}(x) = \Psi_A(x)\Psi_B(x)$.

3) Etablir les égalités de Morgan.
a) Montrons que $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$
- Montrons que $\overline{A \cup B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$
Soit $x \in \overline{A \cup B} \Longrightarrow x \notin A \cup B \Longrightarrow x \notin A$ et $x \notin B \Longrightarrow x \in \overline{A}$ et $x \in \overline{B} \Longrightarrow x \in \overline{A} \cap \overline{B}$.
Donc $\overline{A \cup B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$.

- Montrons que $\overline{A} \cap \overline{B} \subset \overline{A \cup B}$
Soit $x \in \overline{A} \cap \overline{B} \Longrightarrow x \in \overline{A}$ et $x \in \overline{B} \Longrightarrow x \notin A$ et $x \notin B \Longrightarrow x \notin A \cup B \Longrightarrow x \in \overline{A \cup B}$.
Donc $\overline{A} \cap \overline{B} \subset \overline{A \cup B}$, par suite $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.

b) Montrons que $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$
- Montrons que $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cup \overline{B}$
Soit $x \in \overline{A \cap B} \Longrightarrow x \notin A \cap B \Longrightarrow x \notin A$ ou $x \notin B \Longrightarrow x \in \overline{A}$ ou $x \in \overline{B} \Longrightarrow x \in \overline{A} \cup \overline{B}$.
Donc $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cup \overline{B}$.

- Montrons que $\overline{A} \cup \overline{B} \subset \overline{A \cap B}$
Soit $x \in \overline{A} \cup \overline{B} \Longrightarrow x \in \overline{A}$ ou $x \in \overline{B} \Longrightarrow x \notin A$ ou $x \notin B \Longrightarrow x \notin A \cap B \Longrightarrow x \in \overline{A \cap B}$.
Donc $\overline{A} \cup \overline{B} \subset \overline{A \cap B}$, par suite $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

Exercice 8 : Soit

$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \mapsto 2x - 1$
et
$g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \mapsto \dfrac{1}{x^2+1}$
1) Montrer que f est bijective.
a) Montrons que f est injective.
Soient $x_1,\ x_2 \in \mathbb{R}$ telle que

$$\begin{array}{rcl} f(x_1) & = & f(x_2) \\ 2x_1 - 1 & = & 2x_2 - 1 \\ 2x_1 & = & 2x_2 \\ x_1 & = & x_2 \end{array}$$

Donc f est injective.

b) Montrons que f est surjective.
$y = f(x) \Longrightarrow y = 2x - 1 \Longrightarrow 2x = y + 1 \Longrightarrow \dfrac{y+1}{2}$.
Alors $\forall y \in \mathbb{R},\ \exists x = \dfrac{y+1}{2}$ tel que $f(x) = y$.
Donc f est surjective, par suite f est bijective.

2) g est-elle injective ? surjective ? justifier.
a) Soients $x_1,\ x_2 \in \mathbb{R}$, tels que

$$\begin{array}{rcl} g(x_1) & = & g(x_2) \\ \dfrac{1}{x_1^2+1} & = & \dfrac{1}{x_2^2+1} \\ x_1^2+1 & = & x_2^2+1 \\ x_1^2 & = & x_2^2 \\ x_1^2 - x_2^2 & = & 0 \\ (x_1 - x_2)(x_1 + x_2) & = & 0 \\ x_1 = x_2 & \text{ou} & x_1 = -x_2 \end{array}$$

Donc g n'est pas injective.

b) g surjective $\Longleftrightarrow \forall y \in \mathbb{R},\ \exists x \in \mathbb{R}$ tel que $g(x) = y$.
Alors $y = \dfrac{1}{x^2+1} \Longrightarrow x^2 + 1 = \dfrac{1}{y} \Longrightarrow x^2 = \dfrac{1}{y} - 1 \Longrightarrow x = \pm\sqrt{\dfrac{1}{y} - 1}$.
Donc si $y = 0,\ x$ n'existe pas c'est-à-dire il n'esxiste pas de x dans $\mathbb{R}$ tel que $y = g(x) = 0$.
Par suite g n'est pas surjective ce qui implique que g n'est pas bijective.

3) A-t-on $f \circ g = g \circ f$, justifier.
$f \circ g \neq g \circ f$ car pour $x = 0$, on a
$(f \circ g)(0) = f(g(0)) = f(1) = 1$
$(g \circ f)(0) = g(f(0)) = g(-1) = \dfrac{1}{2}$

Donc $1 \neq \dfrac{1}{2} \Longrightarrow (f \circ g)(0) \neq (g \circ f)(0)$.

Exercice 9 :

Soit f une application définie par
$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \mapsto \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$
1) f est-elle bijective ?

a) L'injectivité :

Soient $x_1,\ x_2 \in \mathbb{R}$ tels que

$$\begin{array}{rcl} f(x_1) & = & f(x_2) \\ \dfrac{x_1}{\sqrt{x_1^2+1}} & = & \dfrac{x_2}{\sqrt{x_2^2+1}} \\ \dfrac{x_1^2}{x_1^2+1} & = & \dfrac{x_2^2}{x_2^2+1} \\ x_1^2(x_2^2+1) & = & x_2^2(x_1^2+1) \\ x_1^2x_2^2+x_1^2 & = & x_2^2x_1^2+x_2^2 \\ x_1^2-x_2^2 & = & 0 \\ (x_1-x_2)(x_1+x_2) & = & 0 \\ x_1=x_2 & \text{ou} & x_1=-x_2 \end{array}$$

Donc f n'est pas injective, ce qui implique que f n'est pas bijective.

2) Si oui déterminer sa réciproque, et si non donner les plus grands ensembles A et B tels que f soit bijective, puis trouver f^{-1}.
Pour que f soit injective il faut que x_1 et x_2 sont de même signe, c'est-à-dire $\mathbb{R}^+$ ou $\mathbb{R}^-$ (l'ensemble de départ).

b) La surjectivité :

$y = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}} \Longrightarrow y^2 = \dfrac{x^2}{x^2+1} \Longrightarrow y^2(x^2+1) = x^2 \Longrightarrow y^2x^2+y^2 = x^2$
$\Longrightarrow y^2x^2+y^2-x^2 = 0 \Longrightarrow x^2(y^2-1)+y^2 = 0 \Longrightarrow x^2 = \dfrac{-y^2}{y^2-1} = \dfrac{y^2}{1-y^2}$
$\Longrightarrow x = \dfrac{y}{\sqrt{1-y^2}}$.
On remarque que pour $y \geqslant 1,$ ou $y \leqslant -1,$ x n'existe pas.
Donc f n'est pas surjective.
Alors pour que f soit surjective il faut que $y \in]-1,+1[$. Par suite

$$f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow]-1,+1[$$

$$x \mapsto \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

et

$$f^{-1} :]-1,+1[\longrightarrow \mathbb{R}^+$$

$$y \mapsto \frac{y}{\sqrt{1-y^2}}.$$

Exercice 10 :
Soit $f : E \longrightarrow F$ une application et soient A et B deux ensembles de E.
Montrer que f est injective $\Longleftrightarrow A \cap B = \emptyset \Longrightarrow f(A) \cap f(B) = \emptyset$.

$\Longrightarrow$
Supposons que f est injective et $A \cap B = \emptyset$, montrons que $f(A) \cap f(B) = \emptyset$.
Raisonnement par l'absurde alors supposons que $f(A) \cap f(B) \neq \emptyset$.
Soit $y \in f(A) \cap f(B) \Longrightarrow y \in f(A)$ et $y \in f(B) \Longrightarrow (y = f(a)$ avec $a \in A)$ et $(y = f(b)$ avec $b \in B) \Longrightarrow f(a) = f(b) \Longrightarrow a = b$ car f est injective, contradiction avec $A \cap B = \emptyset$.
Donc $f(A) \cap f(B) = \emptyset$.

$\Longleftarrow$
Supposons que $A \cap B = \emptyset \Longrightarrow f(A) \cap f(B) = \emptyset$, et montrons que f est injective.
Soient $x_1,\ x_2 \in E$ tels que $x_1 \neq x_2$ et montrons que $f(x_1) \neq f(x_2)$.
On pose $A = \{x_1\}$ et $B = \{x_2\} \Longrightarrow A \cap B = \emptyset$.
Donc d'après l'hypothése $f(A) \cap f(B) = \emptyset$, on obtient $f(\{x_1\}) \cap f(\{x_2\}) = \emptyset$
$\Longrightarrow f(x_1) \cap f(x_2) = \emptyset \Longrightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$, ce qui implique que f est injective.

Exercice 11 :
Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $]-1,\ +1[$ définie par$f(x) = \dfrac{x}{1+|x|}$.
1) f est-elle injective ?

$$f(x) = \frac{x}{1+|x|} = \begin{cases} \dfrac{x}{1+x} & \text{si} \quad x \geqslant 0 \\[2ex] \dfrac{x}{1-x} & \text{si} \quad x \leqslant 0 \end{cases}$$

Soient $x_1,\ x_2 \in \mathbb{R}$ tels que $f(x_1) = f(x_2) \Longrightarrow \dfrac{x_1}{1+|x_1|} = \dfrac{x_2}{1+|x_2|}$.
Si x_1 et x_2 sont de signe different par exemple $x_1 < 0$ et $x_2 > 0$ alors $f(x_1) = f(x_2)$
$\Longrightarrow \dfrac{x_1}{1+|x_1|} = \dfrac{x_2}{1+|x_2|}$ impossible car $f(x_1) < 0$ et $f(x_2) > 0$.
Donc x_1 et x_2 sont toujours de même signe.
Par suite $f(x_1) = f(x_2) \Longrightarrow \dfrac{x_1}{1+|x_1|} = \dfrac{x_2}{1+|x_2|} \Longrightarrow x_1 + x_1|x_2| = x_2 + |x_1|x_2$.
Si $x_1 \geqslant 0$ et $x_2 \geqslant 0$ alors $x_1 + x_1x_2 = x_2 + x_1x_2 \Longrightarrow x_1 = x_2$.
Si $x_1 \leqslant 0$ et $x_2 \leqslant 0$ alors $x_1 - x_1x_2 = x_2 - x_1x_2 \Longrightarrow x_1 = x_2$.
Donc f est injective.

2) f est-elle surjective ?

$$y = f(x) \Longrightarrow y = \frac{x}{1+|x|} \begin{cases} y = \dfrac{x}{1+x} & \text{si} \quad x \geqslant 0 \\[2ex] y = \dfrac{x}{1-x} & \text{si} \quad x \leqslant 0 \end{cases}$$

a) Si $x \geqslant 0$ alors $y = \dfrac{x}{1+x} \Longrightarrow x = yx + y \Longrightarrow y = x - yx \Longrightarrow y = x(1-y) \Longrightarrow x = \dfrac{y}{1-y}$.
Donc $\forall y \in [0, 1[,\ \exists x = \dfrac{y}{1-y}$ tel que $y = f(x)$.

b) Si $x \leqslant 0$ alors $y = \dfrac{x}{1-x} \Longrightarrow x = y - xy \Longrightarrow y = x + yx \Longrightarrow y = x(1+y) \Longrightarrow x = \dfrac{y}{1+y}$.
Donc $\forall y \in]-1, 0],\ \exists x = \dfrac{y}{1+y}$ tel que $y = f(x)$.

Par suite $f^{-1}(y) = \begin{cases} \dfrac{y}{1+y} & \text{si} \quad y \in]-1, 0] \\ \\ \dfrac{y}{1-y} & \text{si} \quad y \in [0, 1[\end{cases}$

Conclusion :

$$f^{-1} :]-1, +1[\longrightarrow \mathbb{R}$$

$$y \mapsto f^{-1}(y) = \frac{y}{1-|y|}.$$

Exercice 12 :
Soient $a,\ b,\ c,\ d$ des réels non nuls donnés et soit g une fonction définie par
$g : E \longrightarrow F$
$x \mapsto g(x) = \dfrac{2ax - b}{-cx + d}$.
1) Comment doit-on choisir E pour que g soit une applicaion.
$D_g = \{x \in \mathbb{R} / -cx + d \neq 0\}$.
$-cx + d = 0 \Longrightarrow cx = d \Longrightarrow x = \dfrac{d}{c}$.
Donc $E = \mathbb{R} \diagdown \{\dfrac{d}{c}\}$.

2) Comment doit-on choisir $a,\ b,\ c$ et d pour que g soit une applicaion injective.
Soient $x_1,\ x_2 \in \mathbb{E}$ tels que

$$\begin{array}{rcl} g(x_1) & = & g(x_2) \\ \dfrac{2ax_1 - b}{-cx_1 + d} & = & \dfrac{2ax_2 - b}{-cx_2 + d} \\ (2ax_1 - b)(-cx_2 + d) & = & (2ax_2 - b)(-cx_1 + d) \\ -2acx_1x_2 + 2adx_1 + bcx_2 - bd & = & -2acx_1x_2 + 2adx_2 + bcx_1 - bd \\ 2adx_1 + bcx_2 & = & 2adx_2 + bcx_1 \\ 2adx_1 - bcx_1 + bcx_2 - 2adx_2 & = & 0 \\ (2ad - bc)x_1 + (bc - 2ad)x_2 & = & 0 \\ (2ad - bc)(x_1 - x_2) & = & 0. \end{array}$$

Si $2ad - bc \neq 0$ alors $x_1 = x_2$ et g sera injective.

3) Comment doit-on choisir $a,\ b,\ c,\ d$ et F pour que g soit une applicaion surjective.

$$\begin{aligned}
y &= g(x) \\
y &= \frac{2ax-b}{-cx+d} \\
y(-cx+d) &= 2ax-b \\
-cyx+yd &= 2ax-b \\
-cyx-2ax &= -yd-b \\
2ax+cyx &= yd+b \\
x(2a+cy) &= yd+b \\
x &= \frac{yd+b}{2a+cy}.
\end{aligned}$$

Alors x n'est pas définie si $2a+cy=0 \Longrightarrow cy=-2a \Longrightarrow y=\dfrac{-2a}{c}$.

Par suite f est surjective $\Longleftrightarrow F=\mathbb{R}\diagdown\{\dfrac{-2a}{c}\}$.

4) Comment doit-on choisir $a,\ b,\ c,\ d,\ E$ et F pour que g soit une applicaion bijective.

Pour que g soit une application bijective il faut qu'elle vérifie les conditions d'injectivité et de surjectivité, c'est-à-dire :

Si $2ad-bc\neq 0$ et $g:\mathbb{R}\diagdown\{\dfrac{d}{c}\}\longrightarrow\mathbb{R}\diagdown\{\dfrac{-2a}{c}\}$.

Chapitre 2

Structures algébriques

2.1 Groupes

2.1.1 Loi de composition interne

Définition 24. *Soit E un ensemble non vide alors toute application $*$ qui vérifie*

$$* : E \times E \longrightarrow E$$

$$(x, y) \mapsto x * y = *(x, y)$$

est dite loi de composition interne (l.c.i).

Exemple 29. $+$ *est une loi de composition interne dans $\mathbb{Z}$.*

Remarque 14. *E munit de la loi $*$ est notée $(E, *)$.*

2.1.2 Groupe, sous groupe, morphisme

Définition 25. *(Groupe)*

Soit $(E, *)$ un ensemble non vide, on dit que $(E, *)$ est un groupe si
1) $*$ associative i.e $\forall x, y, z \in E,\ (x * y) * z = x * (y * z)$.
2) E admet un élément neutre pour la loi $*$ i.e $\exists e \in E,\ \forall x \in E \ /\ x * e = e * x = x$.
3) Tout élément de E admet un symétrique i.e $\forall x \in E,\ \exists x' \in E,\ /\ x * x' = x' * x = e$.

Remarque 15. *Si $\forall x, y \in E,\ x * y = y * x$, on dit que $(E, *)$ est un groupe Abélien ou commutatif, on note le symétrique de x par x' ou x^{-1}.*

Exemple 30. *$\mathbb{R}^+$ est un groupe commutatif.*
$\mathbb{N}^+$ n'est pas un groupe.

Exercice :
On définit sur la loi $*$ par $x * y = x + y - xy,\ (\mathbb{R}, *)$ est-il un groupe ?

a) Loi de composition interne :
Soient $x, y \in \mathbb{R}$ alors $x * y = (x + y - xy) \in \mathbb{R}$.
Donc $*$ est une loi de composition interne.

b) Commutativité :
Soient $x, y \in \mathbb{R}$ alors $x * y = x + y - xy = y + x - yx = y * x$.
Donc la loi $*$ est commutative.

c) L'associativité :
Soient $x, y, z \in \mathbb{R}$ alors
$(x*y)*z = (x+y-xy)*z+(x+y-xy)+z-(x+y-xy)z = x+y+z-xy-xz-yz+xyz.$
$x*(y*z) = x*(y+z-yz) = x+(y+z-yz)-x(y+z-yz) = x+y+z-xy-xz-yz+xyz.$
0n remarque que $(x * y) * z = x * (y * z)$.
Donc la loi $*$ est associative.

d) L'élément neutre :
Soient $x \in \mathbb{R}$ alors $x * e = x \Longrightarrow x + e - xe = x \Longrightarrow e(1 - x) = 0 \Longrightarrow e = 0,$ car $\forall x \in \mathbb{R}$.
Donc l'élément neutre est $e = 0$.

e) L'élément symétrique :
Soient $x \in \mathbb{R}$ alors $x * x' = e \Longrightarrow x * x' = 0 \Longrightarrow x + x' - xx' = 0 \Longrightarrow x'(1 - x) = -x, \Longrightarrow$ $x' = \dfrac{-x}{1-x}$.
Si $x = 1$, la loi $*$ n'admet pas un symétrique.
Donc $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ est un groupe mais $\mathbb{R}$ n'est pas un groupe car l'élément 1 n'admet pas un symétrique.

Théorème 7. *Soit E un ensemble non vide munit d'une loi de composition interne Δ. Si (E, Δ) est un groupe alors $\forall x, y \in E$, on a $(x\Delta y)' = y'\Delta x'$.*

Preuve. Soient $x, y \in E,\ (x\Delta y)' = z \Longrightarrow z\Delta(x\Delta y) = e$.
Ce qui donne

$$\begin{aligned} z\Delta x\Delta y\Delta y' &= e\Delta y' \\ z\Delta x\Delta e &= y' \\ z\Delta x &= y' \\ z\Delta x\Delta x' &= y'\Delta x' \\ z\Delta e &= y'\Delta x' \\ z &= y'\Delta x'. \end{aligned}$$

■

Définition 26. *(Sous groupe)*

Soit E un ensemble non vide muni d'une loi de composition interne telle que $(E, *)$ est un groupe et $A \in P(E)$ i.e $A \subset E$ alors $(A, *)$ est un sous groupe de $(E, *)$ si

1) $e \in A,\ i.e\ A \neq \emptyset$.
2) $\forall x, y \in A,\ (x * y) \in A$ *est dite stabilité.*
3) $\forall x \in A,\ x' \in A$ *est dite symétrique.*

Exemple 31. $(3\mathbb{Z}, +)$ *est un sous groupe de* $(\mathbb{Z}, +)$ *avec* $3\mathbb{Z}$ *l'ensemble des entiers multiples de* 3.

Définition 27. *(Morphisme)*

Soient (E, Δ) *et* (F, γ) *deux groupes, alors* f *est un morphisme de groupe si* $\forall x, y \in E,\ f(x\Delta y) = f(x)\gamma f(y)$.

Définition 28.

1. *Un endomorphisme est un morphisme de* E *dans* E.
2. *Un isomorphisme est un morphisme bijective.*
3. *Un automorphisme est un endomorphisme bijective.*

Théorème 8. *Soient* (E, Δ) *et* $(G, *)$ *deux groupes, tels que* e_1 *l'élément neutre de la loi* Δ *et* e_2 *l'élément neutre de la loi* $*$ *et* $f : E \longrightarrow G$ *est un morphisme de groupe, alors*

1. $f(e_1) = e_2$.
2. $\forall x \in E,\ [f(x)]^{-1} = f(x^{-1})$.

Preuve.

1. Montrons que $f(e_1) = e_2$.
   On a $f(e_1 \Delta e_1) = f(e_1) * f(e_1) = f(e_1) \Longrightarrow f(e_1) * f(e_1) * [f(e_1)]^{-1} = f(e_1) * [f(e_1)]^{-1}$
   $f(e_1) * e_2 = e_2 \Longrightarrow f(e_1) = e_2$.
2. Soit $x \in E$, montrons que $[f(x)]^{-1} = f(x^{-1})$.
   On a $f(x\Delta x^{-1}) = f(x) * f(x^{-1}) \Longrightarrow f(e_1) = e_2$ alors
   $f(x\Delta x^{-1}) = f(e_1) = e_2 = f(x) * f(x^{-1}) \Longrightarrow [f(x)]^{-1} * e_2 = [f(x)]^{-1} * f(x) * f(x^{-1}) \Longrightarrow [f(x)]^{-1} = e_2 * f(x^{-1}) \Longrightarrow [f(x)]^{-1} = f(x^{-1})$.

■

Exemple 32. *(Morphisme de groupe)*
Soit f *un morphisme de groupe définit par*

$$f : (\mathbb{R} \setminus \{-3\}, *) \longrightarrow (\mathbb{R}^*, .)$$

$$x \mapsto x + 3$$

telle que la loi $*$ *est* $\forall (x, y) \in \mathbb{R} \setminus \{-3\},\ x * y = x.y + 3(x + y + 2)$, *et* . *est la multiplication usuelle.*
Calculer de deux maniéres differentes l'élément neutre e puis l'élément symétrique x^{-1}.

1) Calculons l'élément neutre

a) Première méthode :
On a

$$\begin{array}{rcl} x * e &=& x \\ x.e + 3(x + e + 2) &=& x \\ x.e + 3x + 3e + 6 &=& x \\ x.e + 3e &=& x - 3x - 6 \\ e(x + 3) &=& -2x - 6 \\ e(x + 3) &=& -2(x + 3) \\ e &=& \dfrac{-2(x + 3)}{x + 3} \\ e &=& -2 \ car\, x \neq -3 \end{array}$$

b) Deuxième méthode :
On a $f(e) = e' \Longrightarrow e + 3 = 1 \Longrightarrow e = -2.$

1) Calculons l'élément symétrique

a) Première méthode :
On a

$$\begin{array}{rcl} x * x^{-1} &=& e \\ x.x^{-1} + 3(x + x^{-1} + 2) &=& -2 \\ x.x^{-1} + 3x + 3x^{-1} + 6 &=& -2 \\ x.x^{-1} + 3x^{-1} &=& -3x - 8 \\ x^{-1}(x + 3) &=& -3x - 9 + 1 \\ x^{-1}(x + 3) &=& -3(x + 3) + 1 \\ x^{-1} &=& \dfrac{-3(x + 3)}{x + 3} + \dfrac{1}{x + 3} \\ x^{-1} &=& -3 + \dfrac{1}{x + 3} \end{array}$$

b) Deuxième méthode :
On a $f(x^{-1}) = [f(x)]^{-1} \Longrightarrow x^{-1} + 3 = \dfrac{1}{x + 3} \Longrightarrow x^{-1} = -3 + \dfrac{1}{x + 3}.$

2.2 Anneau sous anneau corps

Soit E un ensemble non vide et soient deux lois de composition interne $+$ et $\times$.

Définition 29. *(Anneau)*

$(E, +, \times)$ *est un anneau si*
1) $(E, +)$ *est un groupe commutatif, son élément neutre est noté* e *ou* 0_E.
2) $\times$ *est associative.*
3) $\forall x, y, z \in E,\ x \times (y + z) = (x \times y) + (x \times z)$ *ou* $(y + z) \times x = (y \times x) + (z \times x)$ *i.e* $(\times$

est distributive sur +.)
4) E admet un élément neutre pour la deuxième loi $\times$ *noté* e_2 *ou* 1_E.

Remarque 16.

1. *On peut écrire* $x \times y$ *comme* xy.
2. *Les lois* $(+)$ *et* $(\times)$ *ce sont des notations seulement.*
3. *La symétrique de* x *par rapport à la première loi est noté* $-x$.
4. *La symétrique de* x *par rapport à la deuxième loi est noté* x^{-1}.

Exemple 33. $(\mathbb{R}, +, \times)$ *est un anneau.*
$(\mathbb{N}, +, \times)$ *n'est pas un anneau.*

Remarque 17. *Soit* $n \in \mathbb{N}^*$ *et* $x, y \in (E, +, \times)$

1. $nx = x + x + ... + x$ *(n fois.)*
2. $x^n = x \times x \times ... \times x$ *(n fois.)*
3. $(xy)^n \neq x^n y^n$.

Propriétés :
Soient $x, y \in (E, +, \times)$
1) $x.0 = 0.x = 0$
2) $(-x)y = -xy = x(-y)$

Preuve.

1. Montrons que $x.0 = 0$
   On a

$$\begin{aligned} x0 &= x(0+0) \\ x0 &= x0 + x0 \\ x0 + (-x0) &= x0 + x0 + (-x0) \\ 0 &= x0 + 0 \\ 0 &= x0. \end{aligned}$$

2. Montrons que $(-x)y = -xy$
   On a

$$\begin{aligned} (-x)y + xy &= [(-x) + x]y = 0 \\ (-x)y + xy + (-xy) &= 0 + (-xy) \\ (-x)y + 0 &= 0 + (-xy) \\ (-x)y = -xy. & \end{aligned}$$

■
Soit $(E, +, \times)$ un anneau et soit $A \in P(E)$.

Définition 30. $(A, +, \times)$ *est un sous anneau de* E *si*
a) $(A, +)$ *est un sous groupe de* $(E, +)$.
b) $\forall x, y \in A,\ xy \in A$.
c) L'élément neutre de la deuxième loi $e_2 \in A$, *on peut le noté* 1_E.

Exemple 34.

1. $(\mathbb{Z}, +, \times)$ *est un sous anneau de* $(\mathbb{R}, +, \times.)$
2. $(3\mathbb{Z}, +, \times)$ *n'est pas un sous anneau de* $(\mathbb{Z}, +, \times.)$

2.2.1 Corps

Soit E un ensemble non vide et deux lois de composition interne $+$ et $\times$ sur E.

Définition 31. $(E, +, \times)$ *est un corps si*
1) $(E, +, \times)$ *un anneau.*
2) L'élément neutre de la loi $+$ *est different de l'élément neutre de la loi* $\times$.
3) $\forall x \in E \diagdown \{e_1\}$ *admet un symétrique par rapport à la deuxième loi* $\times$.

Exemple 35.

1. $(\mathbb{R}, +, \times)$ *est un corps.*
2. $(\mathbb{Z}, +, \times)$ *n'est pas un corps.*

2.3 Séries d'exercices

Exercice 1 :
Soit une loi de composition interne $*$ définit sur $\mathbb{R}$ telle que $x*y = x+y-nxy$ avec $n \in \mathbb{N}^*$.
$(\mathbb{R}, *)$ est-il un groupe ?

Exercice 2 :
On munit $E = \mathbb{R} - \{-5\}$ de la loi $*$ définie par
$\forall (a,b) \in E^2,\ a * b = a.b + 5(a+b+4)$.
1) Vérifier que $*$ est une loi de composition interne dans E.
2) Montrer que $(E, *)$ est un groupe commutatif.
3) Soit l'application

$$f : (\mathbb{R}^*, .) \longrightarrow (E, *)$$
$$x \mapsto x - 5$$

Montrer que f est un morphisme de groupe avec (. est la multiplication usuelle.)

Exercice 3 :
Soient A et B deux sous groupes de $(E, *)$.
1) Montrer que $A \cap B$ est un sous groupe de E.
2) Soit $n\mathbb{Z}$ un sous groupe de $(\mathbb{Z}, +)$ et $A,\ B \subset n\mathbb{Z}$.
Est ce que $A \cup B$ est un sous groupe de $(n\mathbb{Z}, +)$.

Exercice 4 :
Soit $f : (E, *) \longrightarrow (E, *)$ un endomorphisme de groupe et soit A un sous groupe de $(E, *)$.
1) Montrer que $f(A)$ est un sous groupe de $(E, *)$.
2) $\forall a \in E$, on définit l'application g par

$$g : (E, *) \longrightarrow (E, *)$$
$$x \mapsto a * x * a^{-1}$$

Montrer que g est bijective,déduire sa réciproque.

Exercice 5 :
Soit $f : (E, *) \longrightarrow (F, \Delta)$ un morphisme de groupe.
1) Soit A un sous groupe de F, montrer que $f^{-1}(A)$ est un sous groupe de E.
2) on définit le sous groupe $ker f$ par :
$ker f = \{x \in E \ / \ f(x) = e_2\}$ tel que e_2 l'élément neutre de (F, Δ).
Montrer que f injective $\Longleftrightarrow ker f = \{e_1\}$ avec e_1 l'élément neutre de $(E, *)$.

Exercice 6 :
Soient $E = \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ et $f : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}$ une application telle que
$\forall (a,b),\ (c,d) \in E$ avec $(a,b) * (c,d) = (ac, bc + \phi(a)d)$.
Qoel condition doit vérifier ϕ pour que $(E, *)$ soit un groupe.

Exercice 7 :
Soient A et B deux sous groupes d'un groupe $(E, .)$.
Montrer que AB est un sous groupe de E si et seulement si $AB = BA$.
Indication : $ab \neq ba$ avec $a \in A$ et $b \in B$.

Exercice 8 :
Soit $(E, .)$ un groupe dont l'élément neutre e_1 et pour tout $x \in E$ l'inverse est x^{-1}, soit b un élément de E, on définit la loi $*$ dans E par $\forall x, y \in E,\ x * y = x.b.y$
Montrer que $(E, *)$ est un groupe et préciser l'élément neutre e_2 et l'élément symétrique de x avec $x \in E$.

Exercice 9 :
On munit $\mathbb{R}^2$ de deux lois $+$ et $*$ définies par

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$
$$(x_1, y_1) * (x_2, y_2) = (x_1x_2, x_1y_2 + x_2y_1)$$

1) Montrer que $(\mathbb{R}^2, +)$ est un groupe abélien.
2) Déduire que $(\mathbb{R}^2, +, *)$ est un anneau commutatif.

Exercice 10 :
Soit $(E, +, .)$ l'anneau des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, on pose
$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$$x \mapsto f(x) = \begin{cases} 3x - 5 & \text{si } x \geqslant 0 \\ \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$
et $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$$x \mapsto g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \geqslant 0 \\ \\ x^2 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$
1) Calculer fg.
2) Vérifier que si $fg = 0 \Longrightarrow f = 0$ ou $g = 0$.
3) Que peut-on déduire sur l'anneau $(E, +, .)$.

Exercice 11 :
Soit $E = \{a + b\sqrt{6},\ a, b \in \mathbb{Z}\}$.
1) Montrer que $(E, +, .)$ est un sous anneau de $(\mathbb{R}, +, .)$.
2) On définit l'application ψ par
$\psi : (E, +, .) \longrightarrow (E, +, .)$
$a + b\sqrt{6} \mapsto \psi(a + b\sqrt{6}) = a - b\sqrt{6}$.
Montrer que ψ est un isomorphisme d'anneau.
3) Est ce que $(E, +, .)$ est un corps.

Exercice 12 :
Soit E un ensemble non vide de $\mathbb{N}$, tel que
$E_n = \{0, 1, 2, ..., n - 1\}$ sur lequel on définit deux lois de composition interne.
$\forall x, y \in E_n,\ x \oplus y = s$, avec s est le reste de division de $x+y$ sur n et $\forall x, y \in E_n,\ x \otimes y = p$, avec p est le reste de division de $x \times y$ sur n.
1) Vérifier que $(E_n, \oplus, \otimes)$ est un anneau commutatif.
2) Pour $n = 10$, calculer $3 \oplus 9,\ 8 \otimes 5,\ 7^{-1} \oplus 2,\ 4 \otimes 3^{-1},\ 5^2,\ 9^2$.
3) Résoudre dans E_{10} les équations suivantes :
a) $(9 \otimes x) \oplus 3 = 0$.
b) $x^2 \oplus 6 = 0$.

2.4 Corrigé de la série d'exercices

Exercice 1 :
Soit une loi de composition interne $*$ définit sur $\mathbb{R}$ telle que $x*y = x+y-nxy$ avec $n \in \mathbb{N}^*$. $(\mathbb{R}, *)$ est-il un groupe ?

a) Commutativité :
Soient $x, y \in \mathbb{R}$, alors

$$\begin{array}{rcl} x * y &=& x + y - nxy \\ &=& y + x - nyx \\ &=& y * x \end{array}$$

b) Associativité :
Soient $x, y, z \in \mathbb{R}$, alors

$$\begin{array}{rcl} (x * y) * z &=& (x + y - nxy) * z \\ &=& (x + y - nxy) + z - n(x + y - nxy)z \\ &=& x + y + z - nxy - nxz - nyz + n^2xyz \\ x * (y * z) &=& x * (y + z - nyz) \\ &=& x + (y + z - nyz) - nx(y + z - nyz) \\ &=& x + y + z - nxy - nxz - nyz + n^2xyz. \end{array}$$

Donc $(x * y) * z = x * (y * z)$.

c) L'élément neutre :
Soit $x \in \mathbb{R}$, tel que $x * e = x \Longrightarrow x + e - nex = x \Longrightarrow e(1 - nx) = 0 \Longrightarrow e = 0$.

d) L'élément symétrique :
Soient $x \in \mathbb{R}$, alors

$$\begin{array}{rcl} x * x' &=& e \\ x * x' &=& 0 \\ x + x' - nxx' &=& 0 \\ x + x'(1 - nx) &=& 0 \\ x'(1 - nx) &=& -x \\ x' &=& \dfrac{-x}{1 - nx} \\ x' &=& \dfrac{x}{nx - 1}. \end{array}$$

Pour $x = \dfrac{1}{n}$, x' n'existe pas, ce qui implique que $(\mathbb{R}, *)$ n'est pas un groupe, tandis que $(\mathbb{R} \setminus \{\dfrac{1}{n}\}, *)$ est un groupe.

Exercice 2 :

On munit $E = \mathbb{R} - \{-5\}$ de la loi $*$ définie par
$\forall (a,b) \in E^2,\ a * b = a.b + 5(a+b+4)$.

1) Vérifier que $*$ est une loi de composition interne dans E.
$\forall (a,b) \in E^2,\ a * b = a.b + 5(a+b+4)$.
Raisonnement par l'absurden alors supposons que $a * b = -5$.
Ce qui implique que

$$\begin{aligned}
a.b + 5(a+b+4) &= -5\\
a.b + 5a + 5b + 20 &= -5\\
a.b + 5a + 5b &= -25\\
a.b + 5a &= -25 - 5b\\
a(b+5) &= -5(b+5)\\
a &= -5 \text{ contradiction } \ \text{car } a \neq -5.
\end{aligned}$$

Donc $*$ est une loi de composition interne dans E.

2) Montrons que $(E, *)$ est un groupe commutatif.

a) Commutativité :

$$\begin{aligned}
\forall (a,b) \in E^2,\ a * b &= a.b + 5(a+b+4)\\
&= b.a + 5(b+a+4)\\
&= b * a
\end{aligned}$$

b) L'associativité :

$$\begin{aligned}
\forall a,b,c \in E,\ (a*b)*c &= [a.b + 5(a+b+4)] * c\\
&= [a.b + 5(a+b+4)]c + 5[(a.b + 5(a+b+4)) + c + 4]\\
&= abc + 5ac + 5bc + 5ab + 25a + 25b + 25c + 120\\
a*(b*c) &= a * [b.c + 5(b+c+4)]\\
&= a(b.c + 5(b+c+4)) + 5[a + (b.c + 5(b+c+4)) + 4]\\
&= abc + 5ac + 5bc + 5ab + 25a + 25b + 25c + 120.
\end{aligned}$$

Ce qui implique que $(a*b)*c = a*(b*c)$.

c) Montrons que la loi $*$ admet un élément neutre

$$\begin{aligned}
\forall a \in E,\ a * e &= a\\
ae + 5(a+e+4) &= a\\
ae + 5a + 5e + 20 &= a\\
e(a+5) &= -5a + a - 20\\
e(a+5) &= -4a - 20\\
e(a+5) &= -4(a+5)\\
e &= \frac{-4(a+5)}{(a+5)} \text{ car } a \neq -5\\
e &= -4
\end{aligned}$$

d) Montrons que chaque élément admet un élément symétrique

$$\begin{aligned}
a * a' &= e \\
aa' + 5(a + a' + 4) &= e \\
aa' + 5(a + a' + 4) &= -4 \\
aa' + 5a + 5a' + 20 &= -4 \\
aa' + 5a' &= -24 - 5a \\
a'(a + 5) &= -24 - 5a \\
a' &= \frac{-24 - 5a}{a + 5} \text{ est bien définie car } a \neq -5.
\end{aligned}$$

Donc $(E, *)$ est un groupe commutatif.

3) Soit l'application

$$f : (\mathbb{R}^*, .) \longrightarrow (E, *)$$
$$x \mapsto x - 5$$

Montrons que f est un morphisme de groupe.
On doit montrer que $f(x.y) = f(x) * f(y)$.
On a

$$\begin{aligned}
f(x.y) &= xy - 5 \\
f(x) * f(y) &= (x - 5) * (y - 5) \\
&= (x - 5)(y - 5) + 5[(x - 5) + (y - 5) + 4] \\
&= xy - 5x - 5y + 25 + 5x - 25 + 5y - 25 + 20 \\
&= xy - 5.
\end{aligned}$$

Donc $f(x.y) = f(x) * f(y)$.

Exercice 3 :
Soient A et B deux sous groupes de $(E, *)$.
1) Montrons que $A \cap B$ est un sous groupe de E.

a) L'élément neutre :
$e \in A$ car A est un sous groupe de E, et $e \in B$ car B est un sous groupe de E ce qui implique que $e \in A \cap B$.

b) Stabilité :
Soient $x, y \in A \cap B \Longrightarrow x, y \in A$ et $x, y \in B$ alors $(x * y) \in A$ et $(x * y) \in B$ car A et B sont des sous groupes de $E \Longrightarrow (x * y) \in A \cap B$.

c) Symétrique :
$x \in A \cap B \Longrightarrow x \in A$ et $x \in B$.
A et B sont des sous groupes de $E \Longrightarrow x' \in A$ et $x' \in B \Longrightarrow x' \in A \cap B$.
Conclusion : $A \cap B$ est un sous groupe de E.

2) Soit $n\mathbb{Z}$ un sous groupe de $(\mathbb{Z}, +)$ et $A,\ B \subset n\mathbb{Z}$.

Est ce que $A \cup B$ est un sous groupe de $(n\mathbb{Z}, +)$.

a) L'élément neutre :
$e \in A$ car A est un sous groupe de $E \Longrightarrow e \in A \cup B$.

b) Stabilité :
Contre exemple : Si on prend $A = 5\mathbb{Z}$ et $B = 6\mathbb{Z}$ alors on remarque que $5 \in 5\mathbb{Z}$ et $6 \in 6\mathbb{Z}$ mais $5 + 6 = 11 \notin 5\mathbb{Z} \cup 6\mathbb{Z}$.
Donc $A \cup B$ n'est pas un sous groupe de $(n\mathbb{Z}, +)$.

<u>**Exercice 4 :**</u>
Soit $f : (E, *) \longrightarrow (E, *)$ un endomorphisme de groupe et soit A un sous groupe de $(E, *)$.
1) Montrons que $f(A)$ est un sous groupe de $(E, *)$.

a) L'élément neutre :
Soit $e \in A$ car A est un sous groupe de $(E, *) \Longrightarrow f(e) = e' \in f(A)$ car f est un endomorphisme de groupe, par suite f est une application de E dans E.

b) Stabilité :
Soient $a, b \in A \Longrightarrow f(A), f(B) \in f(A)$ et $a * b \in A$ car A est un sous groupe de $(E, *) \Longrightarrow f(a) * f(b) = f(a * b) \in f(A)$ car f est un endomorphisme de groupe.
Donc $f(a) * f(b) \in f(A)$.

c) Symétrique :
Soit $a \in A \Longrightarrow f(a) \in f(A)$ et $a^{-1} \in A$ car A est un sous groupe de $(E, *)$
$\Longrightarrow f(a^{-1}) \in f(A) \Longrightarrow [f(a)]^{-1} = f(a^{-1}) \in f(A)$ car f est un endomorphisme de groupe.
Donc $[f(a)]^{-1} \in f(A)$.
Conclusion : $f(A)$ est sous groupe de $(E, *)$.

2) $\forall a \in E$, on définit l'application g par

$$g : (E, *) \longrightarrow (E, *)$$

$$x \mapsto a * x * a^{-1}$$

Montrons que g est bijective,déduire sa réciproque.

a) L'injectivité :
Soient $x_1, x_2 \in E$ tels que

$$\begin{aligned}
g(x_1) &= g(x_2) \\
a * x_1 * a^{-1} &= a * x_2 * a^{-1} \\
a^{-1} * a * x_1 * a^{-1} &= a^{-1} * a * x_2 * a^{-1} \\
e * x_1 * a^{-1} &= e * x_2 * a^{-1} \\
x_1 * a^{-1} &= x_2 * a^{-1} \\
x_1 * a^{-1} * a &= x_2 * a^{-1} * a \\
x_1 * e &= x_2 * e \\
x_1 &= x_2 \Longrightarrow f \text{ est injective.}
\end{aligned}$$

a) La surjectivité :
Soit $y \in E$, tel que

$$\begin{array}{rcl} y & = & a * x * a^{-1} \\ a^{-1} * y & = & a^{-1} * a * x * a^{-1} \\ a^{-1} * y & = & e * x * a^{-1} \\ a^{-1} * y & = & x * a^{-1} \\ a^{-1} * y * a & = & x * a^{-1} * a \\ a^{-1} * y * a & = & x * e \\ a^{-1} * y * a & = & x \end{array}$$

Donc $\exists x = (a^{-1} * y * a) \in E$, tel que $y = g(x)$.

Conclusion : g est bijective et

$$g^{-1} : (E, *) \longrightarrow (E, *)$$

$$y \mapsto a^{-1} * y * a.$$

<u>**Exercice 5 :**</u>
Soit $f : (E, *) \longrightarrow (F, \Delta)$ un morphisme de groupe.
1) Soit A un sous groupe de F, montrons que $f^{-1}(A)$ est un sous groupe de E.

a) L'élément neutre :
$f^{-1}(A) = \{x \in E, \ / \ f(x) \in A\}$.
$f(e_1) = e_2 \in A$ car A est un sous groupe de $F \Longrightarrow e_1 \in f^{-1}(A)$.

b) Stabilité :
Soient $x, y \in f^{-1}(A) \Longrightarrow f(x)$ et $f(y) \in f(A) \Longrightarrow f(x)\Delta f(y) \in A$, car A est un sous groupe de F.
Or f est un morphisme de groupe $\Longrightarrow f(x)\Delta f(y) = f(x * y) \Longrightarrow f(x * y) \in A$
$\Longrightarrow (x * y) \in f^{-1}(A)$.

c) Symétrique :
Soit $x \in f^{-1}(A) \Longrightarrow f(x) \in A \Longrightarrow [f(x)]^{-1} \in A$ car A est un sous groupe de F.
Or f est un morphisme de groupe, alors $[f(x)]^{-1} = f(x^{-1}) \Longrightarrow f(x^{-1}) \in A$
$\Longrightarrow x^{-1} \in f^{-1}(A)$.
Donc $f^{-1}(A)$ est un sous groupe de E.

2) on définit le sous groupe $kerf$ par :
$kerf = \{x \in E \ / \ f(x) = e_2\}$ tel que e_2 l'élément neutre de (F, Δ).

Montrons que f injective $\Longleftrightarrow kerf = \{e_1\}$ avec e_1 l'élément neutre de $(E, *)$.
On a $kerf = \{x \in E \ / \ f(x) = e_2\} = \{x \in E \ / \ f(x) \in \{e_2\}\} = f^{-1}(\{e_2\})$.

Or $\{e_2\}$ sous groupe $\Longrightarrow f^{-1}(\{e_2\}) = kerf$ sous groupe de E.
$\Longrightarrow$
Supposons que f est injective et montrons que $kerf = \{e_1\}$.

a) Montrons que $\{e_1\} \subset kerf$
$\{e_1\} \subset kerf$ car $kerf$ est un sous groupe de E.
b) Montrons que $kerf \subset \{e_1\}$
$x \in kerf \Longrightarrow f(x) = e_2$, or $f(e_1) = e_2 \Longrightarrow f(x) = f(e_1) \Longrightarrow x = e_1$ car f est injective.
Donc $kerf = \{e_1\}$.

$\Longleftarrow$
Supposons que $kerf = \{e_1\}$ et montrons que f est injective.
Soient $x_1, x_2 \in E$ tels que $f(x_1) = f(x_2)$.
On a

$$\begin{aligned} f(x_1)\Delta[f(x_1)]^{-1} &= e_2 \\ f(x_2)\Delta[f(x_1)]^{-1} &= e_2 \text{ car } f(x_1) = f(x_2) \\ f(x_2)\Delta f(x_1^{-1}) &= e_2 \\ f(x_2 * x_1^{-1}) &= e_2. \end{aligned}$$

Ce qui implique que $(x_2 * x_1^{-1}) \in kerf \Longrightarrow (x_2 * x_1^{-1}) \in \{e_1\}$ car $kerf = \{e_1\}$
$\Longrightarrow (x_2 * x_1^{-1}) = e_1 \Longrightarrow x_2 * x_1^{-1} * x_1 = e_1 * x_1 \Longrightarrow x_2 = x_1$.
Donc f est injective.

Exercice 6 :
Soient $E = \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ et $f : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}$ une application telle que
$\forall (a,b),\ (c,d) \in E$ avec $(a,b) * (c,d) = (ac, bc + \phi(a)d)$.
Qoel condition doit vérifier ϕ pour que $(E, *)$ soit un groupe.

a) Loi de composition interne :
Soient $(a,b),\ (c,d) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ alors $a \neq 0$ et $c \neq 0$ ce qui donne $ac \neq 0$ par suite $(a,b) * (c,d) = (ac, bc + \phi(a)d) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$.
Donc $*$ est une loi de composition interne.

b) L'associativité :
Soient $(a,b),\ (c,d),\ (z,r) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ alors $a \neq 0,\ c \neq 0$ et $z \neq 0$ ce qui donne $acz \neq 0$.
On a

$$\begin{aligned} ((a,b) * (c,d)) * (z,r) &= (ac, bc + \phi(a)d) * (z,r) \\ &= (acz, [bc + \phi(a)d]z + \phi(ac)r) \\ &= (acz, bcz + \phi(a)dz + \phi(ac)r) \\ (a,b) * ((c,d) * (z,r)) &= (a,b) * (cz, dz + \phi(c)r) \\ &= (acz, bcz + \phi(a)[dz + \phi(c)r]) \\ &= (acz, bcz + \phi(a)dz + \phi(a)\phi(c)r). \end{aligned}$$

Pour que $((a,b)*(c,d))*(z,r) = (a,b)*((c,d)*(z,r))$ il faut et il suffit que $\phi(ac) = \phi(a)\phi(c)$.

c) L'élément neutre :

Soient $(a,b),\ (e_1,e_2) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ alors $a \neq 0$ et $e_1 \neq 0$, ce qui donne $ae_1 \neq 0$, par suite $(a,b)*(e_1,e_2) = (a,b) \Longrightarrow (ae_1, be_1 + \phi(a)e_2) = (a,b)$

$$\Longrightarrow \begin{cases} ae_1 &= a \\ be_1 + \phi(a)e_2 &= b \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} e_1 &= 1 \\ e_2 &= 0 \end{cases}$$

Ou bien $(e_1,e_2)*(a,b) = (a,b) \Longrightarrow (e_1a, e_2a + \phi(e_1)b) = (a,b)$

$$\Longrightarrow \begin{cases} e_1a &= a \\ e_2a + \phi(e_1)b &= b \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} e_1 &= 1 \\ e_2 &= 0 \text{ et } f(e_1) = e_1 = 1. \end{cases}$$

Donc l'élément neutre est $(e_1,e_2) = (1,0)$.

d) L'élément symétrique :

Soient $(a,b),\ (a',b') \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ alors $a \neq 0$ et $a' \neq 0$ ce qui donne $aa' \neq 0$ par suite $(a,b)*(a',b') = (e_1,e_2) = (1,0) \Longrightarrow (aa', ba' + \phi(a)b') = (1,0)$

$$\Longrightarrow \begin{cases} aa' &= 1 \\ ba' + \phi(a)b' &= 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a' &= \dfrac{1}{a} \\ \dfrac{b}{a} + \phi(a)b' &= 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a' &= \dfrac{1}{a} \\ b' &= \dfrac{-b}{a\phi(a)} \end{cases}$$

Ou bien $(a',b')*(a,b) = (e_1,e_2) = (1,0) \Longrightarrow (a'a, b'a + \phi(a')b) = (1,0)$

$$\Longrightarrow \begin{cases} a'a &= 1 \\ b'a + \phi(a')b &= 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a' &= \dfrac{1}{a} \\ b'a + \phi(\dfrac{1}{a})b &= 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a' &= \dfrac{1}{a} \\ b' &= \dfrac{-b}{a}\phi(\dfrac{1}{a}). \end{cases}$$

Donc pour que la loi $*$ admet un symétrique il faut et il suffit que $\phi(\frac{1}{a}) = \frac{1}{\phi(a)}$.

Conclusion : Pour que $(E,*)$ soit un groupe il faut que l'application ϕ vérifie les conditions suivantes

1) $\forall a, c \in \mathbb{R}^*$ alors $\phi(ac) = \phi(a)\phi(c)$.
2) L'élément neutre est $(1,0)$.
3) $\forall a, \in \mathbb{R}^*$ alors $\phi(\frac{1}{a}) = \frac{1}{\phi(a)}$.

<u>Exercice 7 :</u>

Soient A et B deux sous groupes d'un groupe $(E,.)$.
Montrons que AB est un sous groupe de E si et seulement si $AB = BA$.
On a

$$AB = \{x \in E\ x = a.b \text{ avec } a \in A \text{ et } b \in B\}$$

$$BA = \{x \in E\ x = b.a \text{ avec } b \in B \text{ et } a \in A\}.$$

Montrons que AB est un sous groupe de $E \iff AB = BA$.

$\Longrightarrow$

Supposons que AB est un sous groupe de E et montrons que $AB = BA$.
a) Montrons que $AB \subset BA$
Soit $x \in AB \Longrightarrow x' \in AB$ car AB est un sous groupe de $E \Longrightarrow x' = a.b$ avec $a \in A$ et $b \in B$.

Or $xx' = e$ avec e l'élément neutre de la loi (.), alors

$$\begin{aligned} xx' &= e \\ x.a.b &= e \\ x.a.b.b' &= e.b' \text{ avec } b' \text{ symétrique de } b \\ x.a.e &= e.b' \\ x.a &= b' \\ x.a.a' &= b'.a' \text{ avec } a' \text{ symétrique de } a \\ x.e &= b'a' \\ x &= b'a' \text{ avec } b' \in B \text{ et } a' \in A. \end{aligned}$$

Donc $x \in BA$, par suite $AB \subset BA$.

b) Montrons que $BA \subset AB$
Soit $x \in BA \Longrightarrow x = b_1.a_1$ avec $b_1 \in B$ et $a_1 \in A \Longrightarrow x' \in AB$ avec x' symétrique de x car AB est un sous groupe de E, alors

$$\begin{aligned} x'x &= e \\ x'.b_1.a_1 &= e \\ x'.b_1.a_1.a_1' &= e.a_1' \text{ avec } a_1' \text{ symétrique de } a_1 \\ x'.b_1.e &= a_1' \\ x'.b_1 &= a_1' \\ x.b_1.b_1' &= a_1'.b_1' \text{ avec } b_1' \text{ symétrique de } b_1 \\ x.e &= a_1'.b_1' \\ x &= a_1'.b_1' \text{ avec } a_1' \in A \text{ et } b_1' \in B. \end{aligned}$$

On a $x' \in AB \Longrightarrow (x')' \in AB$ car AB est un sous groupe de E.
Or $(x')' = x \Longrightarrow x \in AB$, par suite $BA \subset AB$.
Conclusion : $AB = BA$.

$\Longleftarrow$
Supposons que $AB = BA$ et montrons que AB est un sous groupe de E.

$i)$ **L'élément neutre :**
On a $e = e.e$ avec $e \in A$ car A est un sous groupe de E et $e \in B$ car B est un sous groupe de E, par suite $e \in AB$.

$ii)$ **Stabilité :**
Soient $x_1, x_2 \in AB$ et montrons que $x_1.x_2 \in AB$, alors
$x_1 \in AB \Longrightarrow x_1 = a_1.b_1$ avec $a_1 \in A$ et $b_1 \in B$.
$x_2 \in AB \Longrightarrow x_2 = a_2.b_2$ avec $a_2 \in A$ et $b_2 \in B$.
Alors $x_1x_2 = a_1.b_1.a_2.b_2$.
On pose $c = b_1.a_2 \in BA \Longrightarrow c \in BA$ car $AB = BA \Longrightarrow c = a_3.b_3$ avec $a_3 \in A$ et $b_3 \in B$, parsuite
$x_1.x_2 = (a_1.a_3).(b_3.b_2)$ avec $(a_1.a_3) \in A$ car A est un sous groupe de E et $(b_3.b_2) \in B$ car B est un sous groupe de E, ce qui donne $x_1.x_2 \in AB$.

$iii)$ **L'élément symétrique :**
Soit $x \in AB \Longrightarrow x = a.b$ avec $a \in A$ et $b \in B$.
Or $x'.x = e$ avec x' symétrique de x, alors

$$\begin{aligned} x'.a.b &= e \\ x'.a.b.b' &= e.b' \text{ avec } b' \text{ symétrique de } b \\ x'.a.e &= b' \\ x'.a &= b' \\ x'.a.a' &= b'.a' \text{ avec } a' \text{ symétrique de } a \\ x'.e &= b'.a' \\ x' &= b'.a'. \end{aligned}$$

Ce qui implique que $x' \in BA \Longrightarrow x' \in AB$, car $AB = BA$.
Donc AB est un sous groupe de E.

Exercice 8 :
Soit $(E, .)$ un groupe dont l'élément neutre e_1 et pour tout $x \in E$ l'inverse est x^{-1}, soit b un élément de E, on définit la loi $*$ dans E par $\forall x, y \in E,\ x * y = x.b.y$
Montrons que $(E, *)$ est un groupe et précisons l'élément neutre e_2 et l'élément symétrique de x avec $x \in E$.

a) Loi de composition interne :
$\forall x, y \in E,\ x * y = x.a.y \Longrightarrow (x.a) \in E$ car $(E, .)$ est un groupe, ce qui implique que $(x.a).y \in E$ car $(x.a) \in E$ et $y \in E$ avec $(E, .)$ est un groupe, alors $\forall x, y \in E,\ (x * y) \in E$.
Donc la loi $*$ est une loi de composition interne.

b) L'associativité :
$\forall x, y, z \in E$, tels que

$$\begin{aligned} (x * y) * z &= (x.a.y) * z \\ &= (x.a.y).a.z \\ x * (y) * z) &= x * (a.y.z) \\ &= x.a.(y.a.z). \end{aligned}$$

Or $(x.a.y).a.z = x.a.(y.a.z)$ car la loi . est associative.
Donc $(x * y) * z = x * (y * z)$, par suite la loi $*$ est associative.

c) L'élément neutre :
$\forall x \in E,\ x * e_2 = x$, alors

$$\begin{aligned} x.a.e_2 &= x \\ x^{-1}.x.a.e_2 &= x^{-1}.x \\ e_1.a.e_2 &= e_1 \\ a.e_2 &= e_1 \\ a^{-1}.a.e_2 &= a^{-1}.e_1 \\ e_1.e_2 &= a^{-1} \\ e_2 &= a^{-1}. \end{aligned}$$

De la même maniére, on a
$\forall x \in E,\ e_2 * x = x$, alors

$$\begin{aligned}
e_2.a.x &= x \\
e_2.a.x.x^{-1} &= x.x^{-1} \\
e_2.a.e_1 &= e_1 \\
e_2.a &= e_1 \\
e_2.a.a^{-1} &= e_1.a^{-1} \\
e_2.e_2 &= a^{-1} \\
e_2 &= a^{-1}.
\end{aligned}$$

d) L'élément symétrique :
$\forall x \in E,\ x * x' = e_2$, avec x' l'élément symétrique de x, alors

$$\begin{aligned}
x.a.x' &= e_2 \\
x.a.x' &= a^{-1} \\
x^{-1}.x.a.x' &= x^{-1}.a^{-1} \\
e_1.a.x' &= x^{-1}.a^{-1} \\
a.x' &= x^{-1}.a^{-1} \\
a^{-1}.a.x' &= a^{-1}.x^{-1}.a^{-1} \\
e_1.x' &= a^{-1}.x^{-1}.a^{-1} \\
x' &= a^{-1}.x^{-1}.a^{-1}
\end{aligned}$$

Et d'une maniére similaire, on obtient

$$\begin{aligned}
\forall x \in E,\ x' * x &= e_2 \\
x'.a.x &= e_2 \\
x'.a.x &= a^{-1} \\
x'.a.x.x^{-1} &= a^{-1}.x^{-1} \\
x'.a.e_1 &= a^{-1}.x^{-1} \\
x'.a &= a^{-1}.x^{-1} \\
x'.a.a^{-1} &= a^{-1}.x^{-1}.a^{-1} \\
x'.e_1. &= a^{-1}.x^{-1}.a^{-1} \\
x' &= a^{-1}.x^{-1}.a^{-1}
\end{aligned}$$

Donc $(E, *)$ est un groupe.

Exercice 9 :
On munit $\mathbb{R}^2$ de deux lois $+$ et $*$ définies par

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

$$(x_1, y_1) * (x_2, y_2) = (x_1x_2, x_1y_2 + x_2y_1)$$

1) Montrons que $(\mathbb{R}^2, +)$ est un groupe abélien.

a) Loi de composition interne :
Soient $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ alors $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \in \mathbb{R}^2$ car $x_1 \in \mathbb{R}$ et $x_2 \in \mathbb{R} \Longrightarrow (x_1 + x_2) \in \mathbb{R}$.
De plus $y_1 \in \mathbb{R}$ et $y_2 \in \mathbb{R} \Longrightarrow (y_1 + y_2) \in \mathbb{R}$.
Donc la loi $+$ est une loi de composition interne.

b) Commutativité :
Soient $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ alors

$$\begin{aligned}(x_1, y_1) + (x_2, y_2) &= (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \\ &= (x_2 + x_1, y_2 + y_1) \\ &= (x_2, y_2) + (x_1, y_1).\end{aligned}$$

Donc la loi $+$ est commutative.

c) L'élément neutre :
Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ alors $(x, y) + (e_1, e_2) = (x, y) \Longrightarrow (x + e_1, y + e_2) = (x, y)$
$\Longrightarrow \begin{cases} x + e_1 = x \\ y + e_2 = y \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} e_1 = 0 \\ e_2 = 0. \end{cases}$
Donc l'élément neutre est $(e_1, e_2) = (0, 0)$.

d) L'élément symétrique :
Soient $(x, y), (x', y') \in \mathbb{R}^2$ alors $(x, y) + (x', y') = (e_1, e_2) \Longrightarrow (x + x', y + y') = (0, 0)$
$\Longrightarrow \begin{cases} x + x' = 0 \\ y + y' = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x' = -x \\ y' = -y. \end{cases}$
Donc l'élément symétrique est $(x', y') = (-x, -y)$.
Conclusion : $(\mathbb{R}^2, +)$ est un groupe abélien.

2) Déduire que $(\mathbb{R}^2, +, *)$ est un anneau commutatif.
Il reste à montrer que :

a) L'associative :
Soient $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) \in \mathbb{R}^2$ alors

$$\begin{aligned}((x_1, y_1) * (x_2, y_2)) * (x_3, y_3) &= (x_1x_2, x_1y_2 + x_2y_1) * (x_3, y_3) \\ &= (x_1x_2x_3, x_1x_2y_3 + x_3(x_1y_2 + x_2y_1)) \\ &= (x_1x_2x_3, x_1x_2y_3 + x_3x_1y_2 + x_3x_2y_1) \\ (x_1, y_1) * ((x_2, y_2) * (x_3, y_3)) &= (x_1, y_1) * (x_2x_3, x_2y_3 + x_3y_2) \\ &= (x_1x_2x_3, x_1(x_2y_3 + x_3y_2) + x_2x_3y_1) \\ &= (x_1x_2x_3, x_1x_2y_3 + x_1x_3y_2 + x_2x_3y_1) \\ &= (x_1x_2x_3, x_1x_2y_3 + x_3x_1y_2 + x_3x_2y_1).\end{aligned}$$

On remarque que

$$((x_1, y_1) * (x_2, y_2)) * (x_3, y_3) = (x_1, y_1) * ((x_2, y_2) * (x_3, y_3)).$$

Donc la loi $*$ est associative.

b) Commutativité :
Soient $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ alors

$$\begin{aligned}(x_1, y_1) * (x_2, y_2) &= (x_1x_2, x_1y_2 + x_2y_1)\\ &= (x_2x_1, x_2y_1 + x_1y_2)\\ &= (x_2, y_2) * (x_1, y_1).\end{aligned}$$

Donc la loi $*$ est commutative.

c) Distributivité :
$\forall (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) \in \mathbb{R}^2$, montrons que
$(x_1, y_1) * ((x_2, y_2) + (x_3, y_3)) = (x_1, y_1) * (x_2, y_2) + (x_1, y_1) * (x_3, y_3)$, alors

$$\begin{aligned}(x_1, y_1) * ((x_2, y_2) + (x_3, y_3)) &= (x_1, y_1) * (x_2 + x_3, y_2 + y_3)\\ &= (x_1(x_2 + x_3), x_1(y_2 + y_3) + (x_2 + x_3)y_1)\\ &= (x_1x_2 + x_1x_3, x_1y_2 + x_1y_3 + x_2y_1 + x_3y_1).\end{aligned}$$

D'autre part

$$\begin{aligned}(x_1, y_1) * (x_2, y_2) + (x_1, y_1) * (x_3, y_3) &= (x_1x_2, x_1y_2 + x_2y_1) + (x_1x_3, x_1y_3 + x_3y_1)\\ &= (x_1x_2 + x_1x_3, x_1y_2 + x_2y_1 + x_1y_3 + x_3y_1).\end{aligned}$$

On remarque que $(x_1, y_1) * ((x_2, y_2) + (x_3, y_3)) = (x_1, y_1) * (x_2, y_2) + (x_1, y_1) * (x_3, y_3)$.
Donc la loi $*$ est distributive sur la loi $+$.

d) L'élément neutre :
Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ alors $(x, y) + (e_3, e_4) = (x, y) \Longrightarrow (xe_3, xe_4 + e_3y) = (x, y)$

$$\Longrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} xe_3 &=& x\\ \\ xe_4 + e_3y &=& y\end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} e_3 &=& 1\\ \\ xe_4 + y &=& y\end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} e_3 &=& 1\\ \\ e_4 &=& 0.\end{array}\right.$$

Donc l'élément neutre de la loi $*$ est $(e_3, e_4) = (1, 0)$.
Conclusion : $(\mathbb{R}^2, +, *)$ est un anneau commutatif.

<u>Exercice 10 :</u>
Soit $(E, +, .)$ l'anneau des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, on pose
$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto f(x) = \left\{\begin{array}{ll} 3x - 5 & \text{si} \quad x \geqslant 0\\ \\ 0 & \text{si} \quad x < 0\end{array}\right.$$

et $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto g(x) = \left\{\begin{array}{ll} 0 & \text{si} \quad x \geqslant 0\\ \\ x^2 & \text{si} \quad x < 0\end{array}\right.$$

1) Calculons fg.

$$fg = \left\{\begin{array}{ll} (3x - 5)0 = 0 & \text{si} \quad x \geqslant 0\\ \\ 0x^2 = 0 & \text{si} \quad x < 0\end{array}\right. \Longrightarrow fg = 0, \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

2) Vérifier que si $fg = 0 \Longrightarrow f = 0$ ou $g = 0$.
On a $fg = 0$ mais $f \neq 0$ et $g \neq 0$.

3) Que peut-on déduire sur l'anneau $(E, +, .)$.
$(E, +, .)$ n'est pas un anneau integre car $fg = 0 \nRightarrow f = 0$ ou $g = 0$.

Exercice 11 :
Soit $E = \{a + b\sqrt{6},\ a, b \in \mathbb{Z}\}$.
1) Montrer que $(E, +, .)$ est un sous anneau de $(\mathbb{R}, +, .)$.
a) Montrons que $(E, +)$ est un sous groupe de $(\mathbb{R}, +)$

$i)$ **L'élément neutre :**
$0 = 0 + \sqrt{6} \Longrightarrow 0 \in E$.

$ii)$ **Stabilité :**
Soient $x, y \in E \Longrightarrow x = a_1 + b_1\sqrt{6}$ et $y = a_2 + b_2\sqrt{6}$
$\Longrightarrow x+y = (a_1+b_1\sqrt{6})+(a_2+b_2\sqrt{6}) \Longrightarrow x+y = (a_1+a_2)+(b_1+b_2)\sqrt{6} \Longrightarrow (x+y) \in E$.

$iii)$ **Symétrique :**
Soient $x \in E \Longrightarrow x = a + b\sqrt{6} \Longrightarrow -x = -a - b\sqrt{6} = (-a) + (-b)\sqrt{6}$
avec $(-a) \in \mathbb{Z}$ et $(-b) \in \mathbb{Z} \Longrightarrow (-x) \in \mathbb{E}$.

b) Stabilité :
Soient $x, y \in E \Longrightarrow x = a_1 + b_1\sqrt{6}$ et $y = a_2 + b_2\sqrt{6}$ alors
$xy = (a_1 + b_1\sqrt{6})(a_2 + b_2\sqrt{6}) = (a_1a_2 + 6b_1b_2) + (a_1b_2 + a_2b_1)\sqrt{6}$
avec $(a_1a_2 + 6b_1b_2) \in \mathbb{Z}$ et $(a_1b_2 + a_2b_1) \in \mathbb{Z} \Longrightarrow xy \in E$.

c) L'élément neutre :
$1 = 1 + 0\sqrt{6} \Longrightarrow 1 \in E$.
Donc $(E, +, .)$ est un sous anneau de $(\mathbb{R}, +, .)$.

2) On définit l'application ψ par
$\psi : (E, +, .) \longrightarrow (E, +, .)$
$a + b\sqrt{6} \mapsto \psi(a + b\sqrt{6}) = a - b\sqrt{6}$.
Montrons que ψ est un isomorphisme d'anneau, il faut montrer que ψ est une application bijective.

a) L'injectivité :
Soient $x_1, x_2 \in E$ tel que $\psi(x_1) = \psi(x_2)$, alors
$x_1 \in E \Longrightarrow x_1 = a_1 + b_1\sqrt{6}$ et $x_2 \in E \Longrightarrow x_2 = a_2 + b_2\sqrt{6}$, ce qui donne

$$\begin{aligned} \psi(x_1) &= \psi(x_2) \\ \psi(a_1 + b_1\sqrt{6}) &= \psi(a_2 + b_2\sqrt{6}) \\ a_1 - b_1\sqrt{6} &= a_2 - b_2\sqrt{6}. \end{aligned}$$

Ce qui implique que $\left\{ \begin{array}{rcl} a_1 &=& a_2 \\ \\ b_1 &=& b_2 \end{array} \right. \Longrightarrow x_1 = x_2$, donc ψ est injective.

a) La surjectivité :
Montrons que $\forall y \in E,\ \exists x \in E$ tel que $y = \psi(x)$.
Soit $y \in E \Longrightarrow y = a - b\sqrt{6}$ avec $a, b \in \mathbb{Z} \Longrightarrow y = a - b\sqrt{6} = \psi(a + b\sqrt{6})$
$\Longrightarrow \exists x \in E$ tel que $x = a + b\sqrt{6}$ avec $a, b \in \mathbb{Z}$, donc ψ est surjective.
Conclusion : ψ est bijective.

3) Est ce que $(E, +, .)$ est un corps.
Soit $x \in E \Longrightarrow x = a + b\sqrt{6}$, alors

$$\begin{aligned}
\frac{1}{x} &= \frac{1}{a + b\sqrt{6}} \\
&= \frac{a - b\sqrt{6}}{(a + b\sqrt{6})(a - b\sqrt{6})} \\
&= \frac{a - b\sqrt{6}}{a^2 - 6b^2} \\
&= \frac{a}{a^2 - 6b^2} + \left(\frac{-b}{a^2 - 6b^2}\right)\sqrt{6} \ \text{ avec } \ \frac{a}{a^2 - 6b^2} \in \mathbb{Q} \ \text{ et } \ \frac{-b}{a^2 - 6b^2} \in \mathbb{Q}.
\end{aligned}$$

Comme $\mathbb{Q} \neq \mathbb{Z}$, alors $(E, +, .)$ n'est pas un corps.

Exercice 12 :
Soit E un ensemble non vide de $\mathbb{N}$, tel que
$E_n = \{0, 1, 2, ..., n - 1\}$ sur lequel on définit deux lois de composition interne.
$\forall x, y \in E_n,\ x \oplus y = s$, avec s est le reste de division de $x + y$ sur n et $\forall x, y \in E_n,\ x \otimes y = p$, avec p est le reste de division de $x \times y$ sur n.
1) Vérifions que $(E_n, \oplus, \otimes)$ est un anneau commutatif.

a) Vérifions que $(E_n, \oplus)$ est un groupe abélien

1. **Commutativité :**
   $\forall x, y \in E_n : x \oplus y = s \Longleftrightarrow x + y = kn + s$ avec $s < n \Longleftrightarrow y + x = kn + s \Longleftrightarrow y \oplus x = s$.
   Donc $\forall x, y \in E : x \oplus y = y \oplus x$.
2. **L'élément neutre :**
   $\forall x \in E_n,\ x \oplus e = x \Longrightarrow x + e = kn + x \Longrightarrow e = kn$, alors $e \in E_n \Longrightarrow k = 0 \Longrightarrow e = 0$.
3. **L'élément symétrique :**
   $\forall x \in E_n,\ x \oplus x' = e = 0 \Longrightarrow x + x' = kn \Longrightarrow x' = kn - x$, alors
   $x' \in E_n \Longrightarrow k = 1 \Longrightarrow x' = n - x$.
4. **L'associativité :**
   $\forall x, y, z \in E_n$, montrons que $(x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z)$.
   Soient $x, y, z \in E_n$, on a
   $(x \oplus y) = r_1 \Longleftrightarrow x + y = nk_1 + r_1$ avec $r_1 < n \Longrightarrow r_1 = x + y - nk_1$.
   Par suite $(x \oplus y) \oplus z = r_1 \oplus z = r_2 \Longleftrightarrow r_1 + z = nk_2 + r_2$ avec $r_2 < n$.
   En remplaçant r_1 par sa formule, on obtient
   $(x + y - nk_1) + z = nk_2 + r_2 \Longrightarrow x + y + z = n(k_1 + k_2) + r_2$.
   D'autre part $(y \oplus z) = r_3 \Longleftrightarrow y + z = nk_3 + r_3$ avec $r_3 < n \Longrightarrow r_3 = y + z - nk_3$.
   Par suite $x \oplus (y \oplus z) = x \oplus r_3 = r_4 \Longleftrightarrow x + r_4 = nk_4 + r_4$ avec $r_4 < n$.
   En remplaçant r_3 par sa formule, on obtient

$x + (y + z - nk_3) = nk_4 + r_4 \Longrightarrow x + y + z = n(k_3 + k_4) + r_4$.
Comme le reste est unique, on a $r_2 = r_4 \Longrightarrow (x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z)$.
Conclusion : $(E, \oplus)$ est un groupe commutatif.

5. **Commutativité de la loi $\otimes$:**
$\forall x, y \in E_n : x \otimes y = p \Longleftrightarrow xy = kn + p$ avec $p < n \Longleftrightarrow yx = kn + p \Longleftrightarrow y \otimes x = p$.
Donc $\forall x, y \in E_n : x \otimes y = y \otimes x$.
6. **L'élément neutre de la loi $\otimes$:**
$\forall x \in E_n,\ x \otimes e' = x \Longrightarrow xe' = kn + x \Longrightarrow e' = \dfrac{nk + x}{x}$, alors
$e' \in E_n \Longrightarrow k = 0 \Longrightarrow e' = 1$.
7. **L'associativité de la loi $\otimes$:**
$\forall x, y, z \in E_n$, montrons que $(x \otimes y) \otimes z = x \otimes (y \otimes z)$.
Soient $x, y, z \in E_n$, on a
$(x \otimes y) = p_1 \Longleftrightarrow xy = nk_1 + p_1$ avec $p_1 < n \Longrightarrow p_1 = xy - nk_1$.
Par suite $(x \otimes y) \otimes z = p_1 \otimes z = p_2 \Longleftrightarrow p_1 z = nk_2 + p_2$ avec $p_2 < n$.
En remplaçant p_1 par sa formule, on obtient
$(xy - nk_1)z = nk_2 + p_2 \Longrightarrow xyz = n(k_1 z + k_2) + p_2$.
D'autre part $(y \otimes z) = p_3 \Longleftrightarrow yz = nk_3 + p_3$ avec $p_3 < n \Longrightarrow p_3 = yz - nk_3$.
Par suite $x \otimes (y \otimes z) = x \otimes p_3 = p_4 \Longleftrightarrow xp_4 = nk_4 + p_4$ avec $p_4 < n$.
En remplaçant p_3 par sa formule, on obtient
$x(yz - nk_3) = nk_4 + p_4 \Longrightarrow xyz = n(k_3 x + k_4) + p_4$.
Comme le reste est unique, on a $p_2 = p_4 \Longrightarrow (x \otimes y) \otimes z = x \otimes (y \otimes z)$.
8. **La distributivité :**
$\forall x, y, z \in E_n$, montrons que $(x \oplus y) \otimes z = (x \otimes z) \oplus (y \otimes z)$.
Soient $x, y, z \in E_n$, on a
$(x \oplus y) = r_1 \Longleftrightarrow x + y = nk_1 + r_1$ avec $r_1 < n \Longrightarrow r_1 = x + y - nk_1$.
Par suite $(x \oplus y) \otimes z = r_1 \otimes z = r_2 \Longleftrightarrow r_1 z = nk_2 + r_2$ avec $r_2 < n$.
En remplaçant r_1 par sa formule, on obtient
$(x + y - nk_1)z = nk_2 + r_2 \Longrightarrow (x + y)z = n(k_1 z + k_2) + r_2$.
D'autre part $(x \otimes z) = r_3 \Longleftrightarrow xz = nk_3 + r_3$ avec $r_3 < n \Longrightarrow r_3 = xz - nk_3$.
De plus $(y \otimes z) = r_4 \Longleftrightarrow yz = nk_4 + r_4$ avec $r_4 < n \Longrightarrow r_4 = yz - nk_4$, alors
$(x \otimes z) \oplus (y \otimes z) = r_3 \oplus r_4 = r_5 \Longleftrightarrow r_3 + r_4 = nk_5 + r_5$ avec $r_5 < n$.
En remplaçant r_3 et r_4 par leurs formules, on obtient
$r_3 + r_4 = (xz - nk_3) + (yz - nk_4) = nk_5 + r_5$, ce qui donne
$xz + yz = n(k_3 + k_4 + k_5) + r_5$.
Comme le reste est unique et $(x + y)z = xz + yz$, alors
$r_2 = r_5 \Longrightarrow (x \oplus y) \otimes z = (x \otimes z) \oplus (y \otimes z)$.
Donc $(E_n, \oplus, \otimes)$ est un anneau commutatif.

2) Pour $n = 10$, calculons $3 \oplus 9,\ 8 \otimes 5,\ 7^{-1} \oplus 2,\ 4 \otimes 3^{-1},\ 5^2,\ 9^2$.

a) $3 \oplus 9 = r \Longleftrightarrow 3 + 9 = 10k + r \Longleftrightarrow 12 = 10k + r \Longrightarrow r = 2$, donc $3 \oplus 9 = 2$.

b) $8 \otimes 5 = p \Longleftrightarrow 8 \times 5 = 10k + p \Longleftrightarrow 40 = 10k + p \Longrightarrow p = 0$, donc $8 \otimes 5 = 0$.

c) $7^{-1} \oplus 2 = 3 \oplus 2 \Longleftrightarrow 3 + 2 = 10k + r \Longleftrightarrow 5 = 10k + r \Longrightarrow r = 5$, donc $7^{-1} \oplus 2 = 5$.

d) $4 \otimes 3^{-1} = 4 \otimes 7 = p \Longleftrightarrow 4 \times 7 = 10k + p \Longleftrightarrow 28 = 10k + p \Longrightarrow p = 8$, donc $4 \otimes 3^{-1} = 8$.

e) $5^2 = 5 \otimes 5 \Longleftrightarrow 5 \times 5 = 10k + p \Longleftrightarrow 25 = 10k + p \Longrightarrow p = 5$, donc $5^2 = 5$.

f) $9^2 = 9 \otimes 9 \Longleftrightarrow 9 \times 9 = 10k + p \Longleftrightarrow 81 = 10k + p \Longrightarrow p = 1$, donc $9^2 = 1$.

3) Résoudre dans E_{10} les équations suivantes :
a) $(9 \otimes x) \oplus 3 = 0 \Longrightarrow (9 \otimes x) \oplus 3 \oplus (-3) = 0 \oplus (-3) \Longrightarrow 9 \otimes x = (-3)$
$\Longrightarrow 9^{-1} \otimes 9 \otimes x = 9^{-1} \otimes (-3) \Longrightarrow x = 9^{-1} \otimes (-3) = 9 \otimes 7 \Longrightarrow 9 \times 7 = 10k + p$
$\Longrightarrow 63 = 10k + p \Longrightarrow p = 3 \Longrightarrow x = 3$.

b) $x^2 \oplus 6 = 0 \Longrightarrow x^2 \oplus 6 \oplus (-6) = 0 \oplus (-6) \Longrightarrow x^2 = (-6) \Longrightarrow x^2 = 4 \Longrightarrow x \times x = 4$
$\Longrightarrow x = 2$.

Chapitre 3

Polynômes

3.1 Généralités

Définition 32. *Soit K un corps commutatif avec $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, on dit que $P(X)$ est un polynôme à coefficients dans K si il est de la forme*
$P(X) = \sum_{j=0}^{n} a_j X^j = a_0 X^0 + a_1 X^1 + ... + a_n X^n$ *avec* $a_j \in K$ *et* $n \in \mathbb{N}$.

Remarque 18.

1. *L'ensemble des polynômes est noté $K[X]$.*
2. *X est appelé l'indéterminé.*

Définition 33. *Soit $P \in K[X]$ avec $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, on appelle degré de P le plus grand entier naturel j avec $a_j \neq 0$.*
On note l'ensemble des polynômes de degré inferieur ou égal à n par $K_n[X]$.

Exemple 36. *Soit $P(X) = X^5 + 2X^4 - 3X^3 + 2X^2 - X + 1$ alors*
$degP(X) = 5,\ deg(2) = 0$.

Définition 34. *Soit $P \in K[X]$ tel que $P(X) = \sum_{j=0}^{n} a_j X^j = a_0 X^0 + a_1 X^1 + ... + a_n X^n$.*

Le polynôme $P^{(1)}(X) = \sum_{j=0}^{n} j a_j X^{j-1} = a_1 X^0 + 2a_2 X^1 + ... + n a_n X^{n-1}$ est la dérivée du polynôme P.

Proposition 1. *Soit $k \in \mathbb{N}^*$, $degP^{(k)} = deg(P - k)$.*

3.2 Opérations sur les polynômes

3.2.1 L'addition

Définition 35. *Soient* $P, Q \in K[X]$ *avec* $K = \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$, *tel que* $P(X) = \sum_{n \geqslant 0} a_n X^n$ *et* $Q(X) = \sum_{n \geqslant 0} b_n X^n$ *alors la somme de deux polynômes est* $(P+Q)(X) = \sum_{n \geqslant 0} c_n X^n$ *avec* $c_n = a_n + b_n$.

Proposition 2.

1. $deg(P+Q) \leqslant max(degP, degQ)$.
2. $degP \neq degQ \Longrightarrow deg(P+Q) = max(degP, degQ)$.

3.2.2 La multiplication

Définition 36. *Soient deux plynômes* P *et* $Q \in K[X]$ *avec* $P(X) = \sum_{n \geqslant 0} a_n X^n$ *et* $Q(X) = \sum_{n \geqslant 0} b_n X^n$ *alors le produit des deux polynômes est noté par* $(P.Q)(X) = \sum_{n \geqslant 0} c_n X^n$ *avec* $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$.

Proposition 3. $deg(P.Q) = degP + degQ$.

3.2.3 La division euclidienne

Définition 37. *Soient* $P \in K[X]$ *et* $Q \in K[X] \setminus \{0\}$, $\exists!(S,R) \in (K[X])^2$ *tel que* $P = SQ + R$ *avec* $degP < degQ$.
a) On appelle S *le quotient de la division euclidienne de* P *par* Q.
b) On appelle R *le reste de la division euclidienne de* P *par* Q.
Si $R = 0$ *on dit que* Q *divise* P *ou* P *est un multiple de* Q.

Exemple 37. $Q(X) = X - 2, \quad P(X) = X^3 - 5X^2 + 10X - 12$.
Calculer S *et* R.

3.3 Racine d'un polynôme

Définition 38. *Soit* $Q \in K[X]$ *et* $a \in K$, *alors la racine de* $Q(X) \Longleftrightarrow (X-a)$ *divise* $Q(X)$.

Proposition 4. a *racine de* $Q \Longleftrightarrow Q(a) = 0$.

3.3.1 Multiplicité d'une racine

Définition 39. *Soit* $Q \in K[X]$, $a \in K$, *et* $n \in \mathbb{N}^*$.
Si $(X-a)^n$ *divise* Q *et* $(X-a)^{n+1}$ *ne divise pas* Q *alors* a *est une racine de multiplicité* n *et on la note par* $mult(a) = n$.

Proposition 5. $(X-a)^n$ *divise* $Q \Longleftrightarrow [Q(a) = Q^{(1)}(a) = Q^{(2)}(a) = Q^{(3)}(a) = ... = Q^{(n-1)}(a) = 0]$.

Théorème 9. $Q(a) = Q^{(1)}(a) = Q^{(2)}(a) = Q^{(3)}(a) = ... = Q^{(n-1)}(a) = 0$
et $Q^{(n)}(a) \neq 0 \Longleftrightarrow mult(a) = n$.

Exemple 38. *Pour* $n \in \mathbb{N}^*$, *quel est l'ordre de multiplicité de* 2 *comme racine du polynôme*
$P(X) = X^{n+2} - (n+2)X^{n+1} + (2n+1)X^n - 2X^{n-1}$
$P(2) = 2^{n+2} - (n+2)2^{n+1} + (2n+1)2^n - 22^{n-1} = 2^{n+2} - n2^{n+1} - 22^{n+1} + 2n2^n + 2^n - 2^n = 0$
$P'(X) = (n+2)X^{n+1} - (n+2)(n+1)X^n + (2n+1)nX^{n-1} - 2(n-1)X^{n-2}$
$P'(2) = (n+2)2^{n+1} - (n+2)(n+1)2^n + (2n+1)n2^{n-1} - 2(n-1)2^{n-2}$
$P'(2) = (-n + \frac{5}{2}) \neq 0.$
Donc $P'(2) \neq 0 \Longrightarrow mult(2) = 1$.

Théorème 10. *Soit* $Q \in K_n[X]$ *tel que* $Q(X) = a_0X^0 + a_1X^1 + ... + a_nX^n$
et soit $a = \frac{c}{d} \in Q$ *avec* $c \wedge d = 1$.
$Q(a) = 0 \Longrightarrow c$ *divise* a_0 *et* d *divise* a_n.

Exemple 39. $Q(X) = 2 + 3X + 2X^2 + 3X^3$, *on a*
$a_0 = 2$ *et* $a_n = a_3 = 3 \Longrightarrow 2 \wedge 3 = 1$, *par suite* $a = \frac{c}{d}$ *avec* $c/2$*et* $d/3$.
$D_2 = \{1, -1, 2, -2\}$ *et* $D_3 = \{1, -1, 3, -3\} \Longrightarrow a \in \{1, -1, \frac{1}{3}, \frac{-1}{3}, 2, -2, \frac{2}{3}, \frac{-2}{3}\}$.
$Q(a) = Q(\frac{-2}{3}) = 0$, *donc* $a = \frac{-2}{3}$ *est une racine de* $Q(X)$.

Théorème 11. *Si Q divise P alors toutes les racines de Q sont des racines de P.*

Exemple 40. *Soient $Q(X)$ et $S(X)$ deux polynômes tels que $Q(X) = X^3 - 3X - 2$ et $S(X) = X^2 + 2X + 1$.*
On remarque que $X = -1$ est une racine double de $S(X)$, par suite
$Q(-1) = (-1)^3 - 3(-1) - 2 = 0$ *et* $Q'(X) = 3X^2 - 3 \Longrightarrow Q'(-1) = 0$
$Q''(X) = 6X \Longrightarrow Q''(-1) = -6 \neq 0$, *donc $X = -1$ est une racine double de $Q(X)$, par suite S divise Q.*

3.4 Polynôme irréductible : PGCD-PPCM

Définition 40. *Soit $Q \in K[X]$, Q est irréductible si et seulement si tous ces diviseurs sont de la forme a ou aQ.*

Remarque 19.

1. *Dans $\mathbb{R}[X]$, les polynômes de degré 1 et les polynômes de degré 2 avec $\Delta < 0$ sont des polynômes irréductibles.*
2. *Dans $\mathbb{C}[X]$, les polynômes irréductibles sont les polynômes de degré 1.*

Exemple 41. $Q(X) = X^2+X+1$ *est irréductible dans $\mathbb{R}$ mais $Q(X)$ n'est pas irréductible dans $\mathbb{C}$.*
On a $\Delta = b^2 - 4ac = -3 < 0 \Longrightarrow Q(X)$ est irréductible dans $\mathbb{R}$, par suite $\Delta = -3 = 3i^2$ dans $\mathbb{C}$, alors $x_1 = \dfrac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$ et $x_2 = \dfrac{-1 - i\sqrt{3}}{2}$.

Définition 41. *Soient $Q_1, Q_2, ..., Q_n$ n polynômes de $K[X] \diagdown \{0\}$ et D, M deux polynômes dans $K[X] \diagdown \{0\}$ tels que*
D est le plus grand diviseur commun de $Q_1, Q_2, ..., Q_n$ noté $D = PGCD(Q_1, Q_2, ..., Q_n)$ si

1. *D est un polynôme unitaire.*
2. *$\forall j \in \{0, ..., n\}$, D divise Q_1.*
3. *$\forall j \in \{0, ..., n\}$, Q divise $Q_1 \Longrightarrow degQ \leqslant degD$.*

M est le plus petit multiple commun de $Q_1, Q_2, ..., Q_n$ noté $M = PPCM\{Q_1, Q_2, ..., Q_n\}$, si

1. *M est un polynôme unitaire.*
2. *$\forall j \in \{0, ..., n\}$, Q_1 divise M.*
3. *$\forall j \in \{0, ..., n\}$, Q_1 divise $Q \Longrightarrow degQ \geqslant degM$.*

Exemple 42.
$P_1(X) = -2(X^3-1)^3(X+2)$
$P_2(X) = (X^2+2)^2(X^3-1)$
$P_3(X) = 7(X+2)(X-5)$
$P_1 \wedge P_2 = PGCD(P_1, P_2) = (X^3-1)(X+2)$
$P_1 \vee P_2 = PPCM(P_1, P_2) = -2(X^3-1)^3(X+2)^2$
$P_2 \wedge P_3 = PGCD(P_2, P_3) = (X+2)$
$P_2 \vee P_3 = PPCM(P_2, P_3) = 7(X+2)^2(X^3-1)(X-5)$
$PGCD(P_1, P_2, P_3) = (X+2)$
$PPCM(P_1, P_2, P_3) = -14(X^3-1)^3(X+2)^2(X-5)$.

Exemple 43. *(Algorithme Euclidien)*
$P_1(X) = 2X^3+5X^2+6X+3$
$P_2(X) = X^2+2X+1$

$$\begin{array}{rrrr|l}
2X^3 & +5X^2 & +6X & +3 & X^2+2X+1 \\ \cline{5-5}
2X^3 & +4X^2 & +2X & & \qquad 2X+1 \\ \cline{1-4}
 & X^2 & +4X & +3 & \\
 & X^2 & +2X & +1 & \\ \cline{2-4}
 & & 2X & +2 &
\end{array}$$

$$\begin{array}{rrr|l}
X^2 & +2X & +1 & X+1 \\ \cline{4-4}
X^2 & +X & & X+1 \\ \cline{1-3}
 & X & +1 & \\
 & X & +1 & \\ \cline{2-3}
 & & 0 &
\end{array}$$

$P_1 \wedge P_2 = X+1$.

Théorème 12. *Soient P_1 et P_2 deux polynômes dans $K[X] \setminus \{0\}$, on a $(P_1 \wedge P_2)(P_1 \vee P_2) = N_{P_1P_2}$ avec $N_{P_1P_2}$ le polynôme normale de P_1P_2.*

Exemple 44.
Soient $P_1(X) = (X+2)^2(X-5)$ et $P_2(X) = (X+2)(X-5)^2$

$$\frac{P_1(X)P_2(X)}{P_1 \wedge P_2} = \frac{(X+2)^2(X-5)(X+2)(X-5)^2}{(X+2)(X-5)} = (X+2)^2(X-5)^2 = P_1 \vee P_2.$$

Définition 42. *Soient n polynômes $Q_1, Q_2, ..., Q_n$ dans $K[X] \setminus \{0\}$ alors $Q_1, Q_2, ..., Q_n$ sont premiers entre eux si et seulement si $PGCD(Q_1, Q_2, ..., Q_n) = 1$.*

Théorème 13. *(de Bezout) Soient n polynômes $Q_1, Q_2, ..., Q_n$ dans $K[X] \setminus \{0\}$ alors $Q_1, Q_2, ..., Q_n$ sont premiers entre eux $\Longleftrightarrow \exists S_1, S_2, ..., S_n \in K[X]$ tels que $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} Q_jS_j = 1$.*

Théorème 14. *(de Gauss) Soient $P, Q, S \in K[X] \setminus \{0\}$, ($Q$ divise PS) et $PGCD\ QP = 1 \Longrightarrow Q$ divise S.*

<u>Factorisation d'un polynôme dans $K[X]$:</u>

Définition 43. *On dit factorisation de Q tout polynôme Q de $K[X]$ se décompose en produit de polynômes irréductibles de $K[X]$.*

Exemple 45. *Factoriser dans $\mathbb{R}[X]$ puis dans $\mathbb{C}[X]$ le polynôme $Q(X) = X^3+X^2-X+2$ $Q(-2) = (-2)^3 + (-2)^2 - (-2) + 2 = 0 \Longrightarrow (X + 2)$ divise Q, par suite*

$$\begin{array}{rrrr|l}
X^3 & +X^2 & -X & +2 & X+2 \\ \cline{5-5}
X^3 & +2X^2 & & & X^2 - X + 1 \\ \cline{1-4}
 & -X^2 & -X & +2 & \\
 & -X^2 & -2X & & \\ \cline{2-4}
 & & X & +2 & \\
 & & X & +2 & \\ \cline{2-4}
 & & & 0 &
\end{array}$$

$Q(X) = (X + 2)(X^2 - X + 1) \Longrightarrow \Delta < 0 \Longrightarrow X^2 - X + 1$ est irréductible dans $\mathbb{R}$. Donc la factorisation de Q sur $\mathbb{R}[X]$ donne $Q(X) = (X + 2)(X^2 - X + 1)$.

Il reste à décomposer $X^2 - X + 1$ sur $\mathbb{C}[X]$
$\Delta = -3 = 3i^2 \Longrightarrow x_1 = \dfrac{1 + i\sqrt{3}}{2}$ et $x_2 = \dfrac{1 - i\sqrt{3}}{2}$.
Donc $X^2 - X + 1 = (X - \dfrac{1 + i\sqrt{3}}{2})(X - \dfrac{1 - i\sqrt{3}}{2})$, par suite la factorisation de Q sur $\mathbb{C}[X]$ donne $Q(X) = (X + 2)(X - \dfrac{1 + i\sqrt{3}}{2})(X - \dfrac{1 - i\sqrt{3}}{2})$.

Définition 44. *On appelle polynôme scindé tout polynôme qui peut s'écrire sous forme polynôme de degré du produit des polynômes des racines simples.*

Exemple 46.

1. *$X^3 - 2X^2 - 5X + 6 = (X - 1)(X + 2)(X - 3)$ est un polynôme scindé dans $\mathbb{R}[X]$.*
2. *$X^3 + 2X^2(i - 1) - (i + 1)X + 2 = (X - 2)(X + i)^2$ n'est pas un polynôme scindé dans $\mathbb{C}[X]$.*

<u>Fractions rationnelles :</u>

Définition 45. *Une fractions rationnelle s'écrit de la forme $F = \dfrac{Q}{R}$ avec $Q \in K[X]$ et $R \in K[X] \setminus \{0\}$ tel que $degF = degQ - degR$.*

Définition 46. *Soit une fractions rationnelle $F \in K[X]$ alors la forme irréductible de F est le couple (A, B) avec $F = \dfrac{A}{B}$ et $A \wedge B = 1$.*

Définition 47. *Soit une fractions rationnelle* $F = \dfrac{Q}{R}$ *avec* $Q \wedge R = 1$ *et* a *une racine de multiplicité* n *de* R *alors* a *est appelée pôle de* F *de multiplicité* n .

Définition 48. *Soit une fraction rationnelle* $F = \dfrac{Q}{S}$ *avec* $Q \wedge S = 1$*, la partie entière de* F *est le quotient de la division* Q *par* S*, alors*

$$Q = SG + R \Longrightarrow \frac{Q}{S} = \frac{SG+R}{S} = G + \frac{R}{S} \text{ avec } degR < degS.$$

Si $degQ < degS \Longrightarrow G(X) = 0.$

Décomposition en éléments simples dans $\mathbb{R}[X]$:

Définition 49. *L'élément simple de* $\mathbb{R}[X]$ *est tout monôme de* $\mathbb{R}[X]$.
Toute fraction rationnelle de la forme $\dfrac{k}{(X-a)^p}$ *avec* $a \in \mathbb{R}$ *et* $p \in \mathbb{N}^*$, *(élément simple de première espéce),* $\dfrac{aX+b}{(X^2+cX+d)^p}$ *avec* $a, b \in \mathbb{R}$, $p \in \mathbb{N}^*$, *et* $c^2 - 4d < 0$, *(élément simple de second espéce).*

Théorème 15. *Toute fraction rationnelle s'écrit sous une seule forme d'une somme d'éléments simples de* $\mathbb{R}[X]$.

Preuve. Soit F une fraction rationnelle telle que

$$F(X) = \frac{Q(X)}{S(X)} \text{ et } Q \wedge S = 1.$$

$S(X) = \lambda(X-a_1)^{n_1}(X-a_2)^{n_2}...(X-a_k)^{n_k}(X^2+b_1X+c_1)^{k_1}(X^2+b_2X+c_2)^{k_2}...(X^2+b_qX+c_q)^{k_q}$ et $b_j^2 - 4c_j < 0.$

$\dfrac{Q(X)}{S(X)} = G(X) + [\dfrac{a_1}{X-a_1} + \dfrac{a_2}{(X-a_2)^2} + ... + \dfrac{a_{n_1}}{(X-a_{n_1})^{n_1}}] + [\dfrac{b_1}{X-a_k} + \dfrac{b_2}{(X-a_k)^2} + ... + \dfrac{b_{n_p}}{(X-a_k)^{n_p}}] + [\dfrac{\gamma_1 X+\mu_1}{X^2+b_1X+c_1} + \dfrac{\gamma_2 X+\mu_2}{(X^2+b_1X+c_1)^2} + ... + \dfrac{\gamma_{k_1}X+\mu_{k_1}}{(X^2+b_1X+c_1)^{k_1}}]$
$+ ... + [\dfrac{u_1X+v_1}{X^2+b_qX+c_q} + \dfrac{u_2X+v_2}{(X^2+b_qX+c_q)^2} + ... + \dfrac{u_{k_q}X+v_{k_q}}{(X^2+b_qX+c_q)^{k_q}}]$. ■

Exemple 47. *Décomposer la fraction rationnelle suivante dans* $\mathbb{R}[X]$
$A(X) = \dfrac{1}{(X^3+1)^2} = \dfrac{1}{(X+1)^2(X^2-X+1)^2}$
$A(X) = \dfrac{k_1}{X+1} + \dfrac{k_2}{(X+1)^2} + \dfrac{aX+b}{(X^2-X+1)} + \dfrac{cX+d}{(X^2-X+1)^2}$

Calcul de k_2 :

$$\begin{aligned}(X+1)^2A(X) &= \frac{1}{(X^2-X+1)^2}\\ &= k_1(X+1) + k_2 + (X+1)^2[\frac{aX+b}{(X^2-X+1)} + \frac{cX+d}{(X^2-X+1)^2}]\end{aligned}$$

$X=-1 \Longrightarrow \frac{1}{9}=k_2.$

Calcul de k_1 :

$$\begin{aligned}
[\frac{1}{(X^2-X+1)^2}]' &= \frac{-4X+2}{(X^2-X+1)^3}\\
&= k_1+\Big((X+1)^2[\frac{aX+b}{(X^2-X+1)}+\frac{cX+d}{(X^2-X+1)^2}]\Big)'
\end{aligned}$$

$X=-1 \Longrightarrow \frac{6}{27}=k_1 \Longrightarrow k_1=\frac{2}{9}.$

Calcul de c et d :
$(X^2-X+1)^2A(X)=\frac{1}{(X+1)^2}=(X^2-X+1)^2[\frac{k_1}{X+1}+\frac{k_2}{(X+1)^2}]$
$+(aX+b)(X^2-X+1)+(cX+d).$
On a $X^2-X+1=0 \Longrightarrow \Delta=-3=3i^2 \Longrightarrow X_1=\frac{1+i\sqrt{3}}{2}$ *et* $X_2=\frac{1-i\sqrt{3}}{2}.$
Pour $X=X_1 \Longrightarrow \frac{1}{(X_1+1)^2}=cX_1+d.$
Ce qui donne

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\Big(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}+1\Big)^2} &= c\Big(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\Big)+d\\
\frac{1}{\Big(\frac{3}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\Big)^2} &= \frac{c}{2}+ic\frac{\sqrt{3}}{2}+d\\
\frac{1}{\frac{9}{4}+3i\frac{\sqrt{3}}{2}+i^2\frac{3}{4}} &= \Big(\frac{c}{2}+d\Big)+ic\frac{\sqrt{3}}{2}\\
\frac{1}{\frac{6}{4}+i3\frac{\sqrt{3}}{2}} &= \Big(\frac{c}{2}+d\Big)+ic\frac{\sqrt{3}}{2}\\
\frac{\Big(\frac{3}{2}-i3\frac{\sqrt{3}}{2}\Big)}{\Big(\frac{3}{2}+i3\frac{\sqrt{3}}{2}\Big)\Big(\frac{3}{2}-i3\frac{\sqrt{3}}{2}\Big)} &= \Big(\frac{c}{2}+d\Big)+ic\frac{\sqrt{3}}{2}\\
\frac{\Big(\frac{3}{2}-i3\frac{\sqrt{3}}{2}\Big)}{9} &= \Big(\frac{c}{2}+d\Big)+ic\frac{\sqrt{3}}{2}\\
\frac{1}{6}-i\frac{\sqrt{3}}{6} &= \Big(\frac{c}{2}+d\Big)+ic\frac{\sqrt{3}}{2}
\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} \frac{c}{2}+d &=& \frac{1}{6}\\ \\ c\frac{\sqrt{3}}{2} &=& -\frac{\sqrt{3}}{6}\end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} c &=& -\frac{1}{3}\\ \\ d &=& \frac{1}{3}.\end{array}\right.$$

Calcul de a :

$$\begin{aligned}\lim_{X\to+\infty} XA(X) &= \lim_{X\to+\infty} \frac{X}{(X+1)^2(X^2-X+1)^2}\\ &= \lim_{X\to+\infty} \Big[\frac{k_1X}{X+1}+\frac{k_2X}{(X+1)^2}+\frac{X(aX+b)}{(X^2-X+1)}+\frac{X(cX+d)}{(X^2-X+1)^2}\Big].\end{aligned}$$

Ce qui implique que $0 = k_1 + a \Longrightarrow a = -k_1 \Longrightarrow a = -\dfrac{2}{9}$.

Calcul de b :
$A(0) = 1 = k_1 + k_2 + b + d \Longrightarrow b = 1 - k_1 - k_2 - d \Longrightarrow b = \dfrac{1}{3}$.

Conclusion :
$A(X) = \dfrac{2}{9(X+1)} + \dfrac{1}{9(X+1)^2} + \dfrac{-2X+3}{9(X^2-X+1)} + \dfrac{-X+1}{3(X^2-X+1)^2}$.

3.5 Séries d'exercices

Exercice 1 :
Trouver un polynôme P de degré minimum tel que $P(0) = 1,\ P(1) = 0$,
$P(-1) = -2,\ P(2) = 4$.

Exercice 2 :
1) Trouver le degré du polynôme dans $\mathbb{R}[X]$ qui vérifie l'équation suivante

$$Q(X^3) = X^4 Q(X).$$

2) Déterminer les coefficients de ce polynôme sachant qui satisfait l'équation

$$Q'(X) + X^2 Q(1) = -Q(0).$$

3) Trouver le reste de la division de A par B avec

$$A(X) = (X+1)^n + (X-1)^n + 2 \text{ et } B(X) = X^2 - 1.$$

Exercice 3 :
Déterminer les réels a, b, c tels que le polynôme

$$P(X) = X^5 - 2X^4 - 6X^3 + aX^2 + bX + c$$

soit divisible par

$$Q(X) = (X^2 - 1)(X - 3).$$

Exercice 4 :
Montrer que B divise A tes que
$A(X) = X^{2n+2} - 2X^{n+1} + 1$ et $B(X) = (X-1)^2$ avec $n \geqslant 1$.

Exercice 5 :
Déterminer $A \wedge B$ et $A \vee B$ dans les cas suivants
1) $A(X) = X^4 - 1, \quad B(X) = X^3 - 1$
2) $A(X) = X^4 - X^3 - X + 1, \quad B(X) = X^3 + 3X^2 + 3X + 2$
3) $A(X) = X^3 - 7X^2 + 15X - 9, \quad B(X) = X^2 - 3X + 2$

Exercice 6 :
Soient $P, Q \in \mathbb{R}[X]$ tels que

$$P(X) = X^3 - 1 \text{ et } Q(X) = (X+1)^3.$$

1) Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{R}[X]$

$$F(X) = \frac{1}{P(X)Q(X)}.$$

2) Déterminer U et $V \in \mathbb{R}[X]$ tels que $UP + VQ = 1$.

Exercice 7 :
1) Trouver tous les polynômes $A, B \in \mathbb{R}[X]$ tels que

$$(X+1)^2 A + (X-1)^2 B = 1.$$

2) Déterminer tous les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que $P - 1$ est un multiple de $(X+1)^2$ et $P + 1$ est un multiple de $(X-1)^2$.

Exercice 8 :
Factoriser les polynômes suivants dans $\mathbb{R}[X]$ puis dans $\mathbb{C}[X]$.
1) $P_1(X) = X^3 - 4X^2 + 4X - 3$
2) $P_2(X) = X^3 - 2X^2 - 4X + 8$
3) $P_3(X) = (X^2 - 4X + 3)^2 + (X-3)^2$.

Exercice 9 :
Soit $P(X) = X^5 + X^4 + 2X^3 + 2X^2 + X + 1$.
1) Calculer $PGCD(P, P')$.
2) Quelles sont les racines multiples de P dans $\mathbb{C}$?
3) Vérifier que $(X^2+1)^2$ divise P.
4) Factoriser P dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 10 :
Efectuer la décomposition en éléments simples dans $\mathbb{R}[X]$ des fractions rationnelles suivantes

$$1)\frac{X^2+2X+5}{X^2-3X+2} \quad 2)\frac{X^2+1}{(X-1)(X-2)(X-3)} \quad 3)\frac{1}{X(X-1)^2}$$

$$4)\frac{1}{X^4+X^2+1} \quad 5)\frac{3X-1}{X^2(X+1)^2} \quad 6)\frac{X-1}{X^3(X^2+1)^2}.$$

Exercice 11 :
Soit $P(X) = X^4 + 8X^3 + 9X^2 + 5X + 1$ et $Q(X) = 2X^3 + X^2 + 2X + 1$.
1) Vérifier que P admet une unique racine rationnelle $\alpha \in Q$.
2) Calculer la multiplicité de la racine α.
3) Déterminer $PGCD(P, Q)$ puis $PPCM(P, Q)$.

Exercice 12 :
Soient $a, b \in \mathbb{C}$ avec $a \neq 0$ et $P(X) = X^4 + 4aX + b$.
1) Montrer que si $z \in \mathbb{C}$ est une racine double de P alors $z^3 = -a$.
2) Montrer que si P admet une racine double α alors $b^3 = 27a^3$.
3) En déduire l'ordre de multiplicité de la racine α de P.

3.6 Corrigé de la série d'exercices

Exercice 1 :

Trouvons un polynôme P de degré minimum tel que $P(0) = 1,\ P(1) = 0,$
$P(-1) = -2,\ P(2) = 4.$

On a quatre équations donc on peut trouver quatre inconnus, par suite le polynôme P de degré minimum est un polynôme de degré trois, c'est-à-dire $P(X) = a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3$.

$P(0) = 1 \Longrightarrow a_0 = 1$

$P(1) = 0 \Longrightarrow a_0 + a_1(1) + a_2(1)^2 + a_3(1)^3 = 0 \Longrightarrow a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 0$

$\Longrightarrow 1 + a_1 + a_2 + a_3 = 0 \Longrightarrow a_1 + a_2 + a_3 = -1.$

$P(-1) = -2 \Longrightarrow a_0 + a_1(-1) + a_2(-1)^2 + a_3(-1)^3 = -2$

$\Longrightarrow a_0 - a_1 + a_2 - a_3 = -2 \Longrightarrow 1 - a_1 + a_2 - a_3 = -2 \Longrightarrow -a_1 + a_2 - a_3 = -3.$

$P(2) = 4 \Longrightarrow a_0 + a_1(2) + a_2(2)^2 + a_3(2)^3 = 4 \Longrightarrow a_0 + 2a_1 + 4a_2 + 8a_3 = 4$

$\Longrightarrow 1 + 2a_1 + 4a_2 + 8a_3 = 4 \Longrightarrow 2a_1 + 4a_2 + 8a_3 = 3.$

Ce qui donne $\begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 &= -1 \ ...(1) \\ -a_1 + a_2 - a_3 &= -3 \ ...(2) \\ 2a_1 + 4a_2 + 8a_3 &= 3 \ ...(3) \end{cases}$

$(1) + (2)$ nous donne $2a_2 = -4 \Longrightarrow a_2 = -2.$

$2.(2) + (3)$ nous donne $6a_2 + 6a_3 = -3 \Longrightarrow a_2 + a_3 = \dfrac{-1}{2} \Longrightarrow a_3 = \dfrac{-1}{2} - a_2 \Longrightarrow a_3 = \dfrac{3}{2}.$

On remplace les valeurs de a_2 et a_3 dans l'équation (1), on obtient

$a_1 + a_2 + a_3 = -1 \Longrightarrow a_1 = -1 - a_2 - a_3 \Longrightarrow a_1 = -1 - (-2) - \dfrac{3}{2} \Longrightarrow a_1 = -\dfrac{1}{2}.$

Donc $P(X) = 1 - \dfrac{X}{2} - 2X^2 + \dfrac{3}{2}X^3.$

Exercice 2 :

1) Trouvons le degré du polynôme dans $\mathbb{R}[X]$ qui vérifie l'équation suivante

$$Q(X^3) = X^4Q(X).$$

$Q(X) \in \mathbb{R}[X] \Longrightarrow Q(X) = a_kX^k + a_{k-1}X^{k-1} + ... + a_0$

$\Longrightarrow Q(X^3) = a_kX^{3k} + a_{k-1}X^{3k-3} + ... + a_0 \Longrightarrow degQ(X^3) = 3k.$

D'autre part $X^4Q(X) = a_kX^{k+4} + a_{k-1}X^{k+3} + ... + a_0X^4 \Longrightarrow deg(X^4Q(X)) = k + 4.$

Par suite $degQ(X^3) = deg(X^4Q(X)) \Longrightarrow 3k = k + 4 \Longrightarrow 2k = 4 \Longrightarrow k = 2.$

Donc le degré du polynôme est $2 \Longrightarrow Q(X) = a_0 + a_1X + a_2X^2.$

2) Déterminons les coefficients de ce polynôme sachant qui satisfait l'équation

$$Q'(X) + X^2Q(1) = -Q(0).$$

On a $Q'(X) = a_1 + 2a_2X,\ \ Q(1) = a_0 + a_1(1) + a_2(1)^2 = a_0 + a_1 + a_2$ et $Q(0) = a_0.$

Ce qui donne $a_1+2a_2X+X^2(a_0+a_1+a_2) = -a_0 \Longrightarrow a_1+a_0+2a_2X+X^2(a_0+a_1+a_2) = 0$

$\Longrightarrow \begin{cases} a_1 + a_0 &= 0 \\ 2a_2 &= 0 \\ a_0 + a_1 + a_2 &= 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a_1 &= -a_0 \\ a_2 &= 0 \\ a_0 &\in \mathbb{R} \quad 0. \end{cases}$

Donc $Q(x) = a_0 - a_0X + 0X^2 \Longrightarrow Q(X) = a_0(1 - X)$ avec $a_0 \in \mathbb{R}$.

3) Trouvons le reste de la division de A par B avec

$$A(X) = (X + 1)^n + (X - 1)^n + 2 \text{ et } B(X) = X^2 - 1.$$

On a $A(X) = Q(X)B(X) + R(X)$
$B(X) = X^2 - 1 \Longrightarrow degB(X) = 2$ alors $A(X) = Q(X)B(X) + R(X)$
avec $degR(X) < degB(X) \Longrightarrow degR(X) < 2$.
Donc $R(X) = a_0 + a_1X$.

$B(X) = 0 \Longrightarrow X^2 - 1 = 0 \Longrightarrow X = +1$ ou $X = -1$, alors
$A(1) = Q(1)B(1) + R(1) \Longrightarrow A(1) = R(1)$,
et $A(-1) = Q(-1)B(-1) + R(-1) \Longrightarrow A(-1) = R(-1)$.
Par suite $A(1) = (1 + 1)^n + (1 - 1)^n + 2 = 2^n + 2$
$A(-1) = (-1 + 1)^n + (-1 - 1)^n + 2 = (-2)^n + 2$.

Or $R(1) = a_0 + a_1(1) = a_0 + a_1$ et $R(-1) = a_0 + a_1(-1) = a_0 - a_1$,

alors $\begin{cases} A(1) = R(1) \\ A(-1) = R(-1) \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a_0 + a_1 = 2^n + 2 \;...(1) \\ a_0 - a_1 = (-2)^n + 2 \;...(2) \end{cases}$

$(1) + (2)$ nous donne $2a_0 = 4 + 2^n + (-2)^n \Longrightarrow a_0 = \dfrac{4 + 2^n + (-2)^n}{2}$
$\Longrightarrow a_0 = 2 + \dfrac{1}{2}(2^n + (-2)^n)$.
On remplace a_0 dans l'équation (1), on obtient
$a_0 + a_1 = 2^n + 2 \Longrightarrow a_1 = 2^n + 2 - a_0 \Longrightarrow a_1 = \dfrac{1}{2}(2^n - (-2)^n)$.
Donc $R(X) = 2 + \dfrac{1}{2}(2^n + (-2)^n) + \dfrac{1}{2}(2^n - (-2)^n)X$.

Exercice 3 :
Déterminons les réels a, b, c tels que le polynôme

$$P(X) = X^5 - 2X^4 - 6X^3 + aX^2 + bX + c$$

soit divisible par

$$Q(X) = (X^2 - 1)(X - 3).$$

On a $Q(X) = 0 \Longrightarrow (X^2 - 1)(X - 3) = 0 \Longrightarrow X^2 - 1 = 0$ ou $X - 3 = 0$
$\Longrightarrow X^2 = 1$ ou $X = 3 \Longrightarrow X = 1$ ou $X = -1$ ou $X = 3$.

Pour que Q divise P il faut que toutes les racines de Q sont les racines de P, ce qui donne
$P(1) = 0 \Longrightarrow (1)^5 - 2(1)^4 - 6(1)^3 + a(1)^2 + b(1) + c \Longrightarrow -7 + a + b + c = 0$
$P(-1) = 0 \Longrightarrow (-1)^5 - 2(-1)^4 - 6(-1)^3 + a(-1)^2 + b(-1) + c \Longrightarrow 3 + a - b + c = 0$
$P(3) = 0 \Longrightarrow (3)^5 - 2(3)^4 - 6(3)^3 + a(3)^2 + b(3) + c \Longrightarrow -81 + 9a + 3b + c = 0.$

$$\text{Par suite}\left\{\begin{array}{rcl} -7+a+b+c &=& 0\ \ ...(1)\\ \\ 3+a-b+C &=& 0\ \ ...(2)\\ \\ -81+9a+3b+c &=& 0\ \ ...(3)\end{array}\right.$$

$(1)-(2)$ nous donne $-10+2b=0 \Longrightarrow 2b=10 \Longrightarrow b=5$.
On remplace b dans l'équation (3), on obtient
$-81+9a+3(5)+c=0 \Longrightarrow -66+9a+c=0$.

D'autre part, on remplace b dans l'équation (2), on obtient
$3+a-5+c=0 \Longrightarrow -2+a+c=0$.

$$\text{Ce qui donne}\left\{\begin{array}{rcl} -66+9a+c &=& 0\ \ ...(4)\\ \\ -2+a+c &=& 0\ \ ...(5)\end{array}\right.$$

$(4)-(5)$ nous donne $-64+8a=0 \Longrightarrow 8a=64 \Longrightarrow\Longrightarrow a=8$.
On remplace a et b dans l'équation (1), on obtient
$-7+8+5+c=0 \Longrightarrow -7+13+c=0 \Longrightarrow c=-6$.
Donc $P(X)=X^5-2X^4-6X^3+8X^2+5X-6$.

Exercice 4 :
Montrons que B divise A tes que
$A(X)=X^{2n+2}-2X^{n+1}+1$ et $B(X)=(X-1)^2$ avec $n \geqslant 1$.
On a $B(X)=0 \Longrightarrow (X-1)^2=0 \Longrightarrow X=1$ est une racine double.

Pour que B divise A il faut que 1 soit une racine double de A.
$A(1)=(1)^{2n+2}-2(1)^{n+1}+1=2-2=0$
$A'(X)=(2n+2)X^{2n+1}-2(n+1)X^n \Longrightarrow A'(1)=(2n+2)(1)^{2n+1}-2(n+1)(1)^n=2n+2-2n-2=0 \Longrightarrow A'(1)=0$.

Mais $A''(X)=(2n+2)(2n+1)X^{2n}-(2n+1)nX^{n-1}$
$\Longrightarrow A''(1)=(2n+2)(2n+1)(1)^{2n}-(2n+1)n(1)^{n-1}=2n^2+4n+2 \Longrightarrow A''(1)\neq 0,\ \forall n \geqslant 0$.
Donc 1 est une racine double de A, ce qui implique que B divise A.

Exercice 5 :
Déterminons $A \wedge B$ et $A \vee B$ dans les cas suivants
1) $A(X)=X^4-1, \qquad B(X)=X^3-1$

$$\begin{array}{rr|l} X^4 & -1 & X^3-1 \\ \cline{3-3} X^4 & -X & \quad X \\ \cline{1-2} X & -1 & \end{array}$$

$$\begin{array}{rr|l} X^3 & -1 & \quad X-1 \\ \cline{3-3} X^3 & -X^2 & X^2+X+1 \\ \cline{1-2} X^2 & -1 & \\ X^2 & -X & \\ \cline{1-2} X & -1 & \\ X & -1 & \\ \cline{1-2} & 0 & \end{array}$$

$A \wedge B = X - 1.$

$$A \vee B = \frac{A(X)B(X)}{A \wedge B} = \frac{(X^4-1)(X^3-1)}{X-1}$$
$A \vee B = (X^4-1)(X^2+X+1).$

2) $A(X) = X^4 - X^3 - X + 1, \qquad B(X) = X^3 + 3X^2 + 3X + 2$

$$\begin{array}{rrrrr|l}
X^4 & -X^3 & & -X & +1 & X^3+3X^2+3X+2 \\ \cline{6-6}
X^4 & +3X^3 & +3X^2 & +2X & & \qquad X-4 \\ \cline{1-5}
 & -4X^3 & -3X^2 & -3X & +1 & \\
 & -4X^3 & -12X^2 & -12X & -8 & \\ \cline{3-5}
 & & 9X^2 & +9X & +9 &
\end{array}$$

$$\begin{array}{rrrr|l}
X^3 & +3X^2 & +3X & +2 & X^2+X+1 \\ \cline{5-5}
X^3 & +X^2 & +X & & \qquad X+2 \\ \cline{1-4}
 & 2X^2 & +2X & +2 & \\
 & 2X^2 & +2X & +2 & \\ \cline{2-4}
 & & & 0 &
\end{array}$$

$A \wedge B = X^2 + X + 1.$

$$A \vee B = \frac{A(X)B(X)}{A \wedge B} = \frac{(X^4-X^3-X+1)(X^3+3X^2+3X+2)}{X^2+X+1}$$
$A \vee B = (X^4 - X^3 - X + 1)(X+2).$

3) $A(X) = X^3 - 7X^2 + 15X - 9, \qquad B(X) = X^2 - 3X + 2$

$$\begin{array}{rrrr|l}
X^3 & -7X^2 & +15X & -9 & X^2-3X+2 \\ \cline{5-5}
X^3 & -3X^2 & +2X & & \qquad X-4 \\ \cline{1-4}
 & -4X^2 & +13X & -9 & \\
 & -4X^2 & +12X & -8 & \\ \cline{2-4}
 & & X & -1 &
\end{array}$$

$$\begin{array}{rrr|l}
X^2 & -3X & +2 & X-1 \\ \cline{4-4}
X^2 & -X & & X-2 \\ \cline{1-3}
 & -2X & +2 & \\
 & -2X & +2 & \\ \cline{2-3}
 & & 0 &
\end{array}$$

$A \wedge B = X - 1.$

$$A \vee B = \frac{A(X)B(X)}{A \wedge B} = \frac{(X^3-7X^2+15X-9)(X^2-3X+2)}{X-1}$$
$A \vee B = (X^3 - 7X^2 + 15X - 9)(X-2).$

Exercice 6 :
Soient $P, Q \in \mathbb{R}[X]$ tels que

$$P(X) = X^3 - 1 \text{ et } Q(X) = (X+1)^3.$$

1) Décomposons en éléments simples dans $\mathbb{R}[X]$

$$F(X) = \frac{1}{P(X)Q(X)}.$$

On a $F(X) = \dfrac{1}{P(X)Q(X)} = \dfrac{1}{(X^3-1)(X+1)^3}$
$X^3 - 1 = (X-1)(X^2+X+1)$ mais pour le polynôme X^2+X+1, $\Delta = -3 < 0$
$\Longrightarrow X^2+X+1$ est irreductible dans $\mathbb{R}[X]$.
Ce qui donne

$$F(X) = \frac{1}{(X-1)(X^2+X+1)(X+1)^3}$$

$$F(X) = \frac{a}{X-1} + \frac{bX+c}{X^2+X+1} + \frac{k_1}{X+1} + \frac{k_2}{(X+1)^2} + \frac{k_3}{(X+1)^3}.$$

Calcul de a :

$$\begin{aligned}(X-1)F(X) &= \frac{1}{(X^2+X+1)(X+1)^3}\\ &= a + (X-1)\frac{bX+c}{X^2+X+1} + (X-1)\frac{k_1}{X+1} + (X-1)\frac{k_2}{(X+1)^2}\\ &\quad +(X-1)\frac{k_3}{(X+1)^3}\end{aligned}$$

$X = 1 \Longrightarrow a = \dfrac{1}{24}$.

Calcul de k_3 :

$$\begin{aligned}(X+1)^3F(X) &= \frac{1}{(X-1)(X^2+X+1)}\\ &= (X+1)^3\frac{a}{X-1} + (X+1)^3\frac{bX+c}{X^2+X+1} + (X+1)^2k_1 + (X+1)k_2 + k_3\end{aligned}$$

$X = -1 \Longrightarrow k_3 = \dfrac{-1}{2}$.

Calcul de k_2 :

En dérivant $(X+1)^3F(X)$, on obtient

$$\begin{aligned}\Big(\frac{1}{(X-1)(X^2+X+1)}\Big)' &= \Big(\frac{1}{X^3-1}\Big)'\\ &= \frac{-3X^2}{(X^3-1)^2}\\ &= \Big[(X+1)^3\Big(\frac{a}{X-1} + \frac{bX+c}{X^2+X+1}\Big)\Big]' + 2(X+1)k_1 + k_2\end{aligned}$$

$X = -1 \Longrightarrow k_2 = \dfrac{-3}{4}$.

Calcul de k_1 :

En dérivant une deuxième fois $(X+1)^3F(X)$, on obtient

$$\begin{aligned}
\Big(\frac{1}{(X-1)(X^2+X+1)}\Big)'' &= \Big(\frac{1}{X^3-1}\Big)'' \\
&= \Big(\frac{-3X^2}{(X^3-1)^2}\Big)' \\
&= \frac{12X^4+6X}{(X^3-1)^3} \\
&= \Big[(X+1)^3\Big(\frac{a}{X-1}+\frac{bX+c}{X^2+X+1}\Big)\Big]'' + 2k_1
\end{aligned}$$

$X=-1 \Longrightarrow k_1 = \dfrac{-3}{8}$.

Calcul de b :

$$\begin{aligned}
\lim_{X\to+\infty} XF(X) &= \lim_{X\to+\infty} \frac{X}{(X-1)(X^2+X+1)(X+1)^3} \\
&= \lim_{X\to+\infty}\frac{Xa}{X-1} + \lim_{X\to+\infty}\frac{X(bX+c)}{(X^2+X+1)} + \lim_{X\to+\infty}\frac{Xk_1}{X+1} \\
&\quad + \lim_{X\to+\infty}\frac{Xk_2}{(X+1)^2} + \lim_{X\to+\infty}\frac{Xk_3}{(X+1)^3}.
\end{aligned}$$

Ce qui implique que $0 = a+b+k_1 \Longrightarrow b = -a-k_1 \Longrightarrow b = -\dfrac{1}{24} - \dfrac{-3}{8} \Longrightarrow b = \dfrac{1}{3}$.

Calcul de c :
$F(0) = -1 = -a+c+k_1+k_2+k_3 \Longrightarrow c = -1+a-k_1-k_2-k_3 \Longrightarrow c = \dfrac{2}{3}$.

Conclusion :
$F(X) = \dfrac{1}{24(X-1)} + \dfrac{X+2}{3(X^2+X+1)} - \dfrac{3}{8(X+1)} - \dfrac{3}{4(X+1)^2} - \dfrac{1}{2(X+1)^3}$.

2) Déterminons U et $V \in \mathbb{R}[X]$ tels que $UP+VQ=1$.
0n a $U(X^3-1)+V(X+1)^3=1$
$(X+1)^3 = (X+1)(X+1)^2 = (X+1)(X^2+2X+1) = X^3+3X^2+3X+1$.
Par suite

$$\begin{array}{rrrr|l}
X^3 & +3X^2 & +3X & +1 & X^3-1 \\ \cline{5-5}
X^3 & & & -1 & \qquad 1 \\ \cline{1-4}
 & 3X^2 & +3X & +2 &
\end{array}$$

$(X+1)^3 = (X^3-1)+3X^2+3X+2 \Longrightarrow 3X^2+3X+2 = (X+1)^3-(X^3-1)$.

$$\begin{array}{rrrr|l}
X^3 & & & -1 & 3X^2+3X+2 \\ \cline{5-5}
X^3 & +X^2 & +\frac{2}{3}X & -1 & \frac{1}{3}X - \frac{1}{3} \\ \cline{1-4}
 & -X^2 & -\frac{2}{3}X & -1 & \\
 & -X^2 & -X & -\frac{2}{3} & \\ \cline{2-4}
 & & \frac{1}{3}X & -\frac{1}{3} &
\end{array}$$

$X^3-1=(3X^2+3X+2)\left(\frac{1}{3}X-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}X-\frac{1}{3}\right)$
$X^3-1=[(X+1)^3-(X^3-1)]\left(\frac{1}{3}X-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}X-\frac{1}{3}\right)$
$\frac{1}{3}X-\frac{1}{3}=(X^3-1)-[(X+1)^3-(X^3-1)]\left(\frac{1}{3}X-\frac{1}{3}\right)$
$\frac{1}{3}X-\frac{1}{3}=(X^3-1)-(X+1)^3\left(\frac{1}{3}X-\frac{1}{3}\right)+(X^3-1)\left(\frac{1}{3}X-\frac{1}{3}\right)$

$$\begin{array}{rrr|l} 3X^2 & +3X & +2 & \frac{1}{3}X-\frac{1}{3} \\ \cline{4-4} 3X^2 & -3X & & 9X+18 \\ \cline{1-3} & 6X & +2 & \\ & 6X & -6 & \\ \cline{2-3} & & 8 & \end{array}$$

$3X^2+3X+2=\left(\frac{1}{3}X-\frac{1}{3}\right)(9X+18)+8$
$8=(3X^2+3X+2)-\left(\frac{1}{3}X-\frac{1}{3}\right)(9X+18).$
Or $\frac{1}{3}X-\frac{1}{3}=(X^3-1)\left(1+\frac{1}{3}X-\frac{1}{3}\right)-(X+1)^3\left(\frac{1}{3}X-\frac{1}{3}\right)$
$\frac{1}{3}X-\frac{1}{3}=(X^3-1)\left(\frac{1}{3}X+\frac{2}{3}\right)-(X+1)^3\left(\frac{1}{3}X-\frac{1}{3}\right).$
Ce qui donne
$8=[(X+1)^3-(X^3-1)]-\left[(X^3-1)\left(\frac{1}{3}X+\frac{2}{3}\right)-(X+1)^3\left(\frac{1}{3}X-\frac{1}{3}\right)\right](9X+18)$
$8=(X+1)^3-(X^3-1)-(X^3-1)\left(\frac{1}{3}X+\frac{2}{3}\right)(9X+18)+(X+1)^3\left(\frac{1}{3}X-\frac{1}{3}\right)(9X+18)$
$8=(X+1)^3-(X^3-1)-(X^3-1)(3X^2+12X+12)+(X+1)^3(3X^2+3X-6)$
$8=(X^3-1)(-1-3X^2-12X-12)+(X+1)^3(1+3X^2+3X-6)$
$8=(X^3-1)(-3X^2-12X-13)+(X+1)^3(3X^2+3X-5)$
Donc $1=\frac{1}{8}(-3X^2-12X-13)(X^3-1)+\frac{1}{8}(3X^2+3X-5)(X+1)^3$

Ainsi $U(X^3-1)+V(X+1)^3=1$
avec $U(X)=\frac{-1}{8}(3X^2+12X+13)$ et $V(X)=\frac{1}{8}(3X^2+3X-5)$.

Exercice 7 :
1) Trouvons tous les polynômes $A,B\in\mathbb{R}[X]$ tels que

$$(X+1)^2A+(X-1)^2B=1.$$

$(X+1)^2=X^2+2X+1$ et $(X-1)^2=X^2-2X+1$

$$\begin{array}{rrr|r} X^2 & +2X & +1 & X^2-2X+1 \\ \cline{4-4} X^2 & -2X & +1 & 1 \\ \cline{1-3} & 4X & & \end{array}$$

$$\begin{array}{rrr|c} X^2 & -2X & +1 & 4X \\ \cline{4-4} X^2 & & & \frac{1}{4}X-\frac{1}{2} \\ \cline{1-3} & -2X & +1 & \\ & -2X & & \\ \cline{2-3} & & 1 & \end{array}$$

Ce qui donne $(X+1)^2 = (X-1)^2 + 4X \Longrightarrow 4X = (X+1)^2 - (X-1)^2$
$(X-1)^2 = 4X\Big(\frac{1}{4}X - \frac{1}{2}\Big) + 1 \Longrightarrow 1 = (X-1)^2 - 4X\Big(\frac{1}{4}X - \frac{1}{2}\Big)$
$1 = (X-1)^2 - [(X+1)^2 - (X-1)^2]\Big(\frac{1}{4}X - \frac{1}{2}\Big)$
$\Longrightarrow 1 = (X-1)^2 - (X+1)^2\Big(\frac{1}{4}X - \frac{1}{2}\Big) + (X-1)^2\Big(\frac{1}{4}X - \frac{1}{2}\Big)$
$1 = (X+1)^2\Big(\frac{-1}{4}X + \frac{1}{2}\Big) + (X-1)^2\Big[1 + \Big(\frac{1}{4}X - \frac{1}{2}\Big)\Big]$
$1 = (X+1)^2\Big(\frac{-1}{4}X + \frac{1}{2}\Big) + (X-1)^2\Big(\frac{1}{4}X + \frac{1}{2}\Big)$ avec $A = \frac{-1}{4}X + \frac{1}{2}$ et $B = \frac{1}{4}X + \frac{1}{2}$.

2) Déterminons tous les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que $P-1$ est un multiple de $(X+1)^2$ et $P+1$ est un multiple de $(X-1)^2$.

On a $\begin{cases} P-1 &= k_1(X+1)^2 \ ...(1) \\ \\ P+1 &= k_2(X-1)^2 \ ...(2) \end{cases}$

$(1)-(2)$ nous donne $-2 = k_1(X+1)^2 - k_2(X-1)^2 \Longrightarrow 1 = \frac{-k_1}{2}(X+1)^2 + \frac{k_2}{2}(X-1)^2$.
Or d'aprés la première question, on a $1 = (X+1)^2\Big(\frac{-1}{4}X + \frac{1}{2}\Big) + (X-1)^2\Big(\frac{1}{4}X + \frac{1}{2}\Big)$.

Donc $\begin{cases} 1 &= \frac{-k_1}{2}(X+1)^2 + \frac{k_2}{2}(X-1)^2 \\ \\ 1 &= (X+1)^2\Big(\frac{-1}{4}X + \frac{1}{2}\Big) + (X-1)^2\Big(\frac{1}{4}X + \frac{1}{2}\Big) \end{cases}$

Par identification, on obtient $\begin{cases} \frac{-k_1}{2} &= A \\ \\ \frac{k_2}{2} &= B \end{cases}$

On prend $\frac{k_2}{2} = B \Longrightarrow k_2 = 2B \Longrightarrow k_2 = 2\Big(\frac{1}{4}X + \frac{1}{2}\Big) = \frac{1}{2}X + 1$.
On remplace k_2 dans l'équation (2), on aura
$P+1 = k_2(X-1)^2 = \Big(\frac{1}{2}X + 1\Big)(X-1)^2 \Longrightarrow P+1 = \Big(\frac{1}{2}X + 1\Big)(X^2 - 2X + 1)$
$P+1 = \frac{1}{2}X^3 - \frac{3}{2}X + 1 \Longrightarrow P = \frac{1}{2}X^3 - \frac{3}{2}X$.

Exercice 8 :
Factorisons les polynômes suivants dans $\mathbb{R}[X]$ puis dans $\mathbb{C}[X]$.
1) $P_1(X) = X^3 - 4X^2 + 4X - 3$
$P(3) = 0 \Longrightarrow (X-3)$ divise $P_1(X)$

$$\begin{array}{rrrr|l} X^3 & -4X^2 & +4X & -3 & X-3 \\ \cline{5-5} X^3 & -3X^2 & & & X^2 - X + 1 \\ \hline & -X^2 & +4X & -3 & \\ & -X^2 & +3X & & \\ \cline{2-4} & & X & -3 & \\ & & X & -3 & \\ \cline{2-4} & & & 0 & \end{array}$$

$P_1(X) = (X-3)(X^2 - X + 1)$.
Pour le polynôme $X^2 - X + 1 \Longrightarrow \Delta = -3 < 0 \Longrightarrow X^2 - X + 1$ est irreductible dans

$\mathbb{R}[X]$.
Donc la factorisation de P_3 sur $\mathbb{R}[X]$ donne $P_1(X) = (X-3)(X^2 - X + 1)$.
Il reste à décompser $X^2 - X + 1$ dans $\mathbb{C}[X]$.
On a $\Delta = -3 = 3i^2 \Longrightarrow X_1 = \dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}$ et $X_2 = \dfrac{1-i\sqrt{3}}{2}$.
Par suite $X^2 - X + 1 = \Big(X - \dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}\Big)\Big(X - \dfrac{1-i\sqrt{3}}{2}\Big)$, alors la factorisation de P_1 dans $\mathbb{C}[X]$ donne
$P_1(X) = (X-3)\Big(X - \dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}\Big)\Big(X - \dfrac{1-i\sqrt{3}}{2}\Big)$.

2) $P_2(X) = X^3 - 2X^2 - 4X + 8$
$P(-2) = 0 \Longrightarrow (X+2)$ divise $P_2(X)$

$$
\begin{array}{rrrr|l}
X^3 & -2X^2 & -4X & +8 & X+2 \\
\cline{5-5}
X^3 & +2X^2 & & & X^2 - 4X + 4 \\
\cline{1-4}
& -4X^2 & -4X & +8 & \\
& -4X^2 & -8X & & \\
\cline{2-4}
& & 4X & +8 & \\
& & 4X & +8 & \\
\cline{2-4}
& & & 0 &
\end{array}
$$

$P_2(X) = (X+2)(X^2 - 4X + 4)$.
Or $X^2 - 4X + 4 = (X-2)^2$.
Donc la factorisation de $P_2(X)$ donne $P_2(X) = (X+2)(X-2)^2$.

3) $P_3(X) = (X^2 - 4X + 3)^2 + (X-3)^2$
$P_3(X) = (X^2 - 4X + 3)^2 - i^2(X-3)^2$
$P_3(X) = [(X^2 - 4X + 3) + i(X-3)][(X^2 - 4X + 3) - i(X-3)]$
$P_3(X) = (X^2 + X(-4+i) + 3 - 3i)(X^2 + X(-4-i) + 3 + 3i)$

Pour le polynôme $X^2 + X(-4+i) + 3 - 3i$ on a
$\Delta_1 = (-4+i)^2 - 4(3-3i) = 3 + 4i = 4 - 1 + 4i = (2+i)^2$.
Par suite $X_1 = \dfrac{4 - i + 2 + i}{2} = 3$ et $X_2 = \dfrac{4 - i - (2+i)}{2} = 1 - i$.
Donc $X^2 + X(-4+i) + 3 - 3i = (X-3)(X-(1-i)) = (X-3)(X-1+i)$.

Comme les coefficients des deux polynômes sont conjugués alors les racines du polynôme $X^2 + X(-4-i) + 3 + 3i$ sont conjugués aussi alors $X^2 + X(-4-i) + 3 + 3i = (X-3)(X-1-i)$.

Par suite la factorisation de P_3 dans $\mathbb{C}[X]$ donne $P_3(X) = (X-3)(X-1+i)(X-1-i)$.

Pour la factorisation de P_3 dans $\mathbb{R}[X]$, il suffit de multiplier les polynômes dont les coefficients sont conjugués alors $(X-1+i)(X-1-i) = X^2 - 2X + 2$.
Ce qui donne $P_3(X) = (X-3)^2(X^2 - 2X + 2)$.

Exercice 9 :
Soit $P(X) = X^5 + X^4 + 2X^3 + 2X^2 + X + 1$.
1) Calculons $PGCD(P, P')$.

$P'(X) = 5X^4 + 4X^3 + 6X^2 + 4X + 1$

$$
\begin{array}{cccccc|l}
X^5 + X^4 & +2X^3 & +2X^2 & +X & +1 & & 5X^4 + 4X^3 + 6X^2 + 4X + 1 \\ \cline{7-7}
X^5 + \frac{4}{5}X^4 & +\frac{6}{5}X^3 & +\frac{4}{5}X^2 & +\frac{1}{5}X & & & \frac{1}{5}X + \frac{1}{25} \\ \cline{1-6}
\frac{1}{5}X^4 & +\frac{4}{5}X^3 & +\frac{6}{5}X^2 & +\frac{4}{5}X & +1 & & \\
\frac{1}{5}X^4 & +\frac{4}{25}X^3 & +\frac{6}{25}X^2 & +\frac{4}{25}X & +\frac{1}{25} & & \\ \cline{1-6}
 & \frac{16}{25}X^3 & +\frac{24}{25}X^2 & +\frac{16}{25}X & +\frac{24}{25} & &
\end{array}
$$

Il faut normaliser le reste de la division c'est-à-dire diviser par $\frac{16}{25}$, on obtient $X^3 + \frac{24}{16}X^2 + X + \frac{24}{16} = X^3 + \frac{3}{2}X^2 + X + \frac{3}{2}$.

$$
\begin{array}{ccccc|l}
5X^4 & +4X^3 & +6X^2 & +4X & +1 & X^3 + \frac{3}{2}X^2 + X + \frac{3}{2} \\ \cline{6-6}
5X^4 & +\frac{15}{2}X^3 & +5X^2 & +\frac{15}{2}X & & 5X - \frac{7}{2} \\ \cline{1-5}
 & -\frac{7}{2}X^3 & +X^2 & -\frac{7}{2}X & +1 & \\
 & -\frac{7}{2}X^3 & -\frac{21}{4}X^2 & -\frac{7}{2}X & -\frac{21}{4} & \\ \cline{3-5}
 & & \frac{25}{4}X^2 & & +\frac{25}{4} &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{cccc|l}
X^3 & +\frac{3}{2}X^2 & +X & +\frac{3}{2} & X^2 + 1 \\ \cline{5-5}
X^3 & & +X & & X + \frac{3}{2} \\ \cline{1-4}
 & \frac{3}{2}X^2 & & +\frac{3}{2} & \\
 & \frac{3}{2}X^2 & & +\frac{3}{2} & \\ \cline{2-4}
 & & & 0 &
\end{array}
$$

Donc $PGCD(P, P') = X^2 + 1$.

2) Quelles sont les racines multiples de P dans $\mathbb{C}$?
$P(-1) = 0 \Longrightarrow (X + 1)$ divise $P(X)$.

$$
\begin{array}{ccccc|c}
X^5 + X^4 & +2X^3 & +2X^2 & +X & +1 & X + 1 \\ \cline{6-6}
X^5 + X^4 & & & & & X^4 + 2X^2 + 1 \\ \cline{1-5}
 & 2X^3 & +2X^2 & +X & +1 & \\
 & 2X^3 & +2X^2 & & & \\ \cline{1-5}
 & & & X & +1 & \\
 & & & X & +1 & \\ \cline{4-5}
 & & & & 0 &
\end{array}
$$

Donc $P(X) = (X + 1)(X^4 + 2X^2 + 1)$.
On pose $Z = X^2 \Longrightarrow X^4 + 2X^2 + 1 = Z^2 + 2Z + 1 = (Z + 1)^2$, ce qui donne $(X^4 + 2X^2 + 1) = (X^2 + 1)^2$.
Par suite $P(X) = (X+1)(X^2 - i^2)^2 = (X+1)(X+i)^2(X-i)^2$, alors les racines multiples

de P dans $\mathbb{C}$ sont i et $-i$.

3) Vérifions que $(X^2+1)^2$ divise P.
$(X^2+1)^2$ divise $P(X)$ car $P(X) = (X+1)(X^2+1)^2$.

4) Factorisons P dans $\mathbb{R}[X]$.
$P(X) = (X+1)(X^2+1)^2 = (X+1)(X^4+2X^2+1)$.

<u>Exercice 10 :</u>
Efectuons la décomposition en éléments simples dans $\mathbb{R}[X]$ des fractions rationnelles suivantes
1) $\dfrac{X^2+2X+5}{X^2-3X+2}$

$$\begin{array}{rrr|l} X^2 & +2X & +5 & X^2-3X+2 \\ \cline{4-4} X^2 & -3x & +2 & \qquad\qquad 1 \\ \cline{1-3} & 5X & +3 & \end{array}$$

$$\frac{X^2+2X+5}{X^2-3X+2} = \frac{(X^2-3X+2)+5X+3}{X^2-3X+2} = 1 + \frac{5X+3}{X^2-3X+2}$$
$$\frac{5X+3}{X^2-3X+2} = \frac{5X+3}{(X-1)(X-2)} = \frac{k_1}{X-1} + \frac{k_2}{X-2}$$

Calcul de k_1 :
$$\frac{(X-1)(5X+3)}{(X-1)(X-2)} = (X-1)\frac{k_1}{X-1} + (X-1)\frac{k_2}{X-2} \Longrightarrow \frac{5X+3}{X-2} = k_1 + \frac{(X-1)k_2}{X-2}$$
$X = 1 \Longrightarrow k_1 = -8$.

Calcul de k_2 :
$$\frac{(X-2)(5X+3)}{(X-1)(X-2)} = (X-2)\frac{k_1}{X-1} + (X-2)\frac{k_2}{X-2} \Longrightarrow \frac{5X+3}{X-1} = \frac{(X-2)k_1}{X-1} + k_2$$
$X = 2 \Longrightarrow k_2 = 13$.
Donc $\dfrac{5X+3}{(X-1)(X-2)} = \dfrac{-8}{X-1} + \dfrac{13}{X-2}$, par suite

$$\frac{X^2+2X+5}{X^2-3X+2} = 1 - \frac{8}{X-1} + \frac{13}{X-2}.$$

2) $\dfrac{X^2+1}{(X-1)(X-2)(X-3)} = \dfrac{a}{X-1} + \dfrac{b}{X-2} + \dfrac{c}{X-3}$

Calcul de a :

$$\frac{(X-1)(X^2+1)}{(X-1)(X-2)(X-3)} = \frac{(X-1)a}{X-1} + \frac{(X-1)b}{X-2} + \frac{(X-1)c}{X-3}$$
$$\frac{(X^2+1)}{(X-2)(X-3)} = a + \frac{(X-1)b}{X-2} + \frac{(X-1)c}{X-3}$$
$X = 1 \Longrightarrow a = 1$.

Calcul de b :

$$\frac{(X-2)(X^2+1)}{(X-1)(X-2)(X-3)} = \frac{(X-2)a}{X-1} + \frac{(X-2)b}{X-2} + \frac{(X-2)c}{X-3}$$

$\dfrac{(X^2+1)}{(X-1)(X-3)} = \dfrac{(X-2)a}{X-1} + b + \dfrac{(X-2)c}{X-3}$
$X = 2 \Longrightarrow b = -5.$

Calcul de c :

$\dfrac{(X-3)(X^2+1)}{(X-1)(X-2)(X-3)} = \dfrac{(X-3)a}{X-1} + \dfrac{(X-3)b}{X-2} + \dfrac{(X-3)c}{X-3}$
$\dfrac{(X^2+1)}{(X-1)(X-2)} = \dfrac{(X-3)a}{X-1} + \dfrac{(X-3)c}{X-2} + c$
$X = 3 \Longrightarrow c = 5.$
Donc $\dfrac{X^2+1}{(X-1)(X-2)(X-3)} = \dfrac{1}{X-1} - \dfrac{5}{X-2} + \dfrac{5}{X-3}.$

3)$\dfrac{1}{X(X-1)^2} = \dfrac{k_1}{X} + \dfrac{k_2}{X-1} + \dfrac{k_3}{(X-1)^2}$

Calcul de k_1 :
$\dfrac{X}{X(X-1)^2} = \dfrac{Xk_1}{X} + \dfrac{Xk_2}{X-1} + \dfrac{Xk_3}{(X-1)^2}$
$\dfrac{1}{(X-1)^2} = k_1 + \dfrac{Xk_2}{X-1} + \dfrac{Xk_3}{(X-1)^2}$
$X = 0 \Longrightarrow k_1 = 1.$

Calcul de k_3 :
$\dfrac{(X-1)^2}{X(X-1)^2} = \dfrac{(X-1)^2k_1}{X} + \dfrac{(X-1)^2k_2}{X-1} + \dfrac{(X-1)^2k_3}{(X-1)^2}$
$\dfrac{1}{X} = \dfrac{(X-1)^2k_1}{X} + (X-1)k_2 + k_3$
$X = 1 \Longrightarrow k_3 = 1.$

Calcul de k_2 :

En dérivant $\dfrac{(X-1)^2}{X(X-1)^2} = \dfrac{1}{X}$, on obtient
$\dfrac{-1}{X^2} = \dfrac{[2(X-1)X - (X-1)^2]k_1}{X^2} + k_2$
$X = 1 \Longrightarrow k_2 = -1.$
Donc $\dfrac{1}{X(X-1)^2} = \dfrac{1}{X} - \dfrac{1}{X-1} + \dfrac{1}{(X-1)^2}.$

4)$\dfrac{1}{X^4+X^2+1}$
0n a $X^4+X^2+1 = X^4+X^2+1+(X^2-X^2) = (X^4+2X^2+1)-X^2 = (X^2+1)^2-X^2$
$X^4+X^2+1 = (X^2+X+1)(X^2-X+1)$
$\dfrac{1}{X^4+X^2+1} = \dfrac{1}{(X^2+X+1)(X^2-X+1)} = \dfrac{a_1X+b_1}{X^2+X+1} + \dfrac{a_2X+b_2}{X^2-X+1}.$
On pose $A(X) = \dfrac{1}{X^4+X^2+1}$ et on remarque que
$A(-X) = A(X) \Longrightarrow \dfrac{-a_1X+b_1}{X^2-X+1} + \dfrac{-a_2X+b_2}{X^2+X+1} = \dfrac{a_1X+b_1}{X^2+X+1} + \dfrac{a_2X+b_2}{X^2-X+1}.$
Par identification, on obtient $a_2 = -a_1$ et $b_2 = b_1$.

Alors $A(X) = \dfrac{1}{X^4+X^2+1} = \dfrac{1}{(X^2+X+1)(X^2-X+1)} = \dfrac{a_1X+b_1}{X^2+X+1} + \dfrac{-a_1X+b_1}{X^2-X+1}$.

Calcul de a_1 :

$$\lim_{X\to+\infty} XA(X) = \lim_{X\to+\infty} \frac{X}{(X^2+X+1)(X^2-X+1)} = \lim_{X\to+\infty} \frac{a_1X+b_1}{X^2+X+1} + \lim_{X\to+\infty} \frac{-a_1X+b_1}{X^2-X+1}$$

$0 = a_1 + 0 - a_1$, alors on doit d'abord chercher b_1.

Calcul de b_1 :
$X = 0 \Longrightarrow 1 = 2b_1 \Longrightarrow b_1 = \dfrac{1}{2}$
$X = 1 \Longrightarrow \dfrac{1}{3} = \dfrac{a_1+b_1}{3} + (-a_1+b_1) \Longrightarrow \dfrac{1}{3} = \dfrac{-2a_1+4b_1}{3}$
$\Longrightarrow 1 + 2a_1 - 4b_1 = 0 \Longrightarrow 2a_1 = 4b_1 - 1 \Longrightarrow a_1 = \dfrac{4b_1-1}{2} \Longrightarrow a_1 = \dfrac{1}{2}$.
Donc $a_2 = -\dfrac{1}{2}$ et $b_2 = \dfrac{1}{2}$.
Par suite $\dfrac{1}{X^4+X^2+1} = \dfrac{X+1}{2(X^2+X+1)} + \dfrac{-X+1}{2(X^2-X+1)}$.

5) $\dfrac{3X-1}{X^2(X+1)^2} = \dfrac{k_1}{X} + \dfrac{k_2}{X^2} + \dfrac{k_3}{(X+1)} + \dfrac{k_4}{(X+1)^2}$

Calcul de k_2 :
$\dfrac{X^2(3X-1)}{X^2(X+1)^2} = \dfrac{X^2k_1}{X} + \dfrac{X^2k_2}{X^2} + \dfrac{X^2k_3}{(X+1)} + \dfrac{X^2k_4}{(X+1)^2}$.
Ce qui donne $\dfrac{(3X-1)}{(X+1)^2} = Xk_1 + k_2 + \dfrac{X^2k_3}{(X+1)} + \dfrac{X^2k_4}{(X+1)^2}$
$X = 0 \Longrightarrow k_2 = -1$.

Calcul de k_1 :

En dérivant $\dfrac{X^2(3X-1)}{X^2(X+1)^2}$, on obtient
$\Big(\dfrac{(3X-1)}{(X+1)^2}\Big)' = \dfrac{-3X+5}{(X+1)^3} = k_1 + \Big[X^2\Big(\dfrac{k_3}{(X+1)} + \dfrac{k_4}{(X+1)^2}\Big)\Big]'$
$X = 0 \Longrightarrow k_1 = 5$.

Calcul de k_4 :
$\dfrac{(X+1)^2(3X-1)}{X^2(X+1)^2} = (X+1)^2\Big[\dfrac{k_1}{X} + \dfrac{k_2}{X^2}\Big] + \dfrac{(X+1)^2k_3}{(X+1)} + \dfrac{(X+1)^2k_4}{(X+1)^2}$.
Ce qui donne $\dfrac{3X-1}{X^2} = (X+1)^2\Big[\dfrac{k_1}{X} + \dfrac{k_2}{X^2}\Big] + (X+1)k_3 + k_4$
$X = -1 \Longrightarrow k_4 = -4$.

Calcul de k_3 :

En dérivant $\dfrac{(X+1)^2(3X-1)}{X^2(X+1)^2}$, on obtient
$\Big(\dfrac{(3X-1)}{X^2}\Big)' = \dfrac{-3X+2}{X^3}$.

Ce qui donne $\dfrac{-3X+2}{X^3} = \Big[(X+1)^2\Big(\dfrac{k_1}{X} + \dfrac{k_2}{X^2}\Big)\Big]' + k_3$
$X = -1 \Longrightarrow k_3 = -5.$

6)$\dfrac{X-1}{X^3(X^2+1)^2} = \dfrac{k_1}{X} + \dfrac{k_2}{X^2} + \dfrac{k_3}{X^3} + \dfrac{aX+b}{X^2+1} + \dfrac{cX+d}{(X^2+1)^2}.$

Calcul de k_3 :

$\dfrac{X^3(X-1)}{X^3(X^2+1)^2} = \dfrac{X^3k_1}{X} + \dfrac{X^3k_2}{X^2} + \dfrac{X^3k_3}{X^3} + X^3\Big[\dfrac{aX+b}{X^2+1} + \dfrac{cX+d}{(X^2+1)^2}\Big].$
Ce qui donne $\dfrac{(X-1)}{(X^2+1)^2} = X^2k_1 + Xk_2 + k_3 + X^3\Big[\dfrac{aX+b}{X^2+1} + \dfrac{cX+d}{(X^2+1)^2}\Big]$
$X = 0 \Longrightarrow k_3 = -1.$

Calcul de k_2 :

En dérivant $\dfrac{(X-1)}{(X^2+1)^2}$, on obtient
$\Big(\dfrac{(X-1)}{(X^2+1)^2}\Big)' = \dfrac{-3X^2+4X+1}{(X^2+1)^3} = 2Xk_1 + k_2 + \Big[X^3\Big(\dfrac{aX+b}{X^2+1} + \dfrac{cX+d}{(X^2+1)^2}\Big)\Big]'$
$X = 0 \Longrightarrow k_2 = 1.$

Calcul de k_1 :

En dérivant $\dfrac{(X-1)}{(X^2+1)^2}$ une deuxième fois, on obtient
$\Big(\dfrac{(X-1)}{(X^2+1)^2}\Big)'' = \dfrac{12X^3-20X^2-12X+4}{(X+1)^4} = 2k_1 + \Big[X^3\Big(\dfrac{aX+b}{X^2+1} + \dfrac{cX+d}{(X^2+1)^2}\Big)\Big]''$
$X = 0 \Longrightarrow k_1 = 2.$

Calcul de c et d :
$(X^2+1)^2\Big(\dfrac{X-1}{X^3(X^2+1)^2}\Big) = (X^2+1)^2\Big(\dfrac{k_1}{X} + \dfrac{k_2}{X^2} + \dfrac{k_3}{X^3}\Big) + (X^2+1)^2\dfrac{(aX+b)}{X^2+1}$
$+ (X^2+1)^2\dfrac{(cX+d)}{(X^2+1)^2}$
$\dfrac{X-1}{X^3} = (X^2+1)^2\Big(\dfrac{k_1}{X} + \dfrac{k_2}{X^2} + \dfrac{k_3}{X^3}\Big) + (X^2+1)(aX+B) + (cX+d).$
On a $X^2+1 = 0 \Longrightarrow X^2 = -1 \Longrightarrow X^2 = i^2 \Longrightarrow X = i$ ou $X = -i$
$X = i \Longrightarrow \dfrac{i-1}{i^3} = ci + d \Longrightarrow -1 - i = ci + d \Longrightarrow \begin{cases} c &= -1 \\ d &= -1 \end{cases}$

Calcul de a :

$$\begin{aligned} \lim_{X\to+\infty} \frac{X(X-1)}{X^3(X^2+1)^2} &= \lim_{X\to+\infty} \frac{Xk_1}{X} + \lim_{X\to+\infty} \frac{Xk_2}{X^2} + \lim_{X\to+\infty} \frac{Xk_3}{X^3} \\ &+ \lim_{X\to+\infty} \frac{X(aX+b)}{X^2+1} + \lim_{X\to+\infty} \frac{X(cX+d)}{(X^2+1)^2} \end{aligned}$$

$0 = k_1 + a \Longrightarrow a = -k_1 \Longrightarrow a = -2.$

Calcul de b :

$X = 1 \Longrightarrow 0 = k_1 + k_2 + k_3 + \dfrac{a+b}{2} + \dfrac{c+d}{2}$
$\dfrac{b}{2} = -k_1 - k_2 - k_3 - \dfrac{a}{2} - \dfrac{c}{4} - \dfrac{d}{4} \Longrightarrow b = -1.$

Conclusion :
$$\frac{X-1}{X^3(X^2+1)^2} = \frac{2}{X} + \frac{1}{X^2} - \frac{1}{X^3} - \frac{(2X+1)}{X^2+1} - \frac{X+1}{(X^2+1)^2}.$$

<u>Exercice 11 :</u>
Soit $P(X) = X^4 + 8X^3 + 9X^2 + 5X + 1$ et $Q(X) = 2X^3 + X^2 + 2X + 1$.
1) Vérifions que P admet une unique racine rationnelle $\alpha \in Q$
$a_0 = 1$ et $a_4 = 4$, $\alpha = \dfrac{a}{b}$ telle que a divise a_0 et b divise a_4.
On a $D_{a_0} = \{1, -1\}$ et $D_{a_4} = \{1, -1, 2, -2, 4, -4\} \Longrightarrow \alpha \in \{1, -1, \frac{1}{2}, \frac{-1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{-1}{4}\}$.
$$P\Big(\frac{-1}{2}\Big) = \Big(\frac{-1}{2}\Big)^4 + 8\Big(\frac{-1}{2}\Big)^3 + 9\Big(\frac{-1}{2}\Big)^2 + 5\Big(\frac{-1}{2}\Big) + 1 = 0 \Longrightarrow \Big(X + \frac{1}{2}\Big) \text{ divise } P(X).$$

$$\begin{array}{rrrrr|l}
4X^4 & +8X^3 & +9X^2 & +5X & +1 & X + \frac{1}{2} \\ \cline{6-6}
4X^4 & +2X^3 & & & & 4X^3 + 6X^2 + 6X + 2 \\ \cline{1-5}
 & 6X^3 & +9X^2 & +5X & +1 & \\
 & 6X^3 & +3X^2 & & & \\ \cline{3-5}
 & & 6X^2 & +5X & +1 & \\
 & & 6X^2 & +3X & & \\ \cline{3-5}
 & & & 2X & +1 & \\
 & & & 2X & +1 & \\ \cline{3-5}
 & & & & 0 &
\end{array}$$

On pose $G(X) = 4X^3 + 6X^2 + 6X + 2$.
On a $a_0 = 2$ et $a_3 = 4$, $\alpha = \dfrac{a}{b}$ telle que a divise a_0 et b divise a_3.
$D_{a_0} = \{1, -1, 2, -2\}$ et $D_{a_3} = \{1, -1, 2, -2, 4, -4\} \Longrightarrow \alpha \in \{1, -1, \frac{1}{2}, \frac{-1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{-1}{4}\}$.
On remarque que
$$G\Big(\frac{-1}{2}\Big) = 4\Big(\frac{-1}{2}\Big)^3 + 6\Big(\frac{-1}{2}\Big)^2 + 6\Big(\frac{-1}{2}\Big) + 2 = 4\Big(\frac{-1}{8}\Big) + 6\Big(\frac{1}{4}\Big) + 6\Big(\frac{-1}{2}\Big) + 2 = 0$$
$\Longrightarrow \Big(X + \dfrac{1}{2}\Big)$ divise $G(X)$.

$$\begin{array}{rrrr|l}
4X^3 & +6X^2 & +6X & +2 & X + \frac{1}{2} \\ \cline{5-5}
4X^3 & +2X^2 & & & 4X^2 + 4X + 4 \\ \cline{1-4}
 & 4X^2 & +6X & +2 & \\
 & 4X^2 & +2X & & \\ \cline{2-4}
 & & 4X & +2 & \\
 & & 4X & +2 & \\ \cline{2-4}
 & & & 0 &
\end{array}$$

$$4X^3 + 6X^2 + 6X + 2 = \Big(X + \frac{1}{2}\Big)(4X^2 + 4X + 4) = 4\Big(X + \frac{1}{2}\Big)(X^2 + X + 1)$$
$$\Longrightarrow P(X) = \Big(X + \frac{1}{2}\Big)G(X).$$

Donc $P(X)=4\Big(X+\dfrac{1}{2}\Big)(X^2+X+1)$.
$X^2+X+1=0 \Longrightarrow \Delta=-3<0 \Longrightarrow$ le polynôme X^2+X+1 est irreductible dans $\mathbb{R}$.
Donc l'unique racine rationnelle est $\dfrac{1}{2}$.

2) Calculons la multiplicité de la racine α
On a $P'(X)=16X^3+24X^2+18X+5 \Longrightarrow P'\Big(\dfrac{-1}{2}\Big)=16\Big(\dfrac{-1}{2}\Big)^3+24\Big(\dfrac{-1}{2}\Big)^2+18\Big(\dfrac{-1}{2}\Big)+5$
$P'\Big(\dfrac{-1}{2}\Big)=16\Big(\dfrac{-1}{8}\Big)+24\Big(\dfrac{1}{4}\Big)+18\Big(\dfrac{-1}{2}\Big)+5=0$
$P''(X)=48X^2+48X+18 \Longrightarrow P''\Big(\dfrac{-1}{2}\Big)=48\Big(\dfrac{1}{4}\Big)+48\Big(\dfrac{-1}{2}\Big)+18=6\neq 0$
$\Longrightarrow mult\Big(\dfrac{-1}{2}\Big)=2$.
3) Déterminons $PGCD(P,Q)$ puis $PPCM(P,Q)$
On a $Q(X)=2X^3+X^2+2X+1 \Longrightarrow a_0=1$ et $a_3=2$, $\alpha=\dfrac{a}{b}$ telle que a divise a_0 et b divise a_3.
$D_{a_0}=\{1,-1\}$ et $D_{a_3}=\{1,-1,2,-2\} \Longrightarrow \alpha\in\{1,-1,\dfrac{1}{2},\dfrac{-1}{2}\}$.
Par suite
$Q\Big(\dfrac{-1}{2}\Big)=2\Big(\dfrac{-1}{2}\Big)^3+\Big(\dfrac{-1}{2}\Big)^2+2\Big(\dfrac{-1}{2}\Big)+1=2\Big(\dfrac{-1}{8}\Big)+\Big(\dfrac{1}{4}\Big)+2\Big(\dfrac{-1}{2}\Big)+1=0$
$\Longrightarrow \Big(X+\dfrac{1}{2}\Big)$ divise $P(X)$.
Ce qui donne

$$\begin{array}{rrrr|l}
2X^3 & +X^2 & +2X & +1 & X+\frac{1}{2} \\ \cline{5-5}
2X^3 & +X^2 & & & 2X^2+2 \\ \cline{1-4}
 & & 2X & +1 & \\
 & & 2X & +1 & \\ \cline{2-4}
 & & & 0 &
\end{array}$$

$Q(X)=\Big(X+\dfrac{1}{2}\Big)(2X^2+2)=2\Big(X+\dfrac{1}{2}\Big)(X^2+1)$.
Donc $PGCD(P,Q)=\Big(X+\dfrac{1}{2}\Big)$, et $PPCM(P,Q)=\Big(X+\dfrac{1}{2}\Big)^2(X^2+1)(X^2+X+1)$.

Exercice 12 :
Soient $a,b\in\mathbb{C}$ avec $a\neq 0$ et $P(X)=X^4+4aX+b$.

1) Montrons que si $z\in\mathbb{C}$ est une racine double de P alors $z^3=-a$
z est une racine double de $P \Longrightarrow P(z)=0$ et $P'(z)=0$, alors
$P'(X)=4X^3+4a \Longrightarrow P'(z)=4z^3+4a$.
Or $P'(z)=0 \Longrightarrow 4z^3+4a=0 \Longrightarrow z^3=\dfrac{-4a}{4}=-a$.

2) Montrons que si P admet une racine double α alors $b^3=27a^3$
D'aprés la question (1), on a α est une racine double de $P \Longrightarrow \alpha^3=-a \Longrightarrow a=-\alpha^3$
et $P(\alpha)=0 \Longrightarrow \alpha^4+4a\alpha+b=0$, on remplace a par $-\alpha^3$, on obtient
$\alpha^4+4(-\alpha^3)\alpha+b=0 \Longrightarrow \alpha^4-4\alpha^4+b=0 \Longrightarrow -3\alpha^4+b=0 \Longrightarrow b=3\alpha^4$
$\Longrightarrow b^3=27\alpha^{12} \Longrightarrow b^3=27(\alpha^3)^4 \Longrightarrow b^3=27(-a)^4 \Longrightarrow b^3=27a^4$.

3) En déduire l'ordre de multiplicité de la racine α de P

Calculons $P''(\alpha)$, on a $P''(X) = 12X^2 \Longrightarrow P''(\alpha) = 12\alpha^2 \neq 0$ car $\alpha^3 = -a \neq 0$ $\Longrightarrow \alpha^2 \neq 0$, donc $mult(\alpha) = 2$.

Bibliographie

[1] E. Azoulay and J. Avignant, Mathématiques 4. Algèbre. Cours et exercices, Mcgraw-Hill (1984).

[2] Y. Bensid Cours et exercices, E.S.S.A.T (2018)

[3] H. Brezis, Analyse fonctionnelle, Théorie et applications, Dunod, Paris (1999).

[4] J. Demailly, Analyse numérique et équations différentielles, EDP, Sciences, (2006).

[5] P. Mullhaupt, Introduction A L'Analyse et A la commande des systèmes non linéaires, Presses Polytechniques Romandes (2009).

[6] L. Todjihounde, Calcul Differentiel, Editions Cépadues (2013).

[7] E. Zeidler, Applied Functional Analysis. Fixed point theorems. Springer Verlag (1986).