

RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE



المدرسة العليا للعلوم التطبيقية
Ecole Supérieure en
Sciences Appliquées

Rappels de Cours et Travaux Dirigés de Physique 2 (Exercices + Corrigés)

D.KHERBOUCHE ép FARADJI et M. MEBROUKI

Année Universitaire : 2016-2017

Table des matières

Avant- propos	1
1 Systèmes de coordonnées et outil mathématique	3
1.1 Rappel :	4
1.1.1 Système de coordonnées cartésiennes	4
1.1.2 Système de coordonnées cylindrique	4
1.1.3 Système de coordonnées sphérique	5
1.1.4 Opérateur gradient	6
1.1.5 Gradient d'un vecteur	7
1.1.6 Opérateur divergence	7
1.1.7 Opérateur Rotationnel	8
1.1.8 Opérateur Laplacien	9
1.1.9 Opérateur symbolique nabla	9
1.2 exercices	11
1.3 corrigés :	14
2 Triboélectricité et charge électrique	29
2.1 Rappel :	30
2.1.1 La charge électrique	30
2.1.2 Distributions de charges	30
2.2 Exercices :	31
2.3 corrigés :	34
3 Champ électrostatique	41
3.1 Rappel :	42
3.2 Champ électrostatique	42
3.2.1 Loi de Coulomb	42
3.2.2 Champ d'une charge ponctuelle	42
3.2.3 Principe de superposition	42
3.2.4 Champ d'une distribution	42
3.2.5 Lignes de champ	43
3.3 Invariances et symétries	43
3.3.1 Invariances des distributions de charges	43
3.3.2 Plan de symétrie et plan d'antisymétrie	43
3.3.3 Conséquences pour le champ électrostatique	43
3.4 Exercices :	44
3.5 corrigés :	46
4 Théorème de GAUSS	57
4.1 Rappel :	58
4.1.1 Théorème de Gauss	58
4.2 Exercices :	59
4.3 corrigés :	60
5 Potentiel électrostatique	71
5.1 Rappel :	72
5.2 Potentiel électrostatique	72
5.2.1 Circulation de E	72
5.2.2 Potentiel électrostatique	72
5.2.3 Potentiel créé par une distribution de charges	72

5.2.4	Surfaces équipotentielles	73
5.2.5	Énergie potentielle	73
5.3	Exercices :	74
5.4	corrigés :	76
6	Conducteurs en équilibre	91
6.1	Rappel :	92
6.1.1	Équilibre électrostatique :	92
6.1.2	Capacité d'un conducteur en équilibre électrostatique :	92
6.2	Exercices :	93
6.3	corrigés :	95
7	Magnétostatique	103
7.1	Rappel :	104
7.1.1	Phénomènes magnétiques	104
7.1.2	Les sources du champ magnétostatique	104
7.1.3	Champ magnétostatique	104
7.1.4	Invariances et symétries	105
7.1.5	Potentiel vecteur	105
7.1.6	Théorème d'Ampère	105
7.1.7	Synthèse - Flux du champ magnétostatique	106
7.2	Exercices :	107
7.3	corrigés :	108

Avant- propos

Cet ouvrage s'adresse aux étudiants de la première année des filières scientifiques et techniques de l'université et des écoles d'ingénieurs d'Algérie. Il suit grosso modo le programme enseigné de "Physique 2 « électricité »"

Ce polycopie fournit à l'étudiant un résumé de cours et des exercices avec corrigés, dispensés à l'école préparatoire EPST Tlemcen depuis 2013. Le manuscrit est divisé en sept chapitres.

- Chapitre 1 : Systèmes de coordonnées et outil mathématique
- Chapitre 2 : Triboélectricité et charge électrique
- Chapitre 3 : Champ électrostatique
- Chapitre 4 : Théorème de GAUSS
- Chapitre 5 : Potentiel électrostatique
- Chapitre 6 : Conducteurs en équilibre
- Chapitre 7 : Magnétostatique

Chaque rappel de cours est suivi d'une série de problèmes avec solutions détaillées permettant aux étudiants de mieux assimiler les phénomènes physiques étudiés.

Enfin nous tenons à préciser que nous tenons en compte toutes les remarques et les commentaires signalant des erreurs éventuelles que ce soit sur le fond ou même sur la forme.

Chapitre 1

Systemes de coordonnées et outil mathématique

Sommaire

1.1	Rappel :	4
1.1.1	Système de coordonnées cartésiennes	4
1.1.2	Système de coordonnées cylindrique	4
1.1.3	Système de coordonnées sphérique	5
1.1.4	Opérateur gradient	6
1.1.5	Gradient d'un vecteur	7
1.1.6	Opérateur divergence	7
1.1.7	Opérateur Rotationnel	8
1.1.8	Opérateur Laplacien	9
1.1.9	Opérateur symbolique nabla	9
1.2	exercices	11
1.3	corrigés :	14

1.1 Rappel :

Le système de coordonnées cartésiennes est très utile dans l'étude de mouvement rectiligne. Cependant, il existe des situations physiques (rotations en mécanique, calcul du champ électrique en électrostatique, magnétostatique, mécanique des fluides, physique atomique...) où l'utilisation de ce système s'avère inutilement complexe. Il serait donc plus utile de se pencher sur d'autres systèmes de coordonnées afin de faciliter l'étude de ces situations. Dans ce qui suit on s'intéresse à trois systèmes de coordonnées physiques, à savoir : système de coordonnées **cartésiennes** (dites **rectangulaires**) et systèmes de coordonnées **cylindriques** et **sphériques** (dites **curvilignes**).

1.1.1 Système de coordonnées cartésiennes

Un repère cartésien est défini par un point origine O et trois axes (Ox, Oy, Oz) perpendiculaires entre eux. Les vecteurs unitaires portés par les axes sont : \vec{u}_x, \vec{u}_y et \vec{u}_z .

Un point M de l'espace est repéré par les trois composantes du vecteur joignant O à M : ($\vec{r} = OM$)

$$\vec{r}(x, y, z) = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

Un déplacement infinitésimal du point M vers un point M' est donné par :

$$\overrightarrow{MM'} = d\vec{r} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}$$

Un volume infinitésimal est un parallélépipède de volume :

$$dV = dx dy dz$$

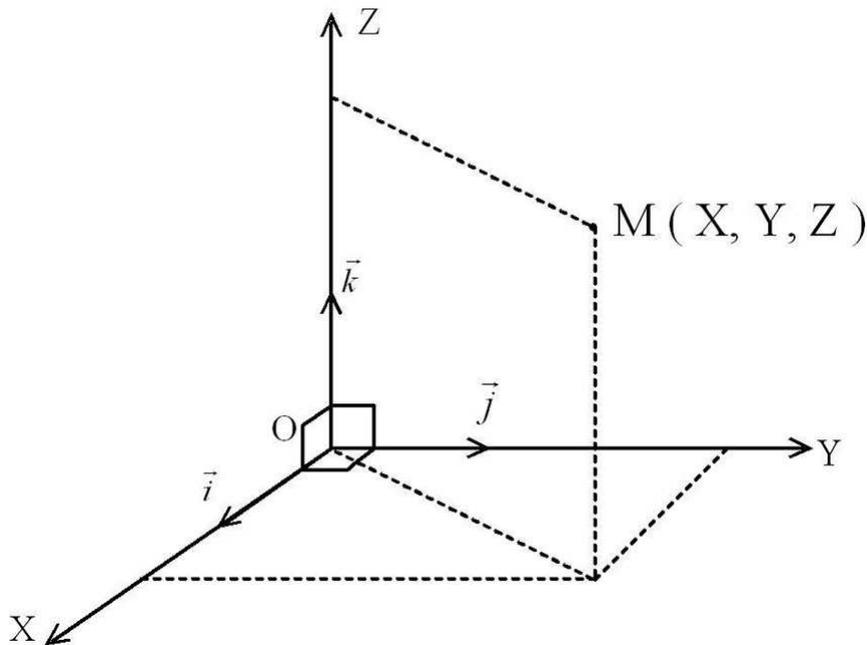


FIGURE 1.1 – Le système de coordonnées cartésiennes

1.1.2 Système de coordonnées cylindrique

Un point M dans l'espace est repéré par trois coordonnées : ρ , θ et z auxquelles on accorde trois vecteurs unitaires perpendiculaires entre eux, \vec{u}_ρ , \vec{u}_θ et \vec{u}_z , respectivement, dirigés dans le sens de la variation des coordonnées (appelée ligne de coordonnée), tels que :

$$0 \leq \rho \leq \infty, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi \quad \text{et} \quad -\infty \leq z \leq \infty$$

et

$$\vec{u}_\rho \wedge \vec{u}_\theta = \vec{u}_z, \quad \vec{u}_z \wedge \vec{u}_\rho = \vec{u}_\theta, \quad \text{et} \quad \vec{u}_\theta \wedge \vec{u}_z = \vec{u}_\rho$$

Le vecteur position d'un point M s'écrit :

$$\overrightarrow{OM} = \rho\vec{u}_\rho + z\vec{u}_z$$

On peut exprimer les coordonnées cartésiennes en fonction des coordonnées cylindriques comme suit :

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \\ z = z \end{cases}$$

ainsi que les vecteurs unitaires

$$\begin{cases} \vec{u}_\rho = \cos \theta \vec{i} + \sin \theta \vec{j} \\ \vec{u}_\theta = -\sin \theta \vec{i} + \cos \theta \vec{j} \\ \vec{u}_z = \vec{k} \end{cases}$$

Un déplacement infinitésimal entre les points M et M' est donné par :

$$\overrightarrow{MM'} = d\vec{r} = d\rho \vec{u}_\rho + \rho d\theta \vec{u}_\theta + dz \vec{u}_z$$

Les surfaces élémentaires sont :

$$dS_\rho = \rho d\theta dz, \quad dS_\theta = d\rho dz, \quad \text{et} \quad dS_z = \rho d\rho d\theta$$

Le volume élémentaire est égal à :

$$dV = \rho d\rho d\theta dz$$

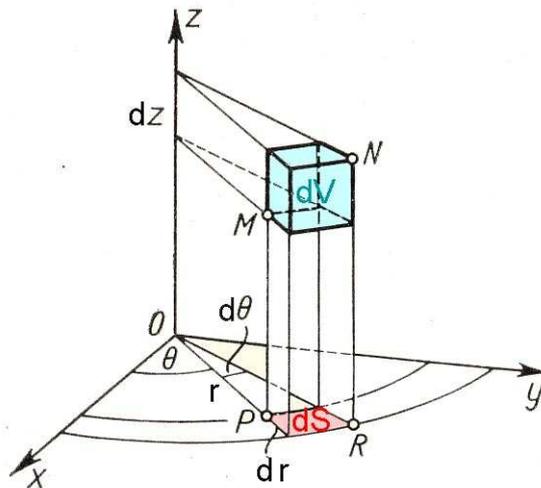


FIGURE 1.2 – Volume et surfaces élémentaires dans le système de coordonnées cylindriques

1.1.3 Système de coordonnées sphérique

Un point M dans l'espace est repéré par trois coordonnées r , θ et φ auxquelles on accorde trois vecteurs unitaires perpendiculaires entre eux, \vec{u}_r , \vec{u}_θ et \vec{u}_φ , respectivement, dirigés dans le sens de la variation des coordonnées (appelée ligne de coordonnée), tels que :

$$0 \leq r \leq \infty, \quad 0 \leq \theta \leq \pi \quad \text{et} \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi$$

et

$$\vec{u}_r \wedge \vec{u}_\theta = \vec{u}_\varphi, \quad \vec{u}_\varphi \wedge \vec{u}_r = \vec{u}_\theta, \quad \text{et} \quad \vec{u}_\theta \wedge \vec{u}_\varphi = \vec{u}_r$$

Le vecteur position d'un point M s'écrit :

$$\overrightarrow{OM} = r \vec{u}_r$$

Contrairement au système de coordonnées cartésiennes, les vecteurs unitaires dans les systèmes de coordonnées cylindriques et sphériques ne sont pas fixes ; leurs directions changent selon la position du point considéré. Un déplacement infinitésimal entre les points M et M' est donné par :

$$\overrightarrow{MM'} = d\vec{r} = dr \vec{u}_r + r d\theta \vec{u}_\theta + r \sin \theta d\varphi \vec{u}_\varphi$$

Le volume élémentaire est égal à :

$$dV = r^2 \sin \theta \, dr d\theta d\varphi$$

Les surfaces élémentaires sont :

$$dS_r = r^2 \sin \theta \, d\theta d\varphi, \quad dS_\theta = r \sin \theta \, dr d\varphi, \quad \text{et} \quad dS_\varphi = r \, dr \, d\theta$$

On peut exprimer les coordonnées cartésiennes en fonction des coordonnées sphériques comme suit :

$$\begin{cases} x = r \sin \theta \cos \varphi \\ y = r \sin \theta \sin \varphi \\ z = r \cos \theta \end{cases}$$

ainsi que les vecteurs unitaires

$$\begin{cases} \vec{u}_r = \sin \theta \cos \varphi \vec{i} + \sin \theta \sin \varphi \vec{j} + \cos \theta \vec{k} \\ \vec{u}_\theta = \cos \theta \cos \varphi \vec{i} + \cos \theta \sin \varphi \vec{j} - \sin \theta \vec{k} \\ \vec{u}_\varphi = -\sin \varphi \vec{i} + \cos \varphi \vec{j} \end{cases}$$

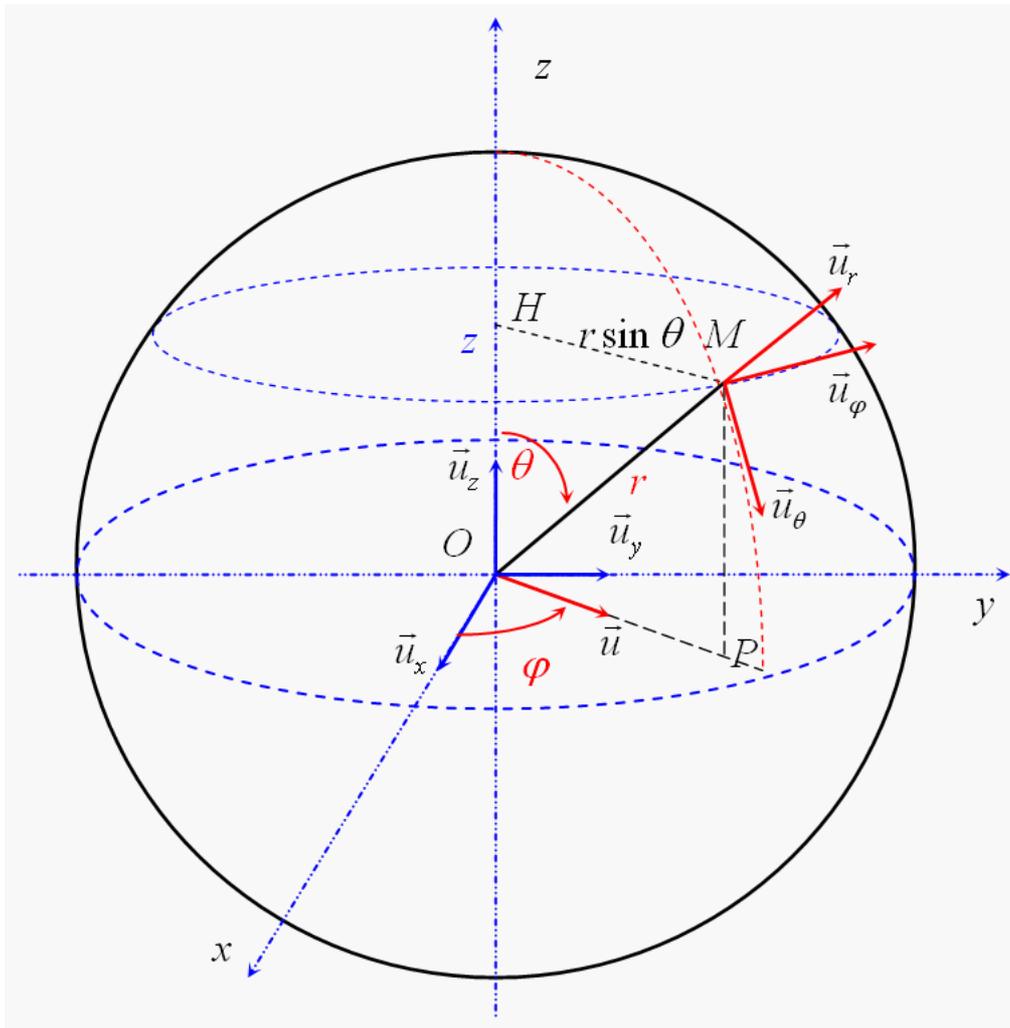


FIGURE 1.3 – Le système de coordonnées sphériques

1.1.4 Opérateur gradient

— A tout champ scalaire $f(M)$, on associe un champ vectoriel $\vec{grad}(f)$ tel que :

$$df(M) = \vec{grad}(f) \cdot d\vec{OM}$$

— La circulation d'un gradient est indépendante du chemin suivi. En particulier sur une courbe fermée, la circulation du gradient est nulle.

— Le gradient est perpendiculaire aux surfaces équi-f. $\overrightarrow{\text{grad}}(f)$ indique le sens des f croissant. A tout champ scalaire $f(M)$, on associe un champ vectoriel $\overrightarrow{\text{grad}}(f)$ tel que :

$$df(M) = \overrightarrow{\text{grad}}(f) \cdot d\overrightarrow{OM}$$

La circulation d'un gradient est indépendante du chemin suivi. En particulier sur une courbe fermée, la circulation du gradient est nulle. Le gradient est perpendiculaire aux surfaces équi-f. $\overrightarrow{\text{grad}}(f)$ indique le sens des f croissant.

Expressions analytiques

En coordonnées cartésiennes

On a en coordonnées cartésiennes dans la base (e_1, e_2, e_3) pour une fonction scalaire $f = f(x_1, x_2, x_3)$:

$$(\overrightarrow{\text{grad}}(f))_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

En coordonnées cylindrique

On a dans la base (e_r, e_θ, e_z) :

$$\overrightarrow{\text{grad}}(f) = \frac{\partial f}{\partial r} e_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} e_\theta + \frac{\partial f}{\partial z} e_z$$

En coordonnées sphériques

On a dans la base (e_r, e_θ, e_ϕ) :

$$\overrightarrow{\text{grad}}(f) = \frac{\partial f}{\partial r} e_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} e_\theta + \frac{1}{r \sin(\theta)} \frac{\partial f}{\partial \phi} e_\phi$$

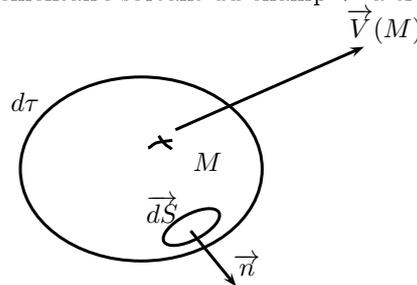
1.1.5 Gradient d'un vecteur

On peut définir le gradient d'un vecteur \overrightarrow{V} de taille n . C'est une matrice de taille $n \times n$ et on a :

$$(\text{grad}(\overrightarrow{V}))_{i,j} = \frac{\partial V_i}{\partial x_j}$$

1.1.6 Opérateur divergence

— Soit un champ vectoriel \overrightarrow{V} et soit $d\tau$ un élément de volume entourant un point M de l'espace. On définit $\text{div}(\overrightarrow{V}) = \frac{d\Phi}{d\tau}$ où $d\Phi$ est le flux élémentaire sortant du champ \overrightarrow{V} à travers la surface fermée délimitant $d\tau$.



$\text{div}(\overrightarrow{V})$ représente le flux volumique en M . L'opérateur divergence construit un champ de scalaire à partir d'un champ de vecteurs.

— **Théorème de Green-Ostrogradski** Soit Σ la surface fermée délimitant le volume \mathcal{V} , \overrightarrow{dS} le vecteur de surface élémentaire sortant du volume. On a alors pour tout champ de vecteur \overrightarrow{V} :

$$\int \int_{\Sigma} \overrightarrow{V} \cdot \overrightarrow{dS} = \int \int \int_{\mathcal{V}} \text{div}(\overrightarrow{V}) d\tau$$

Expressions analytiques

En coordonnées cartésiennes

On a :

$$\text{div}(\overrightarrow{V}) = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z}$$

En coordonnées cylindrique

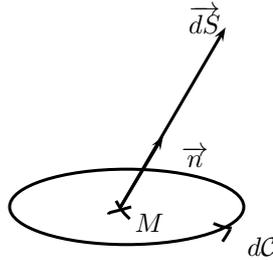
On a :

$$\operatorname{div}(\vec{A}) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(rA_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

1.1.7 Opérateur Rotationnel

Soit un champ vectoriel \vec{V} et soit $d\vec{S}$ un élément de surface en un point M de l'espace. En notant dC le contour élémentaire orienté associé à $d\vec{S}$ selon la règle de Stokes, on définit le rotationnel de \vec{V} en M , par :

$$dC = \int_{dC} \vec{V} \cdot d\vec{l} = \operatorname{rot} \vec{V} \cdot d\vec{S}$$



L'opérateur rotationnel construit un champ de vecteurs à partir d'un champ de vecteurs.

Expressions analytiques

En coordonnées cartésienne

On a :

$$\operatorname{rot} \vec{A} = \left(\frac{\partial A_3}{\partial x_2} - \frac{\partial A_2}{\partial x_3} \right) e_1 + \left(\frac{\partial A_1}{\partial x_3} - \frac{\partial A_3}{\partial x_1} \right) e_2 + \left(\frac{\partial A_2}{\partial x_1} - \frac{\partial A_1}{\partial x_2} \right) e_3$$

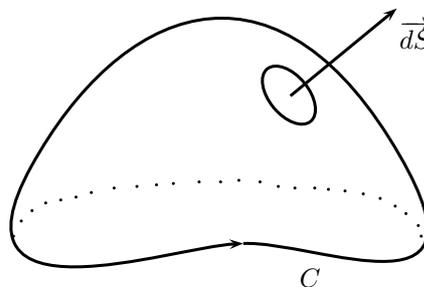
En coordonnées cylindrique

On a ;

$$\operatorname{rot} \vec{A} = \left[\frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z} \right] e_r + \left[\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \right] e_\theta + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial(rA_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right] e_z$$

(Théorème de Stokes) Transforme une intégrale curviligne en intégrale de volume. On intègre sur une surface S orientée quelconque qui s'appuie sur le contour fermé C orienté par la règle de Stokes et on obtient :

$$\boxed{\int_C \vec{V} \cdot d\vec{l} = \int \int_S \operatorname{rot} \vec{V} \cdot d\vec{S}}$$



le résultat est indépendant de la forme de S s'appuyant sur C .

Si un champ de vecteur \vec{W} est à flux conservatif (i.e. si $\operatorname{div}(\vec{W}) = 0$) alors il existe un champ de vecteur \vec{V} tel que $\vec{W} = \operatorname{rot} \vec{V}$

1.1.8 Opérateur Laplacien

(Laplacien d'un champ scalaire) Transforme un champ scalaire en champ scalaire :

$$\Delta f = \operatorname{div}(\overrightarrow{\operatorname{grad}} f)$$

Expression analytique du Laplacien scalaire

En coordonnées cartésiennes

On a :

$$\Delta f = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$$

En coordonnées cylindrique

$$\Delta U = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial U}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}$$

En coordonnées sphérique

$$\Delta U = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (rU) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial U}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 U}{\partial \phi^2}$$

(Laplacien d'un champ vectoriel) Transforme un champ vectoriel en champ vectoriel :

$$\overrightarrow{\Delta} \overrightarrow{V} = \overrightarrow{\operatorname{grad}}(\operatorname{div}(\overrightarrow{V})) - \overrightarrow{\operatorname{rot}} \overrightarrow{\operatorname{rot}} \overrightarrow{V}$$

Expression analytique du Laplacien vectoriel

En coordonnées cartésiennes on a :

$$\overrightarrow{\Delta} \overrightarrow{V} = \sum_{i=1}^n \Delta V_{x_i} e_i$$

1.1.9 Opérateur symbolique nabla

C'est un opérateur de dérivation vectoriel. Ses composantes en coordonnées cartésiennes sont :

$$(\overrightarrow{\nabla})_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$$

On peut écrire le gradient, la divergence et le rotationnel grâce à cet opérateur symbolique :

$$\overrightarrow{\operatorname{grad}} f = \overrightarrow{\nabla} f$$

$$\overrightarrow{\operatorname{rot}} \overrightarrow{V} = \overrightarrow{\nabla} \wedge \overrightarrow{V}$$

$$\operatorname{div}(\overrightarrow{V}) = \overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{V}$$

$$\Delta f = \overrightarrow{\nabla}^2 f$$

$$\overrightarrow{\Delta} \overrightarrow{V} = \overrightarrow{\nabla}^2 \overrightarrow{V}$$

Formulaire relatif aux opérateurs

Soit f un champ scalaire et \overrightarrow{A} et \overrightarrow{B} deux champs vectoriels.

La divergence d'un gradient est égale au Laplacien

$$\operatorname{div}(\overrightarrow{\operatorname{grad}} f) = \Delta f$$

Le rotationnel d'un gradient est nul

$$\overrightarrow{\operatorname{rot}}(\overrightarrow{\operatorname{grad}} f) = \overrightarrow{0}$$

La divergence d'un rotationnel est nulle

$$\operatorname{div}(\overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{A})$$

Quelques formules supplémentaires

$$\overrightarrow{\operatorname{rot}}(\overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{A}) = \overrightarrow{\operatorname{grad}}(\operatorname{div}(\vec{A})) - \Delta \vec{A}$$

$$\overrightarrow{\operatorname{grad}}(fg) = f \overrightarrow{\operatorname{grad}}g + g \overrightarrow{\operatorname{grad}}f$$

$$\operatorname{div}(f \vec{A}) = f \operatorname{div}(\vec{A}) + \vec{A} \cdot \overrightarrow{\operatorname{grad}}f$$

$$\overrightarrow{\operatorname{rot}}(f \vec{A}) = f \overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{A} + \overrightarrow{\operatorname{grad}}f \wedge \vec{A}$$

$$\operatorname{div}(\vec{A} \wedge \vec{B}) = \vec{B} \cdot \overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{A} - \vec{A} \cdot \overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{B}$$

$$\overrightarrow{\nabla} \wedge (\vec{A} \wedge \vec{B}) = (\overrightarrow{\nabla} \cdot \vec{A}) \vec{B} - (\overrightarrow{\nabla} \cdot \vec{B}) \vec{A} + (\vec{B} \cdot \overrightarrow{\nabla}) \vec{A} - (\vec{A} \cdot \overrightarrow{\nabla}) \vec{B}$$

1.2 exercices

EXERCICE 01 :

1. calculer l'intégrale suivante :

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \quad (1.1)$$

corrigé page : 14

EXERCICE 02

Vérifier l'égalité suivante dans le système de coordonnées cartésiennes :

$$A \wedge (B \wedge C) = B(A \cdot C) - C(A \cdot B)$$

corrigé page : 14

EXERCICE 03

On donne les vecteurs unités dans le système de coordonnées cylindriques comme :

$$\begin{cases} \vec{u}_\rho = \cos \theta \vec{i} + \sin \theta \vec{j} \\ \vec{u}_\theta = -\sin \theta \vec{i} + \cos \theta \vec{j} \\ \vec{u}_z = \vec{k} \end{cases}$$

Exprimer les vecteurs en coordonnées cartésiennes \vec{i}, \vec{j} et \vec{k} en fonction de $\vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta$, et \vec{u}_z .

corrigé page : 15

EXERCICE 04

1. Calculer la surface latérale d'un cylindre de hauteur L et de rayon R , en utilisant deux systèmes de coordonnées (cartésiennes et cylindriques).
2. Quel système de coordonnées est le plus approprié pour faire ce calcul ?

corrigé page : 15

EXERCICE 05

Exprimer le vecteur unité porté par un vecteur \overrightarrow{AB} allant du point $A(0, 0, h)$ sur l'axe des z au point $B(\rho, \theta, 0)$ en coordonnées cylindriques.

corrigé page : 37

EXERCICE 06 :

Exprimer en coordonnées cylindriques le vecteur \vec{A} , donné en coordonnées cartésiennes par :

$$\vec{A} = y\vec{i} + x\vec{j} + \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}\vec{k}$$

corrigé page : 17

EXERCICE 07 :

1. Exprimer les coordonnées sphériques r, θ et φ en fonction des coordonnées cartésiennes x, y et z .
2. Retrouver l'expression du carré de l'élément différentiel dl^2 dans ce système de coordonnées.
3. Retrouver les expressions des vecteurs unitaires en coordonnées sphériques :

$$\begin{cases} \vec{u}_r = \sin \theta \cos \varphi \vec{i} + \sin \theta \sin \varphi \vec{j} + \cos \theta \vec{k} \\ \vec{u}_\theta = \cos \theta \cos \varphi \vec{i} + \cos \theta \sin \varphi \vec{j} - \sin \theta \vec{k} \\ \vec{u}_\varphi = -\sin \varphi \vec{i} + \cos \varphi \vec{j} \end{cases}$$

4. Faire les dérivées par rapport au temps des vecteurs unitaires.
5. Utiliser les coordonnées sphériques pour trouver la surface d'une aire découpée sur une sphère de rayon R et définie par $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$ et $\varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2$. Que devient ce résultat quand $\theta_1 = 0$ et $\theta_2 = \pi$, $\varphi_1 = 0$ et $\varphi_2 = 2\pi$?
6. Établir l'expression donnant le volume d'une sphère de rayon R à partir du volume différentiel.

corrigé page : 17

EXERCICE 08

Soit le champ : $E(x, y, z) = \frac{1}{x}\vec{i} + \frac{1}{y}\vec{j} + \frac{1}{z}\vec{k}$
 Déterminer la fonction $V(x, y, z)$ tel que : $E = -\nabla V$

corrigé page : 19

EXERCICE 09

Un point $M(x, y, z)$ étant repéré par le rayon vecteur $\vec{r} = OM$, de module $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

1. calculer : ∇r , $\nabla(\frac{1}{r})$ et $\nabla \ln r$.
2. quel sens physique peut-on donner à un gradient ?
3. tracer les allures des champs résultant. Commenter.

corrigé page : 20

EXERCICE 10 :

En explicitant la relation

$$dU = \nabla U \cdot d\vec{l}$$

donner l'expression du gradient :

1. en coordonnées cylindriques (ρ, θ, z) ;
2. en coordonnées sphériques (r, θ, φ) .

corrigé page : 21

EXERCICE 11 :

Donner la direction de la variation maximale de la fonction $f(x, y, z) = yz + xz + xy$ au point $(1, 1, 1)$. (donnez le vecteur unitaire).

corrigé page : 22

EXERCICE 12 :

Trouver l'équation du plan tangent à la surface $2xz^2 - 3xy - 4x = 7$ au point $(1, -1, 2)$

corrigé page : 22

EXERCICE 13 :

1. Donner l'expression du vecteur ∇r^n où $n \in \mathbb{Z}$ et $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.
2. En déduire les expressions des gradients des vecteurs r^4 et $\frac{1}{r^2}$.
3. Pour quelle valeur de n le taux de variation de la fonction r^n serait constant ?

corrigé page : 22

EXERCICE 14 :

Vérifier en coordonnées cartésiennes l'égalité suivante :

$$\nabla \wedge (\nabla \wedge \vec{A}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \Delta \vec{A}$$

corrigé page : 23

EXERCICE 15 :

1. Calculer la divergence
 - a- du rayon vecteur $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$,
 - b- du vecteur unitaire $\vec{u} = \frac{\vec{r}}{r}$.
2. Déduire des calculs antérieurs la valeur du Laplacien de r , $\Delta(r)$ au point $(+1, +1, +1)$.

corrigé page : 23

EXERCICE 16 :

Soit la fonction : $\varphi(x, y, z) = x y^2 + y z^2 + z x^2$

1. Calculer $\vec{A} = \nabla\varphi$; valeur de \vec{A} au point $(1, 1, 0)$.
2. Calculer $\vec{B} = \text{Rot}A = \nabla \wedge \vec{A}$
3. calculer $\nabla \wedge \vec{A}$ tels que $\vec{A} = x \vec{i}$, $\vec{A} = y \vec{i}$, $\vec{A} = \vec{u}_\theta$ et $\vec{A} = \frac{1}{r} \vec{u}_\theta$
4. Vérifier ce résultat dans le cas général.
5. Vérifier que $\nabla \cdot (\nabla \wedge \vec{C}) = 0$

corrigé page : 24

EXERCICE 17

On donne le champ de vecteurs $\vec{A}(x, y) = -y\vec{i} + x\vec{j}$.

1. Tracer sur le plan $z = 0$ le vecteur \vec{A} aux points $(1,1,0)$, $(1,-1,0)$, $(-1,1,0)$ et $(-1,-1,0)$, en précisant pour chaque vecteur son vecteur unitaire et son module.
2. Calculer la divergence du champ \vec{A} . Que signifie ce résultat ?
3. Calculer le rotationnel du champ \vec{A} . Que signifie ce résultat ?

corrigé page : 25

EXERCICE 18

Le théorème de divergence (Green-Ostrogradsky) s'énonce comme suit :

$$\oint_S \vec{A} \cdot d\vec{S} = \iiint \nabla \cdot \vec{A} dV;$$

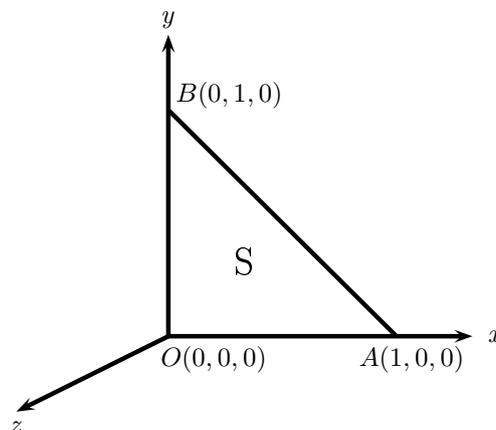
1. Utiliser le vecteur $\vec{A}(r, \theta, \varphi) = r^2 \vec{u}_r$ pour vérifier ce théorème sur une sphère de rayon R .
2. Utiliser le vecteur $\vec{A}(x, y, z) = x \vec{i} + y \vec{j} + z \vec{k}$ pour vérifier ce théorème sur un cube d'arête a .

corrigé page : 26

EXERCICE 19

On donne le potentiel $V(x, y, z) = yz + xz + xy$

1. Déterminer le champ \vec{E} qui dérive du potentiel V .
2. Calculer le flux Φ qui sort de la surface S .
3. Calculer la circulation de \vec{E} le long du contour triangulaire $OABO$ (voir figure ci-dessous).
4. Montrer que la circulation du vecteur ∇r^n le long d'un contour fermé est nulle.



corrigé page : 27

1.3 corrigés :

EXERCICE 01 :

1. calculer l'intégrale suivante :

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx$$

L'objectif de cet exercice est de montrer qu'en passant d'un système de coordonnées, en l'occurrence le système de coordonnées cartésiennes vers le système de coordonnées polaires, il est possible de calculer facilement cette intégrale gaussienne. En effet, l'astuce est de calculer I^2 , c'est à dire

$$I^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)} dx dy$$

Ceci est une intégrale de la fonction $e^{-(x^2+y^2)}$ sur la surface infinie qu'est le plan xOy . L'élément infinitésimal de cette surface dans le système de coordonnées cartésiennes est $dS = dx dy$. On peut balayer cette même surface infinie en utilisant les coordonnées polaires (ρ, θ) , où ρ varie entre 0 et $+\infty$ alors que θ varie entre 0 et 2π . L'élément de surface infinitésimal est égal à $dS = \rho d\rho d\theta$ et $x^2 + y^2 = \rho^2$. Ce qui nous permet de réécrire l'intégrale I^2 sous la forme :

$$I^2 = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\infty} e^{-\rho^2} \rho d\rho = 2\pi \int_0^{\infty} e^{-\rho^2} \rho d\rho$$

En faisant le changement de variable suivant $u = \rho^2$ avec $du = 2\rho d\rho$; ou encore $\rho d\rho = \frac{du}{2}$, nous obtenons

$$I^2 = \pi \int_0^{\infty} e^{-u} du$$

$$I^2 = \pi [-e^{-u}]_0^{\infty}$$

$$I^2 = \pi$$

Ce qui enfin donne

$$I = \sqrt{\pi}$$

EXERCICE 02 :

Vérifier l'égalité suivante dans le système de coordonnées cartésiennes :

$$\mathbf{A} \wedge (\mathbf{B} \wedge \mathbf{C}) = \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})$$

Prenons les vecteurs :

$$\mathbf{A} = A_x \vec{i} + A_y \vec{j} + A_z \vec{k}$$

,

$$\mathbf{B} = B_x \vec{i} + B_y \vec{j} + B_z \vec{k}$$

et

$$\mathbf{C} = C_x \vec{i} + C_y \vec{j} + C_z \vec{k}$$

Le calcul des produits scalaires nous donne :

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$$

et

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{C} = A_x C_x + A_y C_y + A_z C_z$$

Ce qui nous amène à écrire

$$\mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) = (A_x B_x C_x + A_y B_x C_y + A_z B_x C_z) \vec{i} + (A_x B_y C_x + A_y B_y C_y + A_z B_y C_z) \vec{j} + (A_x B_z C_x + A_y B_z C_y + A_z B_z C_z) \vec{k}$$

et

$$\mathbf{C}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = (A_x B_x C_x + A_y B_y C_x + A_z B_x C_z) \vec{i} + (A_x B_x C_y + A_y B_y C_y + A_z B_y C_z) \vec{j} + (A_x B_x C_z + A_y B_y C_z + A_z B_z C_z) \vec{k}$$

D'autre part, on calcule le produit vectoriel

$$B \wedge C = (B_y C_z - B_z C_y) \vec{i} + (B_z C_x - B_x C_z) \vec{j} + (B_x C_y - B_y C_x) \vec{k}$$

et

$$A \wedge (B \wedge C) = (A_y B_x C_y - A_y B_y C_x - A_y B_z C_x + A_y B_x C_z) \vec{i} - (A_x B_x C_y - A_x B_y C_x - A_x B_y C_z + A_x B_z C_y) \vec{j} + (A_x B_z C_x - A_x B_x C_z - A_y B_y C_x)$$

La comparaison entre les deux expressions nous permet de vérifier qu'elles sont bien identiques.

EXERCICE 03 :

On donne les vecteurs unités dans le système de coordonnées cylindriques comme :

$$\begin{cases} \vec{u}_\rho = \cos \theta \vec{i} + \sin \theta \vec{j} \\ \vec{u}_\theta = -\sin \theta \vec{i} + \cos \theta \vec{j} \\ \vec{u}_z = \vec{k} \end{cases}$$

Calculons les produits scalaires suivants :

$$\begin{aligned} \vec{i} \cdot \vec{u}_\rho &= \cos \theta, & \vec{i} \cdot \vec{u}_\theta &= -\sin \theta, & \text{et} & \vec{i} \cdot \vec{u}_z &= 0 \\ \vec{j} \cdot \vec{u}_\rho &= \sin \theta, & \vec{j} \cdot \vec{u}_\theta &= \cos \theta, & \text{et} & \vec{j} \cdot \vec{u}_z &= 0 \\ \vec{k} \cdot \vec{u}_\rho &= 0, & \vec{k} \cdot \vec{u}_\theta &= 0, & \text{et} & \vec{k} \cdot \vec{u}_z &= 1 \end{aligned}$$

Mais on sait que

$$\vec{i} = (\vec{i} \cdot \vec{u}_\rho) \vec{u}_\rho + (\vec{i} \cdot \vec{u}_\theta) \vec{u}_\theta + (\vec{i} \cdot \vec{u}_z) \vec{u}_z$$

ce qui donne

$$\vec{i} = \cos \theta \vec{u}_\rho - \sin \theta \vec{u}_\theta$$

et

$$\vec{j} = (\vec{j} \cdot \vec{u}_\rho) \vec{u}_\rho + (\vec{j} \cdot \vec{u}_\theta) \vec{u}_\theta + (\vec{j} \cdot \vec{u}_z) \vec{u}_z$$

ce qui donne

$$\vec{j} = \sin \theta \vec{u}_\rho + \cos \theta \vec{u}_\theta$$

et

$$\vec{k} = (\vec{k} \cdot \vec{u}_\rho) \vec{u}_\rho + (\vec{k} \cdot \vec{u}_\theta) \vec{u}_\theta + (\vec{k} \cdot \vec{u}_z) \vec{u}_z$$

ce qui donne

$$\vec{k} = \vec{u}_z$$

EXERCICE 04 :

1. Calcul de la surface latérale d'un cylindre de hauteur L et de rayon R , en utilisant le système de coordonnées cylindriques :

l'élément infinitésimal de la surface latérale d'un cylindre de rayon R est égal à

$$dS_r = (R d\theta) \cdot dz$$

d'où la surface latérale d'un cylindre de hauteur L et de rayon R est égale à

$$S = \int_0^L dz \int_0^{2\pi} R d\theta = 2\pi R L$$

2. Calcul de la surface latérale d'un cylindre de hauteur L et de rayon R , en utilisant le système de coordonnées cartésiennes :

l'élément infinitésimal de la surface latérale d'un cylindre de rayon R est égal à

$$dS_L = ds \cdot dz$$

avec

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

et

$$x^2 + y^2 = R^2$$

ce qui donne

$$2x dx + 2y dy = 0$$

ou encore

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

en remplaçant ceci dans l'expression de ds , on obtient

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = dx \sqrt{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} = dx \sqrt{1 + \frac{R^2 - x^2}{x^2}} = dx \sqrt{\frac{R^2}{R^2 - x^2}} = R \frac{dx}{\sqrt{R^2 - x^2}}$$

la symétrie du cylindre par rapport à l'axe des z nous permet de calculer la moitié de sa surface, ensuite la multiplier par deux pour avoir l'expression de la surface entière, d'où

$$\frac{1}{2}S = \int_0^L dz \int_{-R}^R R \frac{dx}{\sqrt{R^2 - x^2}} = L \int_{-R}^R \frac{dx}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{R}\right)^2}}$$

Faisons le changement de variable suivant :

$$\sin(t) = \frac{x}{R}$$

ce qui donne

$$d \sin(t) = \cos(t) dt = \frac{dx}{R}$$

ou encore

$$dx = R \cos(t) dt$$

et l'intégrale ci-dessus devient

$$S = 2LR \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} dt = 2\pi LR$$

3. il est donc préférable de travailler dans le système de coordonnées cylindriques quand il s'agit d'un système de symétrie cylindrique, ou qui a carrément la forme d'un cylindre.

EXERCICE 05 :

Dans le système de coordonnées cylindriques, le vecteur position du point $A(0, 0, h)$ sur l'axe des z est donné par :

$$\vec{OA} = h\vec{u}_z$$

alors que le vecteur position du point $B(\rho, \theta, 0)$ est donné par :

$$\vec{OB} = \rho\vec{u}_\rho$$

On obtient donc

$$\vec{AB} = \vec{AO} + \vec{OB} = -\vec{OA} + \vec{OB} = -h\vec{u}_z + \rho\vec{u}_\rho$$

Le vecteur unité porté par le vecteur \vec{AB} est donné par :

$$\vec{u} = \frac{\vec{AB}}{|\vec{AB}|} = \frac{-h\vec{u}_z + \rho\vec{u}_\rho}{\sqrt{\rho^2 + h^2}}$$

EXERCICE 06 :

Exprimer en coordonnées cylindriques le vecteur \vec{A} , donné en coordonnées cartésiennes par :

$$\vec{A} = y\vec{i} + x\vec{j} + \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}\vec{k}$$

Les relations entre les coordonnées cartésiennes et les coordonnées cylindriques s'écrivent sous la forme

$$\begin{cases} x = \rho \cos(\theta) \\ y = \rho \sin(\theta) \\ z = z \end{cases}$$

Leurs variations infinitésimales s'écrivent donc

$$\begin{cases} dx = \cos(\theta)d\rho - \rho \sin(\theta)d\theta \\ dy = \sin(\theta)d\rho + \rho \cos(\theta)d\theta \\ dz = dz \end{cases}$$

Un déplacement infinitésimal s'écrit comme

$$d\ell = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}$$

qui, après réarrangement, aura la forme

$$d\ell = (\cos(\theta)\vec{i} + \sin(\theta)\vec{j}) d\rho + (-\sin(\theta)\vec{i} + \cos(\theta)\vec{j}) \rho d\theta + \vec{k} dz$$

ceci nous permet d'écrire le déplacement infinitésimal $d\ell$ dans le système de coordonnées cylindriques sous la forme :

$$d\ell = d\rho\vec{u}_\rho + \rho d\theta\vec{u}_\theta + dz\vec{k}$$

par identification, les vecteurs unitaires orthogonaux formant le trièdre direct s'écrivent sous la forme

$$\begin{cases} \vec{u}_\rho = \cos(\theta)\vec{i} + \sin(\theta)\vec{j} \\ \vec{u}_\theta = -\sin(\theta)\vec{i} + \cos(\theta)\vec{j} \\ \vec{u}_z = \vec{k} \end{cases}$$

Rappelons que

$$\begin{cases} \vec{i} = (\vec{i} \cdot \vec{u}_\rho)\vec{u}_\rho + (\vec{i} \cdot \vec{u}_\theta)\vec{u}_\theta + (\vec{i} \cdot \vec{u}_z)\vec{u}_z = \cos(\theta)\vec{u}_\rho - \sin(\theta)\vec{u}_\theta \\ \vec{j} = (\vec{j} \cdot \vec{u}_\rho)\vec{u}_\rho + (\vec{j} \cdot \vec{u}_\theta)\vec{u}_\theta + (\vec{j} \cdot \vec{u}_z)\vec{u}_z = \sin(\theta)\vec{u}_\rho + \cos(\theta)\vec{u}_\theta \\ \vec{k} = (\vec{k} \cdot \vec{u}_\rho)\vec{u}_\rho + (\vec{k} \cdot \vec{u}_\theta)\vec{u}_\theta + (\vec{k} \cdot \vec{u}_z)\vec{u}_z = \vec{u}_z \end{cases}$$

Notons que

$$x^2 + y^2 = \rho^2$$

et en remplaçant dans l'expression du vecteur \vec{A} , nous obtenons

$$\vec{A} = \rho \sin(\theta) [\cos(\theta)\vec{u}_\rho - \sin(\theta)\vec{u}_\theta] + \rho \cos(\theta) [\sin(\theta)\vec{u}_\rho + \cos(\theta)\vec{u}_\theta] + \rho \cos^2(\theta)\vec{u}_z$$

ou encore

$$\vec{A} = [\rho \sin(\theta) \cos(\theta) + \rho \cos(\theta) \sin(\theta)] \vec{u}_\rho + [-\rho \sin(\theta) \sin(\theta) + \rho \cos(\theta) \cos(\theta)] \vec{u}_\theta + \rho [\cos^2(\theta)] \vec{u}_z$$

après réarrangement, on obtient

$$\vec{A} = 2\rho \sin(\theta) \cos(\theta)\vec{u}_\rho + \rho [\cos^2(\theta) - \sin^2(\theta)] \vec{u}_\theta + \rho \cos^2(\theta)\vec{u}_z$$

EXERCICE 07 :

1. Exprimer les coordonnées sphériques r , θ et φ en fonction des coordonnées cartésiennes x , y et z .
 Un point M dans l'espace est repéré dans le système de coordonnées sphériques par trois coordonnées :
 - (a) le rayon r qui est la droite reliant le point M à l'origine O et qui varie entre 0 et ∞
 - (b) la latitude θ qui est l'angle que fait le rayon r (droite OM) avec l'axe de z et variant entre 0 et π
 - (c) la longitude φ qui est l'angle que fait la droite résultant de la projection du rayon r sur le plan xOy et l'axe des x , et qui varie entre 0 et 2π . Ceci est la convention des physiciens.

Les vecteurs unitaires composant le trièdre en coordonnées sphériques sont

- (a) \vec{u}_r est le vecteur unitaire dans la direction de la variation du rayon r .
 (b) \vec{u}_θ est le vecteur unitaire perpendiculaire à r dans la direction de la variation de l'angle θ .
 (c) \vec{u}_φ est le vecteur unitaire perpendiculaire à la droite résultant de la projection de r sur le plan xOy dans la direction de la variation de l'angle φ .

Ces trois vecteurs sont orthogonaux les uns aux autres selon les formules suivantes

$$\vec{u}_r \wedge \vec{u}_\theta = \vec{u}_\varphi, \quad \vec{u}_\varphi \wedge \vec{u}_r = \vec{u}_\theta \quad \text{et} \quad \vec{u}_\theta \wedge \vec{u}_\varphi = \vec{u}_r$$

Le vecteur position d'un point est donné par $OM = r\vec{u}_r$.

En projetant ce vecteur sur l'axe des z , nous obtenons $z = r \cos(\theta)$.

En projetant ce vecteur sur le plan xOy , nous obtenons $r \sin(\theta)$, ensuite en projetant cette droite sur l'axe des x , nous obtenons $x = r \sin(\theta) \cos(\varphi)$, et en projetant la même droite sur l'axe des y nous obtenons $y = r \sin(\theta) \sin(\varphi)$

2. Retrouver l'expression du carré de l'élément différentiel $d\ell^2$ dans ce système de coordonnées.

Dans le système de coordonnées cartésiennes, l'élément différentiel (vecteur de déplacement infinitésimal) s'écrit sous la forme :

$$d\vec{\ell} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}$$

avec

$$\begin{cases} dx = \sin(\theta) \cos(\varphi) dr + r \cos(\theta) \cos(\varphi) d\theta - r \sin(\theta) \sin(\varphi) d\varphi \\ dy = \sin(\theta) \sin(\varphi) dr + r \cos(\theta) \sin(\varphi) d\theta + r \sin(\theta) \cos(\varphi) d\varphi \\ dz = \cos(\theta) dr - r \sin(\theta) d\theta \end{cases}$$

et

$$(d\ell)^2 = d\vec{\ell} \cdot d\vec{\ell} = (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2$$

Après un calcul long mais direct, nous obtenons :

$$(d\ell)^2 = (dr)^2 + r^2(d\theta)^2 + r^2 \sin^2(\theta)(d\varphi)^2$$

3. Retrouver les expressions des vecteurs unitaires en coordonnées sphériques :

En utilisant les expressions des variations des coordonnées cartésiennes établies ci-dessus, nous pouvons écrire

$$d\vec{\ell} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k} = [\sin(\theta) \cos(\varphi) dr + r \cos(\theta) \cos(\varphi) d\theta - r \sin(\theta) \sin(\varphi) d\varphi] \vec{i} + [\sin(\theta) \sin(\varphi) dr + r \cos(\theta) \sin(\varphi) d\theta + r \sin(\theta) \cos(\varphi) d\varphi] \vec{j} + [\cos(\theta) dr - r \sin(\theta) d\theta] \vec{k}$$

ce qui, après réarrangement, donne

$$d\vec{\ell} = [\sin(\theta) \cos(\varphi) \vec{i} + \sin(\theta) \sin(\varphi) \vec{j} + \cos(\theta) \vec{k}] dr + [\cos(\theta) \cos(\varphi) \vec{i} + \cos(\theta) \sin(\varphi) \vec{j} - \sin(\theta) \vec{k}] r d\theta + [-\sin(\varphi) \vec{i} + \cos(\varphi) \vec{j}] r \sin(\theta) d\varphi$$

de l'expression de $(d\vec{\ell})^2$ établie ci-dessus, on déduit que

$$d\vec{\ell} = dr\vec{u}_r + r d\theta\vec{u}_\theta + r \sin(\theta) d\varphi\vec{u}_\varphi$$

par identification, on trouve les expressions des trois vecteurs unitaires

$$\begin{cases} \vec{u}_r = \sin \theta \cos \varphi \vec{i} + \sin \theta \sin \varphi \vec{j} + \cos \theta \vec{k} \\ \vec{u}_\theta = \cos \theta \cos \varphi \vec{i} + \cos \theta \sin \varphi \vec{j} - \sin \theta \vec{k} \\ \vec{u}_\varphi = -\sin \varphi \vec{i} + \cos \varphi \vec{j} \end{cases}$$

On peut vérifier que ces trois vecteurs sont unitaires (de module unité) en calculant leurs modules respectifs. D'autre part, la différentielle totale du vecteur position est donnée par

$$d\vec{\ell} = \frac{\partial \vec{\ell}}{\partial r} dr + \frac{\partial \vec{\ell}}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial \vec{\ell}}{\partial \varphi} d\varphi$$

Par identification, on obtient les expressions suivantes

$$\vec{u}_r = \frac{\partial \vec{\ell}}{\partial r}, \quad \vec{u}_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \vec{\ell}}{\partial \theta} \quad \text{et} \quad \vec{u}_\varphi = \frac{1}{r \sin(\theta)} \frac{\partial \vec{\ell}}{\partial \varphi}$$

4. Faire les dérivées par rapport au temps des vecteurs unitaires.

$$\frac{d\vec{u}_r}{dt} = \dot{\theta} \cos(\theta) \cos(\varphi) \vec{i} - \dot{\varphi} \sin(\theta) \sin(\varphi) \vec{i} + \dot{\theta} \cos(\theta) \sin(\varphi) \vec{j} + \dot{\varphi} \sin(\theta) \cos(\varphi) \vec{j} - \dot{\theta} \sin(\theta) \vec{k}$$

ou encore

$$\frac{d\vec{u}_r}{dt} = \dot{\theta} \vec{u}_\theta + \dot{\varphi} \sin(\theta) \vec{u}_\varphi$$

De la même manière, on peut vérifier que

$$\frac{d\vec{u}_\theta}{dt} = -\dot{\theta} \vec{u}_r + \dot{\varphi} \cos(\theta) \vec{u}_\varphi$$

et

$$\frac{d\vec{u}_\varphi}{dt} = -\dot{\varphi} [\cos(\varphi) \vec{i} + \sin(\varphi) \vec{j}]$$

5. Utiliser les coordonnées sphériques pour trouver la surface d'une aire découpée sur une sphère de rayon R et définie par $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$ et $\varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2$.

L'élément différentiel de surface pour un rayon r constant est donné par :

$$dS_r = (r d\theta) \cdot (r \sin(\theta) d\varphi)$$

On peut se convaincre de la véracité de l'expression, en remarquant que

$$d\vec{\ell} = dr \vec{u}_r + r d\theta \vec{u}_\theta + r \sin(\theta) d\varphi \vec{u}_\varphi$$

et que sur une surface où le rayon est constant, la variation se fait exclusivement suivant les directions \vec{u}_θ et \vec{u}_φ . Pour un rayon $r = R$, la surface d'une aire découpée sur une sphère de rayon R et définie par $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$ et $\varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2$ est égale à

$$S = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int_{\theta_1}^{\theta_2} R^2 \sin(\theta) d\theta$$

ou encore

$$S = R^2 (\varphi_2 - \varphi_1) (\cos(\theta_1) - \cos(\theta_2))$$

Dans le cas où $\theta_1 = 0$ et $\theta_2 = \pi$, $\varphi_1 = 0$ et $\varphi_2 = 2\pi$, on aura

$$S = 4\pi R^2$$

6. Établir l'expression donnant le volume d'une sphère de rayon R à partir du volume différentiel.

$$V = \int_0^R r^2 dr \int_0^\pi \sin(\theta) d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{4}{3} \pi R^3$$

EXERCICE 08 :

Soit le champ : $E(x, y, z) = \frac{1}{x} \vec{i} + \frac{1}{y} \vec{j} + \frac{1}{z} \vec{k}$

Par définition, le gradient d'un scalaire dans le système de coordonnées cartésiennes est donné par :

$$\vec{\text{grad}}V = \nabla V = \frac{\partial V}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial V}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial V}{\partial z} \vec{k}$$

alors que le déplacement infinitésimal est donné par :

$$d\vec{\ell} = dx \vec{i} + dy \vec{j} + dz \vec{k}$$

et la différentielle totale de V est donnée par :

$$dV = \frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy + \frac{\partial V}{\partial z} dz$$

Remarquons que

$$\vec{\text{grad}}V \cdot d\vec{\ell} = \left(\frac{\partial V}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial V}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial V}{\partial z} \vec{k} \right) \cdot (dx \vec{i} + dy \vec{j} + dz \vec{k}) = \frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy + \frac{\partial V}{\partial z} dz = dV$$

Par hypothèse

$$E(x, y, z) = -\nabla V$$

Multiplions les deux membres de cette équation par $d\ell$,

$$E(x, y, z) \cdot d\ell = -\nabla V \cdot d\ell = -dV$$

L'intégrale par rapport à $d\ell$ donne :

$$\int dV = - \int E(x, y, z) \cdot d\ell = - \int \left(\frac{1}{x} \vec{i} + \frac{1}{y} \vec{j} + \frac{1}{z} \vec{k} \right) \cdot d\ell$$

ce qui donne

$$V = - \int \frac{dx}{x} - \int \frac{dy}{y} - \int \frac{dz}{z}$$

ou encore

$$V = -\ln|x| - \ln|y| - \ln|z| + \text{cste} = -\ln|xyz| + \text{cste}$$

La constante est définie par les conditions aux limites du problème traité.

EXERCICE 09 :

Un point $M(x, y, z)$ étant repéré par le rayon vecteur $\vec{r} = \mathcal{O}M$, de module $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

1. calcul de ∇r

$$\nabla r = \frac{\partial r}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial r}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial r}{\partial z} \vec{k}$$

Calculons les composantes de ce vecteur :

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r}, \quad \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r} \quad \text{et} \quad \frac{\partial r}{\partial z} = \frac{z}{r}$$

ce qui donne

$$\nabla r = \frac{x}{r} \vec{i} + \frac{y}{r} \vec{j} + \frac{z}{r} \vec{k} = \frac{\vec{r}}{r} = \vec{u}_r$$

2. calcul de $\nabla \left(\frac{1}{r} \right)$

$$\nabla r = \frac{\partial \left(\frac{1}{r} \right)}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial \left(\frac{1}{r} \right)}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial \left(\frac{1}{r} \right)}{\partial z} \vec{k}$$

Calculons les composantes de ce vecteur :

$$\frac{\partial \left(\frac{1}{r} \right)}{\partial x} = -\frac{x}{r^3}, \quad \frac{\partial \left(\frac{1}{r} \right)}{\partial y} = -\frac{y}{r^3} \quad \text{et} \quad \frac{\partial \left(\frac{1}{r} \right)}{\partial z} = -\frac{z}{r^3}$$

ce qui donne

$$\nabla \left(\frac{1}{r} \right) = -\frac{x}{r^3} \vec{i} - \frac{y}{r^3} \vec{j} - \frac{z}{r^3} \vec{k} = -\frac{\vec{r}}{r^3} = -\frac{\vec{u}_r}{r^2}$$

3. calcul de $\nabla \ln r$

$$\nabla \ln r = \frac{\partial \ln r}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial \ln r}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial \ln r}{\partial z} \vec{k}$$

Calculons les composantes de ce vecteur :

$$\frac{\partial \ln r}{\partial x} = \frac{x}{r^2}, \quad \frac{\partial \ln r}{\partial y} = \frac{y}{r^2} \quad \text{et} \quad \frac{\partial \ln r}{\partial z} = \frac{z}{r^2}$$

ce qui donne

$$\nabla \ln r = \frac{x}{r^2} \vec{i} + \frac{y}{r^2} \vec{j} + \frac{z}{r^2} \vec{k} = \frac{\vec{r}}{r^2} = \frac{\vec{u}_r}{r}$$

1. l'application de l'opérateur ∇ à une fonction scalaire donne un vecteur (gradient de cette fonction) dirigé dans la direction de la variation maximale de cette même fonction dans l'espace. Son module donne le taux de variation de cette fonction dans cette direction. Le vecteur gradient de la fonction est perpendiculaire à la direction de variation nulle. On peut vérifier ça sur le cas du ∇r .
2. tracer les allures des champs résultant. Commenter.

EXERCICE 10 :

En explicitant la relation

$$dU = \nabla U \cdot d\ell$$

donner l'expression du gradient :

1. en coordonnées cylindriques (ρ, θ, z) : la variation infinitésimale d'une fonction U dépendant des coordonnées cylindriques est donnée par (différentielle totale) :

$$dU = \frac{\partial U}{\partial \rho} d\rho + \frac{\partial U}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial U}{\partial z} dz$$

mais on sait aussi que

$$dU = \nabla U \cdot d\ell'$$

Soient A_ρ , A_θ et A_z les composantes du vecteur gradient de la fonction U , tel que :

$$\vec{A} = \nabla U = A_\rho \vec{u}_\rho + A_\theta \vec{u}_\theta + A_z \vec{u}_z$$

et le déplacement infinitésimal (élémentaire) $d\ell'$ dans le système de coordonnées cylindriques est donné par

$$d\ell' = d\rho \vec{u}_\rho + \rho d\theta \vec{u}_\theta + dz \vec{u}_z$$

le produit scalaire des deux dernières expressions ci-dessus donne :

$$\nabla U \cdot d\ell' = A_\rho d\rho + A_\theta \rho d\theta + A_z dz = dU$$

d'autre part on a

$$dU = \frac{\partial U}{\partial \rho} d\rho + \frac{\partial U}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial U}{\partial z} dz$$

par identification, on obtient les composantes du vecteur gradient de la fonction U sous la forme :

$$A_\rho = \frac{\partial U}{\partial \rho}, \quad A_\theta = \frac{1}{\rho} \frac{\partial U}{\partial \theta} \quad \text{et} \quad A_z = \frac{\partial U}{\partial z}$$

2. en coordonnées sphériques (r, θ, φ) : la variation infinitésimale d'une fonction U dépendant des coordonnées sphériques est donnée par :

$$dU = \frac{\partial U}{\partial r} dr + \frac{\partial U}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial U}{\partial \varphi} d\varphi$$

mais on sait aussi que

$$dU = \nabla U \cdot d\ell'$$

Soient A_r , A_θ et A_φ les composantes du vecteur gradient de la fonction U , tel que :

$$\vec{A} = \nabla U = A_r \vec{u}_r + A_\theta \vec{u}_\theta + A_\varphi \vec{u}_\varphi$$

et le déplacement infinitésimal (élémentaire) $d\ell'$ dans le système de coordonnées sphériques est donné par

$$d\ell' = dr \vec{u}_r + r d\theta \vec{u}_\theta + r \sin(\theta) d\varphi \vec{u}_\varphi$$

le produit scalaire des deux dernières expressions ci-dessus donne :

$$\nabla U \cdot d\ell' = A_r dr + A_\theta r d\theta + A_\varphi r \sin(\theta) d\varphi = dU$$

d'autre part on a

$$dU = \frac{\partial U}{\partial r} dr + \frac{\partial U}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial U}{\partial \varphi} d\varphi$$

par identification, on obtient les composantes du vecteur gradient de la fonction U sous la forme :

$$A_r = \frac{\partial U}{\partial r}, \quad A_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \theta} \quad \text{et} \quad A_\varphi = \frac{1}{r \sin(\theta)} \frac{\partial U}{\partial \varphi}$$

EXERCICE 11 :

La direction de la variation maximale de la fonction $f(x, y, z) = yz + xz + xy$ est obtenue en calculant son gradient, à savoir :

$$\nabla f(x, y, z) = \frac{\partial f}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{k}$$

ou encore

$$\nabla f(x, y, z) = (z + y) \vec{i} + (z + x) \vec{j} + (y + x) \vec{k}$$

Le vecteur donnant la direction de la variation maximale de f en $(1, 1, 1)$ est donné par :

$$\nabla f(x, y, z) = 2\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}$$

Le vecteur unité \vec{u} porté par ce vecteur est donné par :

$$\vec{u} = \frac{2\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}(\vec{i} + \vec{j} + \vec{k})$$

EXERCICE 12 :

Trouver l'équation du plan tangent à la surface $2xz^2 - 3xy - 4x = 7$ au point $(1, -1, 2)$: trouvons l'expression d'une normale (vecteur perpendiculaire) à la surface au point $(1, -1, 2)$. Pour cela calculons le gradient de la fonction $2xz^2 - 3xy - 4x$,

$$\nabla(2xz^2 - 3xy - 4x) = (2z^2 - 3y - 4) \vec{i} - (3x) \vec{j} + (4xz) \vec{k}$$

alors la normale à la surface au point $(1, -1, 2)$ est

$$\vec{N} = 7\vec{i} - 3\vec{j} + 8\vec{k}$$

L'équation d'un plan passant par un point de vecteur de position \vec{r}_0 et perpendiculaire à la normale \vec{N} est

$$(\vec{r}_0 - \vec{r}) \cdot \vec{N} = 0$$

Alors l'équation cherchée est

$$[(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) - (\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k})] \cdot (7\vec{i} - 3\vec{j} + 8\vec{k}) = 0$$

ou encore

$$7(x - 1) - 3(y + 1) + 8(z - 2) = 0$$

EXERCICE 13 :

1. On a

$$r^n = (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{n}{2}}$$

avec

$$\nabla(r^n) = \frac{\partial r^n}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial r^n}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial r^n}{\partial z} \vec{k}$$

Mais, on a

$$\frac{\partial r^n}{\partial x} = \frac{n}{2}(2x)(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{n}{2}-1}$$

ou encore

$$\frac{\partial r^n}{\partial x} = n x r^{n-2}$$

ce qui, en généralisant pour les autres composantes, donne :

$$\nabla(r^n) = n r^{n-2}(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) = n r^{n-2} \vec{r} = n r^{n-1} \vec{u}_r \quad \text{où} \quad \vec{u}_r = \frac{\vec{r}}{r}$$

2. De cette expression générale, on peut déduire les expressions suivantes :

$$\nabla r^4 = 4r^3 \vec{u}_r \quad \text{et} \quad \nabla \frac{1}{r^2} = \frac{-2}{r^3} \vec{u}_r$$

3. Il est clair que le taux de variation de la fonction r^n est constant pour la valeur $n = 1$, car pour cette valeur

$$\nabla r = \vec{u}_r$$

EXERCICE 14 :

Vérifier en coordonnées cartésiennes l'égalité suivante :

$$\nabla \wedge (\nabla \wedge \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \Delta \mathbf{A}$$

Pour cela, prenons le vecteur

$$\mathbf{A} = A_x \vec{i} + A_y \vec{j} + A_z \vec{k}$$

avec

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

et

$$\nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) = \left(\frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial x \partial z} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial^2 A_x}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial y \partial z} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial^2 A_x}{\partial z \partial x} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial z \partial y} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} \right) \vec{k}$$

D'autre part,

$$\nabla \wedge \mathbf{A} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \vec{i} - \left(\frac{\partial A_z}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial z} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \vec{k}$$

et

$$\nabla \wedge (\nabla \wedge \mathbf{A}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} & \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} & \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \end{vmatrix}$$

Enfin

$$\Delta \mathbf{A} = \Delta A_x \vec{i} + \Delta A_y \vec{j} + \Delta A_z \vec{k}$$

ou encore

$$\Delta \mathbf{A} = \left(\frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial^2 A_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial z^2} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} \right) \vec{k}$$

En utilisant ces expressions, il est facile de vérifier l'égalité ci-dessus.

EXERCICE 15 :

1. Calcul de la divergence du vecteur $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

$$\operatorname{div} \vec{r} = \nabla \cdot \vec{r} = \left(\frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \right) (x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) = 3$$

2. Calcul de la divergence du vecteur unitaire $\vec{u} = \frac{\vec{r}}{r}$.

$$\operatorname{div} \vec{u} = \nabla \cdot \vec{u} = \left(\frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \right) \left(\frac{x}{r} \vec{i} + \frac{y}{r} \vec{j} + \frac{z}{r} \vec{k} \right)$$

ou encore

$$\nabla \cdot \vec{u} = \frac{\partial \left(\frac{x}{r} \right)}{\partial x} + \frac{\partial \left(\frac{y}{r} \right)}{\partial y} + \frac{\partial \left(\frac{z}{r} \right)}{\partial z}$$

avec

$$\frac{\partial \left(\frac{x}{r} \right)}{\partial x} = \frac{1}{r} - \frac{x^2}{r^3}, \quad \frac{\partial \left(\frac{y}{r} \right)}{\partial y} = \frac{1}{r} - \frac{y^2}{r^3} \quad \text{et} \quad \frac{\partial \left(\frac{z}{r} \right)}{\partial z} = \frac{1}{r} - \frac{z^2}{r^3}$$

ce qui, après calcul, donne

$$\nabla \cdot \vec{u} = \frac{2}{r}$$

3. L'expression du Laplacien est donnée par

$$\Delta r = \operatorname{div}(\vec{\operatorname{grad}} r) = \nabla \cdot \nabla r$$

avec

$$\nabla r = \vec{u}_r$$

ce qui donne

$$\Delta r = \nabla \cdot \vec{u}_r = \frac{2}{r}$$

La valeur du Laplacien $\Delta(r)$ au point $(+1, +1, +1)$ est donc égale

$$\Delta r = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

EXERCICE 16 :

Soit la fonction : $\varphi(x, y, z) = x y^2 + y z^2 + z x^2$

1. Calcul de $\vec{A} = \nabla \varphi$ et son expression au point $(1, 1, 0)$.

$$\nabla \varphi = (y^2 + 2zx)\vec{i} + (2xy + z^2)\vec{j} + (2yz + x^2)\vec{k}$$

et au point $(1, 1, 0)$, il est égal à $1\vec{i} + 2\vec{j} + 1\vec{k}$

2. Calcul de $\vec{B} = \operatorname{Rot} \vec{A} = \nabla \wedge \vec{A}$

$$\nabla \wedge \vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y^2 + 2zx & 2xy + z^2 & 2yz + x^2 \end{vmatrix} = \vec{0}.$$

Ceci est un résultat général, à savoir le rotationnel d'un gradient est toujours un vecteur nul. En effet, si

$$\vec{A} = \nabla \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \vec{k}$$

on aura

$$\nabla \wedge \vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x} & \frac{\partial \varphi}{\partial y} & \frac{\partial \varphi}{\partial z} \end{vmatrix}.$$

ou encore

$$\nabla \wedge \vec{A} = \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial y} \right) \vec{i} - \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial x} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial x} \right) \vec{k} = \vec{0}$$

(a) calcul de :

$$\nabla \wedge (x \vec{i}) = \vec{0}$$

La structure de ce champ de vecteur $\vec{A} = x \vec{i}$ n'entraîne pas de rotation d'un objet dans l'espace, c'est pour ça que son rotationnel est nul.

(b) calcul de :

$$\nabla \wedge (y \vec{i}) = -\vec{k}$$

La structure de ce champ de vecteur $\vec{A} = y \vec{i}$ peut entraîner une rotation d'un objet dans l'espace dans le plan xOy dans la direction horaire, c'est pour ça que son rotationnel est égal $-\vec{k}$.

(c) le rotationnel d'un vecteur dans les coordonnées sphériques s'écrit sous la forme :

$$\nabla \wedge \vec{A} = \frac{1}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial(\sin \theta A_\varphi)}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi} \right) \vec{u}_r + \frac{1}{r} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial(r A_\varphi)}{\partial r} \right) \vec{u}_\theta + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial(r A_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right) \vec{u}_\varphi$$

dans le cas où $\vec{A} = \vec{u}_\theta$, on a $A_r = 0$, $A_\theta = 1$ et $A_\varphi = 0$, on aura

$$\nabla \wedge \vec{A} = \frac{1}{r} \vec{u}_\varphi$$

Cela signifie qu'un objet plongé dans un champ vectoriel de la forme $\vec{A} = \vec{u}_\theta$ va subir une rotation dont le vecteur est suivant $\vec{\varphi}$ avec un module égal à $\frac{1}{r}$.

Dans le cas où $\vec{A} = \frac{1}{r}\vec{u}_\theta$, on aura

$$\nabla \wedge \vec{A} = \vec{0}$$

Un objet plongé dans ce champ vectoriel ne subit aucune rotation.

3. Calculons tout d'abord :

$$\nabla \wedge \vec{C} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial C_z}{\partial y} - \frac{\partial C_y}{\partial z} \right) \vec{i} - \left(\frac{\partial C_z}{\partial x} - \frac{\partial C_x}{\partial z} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial C_y}{\partial x} - \frac{\partial C_x}{\partial y} \right) \vec{k}$$

Calculons maintenant $\nabla \cdot (\nabla \wedge \vec{C})$:

$$\nabla \cdot (\nabla \wedge \vec{C}) = \left[\frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k} \right] \cdot \left[\left(\frac{\partial C_z}{\partial y} - \frac{\partial C_y}{\partial z} \right) \vec{i} - \left(\frac{\partial C_z}{\partial x} - \frac{\partial C_x}{\partial z} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial C_y}{\partial x} - \frac{\partial C_x}{\partial y} \right) \vec{k} \right]$$

ou encore

$$\nabla \cdot (\nabla \wedge \vec{C}) = \left(\frac{\partial^2 C_z}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 C_y}{\partial z \partial x} \right) - \left(\frac{\partial^2 C_z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 C_x}{\partial z \partial y} \right) + \left(\frac{\partial^2 C_y}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 C_x}{\partial y \partial z} \right) = 0$$

EXERCICE 17 :

1. On donne le champ de vecteurs

$$\vec{A}(x, y) = -y\vec{i} + x\vec{j}$$

Les points indiqués dans l'énoncé représentent les points d'application des quatre vecteurs du champ vectoriel \vec{A} en ces points. Les vecteurs sont donnés par :

$$\vec{A}(1, 1, 0) = -\vec{i} + \vec{j}, \quad \vec{A}(1, -1, 0) = \vec{i} + \vec{j}, \quad \vec{A}(-1, 1, 0) = -\vec{i} - \vec{j}, \quad \text{et} \quad \vec{A}(-1, -1, 0) = \vec{i} - \vec{j}$$

Les quatre vecteurs ont le même module, à savoir :

$$|\vec{A}(-1, -1, 0)| = |\vec{A}(1, 1, 0)| = |\vec{A}(1, -1, 0)| = |\vec{A}(-1, 1, 0)| = \sqrt{2}$$

Alors que les vecteurs unités sont donnés par :

$$\vec{u}(1, 1, 0) = -\frac{1}{\sqrt{2}}\vec{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{j}, \quad \vec{u}(1, -1, 0) = \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{j}, \quad \vec{u}(-1, 1, 0) = -\frac{1}{\sqrt{2}}\vec{i} - \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{j}$$

et

$$\vec{u}(-1, -1, 0) = \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{i} - \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{j}$$

Pour les représenter on doit tracer chaque vecteur à partir de son point d'application.

2. La divergence du champ \vec{A} est donnée par :

$$\nabla \cdot \vec{A}(x, y) = 0$$

Ce résultat signifie que le bilan du flux (flux entrant + flux sortant) du champ \vec{A} est nul pour tout volume infinitésimal.

3. Le rotationnel du champ \vec{A} est donné par :

$$\nabla \wedge \vec{A}(x, y) = 2\vec{k}$$

Ce résultat signifie que le champ vectoriel \vec{A} fournit une rotation autour d'un axe parallèle à \vec{k} en tout point de l'espace avec un module 2. Physiquement, ce champ peut faire tourner un objet qui y est plongé.

EXERCICE 18 :

Le théorème de divergence (Green-Ostrogradsky) s'énonce comme suit :

$$\oint_S \vec{A} \cdot d\vec{S} = \iiint_V \nabla \cdot \vec{A} dV;$$

1. Pour le vecteur $\vec{A}(r, \theta, \varphi) = r^2 \vec{u}_r$, sur une sphère de rayon R , la surface infinitésimale est donnée par

$$d\vec{S} = R^2 \sin \theta d\theta d\varphi \vec{u}_r$$

ce qui donne

$$\oint_S \vec{A} \cdot d\vec{S} = \oint_S R^2 R^2 \sin \theta d\theta d\varphi = 4\pi R^4$$

D'autre part, la divergence du vecteur \vec{A} en coordonnées sphériques est donnée par :

$$\nabla \cdot \vec{A} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 A_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial (\sin \theta A_\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi}$$

ce qui, pour $\vec{A}(r, \theta, \varphi) = r^2 \vec{u}_r$, donne

$$\nabla \cdot \vec{A} = 4r$$

avec le volume infinitésimal

$$dV = r^2 dr \sin \theta d\theta d\varphi$$

$$\iiint_V \nabla \cdot \vec{A} dV = \iiint_V 4r^3 dr \sin \theta d\theta d\varphi = 4\pi R^4$$

Le théorème est ainsi vérifié sur cet exemple.

2. Utiliser le vecteur $\vec{A}(x, y, z) = x \vec{i} + y \vec{j} + z \vec{k}$ pour vérifier ce théorème sur un cube d'arête a . Calculons tout d'abord

$$\nabla \cdot \vec{A} = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} = 3$$

Ce qui donne

$$\int \nabla \cdot \vec{A} dV = \int_0^a dx \int_0^b dy \int_0^c dz 3 = 3abc$$

D'autre part, le cube considéré a 6 faces. de ce fait, l'intégrale fermée s'obtient comme suit :

$$\oint \vec{A} \cdot d\vec{S} = \iint_1 \vec{A} \cdot d\vec{S} + \iint_2 \vec{A} \cdot d\vec{S} + \iint_3 \vec{A} \cdot d\vec{S} + \iint_4 \vec{A} \cdot d\vec{S} + \iint_5 \vec{A} \cdot d\vec{S} + \iint_6 \vec{A} \cdot d\vec{S}$$

où les intégrales se font sur chacune des 6 surfaces du cube. En effet, il est facile de vérifier que

$$\iint_1 \vec{A} \cdot d\vec{S} = \iint_1 \vec{A} \cdot dy dz \vec{i} = \int_0^b dy \int_0^c A_x(a) dz,$$

$$\iint_2 \vec{A} \cdot d\vec{S} = \iint_2 \vec{A} \cdot (-dy dz \vec{i}) = - \int_0^b dy \int_0^c A_x(0) dz,$$

$$\iint_3 \vec{A} \cdot d\vec{S} = \iint_3 \vec{A} \cdot dx dz \vec{j} = \int_0^a dx \int_0^c A_y(b) dz,$$

$$\iint_4 \vec{A} \cdot d\vec{S} = \iint_4 \vec{A} \cdot (-dx dz \vec{j}) = - \int_0^a dx \int_0^c A_y(0) dz,$$

$$\iint_5 \vec{A} \cdot d\vec{S} = \iint_5 \vec{A} \cdot dx dy \vec{k} = \int_0^a dx \int_0^b A_z(c) dy$$

et

$$\iint_6 \vec{A} \cdot d\vec{S} = \iint_6 \vec{A} \cdot (-dy \, dy \, d\vec{i}) = - \int_0^a dx \int_0^b A_z(0) dy,$$

avec

$$A_x(a) = a, \quad A_x(0) = 0, \quad A_y(b) = b, \quad A_y(0) = 0, \quad A_z(c) = c, \quad \text{et} \quad A_z(0) = 0$$

ce qui donne enfin

$$\oint \vec{A} d\vec{S} = 3abc$$

Cela vérifie le théorème ci-dessus.

EXERCICE 19 :

On donne le potentiel $V(x, y, z) = yz + xz + xy$

1. Le champ \vec{E} qui dérive du potentiel V s'écrit sous la forme :

$$\vec{E}(x, y, z) = \nabla V = \frac{\partial V}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial V}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial V}{\partial z} \vec{k} = (z + y) \vec{i} + (z + x) \vec{j} + (y + x) \vec{k}$$

Le signe moins qu'on a l'habitude de mettre devant le gradient a une signification physique qu'on ne traite pas ici.

2. Le flux élémentaire $d\Phi$ d'un vecteur qui passe à travers une surface $d\vec{S}$ est donné par :

$$d\Phi = \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

Pour calculer le flux à travers la surface ouverte considérée, on doit choisir une direction de la surface, soit $d\vec{S} = dx \, dy \, \vec{k}$, qui, dans le cas de coordonnées cartésiennes, s'écrit :

$$d\vec{S} = dx \, dy \, \vec{k}$$

Le flux total de \vec{E} à travers la surface considérée est égal à

$$\Phi = \int \int \vec{E} \cdot dx \, dy \, \vec{k} = \int \int (y + x) dx \, dy$$

Remarquons que la variable x varie entre $x = 0$ et $x = 1$, alors que la variable y varie entre $y = 0$ et $y = -x + 1$, ce qui nous permet de réécrire l'intégrale ci-dessus comme

$$\Phi = \int_0^1 dx \int_0^{-x+1} y \, dy + \int_0^1 dx \int_0^{-x+1} x \, dy$$

ou encore

$$\Phi = \int_0^1 \left(\frac{(-x+1)^2}{2} + x(-x+1) \right) dx = \frac{1}{2} \int_0^1 (x^2 - 2x + 1 - 2x^2 + 2x) dx = \frac{1}{3}$$

3. Calcul de la circulation de \vec{E} le long du contour triangulaire fermé $OABO$:

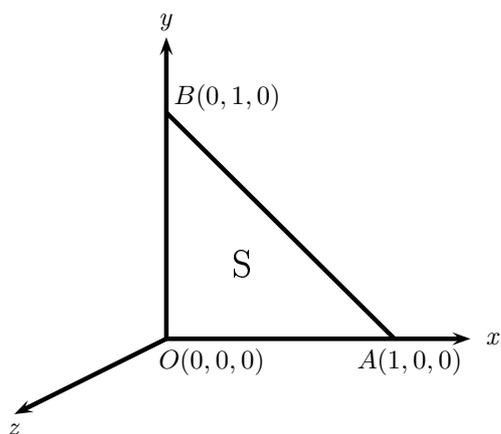
Par définition, la circulation du vecteur \vec{E} le long d'un contour fermé $OABO$ est donné par :

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = \int_O^A \vec{E} \cdot d\vec{\ell} + \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{\ell} + \int_B^O \vec{E} \cdot d\vec{\ell}$$

Le long de la droite OA , l'élément $d\vec{\ell}$ est égal à $d\vec{\ell} = dx \, \vec{i}$ et est égal à $d\vec{\ell} = -dx \, \vec{i} + dy \, \vec{j}$ le long de la droite AB , alors qu'il est égal à $d\vec{\ell} = -dy \, \vec{j}$. Cela nous permet d'écrire :

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = \int_0^1 (z + y) dx - \int_0^1 (z + y) dx + \int_0^1 (z + x) dy - \int_0^1 (z + x) dy$$

La circulation le long d'un contour fermé d'un vecteur dérivant d'une fonction est toujours nul.



Chapitre 2

Triboélectricité et charge électrique

Sommaire

2.1	Rappel :	30
2.1.1	La charge électrique	30
2.1.2	Distributions de charges	30
2.2	Exercices :	31
2.3	corrigés :	34

2.1 Rappel :

2.1.1 La charge électrique

Propriétés

On appelle **charge** d'une particule une grandeur qui caractérise les interactions électromagnétiques qu'elle exerce ainsi que celles qu'elle subit (voir masse et interaction gravitationnelle).

La charge est une grandeur scalaire pouvant prendre des valeurs positives ou négatives.

La charge est **quantifiée** :

$$q = Ze$$

où Z est un entier relatif et

$$e = 1,6 \cdot 10^{-19} C$$

le coulomb étant l'unité de la charge.

La charge est une grandeur **conservative** : la charge totale d'un système fermé est constante au cours du temps.

La charge totale d'un système ne dépend pas du référentiel dans lequel on la mesure (principe d'**invariance** de la charge).

2.1.2 Distributions de charges

Distribution volumique

L'approximation des milieux continus permet de définir une **densité volumique de charge** ou **charge volumique** :

$$\rho = \frac{dq}{d\tau}$$

où $dq = \sum q_i$ est la charge contenue dans le volume $d\tau$ petit à l'échelle macro et grand à l'échelle micro :

$$\boxed{dq = \rho d\tau}$$

Distribution surfacique

Si une des 3 dimensions est négligeable par rapport aux deux autres, on peut définir une **densité surfacique de charge** ou **charge surfacique** :

$$\boxed{dq = \rho h dS = \sigma dS}$$

Distribution linéique

Si deux des 3 dimensions sont négligeables par rapport à la troisième, on peut définir une **densité linéique de charge** ou **charge linéique** :

$$\boxed{dq = \lambda dl}$$

2.2 Exercices :

EXERCICE 01 :

1. On frotte une tige en plastique avec un tissu en coton ou avec une fourrure et on l'approche (sans toucher) d'une petite sphère d'un pendule électrostatique. Le pendule est attiré. On remarque aussi que l'effet d'attraction diminue en éloignant la tige de la sphère. Commenter.
2. Donner une explication physique au phénomène d'attraction entre la tige et la sphère.
3. Peut-on considérer l'ensemble constitué de la tige en plastique et le tissu en coton comme un système isolé (lors du frottement) ? Justifier.
4. En approchant une tige de verre de la même sphère, celle-ci s'attire vers la tige ; alors qu'en présence d'une tige métallique la sphère reste immobile. Expliquer.
5. On rapproche deux sphères en plastique préalablement frottées par le même tissu de coton. Elles se repoussent. Pourquoi ?
6. On frotte une tige d'ambre avec un morceau de laine ou de soie puis on le met en contact avec une sphère en plastique. On frotte une deuxième tige d'ambre avec un matériau en celluloïd, puis on le met en contact avec la deuxième sphère ; celles-ci s'attirent. Commenter.

corrigé page : 34

EXERCICE 02 :

L'électroscope est un appareil qui permet de mettre en évidence qu'un objet est chargé électriquement. Il est constitué d'un plateau relié par un fil conducteur à deux feuilles conductrices de masse très faible. Une boîte métallique avec des fenêtres vitrées (pour l'observation des feuilles) sert d'écran électrostatique et protège les feuilles des courants d'air.

1. On frotte une tige en verre avec de la fourrure puis on la met en contact avec le plateau de l'électroscope ; les deux feuilles s'écartent. Expliquer.
2. On remplace le fil conducteur par un autre isolant puis on refait l'expérience. Que doit-on s'attendre des feuilles ? Expliquer.

On se dispose maintenant de deux boules métalliques de même matière et de mêmes dimensions, mises en contact l'une avec l'autre. On approche des boules une tige en plastique préalablement frottée.

3. Que va-t-il se passer au niveau des boules ? Expliquer.
4. Tout en gardant la tige à sa position, les boules sont maintenant écartées. Décrire la situation physique actuelle des boules.
5. Proposer une procédure expérimentale permettant de vérifier vos conclusions en utilisant l'électroscope.

corrigé page : 34

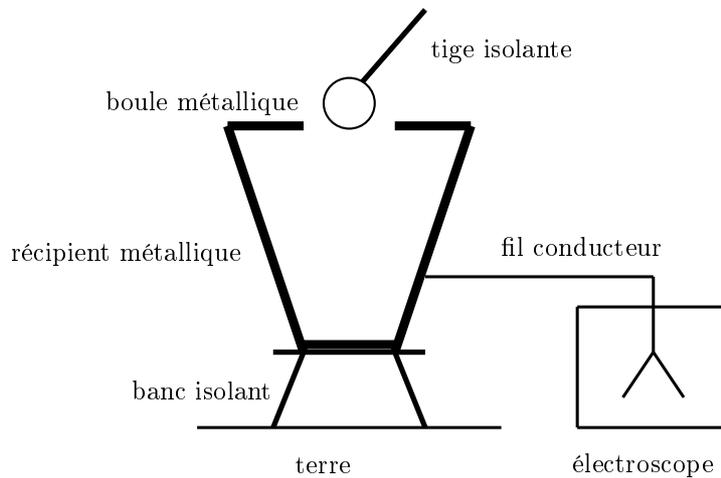
EXERCICE 03 :

Dans ce qui suit on utilisera un récipient métallique isolé de la terre et dont la surface extérieure est reliée par un fil conducteur à un électroscope. Une ouverture sur la face supérieure du récipient sert à introduire une tige isolante à laquelle est attachée une boule métallique (voir figure ci-dessous).

1. Quel intérêt à isoler le récipient de la terre ?
2. On charge positivement la boule puis on l'introduit (sans contact) dans le récipient, les feuilles métalliques de l'électroscope s'écartent. Expliquer.
3. On met en contact la boule avec la surface intérieure du récipient, les feuilles de l'électroscope restent toujours écartées. Expliquer.
4. La boule est retirée du récipient puis mise en contact avec un autre électroscope, les feuilles de ce dernier ne s'écartent pas. Expliquer.
5. Pendant ce temps les feuilles de l'électroscope relié à la surface extérieure du récipient restent toujours écartées. Expliquer.
6. En rechargeant positivement la boule puis en l'introduisant de nouveau dans le récipient (sans contact), les feuilles métalliques de l'électroscope s'écartent de plus en plus. Expliquer.

N.B : cette expérience, connue dans la littérature anglo-saxonne sous le nom de Faraday's "Ice-pail" experiment, a été montée pour la première fois en 1843 par Michael Faraday.

corrigé page : 35

**EXERCICE 04 :**

Quatre charges $q_1 = q$, $q_2 = 2q$, $q_3 = 3q$ et $q_4 = 4q$ sont placées aux sommets d'un carré de côté $2a = 2.0 \times 10^{-9} \text{ m}$. On donne $q = +1.0 \times 10^{-9} \text{ C}$.

1. calculer le moment dipolaire, au centre du carré, des quatre charges.
2. en déduire le barycentre de cet ensemble de charges.
3. quelle serait l'expression du moment dipolaire si les charges avaient les mêmes valeurs ?
4. calculer le moment dipolaire d'une distribution linéique uniforme de charge répartie selon un arc de cercle d'angle 2α au centre O du cercle générateur de rayon R . Cas d'un demi-cercle.
5. en déduire la position du barycentre de cette distribution.

corrigé page : 35

EXERCICE 05 :

Un segment porte une charge non uniforme dont la charge linéique varie spatialement selon :

$$\lambda(x) = \lambda_0 \left[1 - \cos\left(\pi \frac{x}{a}\right) \right] \quad \text{pour} \quad -\frac{a}{2} \leq x \leq \frac{a}{2}$$

Ailleurs, le fil n'est pas chargé. Calculer la charge portée par le fil et sa charge linéique moyenne λ_m . corrigé page : 37

EXERCICE 06 :

La densité de charge surfacique $\sigma(r)$ d'une charge répartie sur un disque de centre O et de rayon R est donnée par :

$$\sigma(r) = \sigma_0 \frac{r^2}{R^2} \quad \text{avec} \quad 0 \leq r \leq R$$

σ_0 étant une charge surfacique constante et r la distance qui sépare le point considéré de O .

Calculer la charge totale sur la surface du disque en utilisant les coordonnées polaires.

corrigé page : 37

EXERCICE 07 :

Une sphère de rayon R est chargée électriquement avec une charge surfacique $\sigma_0 \cos \theta$, θ étant l'angle que fait un rayon avec l'axe polaire de la sphère.

1. calculer la charge de la calotte sphérique $0 \leq \theta \leq \alpha$.
2. en déduire la charge surfacique moyenne d'une calotte demi-sphérique.
3. calculer le moment dipolaire de cette charge sur la demi-sphère au centre O de la sphère génératrice.

4. en déduire la position de son barycentre.
On donne : $R = 5 \text{ mm}$, $\sigma_0 = 0.26 \text{ C.m}^{-2}$.

corrigé page : 39

EXERCICE 08 :

Un modèle simple du noyau atomique consiste à admettre que les Z protons et les A nucléons qui le composent sont uniformément repartis en volume.

1. montrer que le rayon du noyau s'écrit :

$$R = R_0 A^{\frac{1}{3}}$$

R_0 étant le rayon d'un nucléon.

2. quelle est sa charge volumique ρ ? Calculer sa valeur dans le cas du carbone sachant que $R_0 = 1.2 \text{ fm}$.

corrigé page : 39

2.3 corrigés :

EXERCICE 01 :

1. Un pendule électrostatique est composé d'une sphère métallique (ou même une boule recouverte par de l'aluminium) attachée à un fil de masse négligeable. En approchant la tige de la sphère, celle-ci s'attire vers la tige. Il s'agit d'une action à distance entre la tige et la sphère, qui dépend de leur distance mutuelle.
2. En frottant une tige avec du tissu des électrons passent du tissu vers la tige ou le contraire. Ceci est un transfert de charges. Initialement neutres, c'est à dire que le nombre de charges positives est égal au nombre de charges négatives, une substance (tissu ou tige) va perdre des électrons et devient positivement chargée, car elle a reçu un surplus de charges qui va s'accumuler sur sa surface. Les deux corps sont donc électrisés. Dans ce processus, la charge totale est conservée. Il n'y a ni création ni destruction de charges. D'autre part, le sphère est aussi électriquement neutre : elle n'est pas chargée. Toutefois, constituée d'atomes, elle possède des charges négatives et positives en quantités égales. Lorsqu'on approche un corps chargé, les positions des charges sont légèrement modifiées. Par exemple, si on approche une tige en plastique chargée négativement par frottement avec un morceau de tissu pur coton, des charges positives sont attirés tandis que des charges négatives sont repoussées. Les charges positives sont alors plus proches de la règle que les charges négatives. Comme l'intensité de la force électrique décroît avec la distance, l'attraction l'emporte sur la répulsion.
3. On ne peut pas considérer l'ensemble constitué de la tige en plastique et le tissu en coton comme un ensemble isolé, car en frottant, certaines charges vont passer vers notre corps, et de là vers la terre.
4. La tige de verre se charge positivement (elle perd des électrons) par frottement avec de la laine ou de la soie. Cette fois-ci les charges positives de la tige de verre sont plus proches des charges négatives de la sphère et l'attraction l'emporte encore. Dans le cas d'une tige métallique, les électrons qui sont excités par frottement ne se maintiennent pas à la surface du corps, comme le font les électrons des tiges en verre ou en plastique, car dans un métal les électrons excités sont libres à se mouvoir dans tout les corps et ne s'accumulent jamais sur la surface. Ce sont là des conducteurs. Alors que pour les tiges de verre ou en plastique, appelés isolants, les électrons se maintiennent (restent confinés) sur la surface et permettent donc le phénomène d'attraction. La différence entre les deux types de matériaux est dans la mobilité des charges.
5. En rapprochant deux sphères en plastique préalablement frottées par le même tissu de coton, elles se repoussent. Ceci est dû au fait qu'elles sont chargées par le même type de charges (positives ou négatives). Deux charges de même type se repoussent, alors que deux charges de types différents s'attirent.
6. Mis en contact, deux corps frottés se chargent d'électricité de signes contraires. Les électrons des couches externes des atomes étant les charges les moins liées, il y a un transfert d'électrons d'une conifères, et utilisée dans la fabrication d'objets ornementaux. Son nom provient de l'arabe anbar, alors que son appellation grecque *elektron* est à l'origine du terme *électricité*), frottée avec de la laine ou du soie se charge négativement, tandis que, frottée avec un matériau en celluloïd (matière plastique utilisée dans la fabrication de manches de couteaux, de touches de piano, de barrettes, de peignes, de billes de billard...) elle se charge positivement.

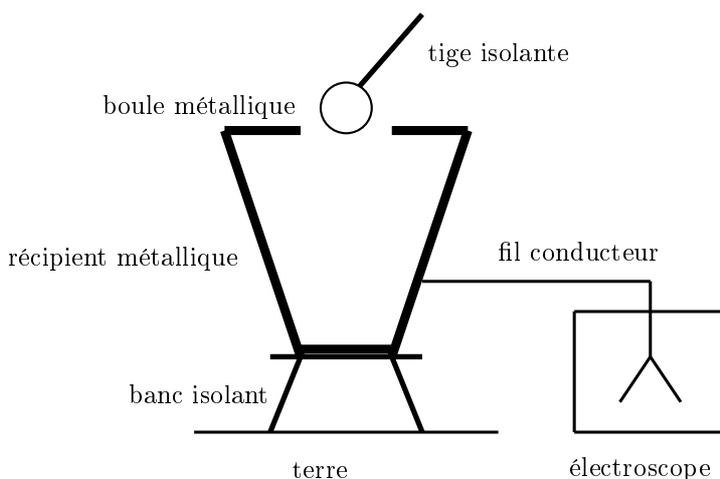
EXERCICE 02 :

1. En frottant une tige en verre avec de la fourrure, celle-là se chargera soit négativement (en recevant un surplus de charges négatives en provenance de la fourrure) soit positivement (en cédant des charges électriques à la fourrure). En mettant la tige en contact avec le plateau conducteur, les charges négatives - par exemple- vont se déplacer (transfert de charges) vers le plateau et de là vers les feuilles conductrices à travers le fil conducteur (les charges électriques dans un conducteur ont une grande mobilité). Les feuilles auront donc un surplus de charges négatives sur leurs surfaces. Les charges négatives sur les feuilles se repoussent donc, créant ainsi une force mécanique qui fait que les feuilles, de par leur légèreté, s'écartent (voir figure ci-dessus).
2. En remplaçant le fil conducteur par un autre fil isolant, il n'y a aucune possibilité pour les charges de passer du plateau vers les feuilles ou l'inverse, car les électrons dans un isolant sont fortement liés aux atomes (mobilité très faible), contrairement à un conducteur où les électrons de valence (couches supérieures) sont libres de se mouvoir dans le matériau.
3. Si on approche une tige en plastique chargée, par exemple, positivement de deux boules métalliques mises en contact entre elles, des charges négatives dans les deux boules (qui constituent un seul système) vont se rapprocher de la tige, car attirées par les charges positives sur la tige, laissant derrière elles des régions qui manquent de charges négatives, donc chargées positivement (phénomène d'induction). Par conséquent, la boule à gauche (la plus proche de la tige) sera chargée négativement, avec un surplus égal de charges.
4. Une fois les boules écartées, on obtient un système avec deux boules : l'une chargée positivement et l'autre chargée négativement en quantité de charges égales. On vient de fabriquer un dipôle électrique (deux charges de polarités différentes).

- On met en contact la boule métallique à gauche en contact avec le plateau de l'électroscope, les feuilles de l'électroscope vont s'écarter puisque des charges négatives transférées depuis la boule s'y installent. Maintenant, si on met en contact la boule à droite avec l'électroscope dont les feuilles sont déjà chargées négativement, celles-ci reviennent à leurs positions initiales car les charges négatives des feuilles sont attirées par les charges positives de la boule. La force de répulsion n'existe plus entre les deux feuilles de l'électroscope.

EXERCICE 03 :

- Le récipient métallique est mis sur un banc isolant (mobilité faible des charges électriques au sein de l'isolant) afin d'éviter que des charges électriques sur le récipient passent vers la terre ; celle-ci étant un objet (corps) parfaitement conducteur.
- Une fois la boule métallique positivement chargée est introduite dans le récipient (sans contact), les charges négatives de ce dernier vont être attirées par les charges positives sur la boule (une charge positive est en fait une charge négative qui a déserté sa position !) Elles vont donc s'accumuler sur la surface intérieure du récipient, laissant derrière elles des " endroits " sans charges négatives (donc des charges positives). Puisque l'électroscope est relié par un fil conducteur à la surface externe du récipient des charges négatives des feuilles vont elles aussi être attirées par les charges positives sur la boule, les feuilles de l'électroscope se chargent donc positivement ; ce qui fait qu'elles s'écartent.
- En mettant en contact la boule chargée positivement (manque de charges négatives) et la surface externe du récipient, sur laquelle sont accumulées des charges négatives, celles-ci vont passer vers la boule pour combler le manque de charges sur la boule. Les charges positives sur la face externe du récipient restent sur leurs positions, et les feuilles de l'électroscope restent écartées.
- Après avoir mis en contact la boule chargée positivement au récipient, les charges négatives " arrachées " au récipient vont " s'installer " sur la boule, et celle-ci devient de nouveau neutre. En mettant donc cette boule en contact avec un autre électroscope, les feuilles de celui-ci ne s'écartent pas, car ne recevant pas de charges de la boule.
- En retirant la boule du récipient, les charges positives sont toujours sur la surface extérieure du récipient. Les feuilles restent donc écartées. On vient de charger positivement le récipient par contact avec une boule métallique chargée positivement.
- En rechargeant positivement la boule puis en l'introduisant de nouveau dans le récipient (sans contact), les charges négatives du récipient, mais aussi celles sur les feuilles de l'électroscope vont être attirées vers la boule (sur la surface externe du récipient). La quantité de charges positives sur les feuilles augmente, entraînant ainsi une augmentation de la force électrostatique entre les deux charges positives sur les deux feuilles. Celles-ci s'écartent davantage. C'était-là l'idée de base des premiers moteurs électrostatique, remplacés depuis par les piles de volta.



EXERCICE 04 :

Si un objet possède une charge électrique totale nulle, il serait utile de définir une grandeur physique qui décrit la disposition des charges dans l'espace (c'est l'idée même du moment d'inertie d'un corps rigide). On définit donc

le dipôle électrostatique d'une distribution de charges dans l'espace, représenté mathématiquement par son moment dipolaire. Ce dernier, noté par \vec{p} , est donné par la formule :

$$\vec{p} = \sum_i q_i \vec{r}_i$$

q_i étant la charge à la position \vec{r}_i , défini par rapport à une origine de coordonnées. Le moment dipolaire joue un rôle important en électromagnétisme car il permet souvent de décrire le comportement, à grande distance, d'une distribution quelconque de charges.

1. Les vecteurs positions des charges par rapport au centre O d'un carré de côté $2a$ sont donnés par :

$$\vec{r}_1 = a\vec{i} + a\vec{j}, \vec{r}_2 = a\vec{i} - a\vec{j}, \vec{r}_3 = -a\vec{i} - a\vec{j}, \vec{r}_4 = -a\vec{i} + a\vec{j}$$

avec

$$\vec{p} = q_1 \vec{r}_1 + q_2 \vec{r}_2 + q_3 \vec{r}_3 + q_4 \vec{r}_4 = -4qa\vec{i} = -4 \times 10^{-18} C.m\vec{i}$$

2. Le barycentre est une notion permettant de déterminer une position (ou même une valeur) qui peut remplacer à elle seule une répartition dans l'espace (géométrique ou de valeurs) de masses, de charges ou de valeurs. En physique le barycentre est lui-même le centre de masse. On empreinte cette notion pour calculer le centre de charge d'un ensemble de charges réparties dans l'espace. Ce dernier est défini par :

$$\vec{OB} = \frac{\sum_i q_i \vec{r}_i}{\sum_i q_i} = \frac{\vec{p}}{Q}$$

Q étant la somme algébrique des charges, égale, dans ce cas, à $Q = 1 \times 10^{-8} C$. La position du barycentre est donnée par le vecteur- position :

$$\vec{OB} = -4 \times 10^{-10} m\vec{i}$$

3. Si les charges avaient les mêmes valeurs, le moment dipolaire aura une valeur nulle. On peut raisonner en utilisant la symétrie du problème. Puisque les charges sont les mêmes, on peut les sortir de la somme. On doit donc calculer la résultante des 4 vecteurs. En effet, la résultante des deux vecteurs $\vec{r}_1 = a\vec{i} + a\vec{j}$ et $\vec{r}_2 = a\vec{i} - a\vec{j}$ est suivant \vec{i} avec un module égal à $2a$, alors que la résultante des vecteurs $\vec{r}_3 = -a\vec{i} - a\vec{j}$ et $\vec{r}_4 = -a\vec{i} + a\vec{j}$ est suivant $-\vec{i}$ avec un module égal à $2a$. La résultante est donc nulle, ce qui donne un moment dipolaire nul. par conséquent, le barycentre du système de charges est en O .
4. Dans le cas d'une distribution continue, le moment dipolaire est donné par :

$$\vec{p} = \int \lambda(\vec{r}) \vec{r} d\ell \quad \text{pour une distribution linéique,}$$

$$\vec{p} = \int \sigma(\vec{r}) \vec{r} dS \quad \text{pour une distribution surfacique}$$

et

$$\vec{p} = \int \rho(\vec{r}) \vec{r} dV \quad \text{pour une distribution volumique}$$

Dans notre cas, la charge est distribuée sur un arc d'un cercle d'angle 2α , d'où :

$$\vec{p} = \int \lambda(\vec{r}) \vec{r} d\ell$$

$d\ell$ étant un élément infinitésimal de l'arc égal à $d\ell = R d\theta$, avec θ allant de $-\alpha$ vers α , R le rayon du cercle auquel appartient l'arc, $\lambda(\vec{r})$ la distribution linéique de la charge sur la charge et \vec{r} le vecteur position d'une charge infinitésimale sur l'arc $dq = \lambda(\vec{r}) d\ell$. On obtient donc

$$\vec{p} = \int_{-\alpha}^{\alpha} \lambda(\vec{r}) \vec{r} R d\theta$$

Puisque la distribution des charges sur l'arc est uniforme, on peut écrire $\lambda(\vec{r}) = \lambda_0$. En remplaçant dans l'intégrale ci-dessus, on trouve

$$\vec{p} = \lambda_0 \int_{-\alpha}^{\alpha} \vec{r} R d\theta$$

Définissons tout d'abord la direction du vecteur \vec{p} . En effet, en utilisant la symétrie du problème, et en se basant sur l'argument fait il est évident que le vecteur \vec{p} est dirigé du centre du cercle O vers le centre de l'arc ($\alpha = 0$),

pris suivant le vecteur unité \vec{j} . En calculant l'intégrale, on ne fait que sommer les composantes suivant l'axe des y , données par $y = R \cos \theta$, des vecteurs position des charges infinitésimales sur l'arc. L'intégrale devient donc :

$$\vec{p} = \left[\lambda_0 \int_{-\alpha}^{\alpha} R \cos \theta R d\theta \right] \vec{j} = \left[R^2 \lambda_0 \int_{-\alpha}^{\alpha} \cos \theta d\theta \right] \vec{j} = 2R^2 \lambda_0 \sin \alpha \vec{j}$$

Dans le cas d'un demi cercle, $\alpha = \frac{\pi}{2}$, d'où :

$$\vec{p} = 2R^2 \lambda_0 \vec{j}$$

5. Le barycentre de cette distribution est repéré par le vecteur

$$\overrightarrow{OB} = \frac{\vec{p}}{Q} = \frac{2R^2 \lambda_0 \vec{j}}{\pi R \lambda_0} = \frac{2R}{\pi} \vec{j}$$

EXERCICE 05 :

Un segment porte une charge non uniforme dont la charge linéique varie spatialement selon :

$$\lambda(x) = \lambda_0 \left[1 - \cos \left(\pi \frac{x}{a} \right) \right] \quad \text{pour} \quad -\frac{a}{2} \leq x \leq \frac{a}{2}$$

La charge totale sur la partie du fil est donnée par :

$$Q = \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \lambda(x) dx = \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \lambda_0 \left[1 - \cos \left(\pi \frac{x}{a} \right) \right] dx = \lambda_0 \left[x - \frac{a}{\pi} \sin \left(\pi \frac{x}{a} \right) \right]_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} = \lambda_0 \left(a - 2 \frac{a}{\pi} \right)$$

EXERCICE 06 :

1. En coordonnées polaires, la surface élémentaire s'écrit comme :

$$dS = r dr d\theta$$

La charge totale sur le disque est donnée par :

$$Q = \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \sigma(\vec{r}) dS = \frac{\sigma_0}{R^2} \int_0^R r^3 dr \int_0^{2\pi} d\theta = \frac{\pi}{2} \sigma_0 R^2$$

2. En coordonnées cartésiennes, la charge totale sur le disque est donnée par :

$$Q = \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \sigma(\vec{r}) dS = \frac{\sigma_0}{R^2} \int_{-R}^R \left[\int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} (x^2 + y^2) \right] dx$$

où on a pris le centre du disque comme origine du système d'axes en coordonnées cartésiennes. Calculons l'intégrale

$$\frac{\sigma_0}{R^2} \int_{-R}^R \left[\int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} (x^2 + y^2) \right] dx = \left[x^2 y + \frac{1}{3} y^3 \right]_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} = 2x^2 (\sqrt{R^2-x^2}) + \frac{2}{3} (R^2-x^2)^{\frac{3}{2}}$$

L'expression de la charge devient

$$Q = \frac{\sigma_0}{R^2} \int_{-R}^R \left[2x^2 (\sqrt{R^2-x^2}) + \frac{2}{3} (R^2-x^2)^{\frac{3}{2}} \right] dx$$

ou encore

$$Q = \frac{\sigma_0}{R^2} \left[2 \int_{-R}^R 2x^2(\sqrt{R^2 - x^2})dx + \frac{2}{3} \int_{-R}^R (R^2 - x^2)^{\frac{3}{2}} dx \right]$$

Posons

$$I = \int_{-R}^R 2x^2(\sqrt{R^2 - x^2})dx \quad \text{et} \quad II = \int_{-R}^R (R^2 - x^2)^{\frac{3}{2}} dx$$

Ce qui permet d'écrire

$$Q = \frac{\sigma_0}{R^2} \left[2I + \frac{2}{3}II \right]$$

Pour calculer l'intégrale I , on doit faire le changement de variable

$$\frac{x}{R} = \sin t \quad \text{avec} \quad dx = R \cos t dt$$

ce qui mène à écrire

$$I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (R^2 \sin^2 t)^2 R \left(1 - \left(\frac{x}{R}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} R \cos t dt = R^4 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t (1 - \sin^2 t)^{\frac{1}{2}} \cos t dt = R^4 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t \cos^2 t dt$$

Ce qui peut s'écrire encore sous la forme

$$I = R^4 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{(1 - \cos 2t)(1 + \cos 2t)}{2} dt = \frac{R^4}{4} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos^2 2t) dt$$

ou encore

$$I = \frac{R^4}{4} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{2 - 1 - \cos 4t}{2}\right) dt = \frac{R^4}{8} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos 4t) dt$$

Ce qui donne

$$I = \frac{R^4}{8} \left[t - \frac{1}{4} \sin 4t \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi R^4}{8}$$

Calculons maintenant l'intégrale

$$II = \int_{-R}^R (R^2 - x^2)^{\frac{3}{2}} dx$$

Pour cela on doit faire le changement de variable suivant :

$$\frac{x}{R} = \sin t \quad \text{avec} \quad dx = R \cos t dt$$

d'où

$$II = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} R^3 \left(1 - \left(\frac{x}{R}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}} R \cos t dt = R^4 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^2 t)^{\frac{3}{2}} \cos t dt = R^4 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 t dt$$

Après calcul, on obtient

$$II = \frac{3\pi R^4}{8}$$

ce qui donne

$$Q = \frac{\sigma_0}{R^2} \left[2 \frac{\pi R^4}{8} + \frac{2}{3} \frac{3\pi R^4}{8} \right] = \frac{\sigma_0 \pi R^2}{2}$$

EXERCICE 07 :

1. La surface infinitésimale d'une sphère de rayon R est donnée par :

$$dS_R = R d\theta R \sin \theta d\varphi$$

avec, dans ce cas, θ allant de 0 à α et φ de 0 à 2π . La charge de la calotte sphérique s'obtient donc intégrant sur la surface :

$$Q = \iiint \sigma(\vec{r}) dS = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\alpha \sigma_0 \cos \theta R^2 \sin \theta d\theta = 2\pi R^2 \sigma_0 \int_0^\alpha \sin \theta d(\sin \theta)$$

ce qui donne

$$Q = 2\pi R^2 \sigma_0 \sin^2 \alpha$$

2. La charge d'une sphère est donc égale à

$$Q = 2\pi R^2 \sigma_0 \sin^2 \frac{\pi}{2} = 2\pi R^2 \sigma_0$$

3. La charge surfacique moyenne d'une demi-sphère est donc égale à

$$\sigma_m = \frac{Q}{2\pi R^2} = \frac{2\pi R^2 \sigma_0}{2\pi R^2} = \frac{\sigma_0}{2}$$

4. Le moment dipolaire, par rapport à l'origine, d'une distribution surfacique est donné par :

$$\vec{p} = \int \sigma(\vec{r}) \vec{r} dS$$

La symétrie du problème fait que le vecteur \vec{p} soit dirigé du centre de la sphère génératrice de la demi-sphère vers un point sur la surface représentée par $\theta = 0$, c'est à dire suivant l'axe des z (à savoir \vec{k}); suivant \vec{k} est $R \cos \theta$, la base de la demi-sphère étant dans le plan Oxy . La composante du vecteur \vec{r} de charges est donné par : d'où :

$$\vec{p} = R^3 \sigma_0 \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \theta \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \right] \vec{k} = -2\pi R^3 \sigma_0 \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \theta d(\cos \theta) \right] \vec{k} = 2\pi R^3 \sigma_0 \vec{k}$$

5. Le barycentre de cette charge est donné par :

$$\vec{OB} = \frac{\vec{p}}{Q} = \frac{2\pi R^3 \sigma_0 \vec{k}}{2\pi R^2 \sigma_0} = \frac{R}{3} \vec{k}$$

EXERCICE 08 :

1. Comme les nucléons sont uniformément répartis, on a

$$\frac{4}{3}\pi R^3 = A v_n$$

où v_n désigne le volume d'un nucléon. Il en résulte que

$$R = \left(\frac{3v_n}{4\pi} \right)^{\frac{1}{3}} \times A^{\frac{1}{3}} = R_0 A^{\frac{1}{3}}$$

R_0 étant le rayon d'un nucléon.

2. la charge volumique ρ s'obtient alors aisément :

$$\rho = \frac{Ze}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{3Ze}{4\pi R_0^3 A} = 1.33 \times 10^{25} C.m^{-3}$$

puisque $Z = 6$, $A = 12$ et $R_0 = 1.2 fm$ (fm :femtomètre = $10^{-15} m$)

Chapitre 3

Champ électrostatique

Sommaire

3.1	Rappel :	42
3.2	Champ électrostatique	42
3.2.1	Loi de Coulomb	42
3.2.2	Champ d'une charge ponctuelle	42
3.2.3	Principe de superposition	42
3.2.4	Champ d'une distribution	42
3.2.5	Lignes de champ	43
3.3	Invariances et symétries	43
3.3.1	Invariances des distributions de charges	43
3.3.2	Plan de symétrie et plan d'antisymétrie	43
3.3.3	Conséquences pour le champ électrostatique	43
3.4	Exercices :	44
3.5	corrigés :	46

3.1 Rappel :

3.2 Champ électrostatique

3.2.1 Loi de Coulomb

Soit q_1 en M_1 et q_2 en M_2

$$\mathbf{F}_{1 \rightarrow 2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{M_1 M_2^2} \frac{\mathbf{M}_1 \mathbf{M}_2}{M_1 M_2}$$

avec $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9 \cdot 10^9 \text{ SI}$

3.2.2 Champ d'une charge ponctuelle

Soit q en O et q' en M

$$\mathbf{F}_{q \rightarrow q'} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq'}{OM^2} \frac{\mathbf{OM}}{OM} = q' \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{OM}}{OM^3} = q' \mathbf{E}_q(M)$$

où

$$\mathbf{E}_q(M) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{OM}}{OM^3}$$

est le champ créé par la charge q en M .

3.2.3 Principe de superposition

Soit q_1 en O_1 , q_2 en O_2 , q_3 en $O_3 \dots$. De l'addition vectorielle des forces découle le principe de superposition des champs :

$$\mathbf{E}(M) = \sum_i \mathbf{E}_i(M) = \sum_i \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{O}_i \mathbf{M}}{O_i M^3}$$

En particulier, la force avec laquelle interagissent deux charges n'est pas modifiée par la présence d'une troisième charge.

3.2.4 Champ d'une distribution

On découpe la distribution en morceaux assez petits pour pouvoir considérer que la charge dq du morceau est localisée au point P ; cette charge crée alors un champ :

$$\mathbf{E}(M) = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{PM}}{PM^3}$$

Le champ créé par la distribution est alors la somme des champs créés par les morceaux ; la distribution étant continue, on remplace la somme par une intégrale

$$\mathbf{E}(M) = \int \frac{dq}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{PM}}{PM^3}$$

pour une distribution volumique :

$$\mathbf{E}(M) = \int \frac{\rho(P) d\tau}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{PM}}{PM^3}$$

pour une distribution surfacique :

$$\mathbf{E}(M) = \int \frac{\sigma(P) dS}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{PM}}{PM^3}$$

pour une distribution linéique :

$$\mathbf{E}(M) = \int \frac{\lambda(P) dl}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{PM}}{PM^3}$$

3.2.5 Lignes de champ

Une **ligne de champ** est tangente en chacun de ses points M au champ $\mathbf{E}(M)$.

Elle vérifie les propriétés suivantes :

1. Les lignes de champ électrostatique divergent à partir des charges positives et convergent vers les charges négatives.
2. Lorsqu'il est défini, le champ électrostatique est nul au point d'intersection de deux lignes de champ (deux lignes de champ ne peuvent donc se couper que si $\mathbf{E}(M) = 0$ ou $\mathbf{E}(M)$ non défini).
3. Les lignes de champ électrostatique d'une distribution
 - partent à l'infini si la distribution est globalement positive
 - proviennent de l'infini si la distribution est globalement négative
 - n'aboutissent ni ne proviennent de l'infini si la distribution est globalement neutre

3.3 Invariances et symétries

3.3.1 Invariances des distributions de charges

Une distribution, illimitée dans la direction de l'axe Δ , est **invariante par translation** suivant Δ si, pour tout point M et son translaté M' , sa densité de charge vérifie $\rho(M) = \rho(M')$.

exemple : distribution invariante par translation suivant Oz

$$\rho(r, \theta, z) = \rho(r, \theta)$$

Une distribution, est **invariante par rotation** autour d'un axe Δ si, pour tout point M et M' obtenu après rotation, sa densité de charge vérifie $\rho(M) = \rho(M')$.

exemple : distribution invariante par rotation autour d'un axe Oz

$$\rho(r, \theta, z) = \rho(r, z)$$

Une distribution à **symétrie cylindrique** est telle que :

$$\rho(r, \theta, z) = \rho(r)$$

(invariance par rotation autour de Oz et invariance par translation suivant Oz)

Une distribution à **symétrie sphérique** est telle que :

$$\rho(r, \theta, \varphi) = \rho(r)$$

(invariance par rotation autour de \mathbf{e}_φ et invariance par rotation autour de Oz)

3.3.2 Plan de symétrie et plan d'antisymétrie

Une distribution est symétrique par rapport à un plan Π si, pour tout point M il existe un symétrique M' , et si sa densité de charge vérifie :

$$\rho(M) = \rho(M')$$

Une distribution est antisymétrique par rapport à un plan Π^* si, pour tout point M il existe un symétrique M' , et si sa densité de charge vérifie :

$$\rho(M) = -\rho(M')$$

3.3.3 Conséquences pour le champ électrostatique

Nous généralisons les observations des cartes de champ :

\mathbf{E} est transformé en son symétrique par un plan Π

$$\mathbf{E}(M') = \text{sym } \mathbf{E}(M)$$

d'autre part :

$$\boxed{\mathbf{E}(M \in \Pi) \in \Pi}$$

\mathbf{E} est transformé en son antisymétrique par un plan Π^*

$$\mathbf{E}(M') = -\text{sym } \mathbf{E}(M)$$

$$\boxed{\mathbf{E}(M \in \Pi^*) \perp \Pi^*}$$

D'autre part, le champ électrostatique (effet) possède au moins les invariances des distributions de charges (cause).

3.4 Exercices :

EXERCICE 01 :

Calculer le rapport entre la force de répulsion électrique et la force de gravitation attractive entre deux particules α . On rappelle que la particule α a la structure du noyau de l'atome de Hélium avec une masse $m = 6.64 \times 10^{-27} \text{ kg}$ et une charge $q = +2e = 3.2 \times 10^{-19} \text{ C}$. Commenter. **corrigé page : 46**

EXERCICE 02 :

Aux deux extrémités d'un fil de longueur $l = 2 \text{ m}$, sont attachés deux ballons sphériques gonflés avec de l'hélium (l'hélium étant plus léger que l'air), et portent la même charge $+q$. On suspend au milieu du fil une masse $m = 5 \text{ g}$. Le système abandonné à lui-même dans l'atmosphère occupe alors une position d'équilibre stable dans un même plan vertical, telle que chaque moitié du fil fait un angle $\alpha = \frac{\pi}{4} \text{ rad}$ avec l'horizontale. En négligeant les masses du fil et des ballons, calculer la valeur de la charge q sur les ballons. **corrigé page : 47**

EXERCICE 03 : (Expérience de Millikan)

Une minuscule goutte d'huile électrisée est pulvérisée entre deux armatures métalliques entre lesquelles règne un champ électrique uniforme E . En utilisant une modélisation simple des forces agissant sur la goutte :

1. écrire l'équation différentielle du mouvement de la goutte.
2. en supposant la vitesse initiale nulle, écrire l'expression de la vitesse de la goutte.
3. en déduire la vitesse limite de la goutte en fonction de l'intensité du champ E .
4. la viscosité de l'air étant $\eta = 1.8 \times 10^{-5} \text{ Pa}\cdot\text{s}$ et le rayon de la goutte $r = 2 \mu\text{m}$, l'expérience donne pour un champ nul une vitesse limite $v = 0.392 \text{ mm}\cdot\text{s}^{-1}$ et pour un champ $E = 28 \text{ kV}\cdot\text{m}^{-1}$ une vitesse $v = 0.458 \text{ mm}\cdot\text{s}^{-1}$. Calculer la charge de la goutte.

corrigé page : 48

EXERCICE 04 :

1. tracer l'allure du champ électrique créé par une charge ponctuelle placée à l'origine O .
2. établir l'équation des lignes du champ électrique.
3. calculer la densité des lignes sur la surface d'une sphère en fonction de son rayon.

corrigé page : 50

EXERCICE 05 :

1. établir l'expression du champ électrostatique créé par deux charges ponctuelles identiques, situées respectivement aux points de coordonnées cartésiennes $(0, 0, a)$ et $(0, 0, -a)$.
2. en déduire l'expression du champ électrostatique dans le plan Oyz
3. expliciter la composante $E_z(z)$ du champ en fonction de z dans les deux cas suivants : $|z| < a$ et $|z| > a$.

corrigé page : 51

EXERCICE 06 :

On considère une distribution linéique de charge, de densité λ , uniforme sur le cercle d'équations cartésiennes $x^2 + y^2 = R^2$, $z = 0$. Calculer le champ électrostatique créé en un point M de l'axe Oz , de coordonnée z . **corrigé page : 53**

EXERCICE 07 :

Un segment droit de longueur $2L$ porte une distribution de charge linéique, de densité λ , répartie uniformément sur toute sa longueur.

1. calculer le champ électrique produit par ce segment à une distance y sur sa médiatrice.
2. que devient ce champ lorsque $y \gg L$?
3. que devient ce champ dans la limite $L \rightarrow \infty$?
4. exploiter le résultat précédent pour calculer le champ électrique à une distance z du centre d'une boucle carrée de côté a sur laquelle est distribuée uniformément une charge de densité linéique λ .

corrigé page : 54

EXERCICE 08 :

Trouver le champ électrique généré par un disque de rayon R , de densité de charge surfacique uniforme σ , en un point distant de x du centre du disque sur la normale à la surface.

corrigé page : 56

3.5 corrigés :

EXERCICE 01 :

Le rapport entre la force de répulsion électrique et la force de gravitation attractive entre deux particules α est donné par :

$$\frac{F_e}{F_g} = \frac{K \frac{q_\alpha^2}{r^2}}{G \frac{m_\alpha^2}{r^2}}$$

où $K = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$ est une constante de proportionnalité égale à $K = 9 \times 10^9 \text{ N.m}^2.\text{C}^{-2}$ avec ϵ_0 , la permittivité diélectrique du vide égale à $\epsilon_0 \approx 8.85418 \times 10^{-12} \text{ kg}^{-1}.\text{m}^{-3}.\text{A}^2.\text{s}^4$ ou encore Farad.m^{-1} , G la constante gravitationnelle égale à $G = 6.67384 \times 10^{-11} \text{ m}^3.\text{kg}^{-1}.\text{s}^{-2}$, q_α la charge de la particule α égale à $+2e = 3.2 \times 10^{-19} \text{ C}$, m_α la masse de la particule α égale à $6.64 \times 10^{-27} \text{ kg}$ et r la distance entre deux particules α .

Le rapport devient

$$\frac{F_e}{F_g} = \frac{K q_\alpha^2}{G m_\alpha^2} = \frac{9 \times 10^9}{6.67384 \times 10^{-11}} \frac{(3.2 \times 10^{-19})^2}{(6.64 \times 10^{-27})^2} \approx 3.3 \times 10^{35}$$

Comme on peut le constater, la force électrique est très très forte devant la force de gravité. Un particule α va donc acquérir une accélération égale à $a = \frac{F_e}{m_\alpha}$ qui est énorme. Le même raisonnement est valable pour toutes les particules massiques chargées qui constituent la matière. Mais comment avec une telle accélération entre charges la matière arrive toujours à se maintenir. La force de gravité à l'échelle atomique est trop faible pour permettre aux particules de se maintenir contre la force électrique gigantesque. Alors qu'est ce qui fait que les atomes ont toujours cette possibilité de se regrouper dans des structures cristallines ou non ? La réponse réside dans le fait qu'il existe deux types de charges : positives et négatives. Celles de même charge se repoussent et celles de charges différentes s'attirent, contrairement au cas de la gravité où il y a seulement attraction.

R. Feynman expliquait ceci en disant : " *un amas d'éléments positifs se repousserait avec une force énorme et éclaterait dans toutes les directions. Un amas d'éléments négatifs en ferait autant. Mais un mélange égal d'éléments positifs et négatifs ferait quelque chose de tout à fait différent. Les éléments opposés seraient maintenus ensemble par des attractions énormes. Le résultat global serait que les forces terrifiantes s'équilibreraient entre elles presque parfaitement en formant des mélanges fins et serrés d'éléments positifs et négatifs, et entre deux amas d'un tel mélange, il n'y aurait pratiquement pas du tout d'attraction ou de répulsion. L'équilibre est si parfait cependant, que lorsque vous vous tenez près de quelqu'un d'autre, vous ne sentez aucune force. S'il y avait un très léger déséquilibre vous le sauriez. Si vous vous teniez à un bras de distance de quelqu'un et que chacun de vous ait un pour cent d'électrons de plus que de protons, la force de répulsion serait incroyable, suffisante pour soulever la Terre entière !*

Avec des forces aussi énormes et aussi parfaitement équilibrées dans ce mélange intime, il n'est pas difficile de comprendre que la matière, essayant de garder ses charges positives et négatives dans le meilleur équilibre, puisse avoir une grande rigidité et une grande résistance.

D'autre part, le noyau contient plusieurs protons qui sont tous positifs. Pourquoi ne se repoussent ils pas ? Il s'avère que dans le noyau il y a, en plus des forces électriques, des forces non électriques, appelées forces nucléaires, qui sont plus grandes que les forces électriques et qui sont capables de maintenir les protons ensemble malgré la répulsion électrique. Les forces nucléaires, cependant, sont à court rayon d'action - leur intensité décroît beaucoup plus rapidement que $\frac{1}{r^2}$. Et ceci a une conséquence importante. Si un noyau contient trop de protons, il devient gros, rendant l'équilibre si fragile que le noyau est presque prêt à éclater sous l'action de la force électrique de répulsion "

Autre effet de ce mélange de charges positives et charges négatives est le phénomène appelé "écranage" (screening). En effet, la force électrique 'sentie' par les charges au sein d'un gaz ou un conducteur due à la présence d'autre charges n'a plus l'allure en $\frac{1}{r^2}$ mais plutôt en $e^{-r/\lambda}$, λ étant un paramètre dépendant du milieu considéré.

Enfin, on peut résumer tout ça en disant que :

1. les forces nucléaires dominant sur une échelle nucléaire de l'ordre de 10^{-15} m appelé femtomètre. Elles assurent la cohésion des noyaux.
2. les forces électrique dominant sur une échelle de 10^{-10} m appelé Angström. Ce sont ces forces-là qui assurent la cohésion des atomes, des molécules, et partant la matière.
3. les forces magnétiques sont plus faibles que les forces électriques, mais sont dominantes à l'échelle du système solaire.
4. les forces de gravité sont responsable de plusieurs manifestations naturelles : la chute des corps, les marées, l'orbite des planètes autour du Soleil, la sphéricité de la plupart des corps. Elle est dominante à l'échelle des distances astronomiques.

EXERCICE 02 :

La position d'équilibre du système est donnée par

$$\sum F = \sigma$$

où $\sum F = \sigma$ est la somme des forces appliquées séparément sur l'un des objets du problème, à savoir la masse et les deux ballons. Commençant par la masse m . En effet les forces qui s'appliquent sur la masse sont : son poids P les deux tensions des fils T_1 et T_2 , la poussée d'Archimède étant négligeable. Ce qui nous permet d'écrire

$$P + T_1 + T_2 = \sigma$$

Par projection sur l'axe vertical, on tire :

$$2T \sin(\alpha) - P = 0 \quad \Rightarrow \quad T = \frac{P}{2 \sin(\alpha)}$$

Les forces s'appliquant sur l'un des ballons sont : la force électrostatique exercée par le deuxième ballon chargée F , la tension du fil T_1 et la poussée d'Archimède R , puisque le ballon baigne dans l'air.

$$F + T_1 + R = \sigma$$

Par projection sur l'axe horizontal, on tire :

$$F - T \cos(\alpha) = 0 \quad \Rightarrow \quad F = T \cos(\alpha)$$

En combinant les deux équations ci-dessus, on trouve

$$F = \frac{P \cos(\alpha)}{2 \sin(\alpha)} = \frac{P}{2} \cot(\alpha)$$

D'après la loi de Coulomb, la force électrostatique qu'exerce l'un des ballons de charge q sur le deuxième ballon de même charge q séparés par une distance r est donnée par

$$F = K \frac{qq}{r^2}$$

En l'égalant à l'équation ci-dessus, on trouve

$$K \frac{qq}{r^2} = \frac{P}{2} \cot(\alpha)$$

ou encore

$$q = r \sqrt{\frac{P \cot(\alpha)}{2K}}$$

avec

$$r = 2l \cos(\alpha)$$

L'expression de la charge devient donc

$$q = 2l \cos(\alpha) \sqrt{\frac{P \cot(\alpha)}{2K}}$$

En remplaçant dans l'équation ci-dessus par les valeurs numériques suivantes :

$$P = 5 \times 10^{-2} N,$$

$$\cot\left(\frac{\pi}{6}\right) = 1.732,$$

$$K = 9 \times 10^9 N.m^2.C^{-2}$$

et

$$2l \cos(\alpha) = 1.732 m$$

on trouve la valeur numérique de la charge sur un ballon égale à

$$q = 3.8 \times 10^{-6} C = 3.8 \mu C$$

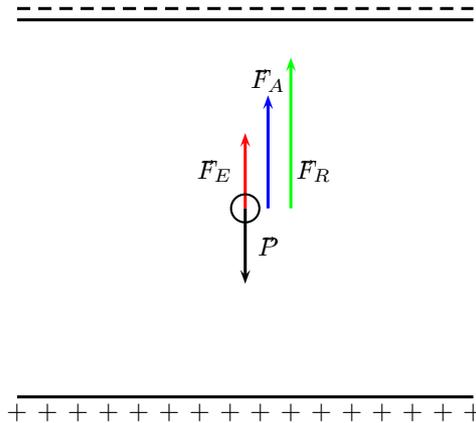


FIGURE 3.1 – Les quatre forces appliquées sur la gouttelette d’huile.

EXERCICE 03 : (Expérience de Millikan)

Dans le cas d’une modélisation simple, une gouttelette d’huile est soumise à quatre forces :

1. son poids : $P = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_h \vec{g}$ où r est le rayon de la gouttelette, ρ_h la masse volumique de l’huile et \vec{g} le vecteur accélération de la pesanteur ;
2. la force électrostatique : $F_E = qE$ avec q la charge de la gouttelette et E le champ entre les armatures ;
3. la poussée d’Archimède : $F_A = -\frac{4}{3}\pi r^3 \rho_a \vec{g}$ avec ρ_a la masse volumique de l’air ;
4. la force de traînée (résistance de l’air) dont l’expression dans le cas de faibles vitesses est donnée par la loi de Stokes : $F_R = -6\pi\eta r \vec{v}$ avec η le coefficient de viscosité de l’air et \vec{v} vecteur vitesse de la gouttelette.

Rappelons que la viscosité est définie comme la résistance à l’écoulement uniforme et sans turbulence se produisant dans la masse d’une matière. Lorsque la viscosité augmente, la capacité du fluide à s’écouler diminue. La viscosité d’un fluide varie en fonction de sa température et des actions mécaniques auxquelles il est soumis.

1. le principe fondamental de la dynamique en projection sur un axe vertical s’écrit donc :

$$m \frac{dv}{dt} = \frac{4}{3}\pi r^3 g(\rho_h - \rho_a) - qE - 6\pi\eta r v$$

Ceci est une équation différentielle linéaire du premier ordre non homogène, qu’on peut la réécrire sous la forme

$$\frac{dv}{dt} = A - Bv$$

ou encore

$$\frac{dv}{dt} + Bv = A$$

avec

$$A = \frac{4}{3m}\pi r^3 g(\rho_h - \rho_a) - \frac{q}{m} E$$

et

$$B = \frac{6\pi\eta r}{m}$$

La solution de l’équation différentielle ci-dessus est la somme de deux solutions :

Solution sans second membre de l’équation

$$\frac{dv}{dt} + Bv = 0$$

et une solution particulière qui aura la forme du second terme, c’est à dire une constante.

En effet,

$$\frac{dv}{dt} + Bv = 0$$

peut se mettre sous la forme

$$\frac{dv}{dt} = -Bv$$

ou encore

$$\frac{dv}{v} = -B dt$$

Après intégration on trouve

$$\ln(v(t)) = -Bt + cste$$

ou encore

$$v(t) = Ce^{-Bt}$$

où C est une constante à définir par les conditions initiales de la vitesse.

D'autre part, la solution particulière est obtenue en remplaçant dans l'équation différentielle générale la fonction vitesse $v(t)$ par une constante, soit :

$$\frac{dD}{dt} + BD = A$$

d'où

$$BD = A$$

,

$$\frac{dD}{dt}$$

étant nul. ce qui donne

$$D = \frac{A}{B}$$

La solution générale s'écrit donc :

$$v(t) = Ce^{-Bt} + \frac{A}{B}$$

ou encore

$$v(t) = Ce^{-\frac{6\pi\eta r}{m}t} + \frac{1}{6\pi\eta r} \left[\frac{4}{3}\pi r^3 g(\rho_h - \rho_a) - qE \right]$$

Par convention, on met $\tau = \frac{m}{6\pi\eta r}$, qui a la dimension d'un temps.

2. en supposant une vitesse initiale nulle, la solution de l'équation donne :

$$v(0) = C + \frac{1}{6\pi\eta r} \left[\frac{4}{3}\pi r^3 g(\rho_h - \rho_a) - qE \right] = 0$$

ou encore

$$C = -\frac{1}{6\pi\eta r} \left[\frac{4}{3}\pi r^3 g(\rho_h - \rho_a) - qE \right]$$

en remplaçant la constante C par son expression dans l'expression de $v(t)$, celle-ci devient

$$v(t) = \frac{1}{6\pi\eta r} \left[\frac{4}{3}\pi r^3 g(\rho_h - \rho_a) - qE \right] (1 - e^{-\tau t})$$

3. La constante du temps τ a un ordre de grandeur très faible; on peut donc admettre que le régime permanent est atteint de façon instantanée. Autrement dit, la gouttelette atteint très vite une vitesse limite ne dépendant plus du temps qui a pour valeur :

$$v_{\text{lim}}(E) = \frac{1}{6\pi\eta r} \left[\frac{4}{3}\pi r^3 g(\rho_h - \rho_a) - qE \right]$$

Soit $v_0 = v_{\text{lim}}(0)$ la vitesse à champ nul ($E = 0$). On peut alors réécrire

$$v_{\text{lim}}(E) = v_0 - \frac{qE}{6\pi\eta r}.$$

4. l'expression de la charge q est donnée par

$$q = \frac{6\pi\eta r(v_0 - v_{\text{lim}}(E))}{E} = \frac{6\pi \cdot 1.8 \times 10^{-5} \cdot 2 \times 10^{-6} (0.392 \times 10^{-3} - 0.458 \times 10^{-3})}{28000} = -\frac{4.4786 \times 10^{-14}}{28000}$$

ou encore

$$q = -15.99 \times 10^{-19} C \approx 10e$$

Millikan, par simple mesure de la vitesse par le rapport de la distance parcourue sur le temps mis pour la parcourir sur une gouttelette d'huile qu'il ionisait en l'irradiant par rayons X , observa expérimentalement que les valeurs d'ionisation étaient toutes multiples entières de $e = 1,592 \times 10^{-19}C$, constante que l'on connaît aujourd'hui sous le nom de charge élémentaire (avec une valeur mise à jour légèrement différente : $e = 1,60217646 \times 10^{-19}C$ et que l'on note traditionnellement e ; cette expérience s'est avérée être la première preuve de la quantification de la charge électrique qui est strictement toujours un multiple entier positif ou négatif de cette valeur fondamentale e . Cette expérience et ses conclusions sur la quantification des charges valurent à Millikan le Prix Nobel de physique en 1923.

EXERCICE 04 :

1. le champ électrique créé par une charge électrique q placée en \vec{r}_1 en un point M repéré par le vecteur position \vec{r} est donné par

$$\mathbf{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{|\vec{r} - \vec{r}_1|^2} \vec{u}_{q \rightarrow M}$$

où ϵ_0 est la constante diélectrique du vide, $\vec{u}_{q \rightarrow M}$ vecteur unitaire porté par la droite reliant la position de la charge avec la position où l'on veut mesurer le champ électrique, égal à

$$\vec{u}_{q \rightarrow M} = \frac{\vec{r} - \vec{r}_1}{|\vec{r} - \vec{r}_1|}$$

L'expression du champ électrique s'écrit donc sous la forme :

$$\mathbf{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{|\vec{r} - \vec{r}_1|^3} (\vec{r} - \vec{r}_1)$$

Le champ électrique est mesuré en $N.C^{-1}$ ou encore en $Volt.m^{-1}$. Le champ électrique est radial car représenté par un vecteur porté par la droite reliant la source (charge q) et le point de mesure. Par convention, il est divergent (sortant de la charge) dans le cas d'une charge positive, et convergent (entrant vers la charge) dans le cas d'une charge négative. Sur une surface de rayon r dont le centre coïncide avec la position de la source, l'intensité du champ électrique est la même. On dit que le champ électrique a une symétrie sphérique, car ne dépendant ni de θ ni de φ , mais plutôt en r (voir figure 1.a).

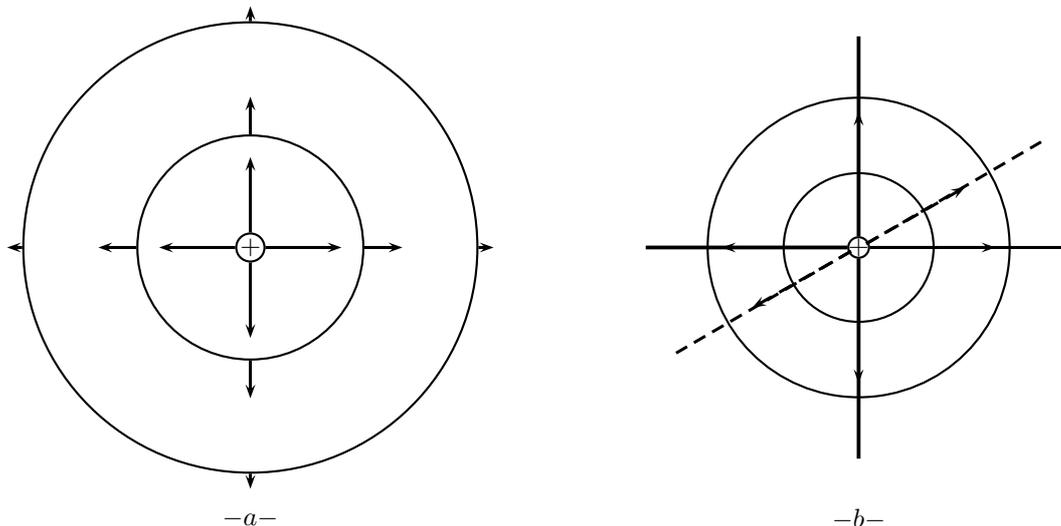


FIGURE 3.2 – a : variation du champ électrique créé par une charge positif. L'échelle utilisée ne reflète pas la variation en $\frac{1}{r^2}$ du champ électrique, b : représentation de 6 lignes de champ électrique créé par une charge positive

2. Les lignes de champ électriques \mathbf{E} sont les courbes orientées telles que leur tangente, en chaque point, ait même direction et même sens que le champ électrostatique. Pour établir l'équation d'une ligne de champ, il suffit d'exprimer qu'un élément $d\mathbf{l}$ de la ligne est parallèle à \mathbf{E} , soit :

$$d\mathbf{l} \wedge \mathbf{E} = \mathbf{0}$$

En explicitant cette équation dans le système des coordonnées sphériques, le plus adapté à cette situation physique (symétrie sphérique), avec

$$d\vec{l} = dr \vec{u}_r + r d\theta \vec{u}_\theta + r \sin \theta d\varphi \vec{u}_\varphi$$

et

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{q}{|\vec{r} - \vec{r}_1|^2} \vec{u}_r$$

Si la charge est supposée à l'origine, $\vec{r}_1 = \vec{0}$, d'où

$$\vec{E}(r) = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{q}{r^2} \vec{u}_r$$

on obtient

$$d\vec{l} \wedge \vec{E} = \begin{vmatrix} \vec{u}_r & \vec{u}_\theta & \vec{u}_\varphi \\ dr & r d\theta & r \sin \theta d\varphi \\ \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{q}{r^2} & 0 & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \left[\sin \theta \frac{d\varphi}{r} \vec{u}_\theta - \frac{d\theta}{r} \vec{u}_\varphi \right] = \vec{0}$$

d'où

$$d\vec{l} \wedge \vec{E} = \begin{vmatrix} \vec{u}_r & \vec{u}_\theta & \vec{u}_\varphi \\ dr & r d\theta & r \sin \theta d\varphi \\ \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{q}{r^2} & 0 & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \left[\sin \theta \frac{d\varphi}{r} \vec{u}_\theta - \frac{d\theta}{r} \vec{u}_\varphi \right] = \vec{0}$$

$$\sin \theta \frac{d\varphi}{r} = 0 \quad \text{soit} \quad \varphi = \text{Cste} \quad \text{et} \quad \frac{d\theta}{r} = 0 \quad \text{soit} \quad \theta = \text{Cste}$$

Ceci veut dire qu'une ligne de champ doit suivre, dans ce cas, une trajectoire sur laquelle r change de 0 à ∞ tout en gardant θ et φ constants. Ce sont là des droites radiales (suivant le rayon d'un cercle) orientées (émanant de la charge lorsque celle-ci est positive et convergeant vers la charge lorsque celle-ci est négative)(voir figure 1.b).

- la représentation de la topographie d'un champ électrique créé par une ou plusieurs charges électriques par des lignes orientées peut prêter à penser que l'information sur l'intensité du champ électrique est perdue, puisqu'on renonce à représenter le champ électrique par des vecteurs qui, par leurs longueurs, indiquent approximativement la norme du champ en tout point. En fait, rien de cela n'est vrai, puisque l'information sur l'intensité du champ électrique est récupérée grâce à une grandeur physique qu'est la densité de lignes par unité de surface. Cette grandeur permet de mesurer l'intensité du champ électrique sur une surface donnée. Pour plus de clarté, prenons l'exemple simple du champ électrique créé par une charge électrique positive, dont les lignes sont représentées sur la figure 1.b.

Notons tout d'abord qu'il est impossible de représenter toutes les lignes de champ qui émanent de la charge, puisque tout simplement leur nombre est infini! Pour cela, nous avons choisi de représenter juste six (6) lignes. Sauf que pour être cohérent, il faudra doubler le nombre de lignes (dans notre cas douze (12) lignes) si la quantité de charge était doublée, car l'intensité du champ est linéairement proportionnelle à la quantité de charge.

Remarquons que le nombre de lignes sur chaque surface sphérique de rayon r est le même, c'est à dire 6, alors que la surface augmente en r^2 , et plus précisément en $S = 4\pi r^2$. La densité de lignes est donc égale, pour cet exemple, à $\frac{6}{4\pi r^2}$. Ceci est une mesure qui nous permet clairement de voir la variation de l'intensité du champ électrique, puisqu'elle diminue en $\frac{1}{r^2}$ en s'éloignant de la source, comme l'est d'ailleurs la décroissance du champ électrique.

EXERCICE 05 :

- Afin d'établir l'expression du champ électrique créé par deux charges en $(0, 0, a)$ et $(0, 0, -a)$, on doit faire appel à la loi de Coulomb et au principe de superposition. En effet, le champ électrostatique créé en un point M de vecteur position \vec{r} par une charge placée en $(0, 0, a)$ est donné par

$$\vec{E}_1(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{q}{|\vec{r} - a\vec{k}|^3} (\vec{r} - a\vec{k})$$

où ϵ_0 la constante diélectrique du vide, $a\vec{k}$ le vecteur position de la première charge q et $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ le vecteur position d'un point quelconque dans l'espace (point M où l'on veut mesurer le champ électrique). De même, le champ électrostatique créé au même point M de vecteur position \vec{r} par une charge placée en $(0, 0, -a)$ est donné par

$$\vec{E}_2(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{q}{|\vec{r} + a\vec{k}|^3} (\vec{r} + a\vec{k})$$

$-a\vec{k}$ étant le vecteur position de la deuxième charge q . Le champ électrique total créé par les deux charges q , selon le principe de superposition, l'expression suivante (voir figure 2) :

$$E(\vec{r}) = E_1(\vec{r}) + E_2(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi \epsilon_0} \left(\frac{\vec{r} - a\vec{k}}{|\vec{r} - a\vec{k}|^3} + \frac{\vec{r} + a\vec{k}}{|\vec{r} + a\vec{k}|^3} \right)$$

Remarquons que la direction et l'intensité du champ électrique total dépend de la polarité (positive ou négative), ainsi que de la quantité de charge.

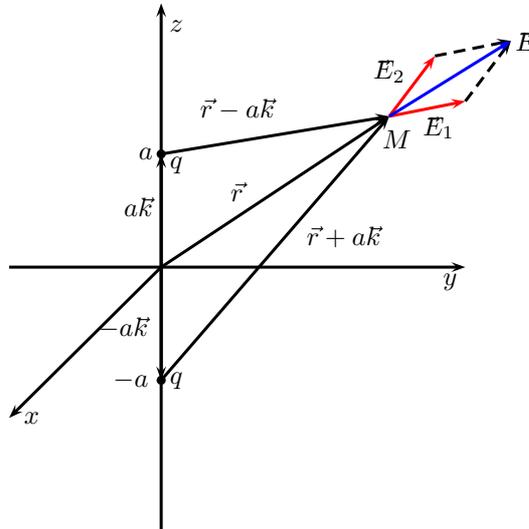


FIGURE 3.3 – Champ électrique $E(\vec{r})$ créé en un point M repéré par le vecteur position \vec{r} par deux charges électriques positives q placées en $(0, 0, a)$ et $(0, 0, -a)$, respectivement.

2. dans le plan Oyz le vecteur position \vec{r} a la composante suivant Ox nulle, d'où :

$$\vec{r} = y \vec{j} + z \vec{k}$$

En remplaçant \vec{r} par son expression, on obtient

$$E(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi \epsilon_0} \left(\frac{y \vec{j} + (z - a)\vec{k}}{(y^2 + (z - a)^2)^{3/2}} + \frac{y \vec{j} + (z + a)\vec{k}}{(y^2 + (z + a)^2)^{3/2}} \right)$$

Ce qui donne un champ électrique dont la composante suivant Ox est aussi nulle.

$$E = \begin{cases} E_x(y, z) = 0 \\ E_y(y, z) = \frac{q}{4\pi \epsilon_0} \left(\frac{y}{|y^2 + (z - a)^2|^{3/2}} + \frac{y}{|y^2 + (z + a)^2|^{3/2}} \right) \\ E_z(y, z) = \frac{q}{4\pi \epsilon_0} \left(\frac{(z - a)}{|y^2 + (z - a)^2|^{3/2}} + \frac{(z + a)}{|y^2 + (z + a)^2|^{3/2}} \right) \end{cases}$$

Ceci est dû au fait que le champ électrique a une symétrie un peu particulière. En fait, le champ électrique est dans le plan contenant les deux charges, et sur un cercle dont la génératrice est l'axe des z (le centre du cercle est un point de l'axe des z , tout en étant la normale à la surface délimitée par ce cercle) l'intensité du champ électrique est la même.

3. le champ électrique créé sur l'axe des z par les deux charges a une seule composante, puisque sur cet axe-là la valeur de y est nulle, d'où

$$E = \begin{cases} E_x(z) = 0 \\ E_y(z) = 0 \\ E_z(z) = \frac{q}{4\pi \epsilon_0} \left(\frac{z - a}{|z - a|^3} + \frac{z + a}{|z + a|^3} \right) \end{cases}$$

Remarquons que $|z + a|$ et $|z - a|$ sont des quantités positives, qui peuvent être écrites sous les formes suivantes

$$|z + a| = \begin{cases} -(z + a) & z < -a \\ z + a & -a < z < a \\ z + a & a < z \end{cases}$$

et

$$|z - a| = \begin{cases} -(z - a) & z < -a \\ -(z - a) & -a < z < a \\ z - a & a < z \end{cases}$$

En remplaçant dans l'expression de $E_z(z)$, nous obtenons

$$E_z(z) = \begin{cases} \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(-\frac{z-a}{(z-a)^3} - \frac{z+a}{(z+a)^3} \right) & z < -a \\ \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(-\frac{z-a}{(z-a)^3} + \frac{z+a}{(z+a)^3} \right) & -a < z < a \\ \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{z-a}{(z-a)^3} + \frac{z+a}{(z+a)^3} \right) & a < z \end{cases}$$

ou encore

$$E_z(z) = \begin{cases} -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{2(z^2+a^2)}{(z^2-a^2)^2} & z < -a \\ -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{4az}{(z^2-a^2)^2} & -a < z < a \\ \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{2(z^2+a^2)}{(z^2-a^2)^2} & a < z \end{cases}$$

EXERCICE 06 :

Avant de passer au calcul du champ électrique créé par une distribution linéique de charges électrique sur un cercle de rayon R , nous devons scruter la symétrie du problème posé. En effet, ceci est un cas particulier très simple, puisque en tout point sur l'axe des z , le champ électrique a une seule composante suivant l'axe des z (voir figure 3). Ceci est du au fait que pour chaque élément infinitésimal dl sur le cercle portant une charge $dq = \lambda dl$ et créant un champ électrique dE au point z le long de la droite reliant le point z à la position de la charge dq on peut trouver un autre élément dl portant la même quantité de charge dq (puisque la distribution est uniforme) et qui soit diamétralement opposé à celui-ci. Ce dernier crée un champ électrique de même intensité mais dont la composante dans le plan Oxy est dans une direction opposée, ce qui, en sommant, annule la composante du champ électrique total dans ce même plan.

La procédure à suivre consiste donc à calculer la composante suivant z du champ électrique créé par un élément du cercle puis faire l'intégration sur tout le cercle, la direction du champ électrique étant déjà connue.

Rappelons l'expression du champ électrique élémentaire :

$$dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda dl}{r^2}$$

où r est la distance entre la position de la charge dq sur le cercle et le point z où l'on veut mesurer le champ électrique, et $dl = R d\theta$, où θ va de 0 à 2π (afin de balayer le cercle tout entier). Pour calculer la composante suivant z on doit multiplier l'expression du champ électrique par un $\cos \alpha$, où α est l'angle que fait la droite portant r et l'axe des z , d'où

$$dE_z = dE \cos \alpha = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda R d\theta}{r^2} \cos \alpha$$

avec

$$r^2 = R^2 + z^2 \quad dl = R d\theta \quad \text{et} \quad \cos \alpha = \frac{z}{r} = \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}},$$

ce qui donne

$$dE_z = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda R d\theta}{R^2 + z^2} \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda z R d\theta}{(R^2 + z^2)^{3/2}}$$

La composante du champ électrique créé en z par la charge totale distribuée sur un cercle st donné donc par :

$$E_z = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda z R}{(R^2 + z^2)^{3/2}} \int_0^{2\pi} d\theta = \frac{1}{2\epsilon_0} \frac{\lambda z R}{(R^2 + z^2)^{3/2}}$$

qui peut s'écrire sous la forme

$$E_z = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q z}{(R^2 + z^2)^{3/2}}$$

où $q = \lambda 2\pi R$ est la charge totale sur le cercle.

Le champ électrique créé en un point z sur l'axe des z par une distribution uniforme sur un cercle de rayon R et d'équation $x^2 + y^2 = R^2$ est donné par

$$\mathbf{E}(z) = E_z(z)\mathbf{k} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q z}{(R^2 + z^2)^{3/2}} \mathbf{k}$$

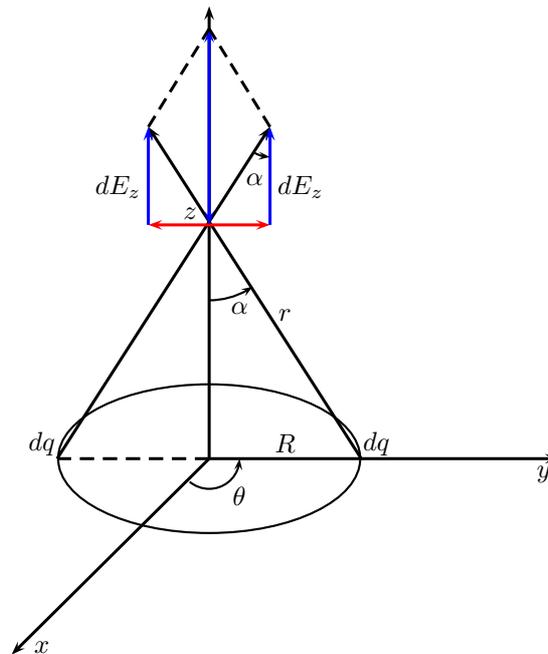


FIGURE 3.4 – Champ électrique $E(z)$ créé en un point z de l'axe des z par une charge uniformément distribuée sur un cercle de rayon R , de densité linéique λ .

EXERCICE 07 :

- (a) Afin de profiter de la symétrie du problème, on va choisir l'origine O de la trièdre $Oxyz$ au milieu du segment chargé, choisi colinéaire à l'axe de x . En choisissant deux éléments infinitésimaux dl symétriques par rapport à l'axe des y , les composantes horizontales du champ électrique s'annuleront deux à deux. La seule contribution sera la composante suivant l'axe des y , donnée par

$$dE_y = dE \cos \alpha$$

où α est l'angle fait entre la droite portant le vecteur du champ électrique créé en un point y et l'axe des y . La norme du champ élémentaire dE créé par une charge $dq = \lambda dl$ sur un élément infinitésimal $dl = dx$ situé en x est égal à :

$$dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda dx}{x^2 + y^2}$$

De la figure on voit bien que

$$\cos \alpha = \frac{y}{r} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

d'où

$$dE_y = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{y\lambda dx}{(x^2 + y^2)^{3/2}}$$

Rappelons que l'élément symétrique crée lui aussi un champ électrique en y de même intensité, ce qui nous permet d'écrire le champ total comme

$$E_y(y) = \int_0^L 2 dE_y = \int_0^L \frac{2}{4\pi\epsilon_0} \frac{y\lambda dx}{(x^2 + y^2)^{3/2}}$$

ou encore

$$E_y(y) = \frac{y\lambda}{2\pi\epsilon_0} \int_0^L \frac{dx}{(x^2 + y^2)^{3/2}}$$

Pour calculer l'intégrale indéfinie $\int \frac{dx}{(x^2 + y^2)^{3/2}}$, faisons le changement de variable suivant

$$x = y \operatorname{tg} t \quad \text{avec} \quad dx = \frac{y dt}{\cos^2 t}$$

L'intégrale ci-dessus devient donc

$$\int \frac{y dt}{\cos^2 t} \frac{1}{(y^2 + y^2 \tan^2 t)^{3/2}} = \frac{1}{y^2} \int \frac{dt}{\cos^2 t (1 + \tan^2 t)^{3/2}}$$

En remplaçant $1 + \tan^2 t$ par $\frac{1}{\cos^2 t}$ dans le dénominateur, nous obtenons

$$\int \frac{dt}{\cos^2 t (1 + \tan^2 t)^{3/2}} = \int \cos t dt = \sin t + cste$$

Rappelons que

$$\sin t = \sqrt{1 - \cos^2 t} = \sqrt{1 - \frac{1}{1 + \tan^2 t}} = \sqrt{\frac{\tan^2 t}{1 + \tan^2 t}} = \sqrt{\frac{(\frac{x}{y})^2}{1 + (\frac{x}{y})^2}} = \frac{x}{\sqrt{y^2 + x^2}},$$

d'où

$$\int_0^L \frac{dx}{(x^2 + y^2)^{3/2}} = \frac{1}{y^2} \left[\frac{x}{\sqrt{y^2 + x^2}} \right]_0^L = \frac{L}{y^2 \sqrt{y^2 + L^2}}$$

Finalement

$$E_y(y) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda 2L}{y \sqrt{y^2 + L^2}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{y \sqrt{y^2 + L^2}}$$

et le vecteur du champ électrique

$$\mathbf{E}(y) = E_y(y) \vec{j} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{y \sqrt{y^2 + L^2}} \vec{j}$$

(b) lorsque $y \gg L$, on peut réécrire l'expression du champ électrique comme

$$E_y(y) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{y^2 \sqrt{1 + (\frac{L}{y})^2}} \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{y^2} \quad \text{car} \quad \frac{L}{y} \ll 1$$

(c) dans la limite $L \rightarrow \infty$, l'expression du champ électrique devient

$$E_y(y) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2L\lambda}{yL \sqrt{1 + (\frac{y}{L})^2}} \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2\lambda}{y} \quad \text{car} \quad \frac{y}{L} \ll 1$$

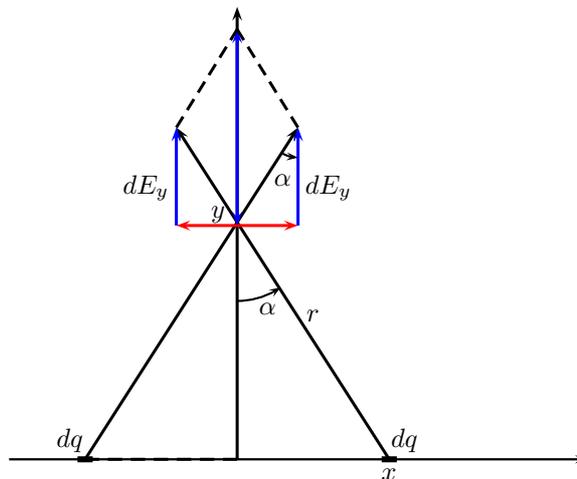


FIGURE 3.5 – Champ électrique $E(y)$ créé en un point y de l'axe des y par une charge uniformément distribuée sur un segment de longueur $2L$, de densité linéique λ .

EXERCICE 08 :

Le calcul du champ électrique créé en un point z du centre d'un disque de rayon R (sur la normale) par une charge surfacique σ_0 est suivant l'axe des z , car, par symétrie, on peut toujours trouver deux éléments de surface dS symétriques par rapport à l'origine du disque, contenant la même quantité de charge $dq = \sigma_0 dS$, et créant, chacune, en z un champ électrique d^2E de même intensité, mais dont les composantes dans le plan Oxy s'annulent deux à deux. L'indice 2 dans d^2E indique que l'intégration est double.

Calculons donc la composante suivant z champ électrique créé en un point z sur la normale par un élément de surface $dS = dr r d\theta$ situé à une distance r de l'origine du disque, à savoir :

$$d^2E_z = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma_0 dr r d\theta}{(r^2 + z^2)^2} \cos\theta$$

où $dq = \sigma_0 dr r d\theta$ est la charge contenue sur une surface élémentaire d'un disque $dS = dr r d\theta$, et

$$\cos\theta = \frac{z}{\sqrt{z^2 + r^2}}$$

d'où

$$d^2E_z = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{z\sigma_0 r d\theta dr}{(r^2 + z^2)^{3/2}}$$

Intégrons par rapport à θ

$$dE_z = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{z\sigma_0 r dr}{(r^2 + z^2)^{3/2}} \int_0^{2\pi} d\theta = \frac{z}{2\epsilon_0} \frac{\sigma_0 r dr}{(r^2 + z^2)^{3/2}}$$

Réintégrons maintenant par rapport à r de 0 à R

$$E_z = \frac{z\sigma_0}{2\epsilon_0} \int_0^R \frac{r dr}{(r^2 + z^2)^{3/2}}$$

Posons

$$r = z \operatorname{sh}t \quad \text{avec} \quad dr = ch t dt$$

L'intégrale indéfinie

$$I = \int \frac{r dr}{(r^2 + z^2)^{3/2}}$$

devient

$$I = \frac{1}{z^3} \int \frac{z^2 \operatorname{sh}t ch t dt}{ch^3 t} = \frac{1}{z} \int \frac{\operatorname{sh}t dt}{ch^2 t}$$

Posons maintenant

$$u = ch t \quad \text{avec} \quad du = \operatorname{sh}t dt$$

d'où

$$I = -\frac{1}{z} \int \frac{du}{u^2} = -\frac{1}{z} \frac{1}{u}$$

En utilisant la relation

$$ch^2 t - sh^2 t = 1 \quad \text{ou encore} \quad ch t = \sqrt{1 + sh^2 t} = \sqrt{1 + \left(\frac{r}{z}\right)^2}$$

nous obtenons donc

$$I = -\frac{1}{z} \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{r}{z}\right)^2}} = -\frac{1}{\sqrt{r^2 + z^2}} + C$$

Le champ électrique est donné par

$$E_z = \frac{\sigma_0 z}{2\epsilon_0} \left[-\frac{1}{\sqrt{r^2 + z^2}} \right]_0^R = \frac{\sigma_0}{2\epsilon_0} \left[\frac{z}{|z|} - \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}} \right]$$

Finalement

$$E(z) = E_z \vec{k} = \frac{\sigma_0}{2\epsilon_0} \left[\frac{z}{|z|} - \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}} \right] \vec{k}$$

Chapitre 4

Théorème de GAUSS

Sommaire

4.1	Rappel :	58
	4.1.1 Théorème de Gauss	58
4.2	Exercices :	59
4.3	corrigés :	60

4.1 Rappel :

4.1.1 Théorème de Gauss

Le flux du champ électrostatique sortant d'une surface fermée \mathcal{S} est égal à la charge totale Q_{int} enfermée dans cette surface divisée par ϵ_0

$$\Phi = \oint_{\mathcal{S}} \mathbf{E} \cdot \mathbf{n}_{ext} dS = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$$

Vérifions en calculant le flux sortant d'une surface sphérique de rayon r enfermant une charge ponctuelle q en O :

$$\Phi = \oint_{\mathcal{S}} \mathbf{E} \cdot \mathbf{n}_{ext} dS = \oint_{\mathcal{S}} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \mathbf{e}_r \cdot \mathbf{e}_r dS = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \oint dS = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} 4\pi r^2 = \frac{q}{\epsilon_0}$$

4.2 Exercices :

EXERCICE 01 :

- (a) Une charge positive q est placée au centre d'un cube d'arête a . Calculer le flux du champ électrique à travers l'une des faces du cube.
- (b) La même charge q est placée maintenant au centre de l'une des faces du cube d'arête a . Calculer le flux du champ électrostatique créé par la charge à travers la surface du cube. En déduire le flux à travers la surface du cube d'une charge surfacique σ répartie uniformément sur la surface d'une face du cube.

corrigé page : 60

EXERCICE 02 :

Une sphère de rayon R est chargée positivement avec une distribution volumique constante ρ .

- (a) calculer le champ électrique à l'intérieur et à l'extérieur de la sphère.
- (b) en utilisant le théorème de Gauss, et en considérant les analogies suivantes

$$\frac{1}{\epsilon_0} \equiv -4\pi G \quad \text{et} \quad E \equiv \vec{g} \quad \text{et} \quad q \equiv M_T$$

où ϵ_0 est la permittivité diélectrique du vide, G la constante gravitationnelle, E le champ électrique, \vec{g} le champ d'accélération gravitationnelle, q la charge électrique et M_T masse de la terre, établir l'expression du champ d'accélération gravitationnelle \vec{g} à l'intérieur et à l'extérieur de la terre, en supposant une répartition homogène de la masse terrestre.

corrigé page : 61

EXERCICE 03 :

Un plan conducteur supposé infini est positivement chargé avec une densité de charge surfacique uniforme σ .

- (a) calculer le champ électrostatique créé dans l'espace par cette distribution de charges électriques.
- (b) utiliser ce résultat pour déduire le champ électrique régnant entre et à l'extérieur des deux armatures de charges opposées σ et $-\sigma$.

corrigé page : 63

EXERCICE 04

Une coquille creuse est caractérisée par une densité de charge

$$\rho(r) = \frac{k}{r^2} \quad k, k \text{ est constant}$$

dans la région $R_1 < r < R_2$ et nulle ailleurs, et où k est une constante.

- (a) calculer le champ électrostatique dans les régions : $r < R_1$, $R_1 < r < R_2$ et $r > R_2$.
- (b) représenter la variation du champ électrique en fonction de r .
- (c) calculer la force électrique à laquelle est soumise cette même distribution de charges.

corrigé page : 65

EXERCICE 05 :

Une sphère, de rayon R , porte une charge volumique ρ qui est répartie uniformément dans tout le volume qu'elle occupe à l'exception d'une cavité de rayon a . Le centre de cette cavité est à la distance d du centre de la sphère. La cavité est vide de charges.

- (a) en utilisant le théorème de Gauss et le principe de superposition, calculer le champ électrique en tout point de la cavité.
- (b) conclure.

corrigé page : 67

4.3 corrigés :

EXERCICE 01 :

(a) L'expression du flux Φ du champ électrique à travers une surface fermée est donnée par :

$$\Phi = \oint E \cdot d\mathbf{S}$$

Pour calculer le flux du champ électrique créé par une charge électrique au centre d'un cube d'arête a , nous proposons de calculer ce même flux à travers deux surfaces sphériques : la première est d'une sphère, inscrite dans le cube, de rayon $\frac{a}{2}$ et la deuxième d'une sphère, circonscrite dans le cube, de rayon $\frac{\sqrt{3}a}{2}$ (voir figure 1).

Rappelons qu'un champ électrique créé par une charge q a la même intensité sur une surface sphérique dont le centre est confondu avec la position de la charge (symétrie sphérique), et que sa direction est radiale, d'où

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{\left(\frac{a}{2}\right)^2} \vec{u}_r \quad \text{sur une surface sphérique de rayon } \frac{a}{2}$$

et que le vecteur de la surface élémentaire est donné par

$$d\mathbf{S} = \left(\frac{a}{2}\right)^2 \sin\theta d\theta d\varphi \vec{u}_r$$

Pour la première sphère de rayon $\frac{a}{2}$ on a donc

$$\oint E \cdot d\mathbf{S} = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{\left(\frac{a}{2}\right)^2} \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^2 \sin\theta d\theta d\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin\theta d\theta = \frac{q}{\epsilon_0}$$

C'est un résultat très important, car on vient de trouver que le flux à travers une surface sphérique ne dépend pas du rayon de la sphère; ce qui nous amène à conclure que le flux à travers la surface de la sphère circonscrite au cube et de rayon $\frac{\sqrt{3}a}{2}$ est, lui aussi, égal à $\frac{q}{\epsilon_0}$. Rappelons à ce niveau que la surface du cube se trouve complètement entre les deux surfaces et qu'aucune source de charge n'existe entre ces deux dernières. C'est à dire que le flux sortant de la petite surface fermée va obligatoirement traverser la surface du cube pour ensuite sortir, sans changement, à travers la grande surface. On déduit donc que le flux à travers la surface fermée du cube est aussi égal à $\frac{q}{\epsilon_0}$. D'autre part, puisque la charge est au centre du cube, le flux a la symétrie du cube c'est à dire pas de direction privilégiée, et donc à travers une face du cube sort le sixième (le cube a six faces) du flux, ou encore

$$\Phi_{\text{une face}} = \frac{1}{6} \Phi_{\text{total}} = \frac{1}{6} \frac{q}{\epsilon_0}$$

Nous venons de montrer sur un exemple simple que le flux du champ électrique à travers une surface fermée quelconque est toujours égal à la charge à l'intérieur du volume délimité par cette même surface. C'est bien là l'énoncé du théorème de Gauss pour le flux d'un champ électrique.

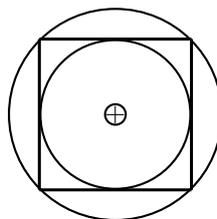


FIGURE 4.1 – Une charge électrique positive placée au centre d'un cube d'arête a . Deux surfaces sphériques sont représentées : la première est d'une sphère, inscrite dans le cube, de rayon $\frac{a}{2}$ et la deuxième d'une sphère, circonscrite dans le cube, de rayon $\frac{\sqrt{3}a}{2}$.

- (b) Pour calculer le flux à travers un cube d'arête a d'un champ électrostatique dû à une charge q placée au centre de l'une des faces du cube, on peut imaginer deux cubes mis côte à côte et dont la face commune entre eux est celle sur laquelle est positionnée la charge q .

Selon le théorème de Gauss, le flux à travers la surface fermée externe des deux cubes (à l'exception de la face interne entre les deux cubes) est égale à $\phi = \frac{q}{\epsilon_0}$. Remarquons aussi que le flux du champ électrique à travers la surface de la face commune entre les deux cubes est nul $\phi_{\text{face commune}} = 0$, car le champ électrique est parallèle au plan de cette surface (il est donc normal au vecteur de l'élément de la surface en tout point sur ce plan). Il nous reste donc 10 faces, 5 pour chaque cube. Le flux à travers les 10 faces est donc égal à $\phi_{10 \text{ faces}} = \frac{q}{\epsilon_0}$. Les deux surfaces sont symétriques par rapport à la charge, ce qui nous permet de conclure que le flux à travers les 5 faces d'un cube est égal à la moitié du flux à travers les 10 faces, à savoir : $\phi_{5 \text{ faces}} = \frac{q}{2\epsilon_0}$. On peut conclure que

$$\phi_{\text{cube}} = \phi_{\text{face commune}} + \phi_{5 \text{ faces}} = 0 + \frac{q}{2\epsilon_0} = \frac{q}{2\epsilon_0}$$

Imaginons maintenant qu'au lieu d'une seule charge sur la face, on a toute une distribution surfacique de charges σ telle que $q = \iint \sigma dS$. Chaque élément de charge $dq = \sigma ds$ crée dans l'espace un champ électrique dont le flux à travers les 6 faces du cube est égal à

$$d\phi = \frac{dq}{2\epsilon_0} = \frac{\sigma dS}{2\epsilon_0}$$

Selon le principe de superposition, le flux créé par la charge totale sur la surface est égal à la somme des flux créés par les éléments dq , ce qui est obtenu par l'intégration sur $d\phi$:

$$\phi = \iiint \frac{dq}{\epsilon_0} = \iiint \frac{\sigma dS}{2\epsilon_0} = \frac{q}{2\epsilon_0}$$

EXERCICE 02 :

- (a) Pour appliquer le théorème de Gauss, on doit choisir une surface dite de Gauss à travers laquelle on calculera le flux du champ électrique, et qui, de plus, aura la symétrie du problème. Dans notre cas, on a une sphère de rayon R chargée avec une distribution volumique constante ρ . La symétrie du problème réside dans le fait que le champ électrique créé par cette distribution doit être radial et a une symétrie sphérique. En effet, isolons par imagination un élément de charge dans le volume et voyons ce qu'il crée comme champ électrique en un point à l'extérieur du volume. Ce dernier n'est pas radial; mais en faisant la somme (continue) des éléments de volume autour de l'axe qui relie le point de mesure au centre de la sphère nous remarquons que le champ électrique résultant est suivant cet axe, c'est à dire radial. On peut penser aussi qu'à une position lointaine de la sphère, la charge portée par celle-ci apparait comme une charge ponctuelle, avec tout ce que cela implique pour l'allure du champ électrique. Choisissons donc une surface de Gauss imaginaire qui soit sphérique avec un centre confondu avec le centre de la sphère réelle.

- i. pour calculer le champ électrique à l'intérieur de la sphère prenons une surface sphérique de rayon $r < R$ (voir figure 2) :

$$\oint E \cdot dS = \frac{\text{charge contenue dans une sphère de rayon } r}{\epsilon_0}$$

Remarquons que sur cette surface sphérique choisie, le champ électrique est radial, d'où

$$E \cdot dS = E_r \cdot dS$$

et ne dépend ni de θ ni de φ de la surface, ce qui nous permet de sortir E_r de l'intégrale

$$\oint E \cdot dS = E_r \oint dS = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi r^2 \sin \theta d\theta = E_r 4\pi r^2$$

D'autre part, la quantité de charge contenue dans le volume délimité par la surface de Gauss choisie est égale à

$$Q_{\text{intérieur}} = \rho \cdot \frac{4}{3}\pi r^3$$

Ce n'est pas la totalité de charge qui est prise en considération, mais juste la partie contenue dans le volume délimité par la surface de Gauss qu'on a choisie. Notons que la charge totale est donnée par

$$Q_{\text{totale}} = \rho \cdot \frac{4}{3}\pi R^3$$

En égalant les deux membres, on trouve

$$E_r 4\pi r^2 = \rho \cdot \frac{1}{\epsilon_0} \frac{4}{3} \pi r^3 = \frac{1}{\epsilon_0} \rho \frac{4}{3} \pi R^3 \left(\frac{r}{R}\right)^3 = \frac{1}{\epsilon_0} Q_{\text{totale}} \left(\frac{r}{R}\right)^3$$

ou encore

$$E_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_{\text{totale}}}{R^3} r$$

ii. pour calculer le champ électrique à l'intérieur de la sphère prenons une surface sphérique de rayon $r > R$ (voir figure 2) :

$$\oint E \cdot d\mathcal{S} = \frac{\text{charge contenue dans une sphère de rayon } r}{\epsilon_0}$$

En utilisant les mêmes arguments de symétrie que précédemment, tout en remarquant que cette fois-ci la charge contenue dans le volume délimité par la surface de Gauss choisie est elle-même la charge totale, on trouve

$$E_r 4\pi r^2 = \frac{1}{\epsilon_0} \rho \frac{4}{3} \pi R^3 = \frac{1}{\epsilon_0} Q_{\text{totale}}$$

ou encore

$$E_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \rho \frac{4}{3} \pi R^3 \frac{1}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_{\text{totale}}}{r^2}$$

L'allure du champ électrique radial en fonction de r est donnée dans la figure 3.

(b) en utilisant le théorème de Gauss, et en considérant les analogies suivantes (voir table 1)

$$\frac{1}{\epsilon_0} \equiv -4\pi G \quad \text{et} \quad E \equiv \vec{g} \quad \text{et} \quad q \equiv M_T$$

où ϵ_0 est la permittivité diélectrique du vide, G la constante gravitationnelle, E le champ électrique, \vec{g} le champ d'accélération gravitationnelle, q la charge électrique et M_T masse de la terre, l'expression du champ d'accélération gravitationnelle \vec{g} à l'intérieur de la terre ($r < R_T$) est donnée par

$$\oint \vec{g} \cdot d\mathcal{S} = -4\pi G M_T$$

ou encore

$$g_r 4\pi r^2 = -4\pi G \frac{4}{3} \pi r^3 \mu_0$$

où μ_0 est la masse volumique de la terre, supposée constante. On obtient donc

$$g_r = -4\pi G \frac{4}{3} \pi r \mu_0 = -G \frac{4}{3} \pi R^3 \mu_0 \frac{r}{R^3} = -G M_T \frac{r}{R^3}$$

Le vecteur \vec{g} est donné par

$$\vec{g} = -G M_T \frac{r}{R^3} \vec{u}_r$$

c'est à dire pointant vers le centre de la terre.

A l'extérieur de la terre,

$$g_r 4\pi r^2 = -4\pi G \frac{4}{3} \pi R^3 \mu_0 = -4\pi G M_T$$

ou encore

$$g_r = -G \frac{M_T}{r^2}$$

et

$$\vec{g} = -G \frac{M_T}{r^2} \vec{u}_r$$

Ainsi, la terre crée à l'extérieur un champ gravitationnel identique à celui d'une masse ponctuelle M_T placée au centre de la terre.

Pour l'application numérique, on considère la masse de la terre estimée à $5,9736 \times 10^{24} \text{kg}$, la constante gravitationnelle égale à $G = 6,67384 \times 10^{-11} \text{m}^3 \text{kg}^{-1} \text{s}^{-2}$ et le rayon de la terre $R_T = 6371 \text{km}$, d'où l'intensité du champ gravitationnel à la surface de la terre est égale à

$$g_r = 6,67384 \times 10^{-11} \frac{5,9736 \times 10^{24}}{(6371 \times 10^3)^2} = 9,8219 \text{m.s}^{-2}$$

Électrique	Gravitationnelle
q (charge)	m (masse)
$F_{1/2} = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{q_1 q_2}{r^2} \vec{u}_{1 \rightarrow 2}$ (force)	$F_{1/2} = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \vec{u}_{1 \rightarrow 2}$ (force)
$\frac{1}{4\pi\epsilon}$	$-G$ (constante gravitationnelle)
$E(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{q_1}{r^2} \vec{u}_{1 \rightarrow 2}$ (champ électrique)	$\vec{g} = -G \frac{m_1}{r^2} \vec{u}_{1 \rightarrow 2}$ (champ d'accélération gravitationnelle)
$\Phi_e = \frac{q_1}{\epsilon}$ (flux électrique)	$\Phi_g = (-4\pi G) m_1$ (flux gravitationnel)

TABLE 4.1 – Analogie électrostatique-gravitation

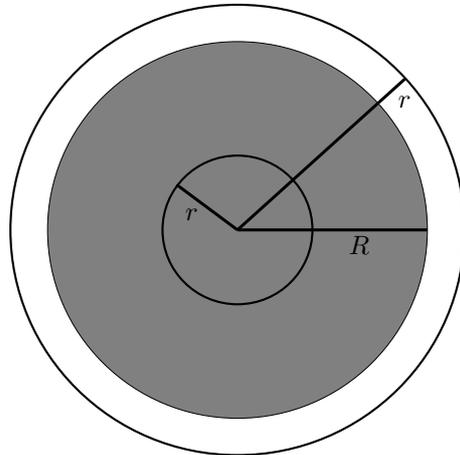


FIGURE 4.2 – Sphère de rayon R chargée uniformément avec une charge volumique ρ , et deux surfaces de Gauss sphériques de rayon $r : r < R$ et $r > R$.

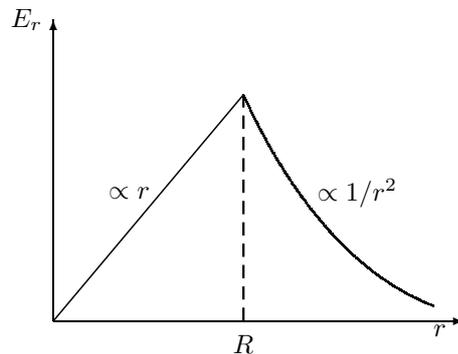


FIGURE 4.3 – Allure de la composante radiale du champ électrique créé par une charge électrique de distribution volumique constante ρ contenue dans une sphère de rayon R .

EXERCICE 03 :

- (a) puisque le plan est supposé infini le champ électrique doit être dans les deux directions suivant la normale au plan. En effet, à tout élément de surface contenant une dq sur le plan créant un champ électrique en un point M , correspond un autre élément de surface symétrique à celui-ci par rapport à la droite reliant le point M et le plan selon la normale, qui crée un champ électrique de même intensité mais dans une direction telle que la somme des deux champs a une composante suivant la normale. Il est donc convenable de choisir une surface de Gauss sous forme d'une surface d'un cylindre de hauteur L et dont les deux surfaces de base (deux disques de rayon r) sont parallèles au plan (voir figure 6). On a donc trois surfaces à travers lesquelles le flux du champ électrique passera : une surface latérale $S_L = 2\pi r L$ et deux surfaces de base $S_{1,2} = \pi r^2$. Donc, le flux électrique à travers cette surface fermée est, selon le théorème de Gauss, égal à

$$\oint E \cdot d\mathbf{S} = \int \int_{S_L} E \cdot d\mathbf{S} + \int \int_{S_1} E \cdot d\mathbf{S} + \int \int_{S_2} E \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{\epsilon_0} Q_{int} = \frac{1}{\epsilon_0} \sigma \pi r^2$$

puisque la charge contenue dans le volume du cylindre délimité par la surface de Gauss imaginée est justement la charge contenue dans la surface obtenue par intersection du plan avec le cylindre.

Notre choix de la surface nous permet donc d'obtenir un flux nul à travers la surface latérale du cylindre

car le champ électrique \mathbf{E} est perpendiculaire à la surface en tout point :

$$\int \int_{S_L} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = 0 \quad \text{car} \quad \mathbf{E} = E_z \vec{u}_z \quad \text{et} \quad d\mathbf{S} = dS \vec{u}_r$$

D'autre part, le flux électrique à travers les deux surfaces de base est donné par

$$\int \int_{S_1} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \int \int_{S_1} E \cdot d\mathbf{S} = E_z(z) \int \int_{S_1} dS = E_z(z) \pi r^2$$

car sur S_1 le vecteur du champ électrique est égal à $\mathbf{E} = E_z(z) \vec{u}_z$ et $d\mathbf{S}_1 = dS_1 \vec{u}_z$, et

$$\int \int_{S_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \int \int_{S_2} E \cdot d\mathbf{S} = E_z(-z) \int \int_{S_2} dS = E_z(z) \pi r^2$$

car sur S_2 le vecteur du champ électrique est impair et est égal à $\mathbf{E} = E_z(-z) \vec{u}_z = -E_z(z) \vec{u}_z$ et $d\mathbf{S}_2 = -dS_2 \vec{u}_z$. Le flux électrique à travers la surface de Gauss est donné par

$$2 E_z(z) \pi r^2 = \frac{1}{\epsilon_0} \sigma \pi r^2$$

d'où

$$E_z(z) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

Dans des régions proches du plan chargé le champ électrique est constant.

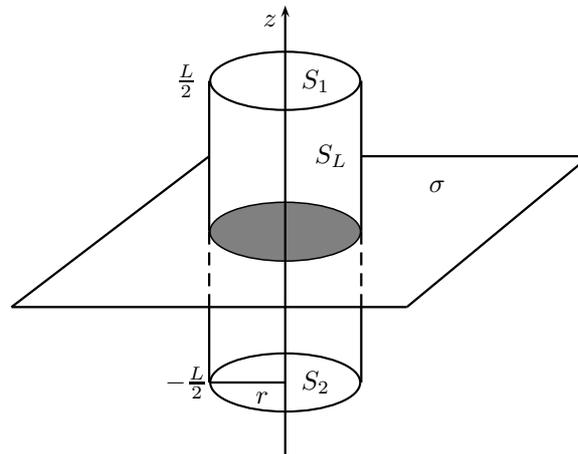


FIGURE 4.4 – Surface de Gauss sous forme d'une surface d'un cylindre de longueur L et de rayon de base r .

- (b) considérons maintenant deux plans parallèles supposés infinis, dont la normale est suivant l'axe des z , l'un portant une charge surfacique σ (charge positive) et l'autre portant une charge surfacique $-\sigma$ (charge négative) (voir figure 7). Selon le résultat ci-dessus, le plan portant une charge positive crée un champ électrique

$$\mathbf{E}_1 = E_z(z) \vec{u}_z = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{u}_z$$

alors que le plan portant une charge négative crée un champ électrique

$$\mathbf{E}_2 = E_z(z) \vec{u}_z = \frac{-\sigma}{2\epsilon_0} \vec{u}_z$$

Remarquons que les deux champs électriques entre les deux plans s'ajoutent

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{u}_z$$

alors qu'ils s'annulent mutuellement en dehors des plans

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 = \mathbf{0}$$

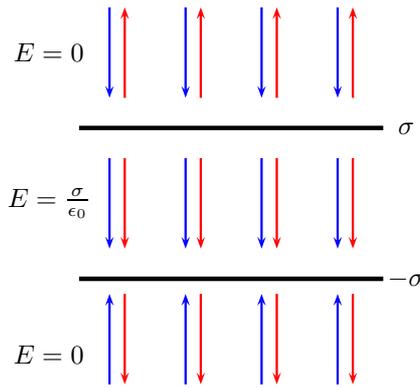


FIGURE 4.5 – Champ électrique créé par deux plans parallèles, l’un portant une charge surfacique positive σ et l’autre portant une charge surfacique négative $-\sigma$. Le champ en bleu, constant partout, est créé par la charge négative et est égal à $E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$, alors que le champ en rouge, constant partout lui aussi, est créé par la charge positive et est égal à $E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$. En utilisant le principe de superposition, on obtient un champ égal à $E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$ entre les eux plans et un champ nul en dehors des plans.

EXERCICE 04 :

Une coquille creuse est caractérisée par une densité de charge

$$\rho(r) = \frac{k}{r^2}$$

dans la région $R_1 < r < R_2$ et nulle ailleurs, où k est une constante.

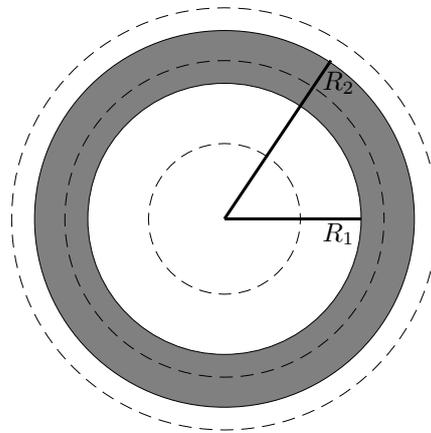


FIGURE 4.6 – Une coquille creuse caractérisée par une densité de charge $\rho(r) = \frac{k}{r^2}$ entre R_1 et R_2 . Les surfaces de Gauss (sphères en lignes discontinues) pour différentes régions de la coquille sont représentées.

- (a) Le problème posé a une symétrie sphérique, ce qui fait que le champ électrique devrait avoir la même intensité sur une sphère de rayon r et dont le centre est confondu avec le centre de la coquille. Le champ électrique devrait aussi avoir une seule composante radiale : $\mathbf{E} = E_r \vec{u}_r$. La surface de Gauss qui convient le plus serait donc une surface sphérique de rayon r (voir figure 8).
 - i. pour $r < R_1$: le flux électrique à travers la surface de Gauss est nul car il n'existe aucune charge à l'intérieur du volume délimité par la surface choisie, d'où

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = 0$$

Le champ électrique sur la surface choisie a la même intensité, ce qui nous permet d'écrire

$$E_r \oint dS = 0 \quad \text{ou encore} \quad E_r = 0$$

Le champ électrique à l'intérieur d'une sphère creuse est nul.

ii. pour $R_1 < r < R_2$:

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0} = \frac{1}{\epsilon_0} \int \rho(r') dV' = \frac{1}{\epsilon_0} \int_{R_1}^r \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{k}{r'^2} r'^2 dr' d\theta \sin\theta d\varphi = \frac{1}{\epsilon_0} 4\pi k \int_{R_1}^r dr' = \frac{1}{\epsilon_0} 4\pi k(r - R_1)$$

Puisque le champ électrique a la même intensité sur une surface sphérique de rayon r et que les vecteurs unitaires portant l'élément de surface et le champ électrique sont dans la même direction, on peut écrire

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \oint E_r \cdot dS = E_r \oint dS = E_r 4\pi r^2$$

en égalant les deux membres de la loi de Gauss, on obtient donc

$$E_r 4\pi r^2 = \frac{1}{\epsilon_0} 4\pi k(r - R_1)$$

ou encore

$$E_r = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{k(r - R_1)}{r^2}$$

et le champ électrique

$$\mathbf{E} = E_r \vec{u}_r = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{k(r - R_1)}{r^2} \vec{u}_r$$

iii. pour $r > R_2$:

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0} = \frac{1}{\epsilon_0} \int \rho(r') dV' = \frac{1}{\epsilon_0} \int_{R_1}^{R_2} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{k}{r'^2} r'^2 dr' d\theta \sin\theta d\varphi = \frac{1}{\epsilon_0} 4\pi k \int_{R_1}^{R_2} dr' = \frac{1}{\epsilon_0} 4\pi k(R_2 - R_1)$$

car le volume délimité par la surface de Gauss contient la totalité de la charge sur la sphère.

D'autre part

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \oint E_r \cdot dS = E_r \oint dS = E_r 4\pi r^2 = \frac{1}{\epsilon_0} 4\pi k(R_2 - R_1)$$

ou encore

$$\mathbf{E} = E_r \vec{u}_r = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{k(R_2 - R_1)}{r^2} \vec{u}_r$$

(b) la variation du champ électrique en fonction de r est représenté sur la figure 8.

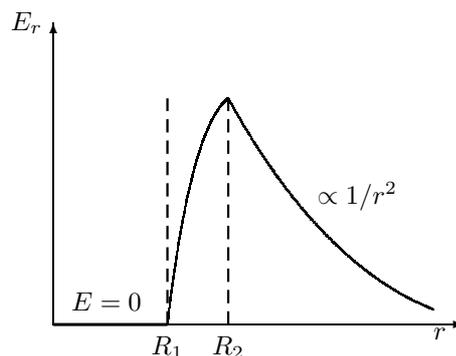


FIGURE 4.7 – Allure de la composante radiale du champ électrique créé par une charge électrique de distribution volumique constante ρ contenue dans une coquille creuse.

(c) en voulant calculer la force électrique à laquelle est soumise cette même distribution de charges, il faut se rappeler qu'il s'agit de la force appliquée par une distribution de charges sur elle-même !

Imaginons un élément de volume dV de la coquille contenant une charge $dq = \rho dV$, laquelle est soumise à deux forces : une force due aux charges des autres parties de la coquille et une deuxième force due à la charge contenue dans l'élément lui-même. Concernant la deuxième force, on doit noter que les forces appliquées mutuellement entre les charges contenues dans le volume dV (vu comme un seul système) s'annulent (principe d'action et de réaction de Newton), et c'est ainsi que le volume élémentaire ne peut pas se faire pousser par lui-même ! Cela simplifie le calcul puisqu'il nous permet d'inclure le champ électrique créé par toutes les

charges y compris les charges du volume élémentaire dV . En effet la force appliquée sur un volume dV par la distribution est égale à

$$dF = dqE$$

où E est le champ électrique créé par la totalité de la charge à l'endroit où dq est placée. Puisque $dq = \rho dV$, l'expression de la force devient

$$dF = \rho E dV = \rho E dr dS$$

Il est utile de calculer la force par unité de surface appliquée par la distribution de charge sur elle-même, d'où

$$F = \int \rho E dr = \frac{k^2}{\epsilon_0} \left[\int_{R_1}^{R_2} \frac{1}{r^2} \frac{(r - R_1)}{r^2} dr \right] \vec{u}_r$$

ou encore

$$F = \frac{k^2}{\epsilon_0} \left[\int_{R_1}^{R_2} \frac{(r - R_1)}{r^4} dr \right] \vec{u}_r = \frac{k^2}{\epsilon_0} \left[\int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r^3} - R_1 \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r^4} \right] \vec{u}_r = \frac{k^2}{\epsilon_0} \left[\frac{4R_1}{R_2^5} - \frac{1}{R_1^4} - \frac{3}{R_2^4} \right] \vec{u}_r$$

Cette force pointe toujours vers l'extérieur de la sphère quelque soit la polarité des charges (positive ou négatives). Pour que ces charges se maintiennent à leurs positions, il doit y avoir une autre force, non incluse ici, qui contrebalance la force appliquée par la distribution des charges et qui est évidemment dans la direction opposée.

EXERCICE 05 :

Une sphère, de rayon R , porte une charge volumique ρ qui est répartie uniformément dans tout le volume qu'elle occupe à l'exception d'une cavité de rayon a . Le centre de cette cavité est à la distance d du centre de la sphère. La cavité est vide de charges.

- (a) ce cas physique montre bien les limites de l'application directe du théorème de Gauss, puisque la distribution de la charge dans la sphère n'a pas la symétrie sphérique requise pour que le champ électrique soit radial et ait une symétrie sphérique. Rappelons que ce sont là exactement les conditions qui nous permettaient à chaque fois de simplifier le calcul de l'intégrale $\oint \vec{E} \cdot d\vec{S}$ en passant du produit vectoriel à un produit de deux scalaire, à savoir $\oint E dS$ (car le champ électrique était radial en tout point), puis en faisant sortir le champ électrique de l'intégrale : $E \oint dS$ (le champ électrique est le même sur toute la surface sphérique). Pour contourner ce problème, on peut modéliser la cavité sphérique de rayon a creusée dans la sphère de rayon R comme étant la superposition d'une sphère chargée de rayon a , de centre O_2 et de densité $-\rho$, et d'une sphère de rayon R de centre O_1 et de densité volumique $+\rho$ sur tout son volume. La superposition d'une charge négative $-\rho$ et d'une charge $+\rho$ sur une sphère de rayon a donne une charge nulle sur cette sphère ; ce qui est le cas ici (voir figure 9). Le champ électrique E_1 créé par la distribution $+\rho$ supposée répartie sur la totalité du volume de la sphère de rayon R en un point M est radial, divergent (car la charge est positive) et a une symétrie sphérique (voir figure 10). D'autre part, le champ électrique E_2 créé par la distribution $-\rho$ supposée répartie sur le volume de la cavité de rayon a au même point M est aussi radial, convergent (car la charge est négative) et a une symétrie sphérique. En appliquant le principe de superposition au point M de la cavité, on obtient

$$\vec{E}(M) = \vec{E}_1(M) + \vec{E}_2(M)$$

avec

$$\vec{E}_1(M) = E_1(M) \vec{u}_1 \quad \text{avec} \quad \vec{u}_1 = \frac{\overrightarrow{O_1M}}{r_1}$$

et

$$\vec{E}_2(M) = E_2(M) \vec{u}_2 \quad \text{avec} \quad \vec{u}_2 = \frac{\overrightarrow{O_2M}}{r_2}$$

Pour calculer la composante radiale du champ électrique $E_1(M)$ on utilise une surface de Gauss (contenant le point M) de rayon r_1 et de centre O_1 , d'où

$$\oint \vec{E}_1 \cdot d\vec{S} = E_1(M) \cdot 4\pi r_1^2 = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{4\pi}{3} \rho r_1^3 \quad \Rightarrow E_1(M) = \frac{\rho}{3\epsilon_0} r_1$$

et pour calculer la composante radiale du champ électrique $E_2(M)$ on utilise une surface de Gauss (contenant le point M) de rayon r_2 et de centre O_2 , d'où

$$\oint \vec{E}_2 \cdot d\vec{S} = E_2(M) \cdot 4\pi r_2^2 = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{4\pi}{3} (-\rho) r_2^3 \quad \Rightarrow E_2(M) = -\frac{\rho}{3\epsilon_0} r_2$$

Le champ électrique total en M est donné par

$$\vec{E}(M) = \frac{\rho}{3\epsilon_0} r_1 \vec{u}_1 - \frac{\rho}{3\epsilon_0} r_2 \vec{u}_2 = \frac{\rho}{3\epsilon_0} r_1 \frac{\overrightarrow{O_1 M}}{r_1} - \frac{\rho}{3\epsilon_0} r_2 \frac{\overrightarrow{O_2 M}}{r_2} = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \overrightarrow{O_1 M} - \frac{\rho}{3\epsilon_0} \overrightarrow{O_2 M}$$

ou encore

$$\vec{E}(M) = \frac{\rho}{3\epsilon_0} (\overrightarrow{O_1 M} + \overrightarrow{M O_2}) = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \overrightarrow{O_1 O_2}$$

- (b) on remarque bien que le champ électrique à l'intérieur de la cavité est uniforme. Il a la même valeur $E_1(M) = \frac{\rho}{3\epsilon_0} d$ partout dans la cavité, et y est dirigé suivant $\overrightarrow{O_1 O_2}$

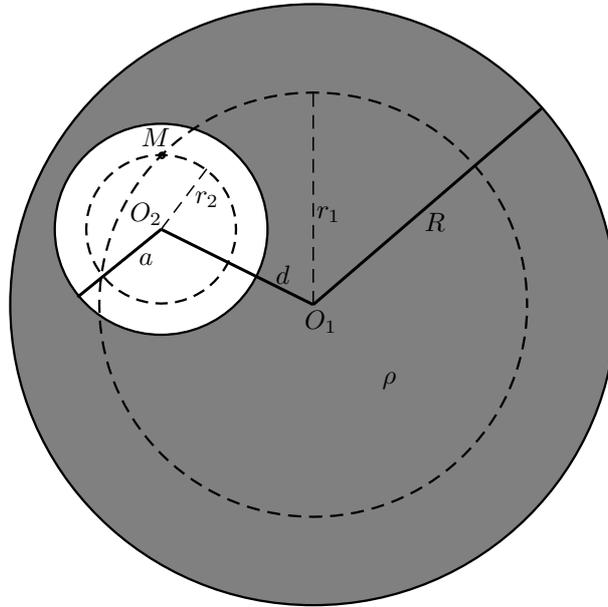


FIGURE 4.8 – Une sphère, de rayon R , porte une charge volumique ρ répartie uniformément dans tout le volume qu'elle occupe à l'exception d'une cavité de rayon a . Le centre de cette cavité est à la distance d du centre de la sphère. Les deux surfaces de Gauss de rayons r_1 et r_2 contenant chacune le point M .

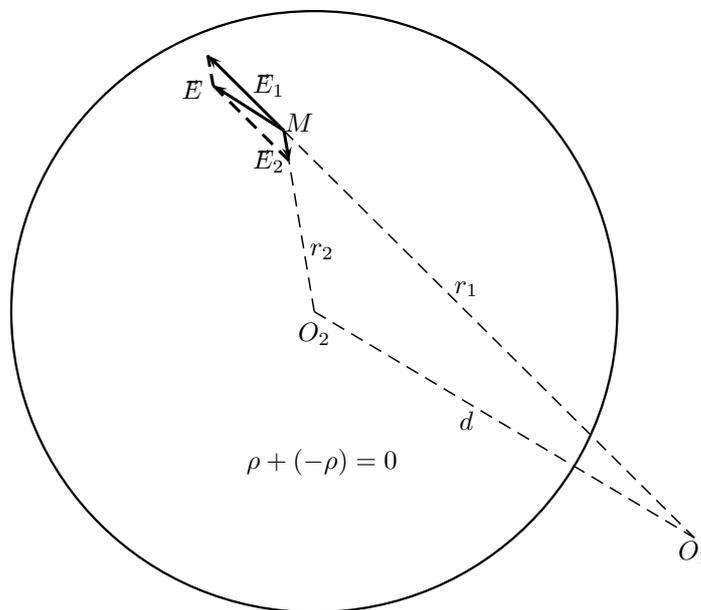


FIGURE 4.9 – Champ électrique dans une cavité non chargée de rayon a , entourée par une charge électrique de distribution volumique constante ρ .

Chapitre 5

Potentiel électrostatique

Sommaire

5.1	Rappel :	72
5.2	Potentiel électrostatique	72
5.2.1	Circulation de E	72
5.2.2	Potentiel électrostatique	72
5.2.3	Potentiel créé par une distribution de charges	72
5.2.4	Surfaces équipotentiels	73
5.2.5	Énergie potentielle	73
5.3	Exercices :	74
5.4	corrigés :	76

5.1 Rappel :

5.2 Potentiel électrostatique

5.2.1 Circulation de \mathbf{E}

Rappelons l'expression de la force exercée par la charge q en O sur la charge q' en M

$$\mathbf{F} = q' \mathbf{E}(M)$$

Calculons le travail de \mathbf{F} encore appelé circulation de \mathbf{F}

$$W = \int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{OM} = q' \int \mathbf{E}(M) \cdot d\mathbf{OM}$$

Intéressons nous à la circulation de \mathbf{E}

$$\int_A^B \mathbf{E}(M) \cdot d\mathbf{OM} = \int \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \mathbf{e}_r \cdot dr \mathbf{e}_r = \int \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{dr}{r^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} \right)$$

La circulation de \mathbf{E} est conservative, elle ne dépend pas du chemin suivi. Le principe de superposition permet de généraliser ce résultat à une distribution de charge quelconque.

5.2.2 Potentiel électrostatique

La circulation de \mathbf{E} peut donc s'écrire

$$\int_A^B \mathbf{E}(M) \cdot d\mathbf{OM} = V(A) - V(B)$$

où V est une fonction appelée potentiel électrostatique.

Dans le cas particulier de la charge ponctuelle

$$V(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r}$$

Le potentiel est défini à une constante près.

Connaissant le potentiel, on peut en déduire le champ par

$$\boxed{\mathbf{E} = -\text{grad } V}$$

Un champ de vecteur \mathbf{E} à circulation conservative est un champ de gradient.

5.2.3 Potentiel créé par une distribution de charges

Pour une distribution de charges discontinues

$$V(M) = \sum \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i}{P_i M}$$

Pour une distribution volumique

$$\boxed{V(M) = \int \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho(P) d\tau}{PM}}$$

Pour une distribution surfacique

$$\boxed{V(M) = \int \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma(P) dS}{PM}}$$

Pour une distribution linéique

$$\boxed{V(M) = \int \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda(P) dl}{PM}}$$

5.2.4 Surfaces équipotentielles

Le champ est perpendiculaire aux surfaces équipotentielles

$$dV = 0 \Rightarrow \mathbf{E} \cdot d\mathbf{OM} = 0$$

Les lignes de champ sont orientées dans le sens des potentiels décroissants

$$dV < 0 \Rightarrow \mathbf{E} \cdot d\mathbf{OM} > 0$$

5.2.5 Énergie potentielle

Reprenons l'expression du travail

$$W = q'(V(A) - V(B)) = E_p(A) - E_p(B)$$

$$\boxed{E_p(M) = q'V(M)}$$

est l'**énergie potentielle** que possède la charge q' du fait de sa position M dans le champ scalaire V .

L'**énergie potentielle d'interaction** entre deux charges q_1 et q_2 est égale à

$$E_{p_{12}} = q_1 V_2(M_1) = q_2 V_1(M_2) = \frac{1}{2} (q_1 V_2(M_1) + q_2 V_1(M_2)) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{M_1 M_2}$$

5.3 Exercices :**EXERCICE 01 :**

- (a) calculer le potentiel électrostatique créé en un point M dans le plan Oxy par deux charges positives q_1 en $(1, 0, 0)$ et q_2 en $(-1, 0, 0)$ respectivement.
- (b) en déduire le champ électrique créé par ces deux charges au point M .
- (c) calculer l'énergie potentielle électrostatique d'une charge q_3 placée en $(0, 1, 0)$.

corrigé page : 76**EXERCICE 02 :**

- (a) calculer l'énergie électrostatique d'un système de quatre électrons régulièrement espacés sur un cercle de rayon r au centre duquel se trouve un proton.
- (b) si on abandonne un tel système, comment varie r ?

corrigé page : 77**EXERCICE 03 :**

Calculer le potentiel électrostatique créé par un fil conducteur supposé infini chargé d'une densité linéique de charge λ en un point R par rapport au fil conducteur.

corrigé page : 78**EXERCICE 04 :**

Considérons une boule de rayon R et de charge Q répartie uniformément en volume.

- (a) calculer le champ électrique à l'intérieur et à l'extérieur de la sphère et tracer son allure.
- (b) en déduire les expressions du potentiel électrostatique et tracer son allure.
- (c) en déduire l'énergie électrostatique du système.
- (d) calculer l'énergie potentielle électrostatique emmagasinée dans le noyau d'uranium, sachant que pour cet élément $Z = 92$ et $R = 9fm$.

corrigé page : 80**EXERCICE 05 :**

Deux sphères conductrices de rayons R_1 et R_2 portent des charges Q_1 et Q_2 réparties uniformément sur leurs surfaces. La distance entre les deux boules est tellement grande qu'on peut les considérer comme isolées.

- (a) calculer le potentiel électrostatique créé par une charge sur une sphère.
- (b) en déduire l'énergie électrostatique emmagasinée par ce système.
- (c) comparez-la avec l'énergie électrostatique d'une charge électrique Q répartie uniformément dans le volume d'une sphère de rayon R . Commenter.
- (d) en déduire le champ électrique créé par cette même charge.
- (e) en déduire les potentiels électrostatiques et les champs électriques à la surface de chaque sphère.
- (f) quel serait le potentiel électrostatique des deux sphères une fois mises en contact par un fil conducteur ?
- (g) en déduire les champs électriques à la surface de chaque sphère. Commenter.

corrigé page : 82**EXERCICE 06 :**

Un nombre infini d'ions de charges alternativement positives et négatives $\pm q$ sont disposés à intervalle régulier a le long d'une droite. Trouver l'énergie potentielle d'un ion. On donne $a = 2.8 \times 10^{-10} m$ et $q = 1.6 \times 10^{-18} C$.

corrigé page : 85

EXERCICE 07 :

- (a) rappeler l'expression du potentiel V créé par un dipôle situé en O , en un point M de l'espace, en fonction de son moment dipolaire \vec{p} et du vecteur $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$.
- (b) en déduire le champ électrique \vec{E} .
- (c) calculer le champ et le potentiel pour $r = 1\text{ m}$, $\theta = \frac{\pi}{3}$, sachant que $p = 0.5\text{ nC} \cdot \text{m}$.
- (d) en quels points d'un plan méridien le champ électrique est-il perpendiculaire au moment dipolaire?

corrigé page : 86**EXERCICE 08 :**

La molécule d'eau H_2O a un moment dipolaire de $1,85\text{ D}$.

Sachant que la distance $O - H$ est $a = 97\text{ pm}$ et que l'angle que font entre elles les deux liaisons $O - H$ vaut $\theta = 104.30^\circ$, quelle est la fraction α de charge élémentaire du doublet $O - H$? **O - H** **corrigé page : 88**

EXERCICE 09 :

On superpose un champ électrique uniforme $\vec{E}_a = E_a \vec{e}_z$ et le champ d'un dipôle de moment $p \vec{e}_z$ placé à l'origine des coordonnées. À quelle condition le champ résultant présente-t-il une équipotentielle sphérique? Trouver le rayon de cette équipotentielle. **corrigé page : 89**

EXERCICE 10 :

- (a) calculer l'énergie électrostatique propre d'un doublet de charges élémentaires $(-e, e)$ et de moment $p = ea$.
A.N : $a = 0.1\text{ nm}$.
- (b) quelle est l'énergie potentielle d'interaction de ce même dipôle avec un champ appliqué de 105 V.m^{-1} ?

corrigé page : 89

5.4 corrigés :

EXERCICE 01 :

(a) Le potentiel électrostatique créé en un point M par une charge électrique q_1 en $(1, 0, 0)$ est donné par :

$$V_1(x, y) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{r_1}$$

avec $r_1 = \sqrt{(x-1)^2 + y^2}$ est la distance entre la charge q_1 et le point M . En remplaçant dans l'équation ci-dessus on obtient :

$$V_1(x, y) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{\sqrt{(x-1)^2 + y^2}}$$

D'autre part, le potentiel électrostatique créé en un point M par une charge électrique q_2 en $(-1, 0, 0)$ est donné par :

$$V_2(x, y) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_2}{r_2}$$

avec $r_2 = \sqrt{(x+1)^2 + y^2}$ est la distance entre la charge q_2 et le point M . En remplaçant dans l'équation ci-dessus on obtient :

$$V_2(x, y) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_2}{\sqrt{(x+1)^2 + y^2}}$$

Selon le principe de superposition, le potentiel électrostatique créé par les deux charges électriques q_1 et q_2 en M est la somme algébrique des deux potentiels électrostatiques V_1 et V_2 , à savoir :

$$V(x, y) = V_1(x, y) + V_2(x, y) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q_1}{\sqrt{(x-1)^2 + y^2}} + \frac{q_2}{\sqrt{(x+1)^2 + y^2}} \right]$$

(b) Le champ électrostatique créé en M par les deux charges électriques q_1 et q_2 est obtenu, en se rappelant que

$$\mathbf{E}(x, y) = -\nabla V(x, y) = - \left[\frac{\partial V}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial V}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial V}{\partial z} \vec{k} \right]$$

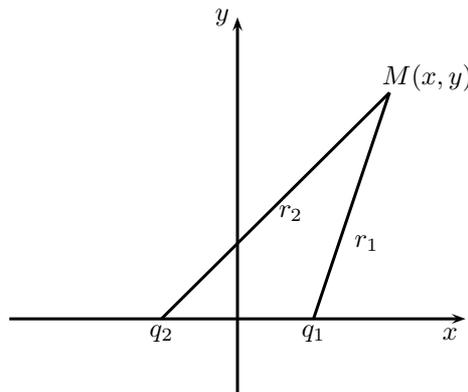


FIGURE 5.1 – Deux charges électriques q_1 en $(1, 0, 0)$ distant de r_1 par rapport au point $M(x, y)$ et q_2 en $(-1, 0, 0)$ distant de r_2 par rapport au point $M(x, y)$

Puisqu'on s'intéresse au champ électrostatique dans le plan Oxy , on a $\frac{\partial V}{\partial z} = 0$. Alors que

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{q_1}{4\pi\epsilon_0} \frac{x-1}{[(x-1)^2 + y^2]^{3/2}} - \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{x+1}{[(x+1)^2 + y^2]^{3/2}}$$

et

$$\frac{\partial V}{\partial y} = -\frac{q_1}{4\pi\epsilon_0} \frac{y}{[(x-1)^2 + y^2]^{3/2}} - \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{y}{[(x+1)^2 + y^2]^{3/2}}$$

(c) l'énergie potentielle électrostatique d'une charge q_3 placée en $(0, 1, 0)$ est donnée par

$$E_P^{q_3} = q_3 V(0, 1, 0)$$

où $V(0, 1, 0)$ est le potentiel électrostatique créé en $(0, 1, 0)$ par les deux charges q_1 et q_2 , égal à

$$V(0, 1, 0) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q_1}{r_1} + \frac{q_2}{r_2} \right]$$

avec $r_1 = \sqrt{2}$ et $r_2 = \sqrt{2}$, ce qui donne enfin :

$$V(0, 1, 0) = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} (q_1 + q_2)$$

et l'énergie électrostatique s'écrit :

$$E_P^{q_3} = \frac{q_3}{\sqrt{2}} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} (q_1 + q_2)$$

EXERCICE 02 :

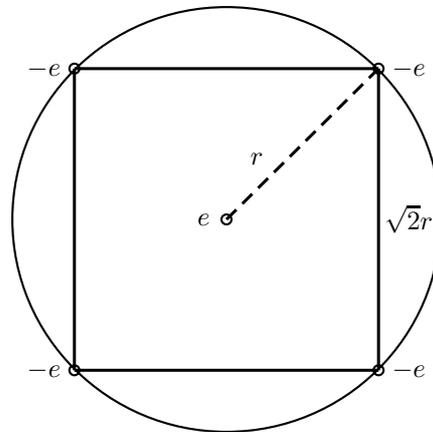


FIGURE 5.2 – Quatre électrons placés aux sommets d'un carré d'arête a et un proton au centre

(a) L'énergie électrostatique du système des 5 charges électriques $q_i, i = 1, \dots, 5$ est égale à

$$E_P = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^5 q_i V_i$$

où V_i sont les potentiels électrostatiques créés en \vec{r}_i par toutes les charges du système à l'exception de la charge q_i . En effet

$$E_P = \frac{1}{2} [-eV_1 - eV_2 - eV_3 - eV_4 + eV_5]$$

où V_1, V_2, V_3 et V_4 sont les potentiels électrostatiques créés par les électrons sur le cercle à l'endroit où se trouve le proton. Par symétrie, ces potentiels sont égaux. En effet

$$V_1 = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 r} - \frac{e}{4\pi\epsilon_0 2r} - \frac{e}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{2}r} - \frac{e}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{2}r}$$

ou encore

$$V_1 = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 r} (0.5 - \sqrt{2})$$

alors que le potentiel électrostatique créé par les quatre électrons à la position du proton est égal à

$$V_5 = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{4}{r}$$

Finalement :

$$E_P = \frac{1}{2} [-4eV_1 + eV_5] = \frac{1}{2} \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} [-4(0.5 - \sqrt{2}) - 4]$$

- (b) si on abandonne le système à partir du repos, il évoluera de telle sorte que son énergie cinétique augmente. Puisque l'énergie totale du système est conservée (elle ne dépend pas de la position des charges électriques en r) :

$$\frac{E_c + E_p}{dr} = 0$$

ou encore

$$\frac{E_c}{dr} = -\frac{E_p}{dr}$$

mais on sait auparavant que

$$\frac{dE_p}{dr} > 0$$

car on vient de trouver que

$$E_p = -\frac{A}{r}$$

avec $A = \frac{1}{2} \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} [-4(0.5 - \sqrt{2}) - 4] > 0$ ce qui signifie que l'augmentation de l'énergie cinétique s'accompagne avec une diminution du rayon r . Ainsi, les électrons une fois lâchés convergeront vers le noyau.

$$\frac{dE_c}{dr} < 0$$

EXERCICE 03 :

On choisit deux éléments de charges sur le fil conducteur dq_1 et dq_2 symétriques par rapport à une origine O (l'origine peut être choisie n'importe où sur le fil car supposé infini!). Le potentiel électrostatique créé par ces deux éléments de charge au point M distant de R du fil est donné par :

$$dV = dV_1 + dV_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{dq_1}{r_1} + \frac{dq_2}{r_2} \right]$$

avec

$$r_1 = r_2 = \sqrt{R^2 + z^2}$$

Le potentiel électrostatique créé en M par la totalité des charge sur le fil (infini) est donné par :

$$V(M) = \frac{2}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{+\infty} \frac{dq}{\sqrt{R^2 + z^2}}$$

avec

$$dq = \lambda dz$$

d'où

$$V(M) = \frac{2\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{+\infty} \frac{dz}{\sqrt{R^2 + z^2}} = \frac{2\lambda}{4\pi\epsilon_0} \left[\arcsin\left(\frac{z}{R}\right) \right]_0^{+\infty}$$

On est confronté à ce niveau au problème de la valeur infinie de l'intégrale. Ceci est due au fait que le potentiel électrostatique à l'infini n'est pas nul, alors que par définition du potentiel, ceci est considéré nul à l'infini (pas de charges électriques à l'infini alors que dans notre cas des charges électriques existent à l'infini). On peut contourner ce problème en calculant tout d'abord le champ électrostatique créé par les charges électriques sur ce fil au point M , ensuite on en déduit le potentiel électrostatique. En effet, en utilisant le théorème de Gauss sur une surface de gauss sous forme de cylindre de hauteur h et de rayon r dont l'axe (selon la hauteur) est suivant le fil chargé. Ce choix de la surface de gauss est dicté par le fait que le champ électrostatique créé par le fil infini est perpendiculaire au fil et que son module est le même sur la surface latérale d'un cylindre entourant le fil. On a donc

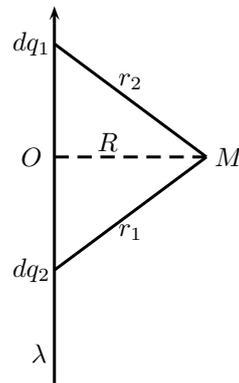
$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \int_{S_1} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} + \int_{S_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} + \int_{S_L} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$$

Puisque le champ électrostatique est radial,

$$\mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}_1 = \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}_2 = 0$$

alors que

$$\mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}_L = E dS_L$$

FIGURE 5.3 – Un fil conducteur supposé infini portant une charge électrique de distribution linéique λ

avec $dS_L = rdz d\theta$, ce qui donne

$$\int_{S_L} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \int_0^h dz \int_0^{2\pi} E(r)r d\theta = 2\pi r L E(r)$$

et

$$Q_{int} = \lambda h$$

d'où

$$2\pi r h E(r) = \frac{\lambda h}{\varepsilon_0}$$

ou encore, le module du champ électrostatique

$$E(r) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \frac{1}{r}$$

En coordonnées cylindriques, ceci s'écrit sous la forme

$$\mathbf{E}(\vec{r}) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \frac{1}{r} \vec{u}_r$$

D'autre part, on sait que

$$\mathbf{E}(\vec{r}) = -\nabla V(\vec{r}) = -\left(\frac{\partial V}{\partial r} \vec{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \vec{u}_\theta + \frac{\partial V}{\partial z} \vec{u}_z \right)$$

Par identification, on trouve

$$\frac{\partial V}{\partial r} = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \frac{1}{r},$$

$$\frac{\partial V}{\partial \theta} = 0,$$

et

$$\frac{\partial V}{\partial z} = 0$$

On a donc

$$dV = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \frac{dr}{r}$$

ce qui donne

$$V(r) = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \ln r + cste$$

EXERCICE 04 :

- (a) Le champ électrostatique s'obtient en utilisant le théorème de Gauss, avec la surface de Gauss sous forme d'une surface sphérique de rayon r concentrique à la boule chargée. Puisque la charge électrique est uniformément répartie dans la boule, le champ électrostatique en tout point de l'espace est radial (suivant l'axe portant \vec{u}_r) avec un module qui est constant en tout point de la surface sphérique concentrique à la boule chargée. Cette symétrie nous permet d'écrire :

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = E_r 4\pi r^2 = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$$

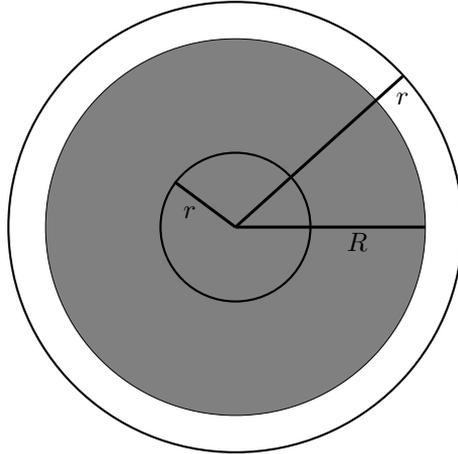


FIGURE 5.4 – Sphère de rayon R chargée uniformément avec une charge volumique ρ , et deux surfaces de Gauss sphériques de rayon r : $r < R$ et $r > R$.

- i. Pour $r > R$, la charge électrique contenue dans le volume délimité par la surface de Gauss (surface sphérique de rayon r) est égale à Q , ce qui donne

$$E_r(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2}$$

Le vecteur du champ électrostatique s'écrit donc sous la forme :

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \vec{u}_r$$

Mais on sait que

$$\vec{E} = -\nabla V = -\frac{dV}{dr} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2}$$

ou encore

$$dV = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} dr$$

Ce qui donne

$$V(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r} + C_2$$

Remarquons qu'à l'infini, le potentiel électrostatique est nul, ce qui donne $C_2 = 0$, et l'expression du potentiel électrostatique dans cette région est donnée par :

$$V(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r}$$

- ii. Pour $r < R$, la charge électrique contenue dans le volume délimité par la surface de Gauss (surface sphérique de rayon r) est égale à

$$Q_{int} = \rho \frac{4\pi}{3} r^3 = Q \left(\frac{r}{R}\right)^3$$

où Q est la charge totale de la boule. Ce qui donne

$$E_r(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q r}{R^3}$$

Le vecteur du champ électrostatique s'écrit donc sous la forme :

$$E(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q r}{R^3} \vec{u}_r$$

D'autre part, on a

$$E = -\nabla V = -\frac{dV}{dr} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q r}{R^3}$$

ou encore

$$dV = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R^3} r dr$$

Ce qui donne

$$V(r) = -\frac{1}{8\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R^3} r^2 + C_1$$

D'autre part, la condition de continuité en $r = R$ (les deux expressions de $V(r)$ donnent la même valeur) :

$$V(R) = -\frac{1}{8\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R^3} R^2 + C_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R}$$

Ce qui donne

$$C_1 = \frac{3}{8} \frac{Q}{\pi\epsilon_0} \frac{1}{R}$$

Cela nous permet d'écrire

$$V(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R} \left(\frac{3}{2} - \frac{r^2}{2R^2} \right)$$

(b) L'énergie électrostatique du système est donnée par

$$E_P = \frac{1}{2} \iiint \rho(\vec{r}) V(r) d\tau$$

Remarquons que la chargée électrique est totalement contenue dans la boule, c'est à dire que

$$\rho(r) = 0 \quad \text{pour} \quad r > R$$

et

$$\rho(r) = \rho \quad \text{pour} \quad r \leq R$$

Ce qui donne

$$E_P = \frac{\rho}{2} \int_0^R V(r) d\tau = \frac{\rho}{2} \int_0^R \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R} \left(\frac{3}{2} - \frac{r^2}{2R^2} \right) 4\pi r^2 dr$$

ou encore

$$E_P = \frac{3Q\rho}{4R\epsilon_0} \int_0^R r^2 dr - \frac{Q\rho}{4R^3\epsilon_0} \int_0^R r^4 dr$$

L'énergie électrostatique du système s'obtient donc

$$E_P = \frac{Q\rho R^2}{4\epsilon_0} - \frac{R^2 Q\rho}{20\epsilon_0} = \frac{Q\rho R^2}{5\epsilon_0}$$

Mais on sait aussi que

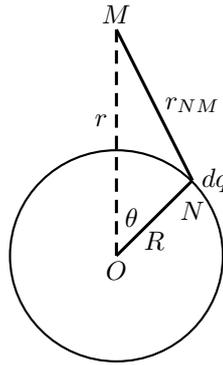
$$\rho = \frac{3Q}{4\pi R^3}$$

Ce qui, en remplaçant dans l'expression ci-dessus, donne

$$E_P = \frac{Q\rho R^2}{4\epsilon_0} - \frac{R^2 Q\rho}{20\epsilon_0} = \frac{3Q^2}{20\pi\epsilon_0 R}$$

(c) L'énergie potentielle électrostatique emmagasinée dans le noyau d'uranium est donnée par

$$E_P = \frac{3(92 \times 1.6 \times 10^{-19})^2}{20\pi \times 8.85 \times 10^{-12} \times 9 \times 10^{-15}} \text{ Joules}$$

FIGURE 5.5 – Une charge électrique positive déposée sur la surface d'une sphère de rayon R .**EXERCICE 05 :**

(a) La charge Q est répartie uniformément sur la surface d'une sphère de rayon R :

$$Q = \sigma 4\pi R^2$$

σ étant la densité surfacique. Cela entraîne le fait que le potentiel électrostatique créé à l'extérieur de la surface a une symétrie sphérique; c'est à dire qu'il a la même valeur en tout point sur une surface sphérique de rayon r centrée en O . En effet, chaque élément de charge électrique dq avec

$$dq = \sigma dS_R = \sigma R^2 \sin \theta d\theta d\varphi$$

contribue au potentiel électrostatique créé au point M avec une quantité égale à

$$dV(M) = \frac{\sigma R^2 \sin \theta d\theta d\varphi}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r_{NM}}$$

où r_{NM} est la distance entre le point M et la position de l'élément de la charge dq . D'autre part, on a :

$$\vec{ON} + \vec{NM} = \vec{OM}$$

ou encore

$$\vec{NM} = \vec{OM} - \vec{ON}$$

ce qui donne :

$$\begin{aligned} NM^2 = r_{NM}^2 &= (\vec{OM} - \vec{ON})^2 = OM^2 + ON^2 - 2 \cdot \vec{OM} \cdot \vec{ON} \\ r_{NM}^2 &= r^2 + R^2 - 2rR \cos \theta > 0 \end{aligned}$$

Remarquons que la variation de r_{NM} en fonction de θ est :

$$2r_{NM} dr_{NM} = 2rR \cos \theta$$

Ce Qui nous permet d'écrire

$$dV = \frac{\sigma R}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} dr_{NM} d\varphi$$

ou en remplaçant l'expression de r_{MN} ci dessus on trouve :

$$dV(M) = \frac{\sigma R^2 \sin \theta d\theta d\varphi}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{r^2 + R^2 - 2rR \cdot \cos \theta}}$$

Posons

$$u = r^2 + R^2 - 2rR \cos \theta$$

ce qui donne

$$du = 2rR \sin \theta d\theta$$

ou encore

$$dV = \frac{\sigma R}{8\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r} \cdot \frac{du}{\sqrt{u}} d\varphi$$

$$V = \frac{\sigma R}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r} \int_0^{2\pi} d\varphi \cdot \int_{r^2+R^2-2rR}^{r^2+R^2+2rR} u^{-\frac{1}{2}} du$$

L'intégration donne

$$V = \frac{\sigma R}{2\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r} \left[\sqrt{r^2 + R^2 + 2rR} - \sqrt{r^2 + R^2 - 2rR} \right]$$

ou encore

$$V = \frac{\sigma R}{2\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r} \left[\sqrt{(r+R)^2} - \sqrt{(r-R)^2} \right]$$

Remarquons ici que la racine carrée d'une expression est toujours positive, ce qui permet de réécrire l'expression ci-dessus

$$V(r) = \frac{\sigma R}{2\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r} [(r+R) - (\pm(r-R))]$$

On doit prendre le signe + si r était supérieur à R et le signe - si r était inférieur à R , à savoir :

$$V(r) = \begin{cases} \frac{\sigma R}{\epsilon_0} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R} & r < R \\ \frac{\sigma R^2}{\epsilon_0} \frac{1}{r} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} & r > R \end{cases}$$

Il est possible de retrouver le résultat précédent en procédant d'une autre manière. En effet, le potentiel électrostatique s'obtient en intégrant φ de 0 à 2π et r_{NM} de $|r-R|$ à $|r+R|$, à savoir :

$$V(r) = \frac{\sigma R}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \int_{r-R}^{r+R} dr_{NM} \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{\sigma R}{2r\epsilon_0} [r_{NM}]_{|r-R|}^{r+R}$$

i. Pour $r < R$, on aura

$$V(r) = \frac{\sigma R}{2r\epsilon_0} [r_{NM}]_{R-r}^{r+R} = \frac{\sigma R}{\epsilon_0} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R}$$

ii. Pour $r > R$, on aura

$$V(r) = \frac{\sigma R}{2r\epsilon_0} [r_{NM}]_{r-R}^{r+R} = \frac{\sigma R}{\epsilon_0} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r}$$

A l'extérieur de la sphère chargée, le potentiel électrostatique est le même que celui d'une charge électrique positionnée au centre de la sphère, alors qu'à l'intérieur de la sphère le potentiel électrostatique est constant et est égal à au potentiel électrostatique à la surface de la boule. En remplaçant les valeurs des charges électriques et de rayons pour chaque boule, on obtiendra les expressions du potentiel électrostatique pour chaque boule en tout point de l'espace.

(b) L'énergie électrostatique du système est donnée par

$$E_P = \frac{1}{2} \iint \sigma(\vec{r}) V(r) dS$$

Remarquons que la charge électrique est répartie uniformément sur la surface de la sphère où le potentiel électrostatique est constant et est égal à

$$V(R) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R}$$

ce qui permet d'écrire

$$E_P = \frac{1}{2} \int \sigma V(R) dS = \frac{1}{2} \frac{\sigma Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R} 4\pi R^2 = \frac{\sigma Q R}{2\epsilon_0}$$

Mais on sait que

$$\sigma = \frac{Q}{4\pi R^2}$$

L'expression de l'énergie électrostatique devient

$$E_P = \frac{Q^2}{8\pi R\epsilon_0}$$

C'est l'énergie potentielle électrostatique d'une charge électrique Q répartie uniformément sur la surface d'une sphère conductrice de rayon R . A comparer avec l'énergie potentielle électrostatique d'une charge électrique Q répartie uniformément dans le volume d'une sphère conductrice de rayon R donnée par (voir exercice précédent) :

$$E_P = \frac{3Q^2}{20\pi\epsilon_0 R}$$

On voit bien que

$$\frac{3Q^2}{20\pi\epsilon_0 R} > \frac{Q^2}{8\pi R\epsilon_0}$$

Ce résultat montre clairement qu'une charge électrique une fois déposée sur une sphère conductrice tend à adopter une répartition sur la surface plutôt que se répartir dans tout le volume, car la répartition surfacique correspond à une énergie minimale!

- (c) le champ électrostatique créé par cette répartition surfacique des charges est donnée par :

$$E = -\nabla V$$

Puisque V ne dépend que de r on a

$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial r} \cdot \vec{u}_r$$

ou encore

$$E = E_r \vec{u}_r$$

avec

$$E_r = -\frac{\partial V}{\partial r} = \begin{cases} \frac{\sigma R^2}{\epsilon_0 r^2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} & r \geq R \\ 0 & r < R \end{cases}$$

- (d) Le potentiel électrostatique correspondant à la sphère de rayon R_1 portant une charge électrique Q_1 est donné par

$$V_1(r) = \begin{cases} \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 R_1} \frac{1}{r} & r < R \\ \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} & r \geq R \end{cases}$$

alors que le potentiel électrostatique correspondant à la sphère de rayon R_2 portant une charge électrique Q_2 est donné par

$$V_2(r) = \begin{cases} \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0 R_2} \frac{1}{r} & r < R \\ \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} & r \geq R \end{cases}$$

Le champ électrostatique créé par la sphère de rayon R_1 est donné par

$$E_r^1 = -\frac{\partial V_1}{\partial r} = \begin{cases} \frac{\sigma_1 R_1^2}{\epsilon_0 r^2} = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 r^2} & r \geq R_1 \\ 0 & r < R_1 \end{cases}$$

et celui créé par la sphère de rayon R_2

$$E_r^2 = -\frac{\partial V_2}{\partial r} = \begin{cases} \frac{\sigma_2 R_2^2}{\epsilon_0 r^2} = \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2} & r \geq R_2 \\ 0 & r < R_2 \end{cases}$$

- (e) Une fois les deux sphères conductrices de rayons R_1 et R_2 portant des charges électriques Q_1 et Q_2 , respectivement, sont mises en contact, un nouveau équilibre électrique prend naissance moyennant un réarrangement des charges électriques sur le système composé maintenant de deux sphères et un fil conducteur. Ce réarrangement se fait par un transfert de charges électriques entre les deux sphères (le fil conducteur est considéré ici seulement comme un moyen de transfert de charges : il n'accumule pas des charges sur sa surface!) jusqu'à ce que le potentiel électrostatique sur les deux sphères soit le même. On peut faire l'analogie avec deux corps portés à deux températures différentes qui une fois mis en contact retrouvent la même température. Les charges électriques seront q_1 sur la première et q_2 sur la deuxième, avec (conservation de la charge électrique d'un système isolé)

$$Q_1 + Q_2 = q_1 + q_2$$

Le potentiel électrostatique sur chaque sphère est donné par

$$V_0 = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R_1} = \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R_2}$$

Les charges électriques sur chaque sphère est donnée par

$$q_1 = \frac{R_1(Q_1 + Q_2)}{R_1 + R_2} \quad \text{et} \quad q_2 = \frac{R_2(Q_1 + Q_2)}{R_1 + R_2}$$

avec

$$V_0 = \frac{Q_1 + Q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R_1 + R_2}$$

(f) Rappelons que le champ électrostatique créé sur la sphère de rayon R_1 et portant une charge q_1 égal à

$$E_r^1(r) = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2}$$

ce qui, en remplaçant r par R_1 dans l'expression ci-dessus, donne

$$E_r^1(r) = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R_1^2} = \frac{Q_1 + Q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R_1(R_1 + R_2)} = \frac{V_0}{R_1}$$

alors que le champ électrostatique créé sur la surface de la sphère de rayon R_2 et portant une charge q_2 est donné par :

$$E_r^2(r) = \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R_2^2} = \frac{Q_1 + Q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R_2(R_1 + R_2)} = \frac{V_0}{R_2}$$

EXERCICE 06 :

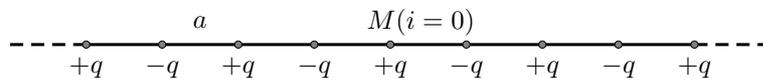


FIGURE 5.6 – Une chaîne supposée infinie de charges électriques de polarité alternée.

L'énergie potentielle électrostatique d'un ion à la position M ($i = 0$) sur la chaîne est donnée par

$$E_P(M) = \sum_{i=-\infty, i \neq 0}^{\infty} q_M V_i(M)$$

où q_M est la charge de l'ion en M et $V_i(M)$ le potentiel électrostatique créé en M par la charge électrique en i . La symétrie du système de charges électriques par rapport au point $i = 0$ permet d'écrire

$$E_P(M) = 2 \sum_{i=1}^{\infty} q_M V_i(M)$$

Remarquons que

$$V_i(M) = \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r_i}$$

où q_i est la charge électrique en i et r_i la distance entre la charge électrique en i sur la chaîne et la charge électrique en $i = 0$. Par exemple

$$V_1(0) = \frac{-q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{a} < 0$$

et

$$V_2(0) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{2a} > 0$$

Ce qui donne

$$E_P(M) = 2 \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \left(-\frac{1}{a} + \frac{1}{2a} - \frac{1}{3a} + \frac{1}{4a} - \dots \right)$$

ou encore

$$E_P(M) = -2 \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{a} \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots \right)$$

Remarquons que

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$$

ce qui pour $x = 1$ donne

$$\ln(2) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$

Ce résultat permet d'écrire l'expression de l'énergie potentielle électrostatique de l'ion en $i = 0$ comme

$$E_P(M) = -\frac{q^2}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{a} \ln(2) = -3.2 \times 10^{-16} \text{ Joules}$$

EXERCICE 07 :

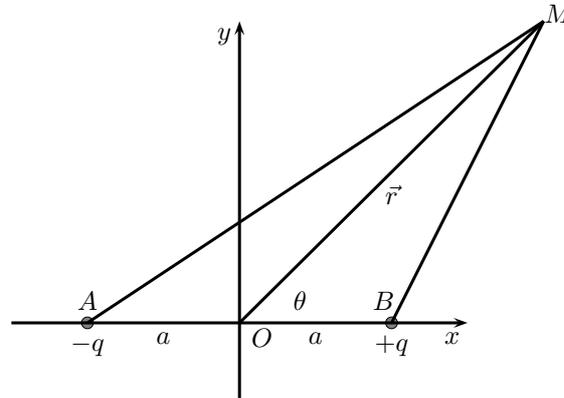


FIGURE 5.7 – Un dipôle électrostatique dont les charges positive est en B et la charge négative en A avec une distance $2a$ entre les deux charges électriques.

(a) Le potentiel électrostatique créé par ces deux charges au point M est donné par :

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{(-q)}{AM} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{(+q)}{BM}$$

ou encore

$$V(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{BM} - \frac{1}{AM} \right)$$

Mais on sait que (relation de Chasles) :

$$BM^2 = (\vec{BO} + \vec{OM})^2 = (\vec{OM} - \vec{OB})^2$$

ou encore

$$BM^2 = (\vec{OM} - \vec{OB}) \cdot (\vec{OM} - \vec{OB})$$

$$BM^2 = OM^2 + OB^2 - 2\vec{OM} \cdot \vec{OB} = OM^2 + OB^2 - 2OM \cdot OB \cos \theta$$

Ce qui donne

$$BM = \sqrt{r^2 + a^2 - 2r \cdot a \cos \theta}$$

En sortant r de la racine carrée, on obtient

$$BM = r \sqrt{1 + \left(\frac{a}{r}\right)^2 - 2\frac{a}{r} \cos \theta}$$

De la même manière, on obtient pour AM :

$$AM = r \sqrt{1 + \left(\frac{a}{r}\right)^2 + 2\frac{a}{r} \cos \theta}$$

Il serait utile de réécrire les expressions ci-dessus sous la forme :

$$\frac{1}{BM} = \frac{1}{r} \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{a}{r}\right)^2 - 2\frac{a}{r} \cos \theta}}$$

et

$$\frac{1}{AM} = \frac{1}{r} \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{a}{r}\right)^2 + 2\frac{a}{r} \cos \theta}}$$

Puisque $r \gg 2a$ ou encore $\left(\frac{a}{r}\right) \ll 1$, il serait judicieux de se contenter, avec une bonne approximation, du premier ordre en $\frac{a}{r}$. En effet, en faisant un développement limité de la fonction

$$\frac{1}{BM} = \frac{1}{r} \left(1 + \left(\frac{a}{r}\right)^2 - 2\frac{a}{r} \cos \theta\right)^{-\frac{1}{2}}$$

en gardant seulement le premier ordre en $\frac{a}{r}$, on obtient :

$$\frac{1}{BM} \approx \frac{1}{r} \left(1 + \frac{a}{r} \cos \theta\right)$$

De la même manière, on trouve :

$$\frac{1}{AM} \approx \frac{1}{r} \left(1 - \frac{a}{r} \cos \theta\right)$$

En remplaçant les expressions de AM et BM dans l'expression du potentiel électrostatique, on obtient :

$$V(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{2a \cos \theta}{r^2}$$

Rappelons que

$$\vec{p} = q \overrightarrow{BA} = q |\overrightarrow{AB}| \frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|} = 2qa \frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}$$

Le produit scalaire entre \vec{p} et \vec{r} donne :

$$\vec{p} \cdot \vec{r} = \frac{2qa}{|\overrightarrow{AB}|} \overrightarrow{AB} \cdot \vec{r} = \frac{2qa}{|\overrightarrow{AB}|} |\overrightarrow{AB}| \cdot r \cos \theta = 2qar \cos \theta$$

Ou encore

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^3} \vec{p} \cdot \vec{r} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{2a \cos \theta}{r^2} = V(\vec{r})!!$$

Donc, à la condition que le point M auquel un dipôle électrostatique crée un potentiel électrostatique est très lointain, ce dernier peut se mettre sous la forme :

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3}$$

où \vec{p} est le vecteur moment dipolaire du dipôle électrostatique et $r = |\vec{r}|$ la distance entre le centre du dipôle et le point où l'on veut mesurer le potentiel.

(b) Comme $V(\vec{r})$ ne dépend que de r et θ (coordonnées polaires),

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3}$$

seules les composantes E_r et E_θ du champ électrostatique \vec{E} seront non nulles. En effet

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\nabla V(\vec{r}) = -\left(\frac{\partial V}{\partial r} \vec{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \vec{u}_\theta\right)$$

où on a utilisé le gradient en **coordonnées polaires** (car c'est le système de coordonnées le plus approprié pour le cas présent !) Un simple calcul nous donne

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3} \left(\frac{2 \cos \theta}{r^3} \vec{u}_r + \frac{\sin \theta}{r^3} \vec{u}_\theta\right)$$

(c) le champ électrostatique en $r = 1\text{ m}$, $\theta = \frac{\pi}{3}$ est égal à

$$E_r = 4.5\text{V/m} \quad \text{et} \quad E_\theta = 3.9\text{V/m}$$

avec

$$E = \sqrt{E_r^2 + E_\theta^2} = 5.95\text{V/m}$$

alors que le potentiel électrostatique en ce point est égal à

$$V = 4.5\text{V}$$

(d) on voit bien sur la figure ci-dessus que le moment dipolaire s'écrit

$$\vec{p} = -p \cos \theta \vec{u}_r + p \sin \theta \vec{u}_\theta$$

et

$$\vec{E} = E_r \cos \theta \vec{u}_r + E_\theta \sin \theta \vec{u}_\theta$$

Si le champ électrique est perpendiculaire au moment dipolaire, on aura

$$\vec{E} \cdot \vec{p} = 0$$

ou encore

$$-\frac{2p^2 \cos^2 \theta}{4\pi\epsilon_0 r^3} + \frac{2p^2 \sin^2 \theta}{4\pi\epsilon_0 r^3} = 0$$

Cela donne

$$-2 \cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 0$$

ou encore

$$-3 \cos^2 \theta + 1 = 0$$

On obtient enfin $\cos \theta = \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \theta = \pm 55^\circ$. Les points recherchés sont donc situés sur les droites faisant un angle 55° et -55° avec la direction du dipôle.

EXERCICE 08 :

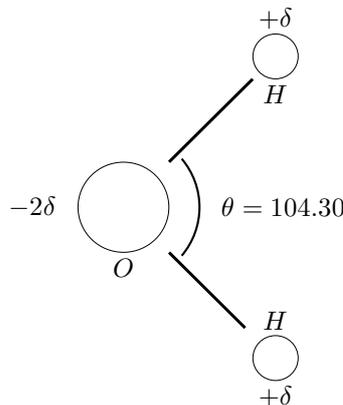


FIGURE 5.8 – La molécule d'eau modélisée comme deux dipôles électrostatiques.

La liaison entre l'atome H et l'atome O dans la molécule d'eau n'est pas parfaitement covalente : elle a comme même un caractère ionique partiel. En fait, l'électron qui participe à la liaison passe plus de temps au voisinage de O que de H , puisque l'atome O est plus électronégatif et a tendance à attirer la charge négative. C'est comme si l'atome H a perdu une partie de sa charge électrique au profit de l'atome O , ce qui est modélisé par une charge partielle négative $-\delta e$ sur l'atome O et une charge partielle positive $+\delta e$ sur l'atome H . Par conséquent, la molécule d'eau est le siège de deux dipôles électrostatiques partant de l'atome O et pointant chacun vers l'atome H , avec des moments dipolaires \vec{p}_1 et \vec{p}_2 , respectivement. Le moment dipolaire total de la molécule d'eau est donné par :

$$\vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2$$

avec

$$p^2 = p_1^2 + p_2^2 + 2 p_1 p_2 \cos \theta$$

où θ est l'angle entre les deux doublets $O - H$ et $p_1 = p_2 = p_0$. On écrit donc :

$$p^2 = 2 p_0^2 + 2 p_0^2 \cos \theta = 2 p_0^2 (1 + \cos \theta) = 4 p_0^2 \cos^2 \left(\frac{\theta}{2} \right)$$

ou encore

$$p = 2 p_0 \cos \left(\frac{\theta}{2} \right)$$

avec

$$p_0 = q a$$

où $q = \alpha e$ est la valeur absolue de la charge partielle sur l'atome O (ou H) et e la charge électrique de l'électron et a la distance entre les deux atomes O et H . On a donc

$$p_0 = \alpha e a = \frac{p}{2 \cos \left(\frac{\theta}{2} \right)}$$

ce qui nous permet d'obtenir

$$\alpha = \frac{p}{2 e a \cos \left(\frac{\theta}{2} \right)} = 0.32$$

EXERCICE 09 :

On superpose un champ électrique uniforme $E_a = E_a \vec{e}_z$ et le champ d'un dipôle de moment $p \vec{e}_z$ placé à l'origine des coordonnées. À quelle condition le champ résultant présente-t-il une équipotentielle sphérique? Trouver le rayon de cette équipotentielle.

EXERCICE 10 :

- calculer l'énergie électrostatique propre d'un doublet de charges élémentaires $(-e, e)$ et de moment $p = ea$.
A.N : $a = 0.1 \text{ nm}$.
- quelle est l'énergie potentielle d'interaction de ce même dipôle avec un champ appliqué de 105 V.m^{-1} ?

Chapitre 6

Conducteurs en équilibre

Sommaire

6.1	Rappel :	92
6.1.1	Équilibre électrostatique :	92
6.1.2	Capacité d'un conducteur en équilibre électrostatique :	92
6.2	Exercices :	93
6.3	corrigés :	95

6.1 Rappel :

6.1.1 Équilibre électrostatique :

l'équilibre électrostatique d'un conducteur est atteint lorsque aucune charge électrique ne se déplace plus à l'intérieur du conducteur.

Conséquences :

- Puisque les charges ne bougent pas ($F_s = 0$), le champ électrostatique est toujours nul dans un conducteur : $E_{int} = 0$.
- Si le champ est nul, et puisque $E = -\vec{grad}V$, le potentiel est constant à l'intérieur du conducteur. C'est un volume équipotentiel.

6.1.2 Capacité d'un conducteur en équilibre électrostatique :

Pour un conducteur en équilibre électrostatique, il y a un lien entre le potentiel auquel ce conducteur se trouve et la charge qui est répartie sur sa surface. En effet, le potentiel en tout point M à l'intérieur du conducteur peut s'écrire

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \int_S \frac{\sigma e dS}{r}$$

où S est la surface du conducteur, σe est la densité surfacique de charge et r la distance du point M sélectionné à l'élément de surface dS . Or, la charge totale Q est la somme des charges élémentaires :

$$Q = \int \int_S \sigma e dS$$

Donc si l'on multiplie σe par un coefficient quelconque β , puisque l'intégrale est une opération linéaire, V et Q seront aussi multipliés par β .

Donc le rapport Q/V est une constante. On l'appelle **capacité propre** du conducteur isolé, c'est à dire seul dans l'espace. Sa valeur dépend uniquement de la forme et de la grandeur de sa surface :

$$Q = CV$$

6.2 Exercices :

EXERCICE 01 :

On parle d'influence totale entre deux conducteurs A et B lorsque toutes les lignes de champ partant de B aboutissent sur A . Ceci est obtenu lorsque A entoure complètement B . L'application du théorème des éléments correspondants montre que la charge qui apparaît sur la surface interne de A est égale et opposée à la charge du conducteur B : $Q_B = Q_A^{\text{int}}$.

- retrouver ce résultat en utilisant le théorème de Gauss.
- calculer la charge extérieure Q_A^{ext} dans les cas suivants :
 - le conducteur A est isolé et initialement neutre.
 - le conducteur A porte une charge initiale q .

corrigé page : 95

EXERCICE 02 :

Soit un condensateur plan, constitué de deux conducteurs plans, portant respectivement des charges $+Q$ et $-Q$ réparties uniformément sur des surfaces $S_1 = S_2 = S$, séparés par une distance d . Une partie de l'espace entre les deux armatures est occupée par un matériau isolant de constante diélectrique ϵ (deux régions d'air séparent le matériau de part et d'autre des armatures).

- calculer la capacité du condensateur en supposant que les armatures sont portées à des potentiels V_0 et V_d .
- en déduire la capacité du condensateur dans les deux cas suivants :
 - le matériau isolant occupe tout l'espace entre les deux armatures.
 - pas de matériau isolant entre les armatures (l'espace est vide).
- en déduire l'énergie potentielle électrostatique emmagasinée dans le condensateur en fonction de la différence de potentiels entre les deux armatures.

corrigé page : 96

EXERCICE 03 :

Un condensateur plan de capacité $C=10 \mu F$, composé de deux armatures circulaires, est connecté à une source de tension (pile) de $12V$.

- quelle est la charge sur chaque armature ?
- en déduire l'énergie électrostatique emmagasinée dans le condensateur.
- quelle serait la charge sur les armatures si la séparation entre les armatures est doublée pendant que le condensateur reste connecté à la pile ?
- répondre à la question précédente si on double les rayons des armatures sans modifier leur séparation.

corrigé page : 97

EXERCICE 04 :

Un condensateur sphérique est constitué d'une sphère conductrice de rayon R_1 entourée complètement d'une coquille sphérique de rayon interne R_2 . En supposant que les deux conducteurs sont portés à des potentiels V_1 et V_2 et portant les charges Q et $-Q$, écrire l'expression de la capacité du condensateur. **corrigé page : 98**

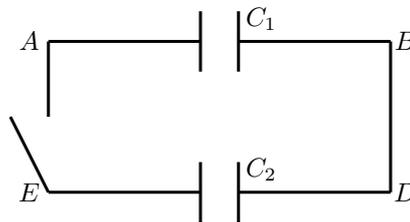
EXERCICE 05 :

Déterminer l'expression de la capacité d'un condensateur cylindrique constitué de deux cylindres conducteurs coaxiaux de rayons R_1 et R_2 , de hauteurs l ($l \gg R_1, R_2$), portant sur leurs surfaces des charges $+Q$ et $-Q$. A.N. $l = 10cm$, $R_1 = 1mm$ et $R_2 = 3mm$. **corrigé page : 99**

EXERCICE 06 :

Un condensateur de capacité $C = 33 \mu F$ a été chargé sous une tension de $24 V$; l'armature A porte une charge positive Q_A .

- (a) calculer l'énergie emmagasinée dans ce condensateur.
- (b) les bornes A et B sont reliées aux bornes E et D d'un condensateur complètement déchargé, de capacité $C = 2.2 \mu F$ (voir figure ci-dessous). Il apparaît un courant transitoire très bref, puis un équilibre électrique s'établit. La tension U_{AB} est alors égale à la tension U_{ED} ; l'armature A porte une charge q_A et l'armature E la charge q_E .
 - i. écrire une relation entre Q_A , q_A et q_E .
 - ii. écrire une seconde relation entre Q_A , q_E , C_1 et C_2 .
 - iii. en déduire numériquement q_A et q_E .
- (c) après la connexion, calculer l'énergie emmagasinée dans les deux condensateurs. Au cours de cette opération, l'énergie a-t-elle été conservée ? Sous quelle forme une partie de l'énergie électrique s'est-elle transformée dans les fils de jonction ? et en quelle quantité ?



corrigé page : 100

6.3 corrigés :

EXERCICE 01 : THÉORÈME DES ÉLÉMENTS CORRESPONDANTS

Considérons deux conducteurs A et B portant des charges Q_A et Q_B et deux éléments de surfaces dS_A et dS_B . Un tube de flux est construit sur la base de ces deux surfaces élémentaires. Calculons le flux à travers la surface fermée de ce tube. En fait, on sait d'après le théorème de Gauss que :

$$\oint E \cdot dS = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$$

avec

$$\oint E \cdot dS = \int \int_{S_L} E \cdot dS + \int \int_{S_A} E \cdot dS + \int \int_{S_B} E \cdot dS$$

Mais on sait que E à l'intérieur d'un conducteur en équilibre est nul, d'où :

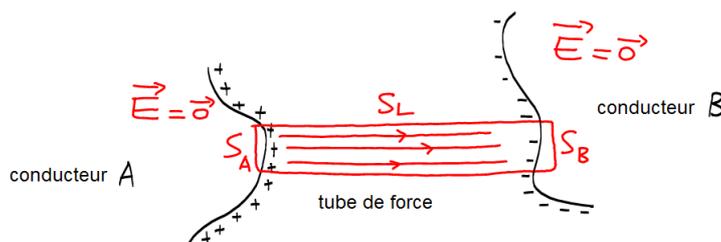


FIGURE 6.1 – Théorème des éléments correspondants

$$\int \int_{S_A} E \cdot dS = \int \int_{S_B} E \cdot dS = 0$$

Et le champ électrique entre les deux conducteurs est parallèle à S_L , d'où

$$\int \int_{S_L} E \cdot dS = 0$$

Ce qui donne :

$$\frac{Q_{int}}{\epsilon_0} = 0$$

;mais

$$Q_{int} = Q_B + Q_A = 0$$

ce qui donne :

$$\boxed{Q_A = -Q_B}$$

Dans le cas d'une influence totale (A entourant complètement le conducteur B) le conducteur B est chargé à une distribution σ_B , alors sur la face intérieure de A va apparaître une charge $-\sigma_A$ telle que :

$$\int \int_{S_A} \sigma_A \cdot dS = - \int \int_{S_B} \sigma_B \cdot dS$$

A l'extérieur du conducteur A va apparaître une charge Q_{ext}^A égale à la charge Q_A^{int} mais de polarité opposée. C'est comme si la charge Q_A^{ext} va nous révéler la quantité de charge du conducteur B à l'intérieur du conducteur A.

- (a) On applique le théorème de Gauss en considérant une surface de Gauss S à l'intérieur du conducteur A. Sachant que le champ est nul à l'intérieur du conducteur A (équilibre électrostatique) on a :

$$\phi = \int \int_S E_{int} \cdot dS = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0} = \frac{Q_B + Q_A^{int}}{\epsilon_0} = 0$$

d'où : $Q_A^{int} = -Q_B$

- (b) — cas où le conducteur A est initialement neutre :

$$Q_A^{int} + Q_A^{ext} = 0$$

$$Q_A^{ext} = -Q_A^{int} = Q_B$$

La charge portée par A sur sa surface externe est égale à la charge portée par le conducteur B.

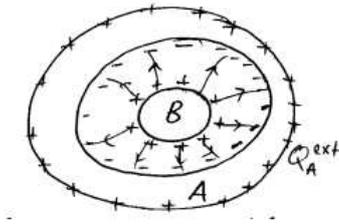


FIGURE 6.2 – Influence totale

— cas où le conducteur A porte initialement une charge électrique q :

$$Q_A^{\text{int}} Q_A^{\text{ext}} = q$$

$$Q_A^{\text{ext}} = q - Q_A^{\text{int}} = q + Q_B$$

EXERCICE 02 :

1. On sait d'après le résultat précédent que le champ électrique entre deux armatures chargées de même quantité de charge électrique mais de polarités opposées est (dans l'air) égal à

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

alors que dans un matériau quelconque le champ

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon}$$

où ϵ est la permittivité électrique du matériau et σ la densité surfacique de la charge électrique. Les deux armatures sont supposées portées à deux potentiels différents, d'où :

$$V(d) - V(0) = - \int_0^d \mathbf{E} \cdot d\vec{r}$$

$$V(d) - V(0) = \int_0^{x_1} \frac{\sigma}{\epsilon_0} \cdot dx + \int_{x_1}^{x_2} \frac{\sigma}{\epsilon} \cdot dx + \int_{x_2}^d \frac{\sigma}{\epsilon_0} \cdot dx$$

$$V(d) - V(0) = \left[\frac{\sigma}{\epsilon_0} \cdot x_1 + \frac{\sigma}{\epsilon} \cdot (x_2 - x_1) + \frac{\sigma}{\epsilon_0} \cdot (d - x_2) \right]$$

La charge électrique répartie sur une armature est donnée par

$$Q = \sigma S$$

et par définition la capacité du condensateur est le rapport entre la charge Q et la différence de potentiel entre les deux armatures :

$$C = \frac{Q}{V(d) - V(0)}$$

ou encore

$$C = \frac{\sigma S}{\left[\frac{\sigma}{\epsilon_0} x_1 + \frac{\sigma}{\epsilon} (x_2 - x_1) + \frac{\sigma}{\epsilon_0} (d - x_2) \right]}$$

Ce qui donne :

$$C = \frac{\epsilon \epsilon_0 S}{x_1 \epsilon + (x_2 - x_1) \epsilon + (d - x_2) \epsilon}$$

2.a cas où le matériau isolant occupe tout l'espace entre les deux armatures : on a : $x_1 = 0$ et $x_2 = d$ d'où

$$C = \frac{S \epsilon}{d}$$

la valeur de C ne dépend que de la géométrie du condensateur et de la permittivité diélectrique du matériau inséré entre les armatures

2.b cas où l'espace entre les deux armatures est vide (air) $x_1 = x_2$ d'où :

$$C = \frac{S\epsilon_0}{d}$$

3. L'expression de l'énergie potentielle électrostatique d'une charge distribuée sur une surface (avec une densité σ) est :

$$E_p = \frac{1}{2} \int \sigma(\vec{r}) \cdot V(\vec{r}) \cdot dS$$

Ou $V(\vec{r})$ est le potentiel électrostatique créé entre tous points sur la surface. Puisque chaque armature est portée à un potentiel constant $V(d)$ pour le plan en haut et $v(0)$ pour le plan en bas nous aurons :

$$E_p = \frac{1}{2} \int \sigma \cdot V_d \cdot dS + 1/2 \int (-\sigma) \cdot V_0 \cdot dS$$

Puisque V_d et V_0 sont constants :

$$E_p = \frac{1}{2} V_d \int \sigma \cdot dS - 1/2 V_0 \int (-\sigma) \cdot dS$$

$$E_p = \frac{1}{2} (V_d - V_0) \cdot Q$$

avec

$$Q = C(V_d - V_0)$$

d'où :

$$E_p = \frac{1}{2} C (V_d - V_0)^2$$

Q est la charge portée par une seule armature, la charge totale du condensateur étant nulle

$$Q + (-Q) = 0$$

EXERCICE 03 :

(a) La capacité d'un condensateur est définie par

$$C = \frac{Q}{V}$$

Q est la charge portée par une armature et V la différence de potentiel entre les deux armatures :

$$Q = CV = 10 \times 10^{-6} \cdot 12 = 1210^{-5} \text{ CCoulomb}$$

(b) L'énergie électrostatique emmagasinée dans le condensateur est donnée par

$$E_p = \frac{1}{2} CV^2 = 5 \times 10^{-6} \cdot 144 = 72 \times 10^{-5} \text{ J}$$

(c) La capacité d'un condensateur à armatures planes est donnée par :

$$C = \frac{S\epsilon}{d}$$

où S est la surface de l'armature, ϵ la permittivité diélectrique de matériau inséré entre les deux armatures et d la distance entre les deux armatures. D'autre part, on sait que

$$Q = CV = \frac{S\epsilon}{d} \cdot V$$

Pour un condensateur d'épaisseur d_1 on a :

$$Q_1 = \frac{S\epsilon}{d_1} V$$

alors que pour le condensateur d'épaisseur d_2

$$Q_2 = \frac{S\epsilon}{d_2} V$$

avec

$$d_2 = 2d_1$$

ce qui donne

$$Q_2 = \frac{1}{2} \frac{S\epsilon}{d_1} V = \frac{1}{2} Q_1 = 610^{-5} C$$

(d) Pour un condensateur de surface S_1 :

$$Q_1 = \frac{S_1 \varepsilon}{d} V$$

et

$$Q_2 = \frac{S_2 \varepsilon}{d} \cdot V$$

avec

$$S_2 = \pi r_2^2$$

et

$$r_2 = 2r_1$$

on aura donc

$$S_2 = 4S_1$$

d'où :

$$Q_2 = 4Q_1 = 48 \cdot 10^{-5} C$$

EXERCICE 04 :

La sphère (à l'intérieur) de rayon R_1 porte une charge $+Q$ et portée à un potentiel électrostatique V_1 , placée à l'intérieur d'une coquille sphérique de rayon intérieur R_2 et portant une charge $-Q_2$ avec un potentiel V_2 . Le champ électrique entre les deux sphères étant radial et de symétrie sphérique, il est possible d'appliquer le

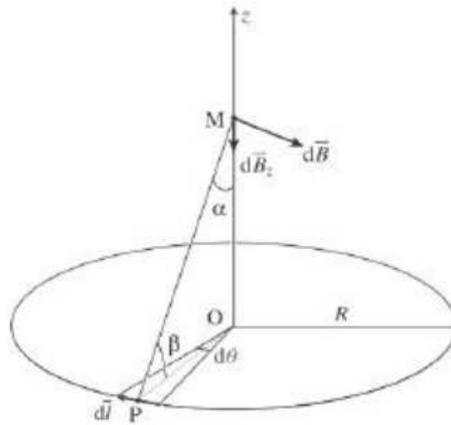


FIGURE 6.3 – Capacité d'un condensateur sphérique

théorème de Gauss, en prenant comme surface de Gauss la surface sphérique de rayon r . Cela nous permet d'écrire :

$$\oint E \cdot d\mathbf{S} = E_r 4\pi r^2 = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0} = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

ou encore

$$E_r = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{r^2}$$

et

$$\mathbf{E} = E_r \vec{u}_r = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{r^2} \vec{u}_r$$

D'autre part, on sait que

$$V(R_2) - V(R_1) = - \int_{R_1}^{R_2} \mathbf{E} \cdot d\vec{r}$$

avec

$$V(R_2) = V_2 \quad \text{et} \quad V(R_1) = V_1$$

On obtient donc

$$V_2 - V_1 = - \int_{R_1}^{R_2} \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{d\ell}{r^2}$$

avec

$$d\vec{l} = dr\vec{u}_r + r d\theta\vec{u}_\theta + r \sin\theta d\varphi\vec{u}_\varphi$$

d'où :

$$V_2 - V_1 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r^2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{r} \right]_{R_1}^{R_2}$$

ce qui donne enfin :

$$V_1 - V_2 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right]$$

où on a choisi $V_1 - V_2$ plutôt que $V_2 - V_1$, car ce dernier est négatif. La capacité du conducteur est donnée par :

$$C = \frac{Q}{V_2 - V_1} = 4\pi\epsilon_0 \frac{R_1 R_2}{R_2 + R_1}$$

EXERCICE 05 :

Supposons que la longueur du cylindre est très grande devant les rayons des cylindres $L \gg R_1, R_2$. Le champ

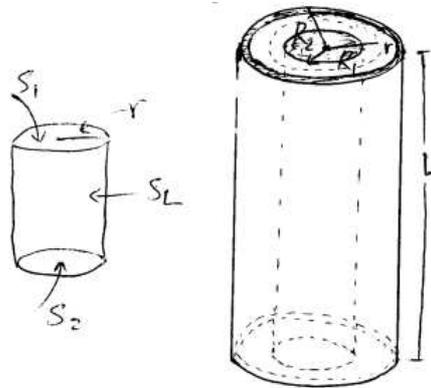


FIGURE 6.4 – Capacité d'un condensateur cylindrique

électrique est dans ce cas radial ($\vec{E} = E_r \vec{u}_r$) et a une symétrie cylindrique de rayon r (sur une surface cylindrique de rayon r le module de \vec{E} est le même). Cela nous permet d'appliquer le théorème de Gauss, en choisissant une surface cylindrique de rayon r ($R_1 < r < R_2$) comme surface de Gauss :

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$$

avec

$$\vec{E} // d\vec{S}_L$$

en tout point sur la surface latérale

$$S_L = 2\pi r L$$

et

$$\vec{E} \perp d\vec{S}_1$$

et

$$\vec{E} \perp d\vec{S}_2$$

avec $d\vec{S}_1$ et $d\vec{S}_2$ des éléments de surface sur les surfaces en haut et en bas du cylindre choisi. On a donc

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int \int_{S_L} \vec{E} \cdot d\vec{S} + \int \int_{S_1} \vec{E} \cdot d\vec{S} + \int \int_{S_2} \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

$$\int \int_{S_1} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int \int_{S_2} \vec{E} \cdot d\vec{S} = 0$$

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int \int_{S_L} \vec{E} \cdot d\vec{S} = E_r 2\pi r L$$

et

$$E_r 2\pi r L = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$$

avec

$$Q_{int} = \sigma 2\pi r L$$

ce qui donne :

$$E_r = \frac{\sigma R_1}{\epsilon_0 r}$$

ou encore

$$\vec{E} = \frac{\sigma R_1}{\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r} \cdot \vec{u}_r$$

D'autre part, on sait que :

$$V(R_2) - V(R_1) = - \int_{R_1}^{R_2} \vec{E} \cdot d\vec{r}$$

$$V_2 - V_1 = - \frac{\sigma \cdot R_1}{\epsilon_0} \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r}$$

$$V_1 - V_2 = \frac{\sigma R_1}{\epsilon_0} [\ln r]_{R_1}^{R_2}$$

$$V_1 - V_2 = \frac{\sigma R_1}{\epsilon_0} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

mais on sait que

$$\sigma = \frac{Q}{2\pi R_1 L}$$

d'où :

$$V_1 - V_2 = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 L} \cdot \ln \frac{R_2}{R_1}$$

on obtient :

$$C = \frac{Q}{V_1 - V_2} = \frac{2\pi\epsilon_0 L}{\ln \frac{R_2}{R_1}}$$

EXERCICE 06 :

- (a) . La tension entre les points (bornes du condensateurs) A et B est égale à $24 V$, ce qui permet à une charge électrique égale

$$Q_A = CV = 33 \times 10^{-6} \cdot 24C = 792 \times 10^{-6} C$$

de se mettre sur une armature du condensateur (l'autre armature portera la même charge Q_A mais de polarité différente). L'énergie électrostatique emmagasinée dans le condensateur est donnée par :

$$E_p = \frac{1}{2} CV^2 = 95.04 \times 10^{-4} J$$

- (b) les bornes A et B sont reliées aux bornes E et D d'un condensateur complètement déchargé.

a à l'état initial (sans le condensateur entre E et D)le condensateur entre A et B porte une charge Q_A sur son armature proche de A . Après avoir connecté un deuxième condensateur entre E et D la charge Q_A se répartit sur les deux armatures proches de A et E (sur les deux armatures proche de B et D la même charge se répartit mais de potentiels différents). La conservation de la charge électrique donne

$$\boxed{Q_A = q_A + q_E}$$

Aussi, le même potentiel s'établit entre les deux condensateurs, d'où :

$$V = \frac{q_A}{C_1} = \frac{q_E}{C_2}$$

ou encore

$$\frac{Q_A - q_E}{C_1} = \frac{q_E}{C_2}$$

La charge q_E s'obtient

$$\frac{Q_A}{C_1} = q_E \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right) = q_E \frac{C_1 + C_2}{C_1 C_2}$$

ce qui donne

$$q_E = \frac{Q_A C_2}{(C_1 + C_2)}$$

Alors que

$$q_A = Q_A - q_E = Q_A \left(1 - \frac{C_2}{(C_1 + C_2)} \right) = Q_A \frac{C_1}{(C_1 + C_2)}$$

avec

$$q_E = 49.5 \times 10^{-6} \text{ C}$$

et

$$q_A = 742.5 \times 10^{-6} \text{ C}$$

d L'énergie emmagasinée dans le condensateur A après connexion est donnée par

$$E_p^A = \frac{1}{2} \frac{q_A^2}{C_1} = 83.53 \times 10^{-4} \text{ J}$$

alors que celle emmagasinée dans le condensateur E est

$$E_p^E = \frac{1}{2} \frac{q_E^2}{C_2} = 7.57 \times 10^{-4} \text{ J}$$

L'énergie emmagasinée dans les deux condensateurs à l'état final est égale à :

$$E_p = E_p^A + E_p^E = 91.1 \times 10^{-4} \text{ J}$$

On voit bien que cette valeur est inférieure à celle du condensateur A à l'état initial ($95.04 \times 10^{-4} \text{ J}$). Ceci est dû au fait qu'en réalité les fils de connexion utilisés ont une certaine résistance qui fait perdre au système de l'énergie électrostatique sous forme de chaleur (énergie calorifique : effet Joule.). Cette quantité d'énergie perdue est égale à :

$$\Delta E_p = 95.04 \times 10^{-4} - 91.1 \times 10^{-4} = 3.96 \text{ J}$$

Chapitre 7

Magnétostatique

Sommaire

7.1	Rappel :	104
7.1.1	Phénomènes magnétiques	104
7.1.2	Les sources du champ magnétostatique	104
7.1.3	Champ magnétostatique	104
7.1.4	Invariances et symétries	105
7.1.5	Potentiel vecteur	105
7.1.6	Théorème d'Ampère	105
7.1.7	Synthèse - Flux du champ magnétostatique	106
7.2	Exercices :	107
7.3	corrigés :	108

7.1 Rappel :

7.1.1 Phénomènes magnétiques

Les matériaux ferromagnétiques (ex oxyde de fer Fe_3O_4) sont naturellement aimantés. Ils présentent deux pôles qui ne peuvent pas être isolés : deux pôles identiques se repoussent, deux pôles différents s'attirent.

Les matériaux paramagnétiques (ex fer à l'état métallique) sont sensibles au magnétisme sans être aimantés eux-mêmes.

Une force magnétique s'exerce entre un circuit parcouru par un courant et un matériau magnétique, et entre deux circuits parcourus par des courants.

7.1.2 Les sources du champ magnétostatique

Il n'existe pas de charge magnétique comme il existe des charges électriques! La description des phénomènes magnétostatiques peut-être ramenée à l'action de courants, sources de champ magnétostatique, sur d'autres courants

7.1.3 Champ magnétostatique

Force entre deux circuits

Soit deux éléments de circuits $d\mathbf{l}_1$ en P et $d\mathbf{l}_2$ en M respectivement parcourus par I_1 et I_2

$$d\mathbf{F}_{1 \rightarrow 2} = \frac{\mu_0 I_2 d\mathbf{l}_2 \wedge (I_1 d\mathbf{l}_1 \wedge \mathbf{PM})}{4\pi PM^3}$$

Formule de Biot et Savart

$$\mathbf{F}_{1 \rightarrow 2} = \int_{M \in \mathcal{C}_2} I_2 d\mathbf{l}_2 \wedge \int_{P \in \mathcal{C}_1} \frac{\mu_0 I_1 d\mathbf{l}_1 \wedge \mathbf{PM}}{4\pi PM^3} = \int_{M \in \mathcal{C}_2} I_2 d\mathbf{l}_2 \wedge \mathbf{B}_1(M)$$

Le champ magnétostatique créé au point M par un circuit

$$\mathbf{B}(M) = \int_{P \in \mathcal{C}} \frac{\mu_0 I d\mathbf{l} \wedge \mathbf{PM}}{4\pi PM^3}$$

entesla (T) avec $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H.m}^{-1}$ perméabilité du vide.

Formule de Laplace

La force exercée sur un circuit plongé dans un champ magnétostatique vérifie

$$\mathbf{F} = \int_{M \in \mathcal{C}} I d\mathbf{l} \wedge \mathbf{B}(M)$$

Exemples de calcul direct

Soit une portion de fil d'axe Oz parcouru par un courant d'intensité I . Calculer le champ magnétostatique en un point M situé à une distance r de l'axe. On donnera le résultat en fonction de α_1 et α_2 angles sous lesquels M voit les extrémités du fil.

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi r} (\sin \alpha_2 - \sin \alpha_1) \mathbf{e}_\theta$$

Si la longueur du fil est grande par rapport à r alors

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \mathbf{e}_\theta$$

Soit une boucle de rayon R parcouru par un courant d'intensité I . Calculer le champ magnétostatique en un point M de l'axe de la boucle. On notera α l'angle sous lequel M voit la boucle.

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{2r} \sin^3 \alpha \mathbf{e}_z$$

Lignes de champ

Une **ligne de champ** est tangente en chacun de ses points M au champ $\mathbf{B}(M)$.

Deux lignes de champ ne peuvent se couper que si $\mathbf{B}(M) = 0$ ou $\mathbf{B}(M)$ non défini.

7.1.4 Invariances et symétries

Invariances

Comme son analogue électrostatique, le champ magnétostatique présente les mêmes invariances que ses sources : les courants électriques.

Si les courants sont invariants par rotation et/ou par translation, \mathbf{B} ne dépend pas des variables associées.

Plan de symétrie et plan d'antisymétrie

Une distribution est symétrique par rapport à un plan Π si, pour tout point M il existe un symétrique M' , et si

$$I\mathbf{dl}(M) = \text{sym}I\mathbf{dl}(M')$$

Une distribution est antisymétrique par rapport à un plan Π^* si, pour tout point M il existe un symétrique M' , et si

$$I\mathbf{dl}(M) = -\text{sym}I\mathbf{dl}(M')$$

Nous généralisons les observations des cartes de champ :

\mathbf{B} est transformé en son antisymétrique par un plan Π

$$\mathbf{B}(M') = -\text{sym}\mathbf{B}(M)$$

d'autre part

$$\mathbf{B}(M \in \Pi) \perp \Pi$$

\mathbf{B} est transformé en son symétrique par un plan Π^*

$$\mathbf{B}(M') = \text{sym}\mathbf{B}(M)$$

d'autre part

$$\mathbf{B}(M \in \Pi^*) \in \Pi^*$$

7.1.5 Potentiel vecteur

L'équivalent de V appelé potentiel vecteur et noté \mathbf{A} n'est pas au programme de première année.

7.1.6 Théorème d'Ampère

La circulation du champ magnétostatique le long d'une courbe orientée fermée C est égal à la somme algébrique des courants enlacés par ce contour

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I_{\text{enlace}}$$

Vérifions en calculant la circulation le long d'un cercle de rayon r enlaçant un fil infini parcouru par un courant d'intensité I :

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \oint_C \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \mathbf{e}_\theta \cdot r d\theta \mathbf{e}_\theta = \mu_0 I$$

7.1.7 Synthèse - Flux du champ magnétostatique

	E	B
circulation	$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$	$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I_{enlace}$
flux	$\oint_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n}_{ext} dS = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$	$\oint_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n}_{ext} dS = 0$

E est à circulation conservative.

B tourne autour des courants.

E diverge (ou converge) à partir des charges.

Nous admettrons donc le caractère conservatif du flux de **B**.

Ce qui nous permet de montrer (sur un tube de champ) que lorsque les lignes de champ **B** se resserrent, le champ augmente, lorsqu'elles sont parallèles le champ est constant et lorsqu'elles s'écartent, le champ diminue. Idem pour **E** dans une zone vide de charge.

7.2 Exercices :

EXERCICE 01 :

Soit un fil conducteur en cuivre de longueur $L = 1\text{ m}$ et de diamètre $d = 0.84\text{ mm}$.

- Calculer la résistance du fil, sachant que la conductivité électrique du cuivre est égale à $\sigma_{Cu} = 5.8 \times 10^7 \Omega^{-1} \cdot m^{-1}$.
- En appliquant une d.d.p aux bords du fil, un champ électrique constant $E = 0.5 \frac{V}{m}$ s'y installe. Calculer l'intensité du courant électrique qui circule dans le fil.
- En déduire la d.d.p appliquée aux bords du fil.
- La densité volumique des charges électriques libres (électrons) du cuivre est égale à $\rho = 13.6 \times 10^9 \frac{C}{m^3}$, calculer la vitesse moyenne des électrons dans le fil.
- Calculer la puissance dissipée par effet Joule dans le fil conducteur.
- Calculer l'énergie dissipée par le fil pendant une minute.

corrigé page : 109

EXERCICE 02 :

Les expressions suivantes sont elles vraies ?

- Il est possible de séparer les deux pôles nord et sud d'un aimant.
- La vertu d'attraction d'un aimant peut être communiquée à une pièce en fer sans contact.
- La propriété d'attraction des aimants n'est pas sensible au réchauffement à des températures élevées.
- La force magnétique appliquée par un aimant sur une boussole est radiale.
- Il est possible de créer un champ magnétique en faisant circuler un courant permanent dans un circuit électrique fermé.

corrigé page : 109

EXERCICE 03 :

- On considère un fil conducteur, supposé infini (selon l'axe des z), parcouru par un courant permanent (continu) d'intensité I . Calculer le champ magnétique \mathbf{B} créé par ce courant en un point M situé à une distance R du fil conducteur. Commenter.
- Calculer la circulation du champ magnétique le long d'un cercle de rayon R autour du fil conducteur.

corrigé page : 110

EXERCICE 04 :

- Considérons un fil conducteur sous forme d'un cercle (spire) de rayon R parcouru par un courant permanent I . Calculer le champ magnétique \mathbf{B} créé par ce courant en un point M sur l'axe z , passant perpendiculairement par le centre de la spire.
- Un solénoïde est constitué d'un enroulement d'un fil conducteur sous forme de cylindre, et qui peut être modélisé par une juxtaposition de spires coaxiales, avec N spires par unité de longueur. Le solénoïde est parcouru par un courant permanent I . Utiliser le résultat précédent pour obtenir l'expression du champ magnétique créé en un point M sur l'axe du solénoïde (axe des z).
- Utiliser le théorème d'Ampère pour obtenir l'expression du champ magnétique créé dans un solénoïde de longueur infinie et parcouru par un courant permanent I .

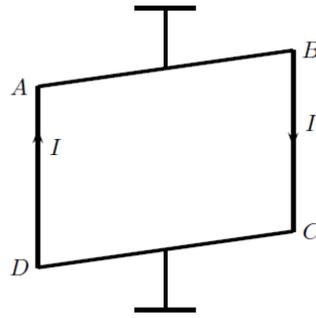
corrigé page : 111

EXERCICE 05 :

On dispose d'un cadre mobile $ABCD$, initialement dans le plan Oyz , pouvant tourner autour d'un fil suspendu aux extrémités et fixés aux milieux des côtés AB et CD (voir figure ci-dessous). Le cadre est parcouru par un courant permanent I dans le sens $ABCD$, alors qu'un champ magnétique $\mathbf{B} = B\vec{j}$ constant.

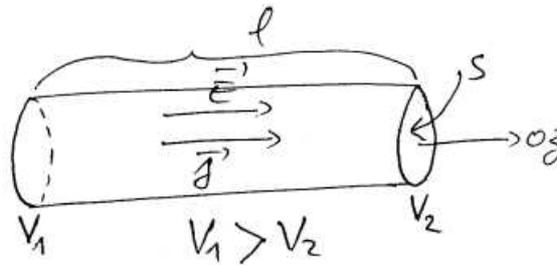
- En utilisant la loi de Laplace, expliquer dans quel sens va tourner le cadre.
- Calculer le couple de rotation en fonction de l'angle de rotation.
- Calculer l'énergie potentielle du cadre.

corrigé page : 115

FIGURE 7.1 – Cadre mobile parcouru par un courant permanent I et plongé dans un champ magnétique constant B .

7.3 corrigés :

EXERCICE 01 :

FIGURE 7.2 – Fil conducteur de longueur ℓ par un courant permanent I .

(a) La loi d'Ohm locale s'écrit :

$$\vec{j} = \sigma \cdot \vec{E}$$

où \vec{j} est le vecteur densité du courant, σ la conductivité électrique et \vec{E} le vecteur champ électrique au sein du conducteur, avec l'intensité du courant I :

$$I = \iint \vec{j} \cdot d\vec{S}$$

Considérons le cas où \vec{j} est constant dans toute la section S du fil conducteur, nous aurons donc :

$$I = j S$$

avec

$$j = \sigma E$$

ce qui donne

$$I = \sigma E S$$

D'autre part, on sait que

$$V_2 - V_1 = - \int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = -E \ell$$

puisque le champ électrique est constant. Ce qui donne

$$V_1 - V_2 = E \ell$$

Mais on sait que

$$E = \frac{I}{\sigma S}$$

En remplaçant dans l'expression ci-dessus, on trouve

$$V_1 - V_2 = \frac{\ell}{\sigma S} I$$

On reconnaît la loi d'Ohm macroscopique

$$V_1 - V_2 = RI$$

Par identification, on trouve l'expression de la résistance R du fil conducteur

$$R = \frac{\ell}{\sigma S} = \frac{\rho \ell}{S}$$

ou encore

$$R = \frac{\ell}{\sigma \pi \left(\frac{d}{2}\right)^2} = \frac{1}{5.8 \times 10^7 \cdot \pi (0.42)^2 \times 10^{-6}} = 0.031 \Omega$$

(b) L'intensité du courant électrique est donné par

$$I = \sigma E S = 5.8 \times 10^7 \times 0.5 \times \pi (0.42)^2 \times 10^{-6} = 16.1 A$$

(c) La d.d.p appliquée entre les bords du fil est égal à

$$V_1 - V_2 = RI = 0.031 \times 16.1 = 0.50 V$$

(d) la vitesse moyenne des charges est donnée par

$$v = \frac{j}{nq}$$

où n est le nombre de charge par unité de volume et q la valeur absolue de la charge élémentaire. Le calcul numérique donne

$$v = \frac{I}{nqS} = \frac{16.1}{\pi (0.42)^2 \times 10^{-6} \times 13.6 \times 10^9} = 2.14 \times 10^{-3} m/s$$

(e) La puissance dissipée par effet joule est donnée par :

$$P_d = (V_1 - V_2)I = 0.50 \times 16.1 = 8.01 \text{ Joule/s}$$

(f) L'énergie dissipée E_d par effet joule pendant une minute est égale à

$$E_d = P_d T = 8.01 \times 60 = 480.6 \text{ Joule}$$

EXERCICE 02 :

RAPPEL : un aimant est un matériau constitué de molécules, elles même peuvent être considérées comme des aimants minuscules, qui attirent des objets extérieurs en fer, ou contenant du fer du cobalt ou du Nickel. En présence d'un aimant, un clou de fer va se comporter comme un aimant. En temps normal, les atomes qui composent le clou sont orientés de manière aléatoire. En fait, ce sont les vecteurs moments dipolaires des dipôles magnétiques des électrons non appariés qui sont dirigés dans des directions aléatoires, telle que la somme vectorielle de tous les moments est nulle. Le clou n'a aucun pouvoir d'attraction. Si à présent on approche du clou en fer un aimant permanent, les vecteurs moments dipolaires du clou vont s'orienter sous l'effet du champ magnétique de l'aimant, le clou se comportera lui même comme un aimant. Tous les métaux ne sont pas des corps magnétiques, et tous les corps magnétiques ne sont pas des métaux. La terre elle même est un gros aimant. Les aimants permanents contiennent presque toujours des atomes d'au moins un des éléments chimiques suivants : fer, cobalt, ou un membre de la famille des lanthanides (terres rares) comme le Néodyme (Nd).

- Il est impossible de séparer le pôle sud et le pôle nord d'un aimant : A chaque fois qu'on coupe un aimant on obtient deux aimants plus petits contenant un pôle nord et un pôle sud. Il est en effet impossible d'isoler les pôles magnétiques comme on isole des charges électriques.
- Oui, la propriété d'attraction des aimants peut être communiquée à une pièce en fer, comme il a été déjà expliqué ci-dessus.
- En fait, la propriété d'attraction des aimants est sensible à la température. En effet, on définit la température de curie, ou point de curie qui est la température T_c au dessus de laquelle les matériaux (ferromagnétique) perdent leur aimantation.

Matériaux	T_c (K)
Co (cobalt)	1388
F_e Fer	1043
N_i (Nickel)	627
CO_2	386

- (d) La force magnétique appliquée par un aimant sur une boussole n'est pas radiale. Elle n'est pas portée par la droite reliant l'aimant et la boussole.
- (e) C'est justement ce qu'a remarqué le physicien danois Hans Oersted en 1820 lors d'une expérience en présence de ses étudiants sur l'utilisation de la pile de Volta dans un circuit électrique. Il remarqua qu'au passage d'un courant électrique au voisinage d'une boussole, celle-ci se dévie de sa direction naturelle (elle pointe vers le nord géographique de la terre). Cette expérience lui a fait comprendre qu'il était tout à fait possible de produire du magnétisme à partir d'un courant électrique. On vient de découvrir une deuxième source de magnétisme autre que les pierres naturelles, mais qui est complètement gérable à volonté!

EXERCICE 03 :

- (a) Selon la loi de Biot et Savart, on a :

$$dB(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Id\vec{\ell} \wedge \vec{PM}}{|\vec{PM}|^3}$$

avec

$$|\vec{PM}| = \frac{R}{\cos \theta}$$

où θ est l'angle qu fait le rayon du cercle R et la droite \vec{PM} . D'autre part, on a

$$|Id\vec{\ell} \wedge \vec{PM}| = |Id\ell| |\vec{PM}| \sin(d\vec{\ell}, \vec{PM})$$

ou encore

$$|Id\vec{\ell} \wedge \vec{PM}| = Id\ell PM \cos \theta = IRd\ell$$

Aussi, on a

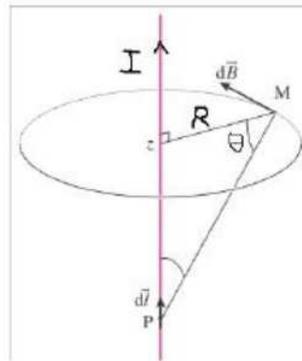


FIGURE 7.3 – Un fil conducteur supposé infini le long de l'axe des z parcouru par un courant permanent I .

$$OP = \ell = R \tan(\theta)$$

Ce qui donne

$$d\ell = \frac{R}{\cos^2 \theta} d\theta$$

En remplaçant ces expressions dans l'équation ci-dessus, on obtient

$$dB(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} IR \frac{R}{\cos^2 \theta} \frac{\cos^3 \theta}{R} d\theta = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{R} \cos \theta d\theta$$

Le sens du champ magnétique créé par le fil conducteur en M est obtenu en utilisant la convention du tire-bouchon. c'est ainsi que \vec{B} est perpendiculaire au plan contenant l'élément $d\vec{\ell}$ et le vecteur \vec{PM} . Le module

du champ magnétique créé en M par un fil conducteur supposé infini, s'obtient en intégrant l'expression par rapport à θ de $\theta = -\frac{\pi}{2}$ et $\theta = \frac{\pi}{2}$, à savoir :

$$B(M) = \frac{\mu_0 I}{4\pi R} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta d\theta = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}$$

Dans le système de coordonnées cylindriques, le champ magnétique B s'écrit :

$$B(R) = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} \vec{u}_\theta$$

Le champ a une symétrie cylindrique puisqu'il ne dépend que de R .

(b) la circulation du champ magnétique B le long d'un cercle du rayon R est égale à :

$$\oint B \cdot d\vec{l} = \int_0^{2\pi} \frac{\mu_0 I}{2\pi R} \cdot \vec{u}_\theta (R d\theta \vec{u}_\theta) = \mu_0 I$$

La circulation d'un champ magnétique B le long d'un circuit fermé (cercle de rayon R) est égale à μ_0 fois l'intensité du courant électrique qui traverse la surface du cercle. On vient de vérifier le théorème d'Ampère concernant la circulation d'un champ magnétique créé par un courant permanent le long d'un contour fermé!

EXERCICE 04 :

(a) On utilise le système de coordonnées cylindriques dans lequel un élément de déplacement sur la boucle s'écrit comme :

$$d\vec{l} = dl \vec{u}_\theta$$

D'autre part, le champ magnétique en un point sur l'axe des z est perpendiculaire à $d\vec{l}$. Il a donc seulement

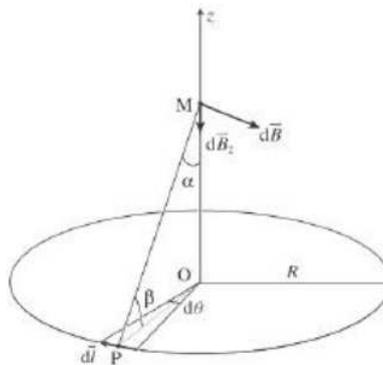


FIGURE 7.4 – Un conducteur électrique sous forme de cercle (spire) est parcouru par un courant électrique permanent I

deux composantes, une suivant \vec{u}_ρ et l'autre suivant \vec{u}_z , à savoir

$$B(M) = B_\rho \vec{u}_\rho + B_z \vec{u}_z$$

On dit que le champ magnétique est poloïdal. En effet, l'élément $d\vec{l}$ crée en M un champ magnétique :

$$dB(M) = \frac{\mu_0 I d\vec{l} \wedge \vec{PM}}{4\pi |\vec{PM}|^3}$$

avec

$$\vec{PM} = \vec{OM} - \vec{OP} = OM \vec{u}_z - R \vec{u}_\rho$$

Ce qui donne

$$dB(M) = \frac{\mu_0 I}{4\pi |\vec{PM}|^3} dl \vec{u}_\theta \wedge (OM \vec{u}_z - R \vec{u}_\rho)$$

D'autre part, on sait que

$$\vec{u}_\theta \wedge \vec{u}_z = \vec{u}_\rho \quad , \quad \vec{u}_\theta \wedge \vec{u}_\rho = -\vec{u}_z$$

et

$$OM = z \quad , \quad |\overrightarrow{PM}| = \sqrt{z^2 + R^2} \quad , \quad d\ell = R d\theta$$

Ce qui donne

$$d\mathcal{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{4\pi(z^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}} [z R d\theta \vec{u}_\rho + R^2 d\theta \vec{u}_z]$$

Le champ magnétique en M est la contribution de tous les éléments de courant électrique sur la boucle. Il est donc obtenu en intégrant l'expression ci-dessus par rapport à θ de 0 à 2π :

$$\mathcal{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{4\pi(z^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}} \left[z R \int_0^{2\pi} d\theta \vec{u}_\rho - R^2 \int_0^{2\pi} d\theta \vec{u}_z \right]$$

Remarquons que le vecteur $\int_0^{2\pi} d\theta \vec{u}_\rho$ est nul car c'est la résultante d'une somme continue de vecteurs de même composante mais de directions qui s'annulent mutuellement en faisant le tour du cercle complet. Par contre, les contributions des éléments $d\ell$ selon l'axe des z s'ajoutent, ce qui donne finalement l'expression du champ magnétique créé en un point z par une boucle de rayon R parcourue par un courant électrique continue I sous la forme :

$$\mathcal{B}(z) = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{R^2}{(z^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}} \vec{u}_z$$

- (b) Un solénoïde est constitué d'un enroulement d'un fil conducteur autour d'un cylindre (les spires ne se touchent pas car recouvertes d'une matière isolante). On suppose que ce fil est suffisamment mince pour pouvoir modéliser ce solénoïde comme une juxtaposition de spires coaxiales, avec n spires par unité de longueur. Chaque spire est parcourue par le même courant permanent (continu) I . Dans ce cas, un élément

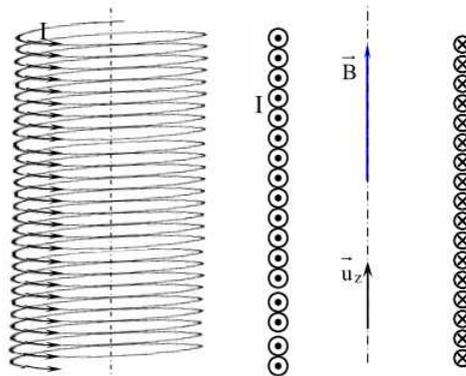


FIGURE 7.5 – Solénoïde infini parcouru par un courant permanent I

de courant égal à $n dz Id\ell$ (le produit de $Id\ell$ par le nombre de spire selon z : $n dz$) crée en un point z sur l'axe du cylindre un élément de champ magnétique égal à

$$d\mathcal{B}(z) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{n dz Id\ell \wedge \overrightarrow{PM}}{|\overrightarrow{PM}|^3}$$

ou encore (en utilisant le résultat obtenu pour une boucle) :

$$d^2 \mathcal{B}(z) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{R^2 n dz d\theta}{(z^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}} \vec{u}_z$$

Le champ magnétique créé en un point z sur l'axe du cylindre par un solénoïde supposé infini est obtenu par l'intégration de l'expression ci-dessus par rapport à θ de 0 à 2π et z de $-\infty$ à $+\infty$:

$$\mathcal{B}(z) = \frac{\mu_0 I n R^2}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\theta \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dz}{(z^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}} \vec{u}_z = \frac{\mu_0 I n R^2}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dz}{(z^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}} \vec{u}_z$$

On utilise le changement de variable suivant :

$$z = R \tan t \quad \text{avec} \quad dz = \frac{R dt}{\cos^2 t}$$

Après calcul simple, on aura

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dz}{(z^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{R^2} \left[\frac{z}{R^2 + z^2} \right] = \frac{2}{R^2}$$

Ce qui donne enfin

$$B(z) = n\mu_0 I \vec{u}_z$$

- (c) Considérons un solénoïde infini composé de n spires par unité de longueur, parcouru par un courant permanent I . Étant donnée la géométrie du solénoïde, on adopte le système de coordonnées cylindriques avec l'axe z le long de l'axe du cylindre formé par le solénoïde. La densité du courant électrique est suivant la direction \vec{u}_θ , à savoir

$$\mathbf{J}(\rho, \theta, z) = J(\rho) \vec{u}_\theta$$

. Puisque le vecteur densité de courant \mathbf{J} est suivant \vec{u}_θ , le champ magnétique produit doit être perpendiculaire à \vec{u}_θ . Sur l'axe du solénoïde le champ magnétique créé par un courant continu parcourant celui-ci est suivant \vec{u}_z . En un point quelconque à l'intérieur du solénoïde le vecteur champ magnétique est aussi dirigé suivant l'axe des z . En effet, il est facile de vérifier que le plan $(\vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta)$ est un plan de symétrie pour le champ magnétique; c'est à dire qu'à un élément de courant à une distance z de ce plan créant un champ magnétique en un point sur ce plan on peut toujours trouver un autre élément de courant en $-z$ du plan qui crée sur le même plan un champ magnétique tel que la somme des deux vecteurs est suivant z . D'autre part, le plan $(\vec{u}_\rho, \vec{u}_z)$ est aussi un plan de symétrie par rapport au champ magnétique. Cela veut dire que le champ magnétique ne peut pas avoir une composante suivant \vec{u}_θ . Par conséquent, on a

$$B(\rho, \theta, z) = B(\rho) \vec{u}_z$$

. On applique le théorème d'Ampère sur trois contours fermés différents : C_1 un contour rectangulaire de longueur $\Delta\ell$ situé entièrement à l'intérieur du solénoïde, C_2 entièrement à l'extérieur et C_3 "à cheval" sur les spires.

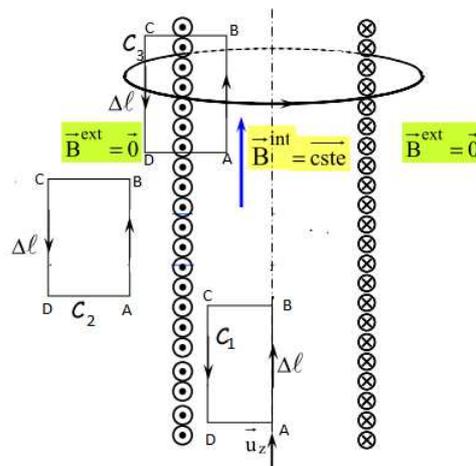


FIGURE 7.6 – Application du théorème d'Ampère à un solénoïde infini.

CONTOUR 1

La circulation du champ magnétique le long du contour fermé $ABCD$ est nul car aucun courant électrique ne passe à travers la surface délimitée par ce contour (le contour étant à l'intérieur du solénoïde) :

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\vec{\ell} = \int_A^B \mathbf{B} \cdot d\vec{\ell} + \int_B^C \mathbf{B} \cdot d\vec{\ell} + \int_C^D \mathbf{B} \cdot d\vec{\ell} + \int_D^A \mathbf{B} \cdot d\vec{\ell} = 0$$

Les circulations du champ magnétique le long des tronçons BC et DA sont nulles car le champ magnétique \mathbf{y} est perpendiculaire (il a une seule composante suivant z)

$$\int_B^C \mathbf{B} \cdot d\vec{\ell} + \int_D^A \mathbf{B} \cdot d\vec{\ell} = 0$$

Il nous reste donc

$$\int_A^B \mathbf{B} \cdot d\vec{\ell} + \int_C^D \mathbf{B} \cdot d\vec{\ell} = 0$$

Prenons ces droites de longueurs très petites $AB = CD = \ell$ de telle façon que le champ magnétique y est constant. On peut donc écrire

$$\mathbf{B} \cdot \overrightarrow{AB} + \mathbf{B} \cdot \overrightarrow{CD} = B_{AB}\ell - B_{CD}\ell = 0$$

ou encore

$$B_{AB} = B_{CD}$$

Le champ magnétique est le même en tout point à l'intérieur du solénoïde (uniforme) : il ne dépend ni de ρ ni de θ ni de z .

CONTOUR 2 :

Puisque aucun courant ne passe à travers la surface de ce contour, on obtient :

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\vec{\ell} = \int_A^B \mathbf{B} \cdot d\vec{\ell} + \int_B^C \mathbf{B} \cdot d\vec{\ell} + \int_C^D \mathbf{B} \cdot d\vec{\ell} + \int_D^A \mathbf{B} \cdot d\vec{\ell} = 0$$

Le champ magnétique doit être le même en tout point à l'extérieur du solénoïde (même en un point très éloigné du solénoïde) ; mais puisque le champ magnétique en un point très éloigné de la source doit être nul, on conclut qu'il doit être aussi nul au voisinage du solénoïde.

CONTOUR 3

Pour le contour 3 on a :

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\vec{\ell} = \int_A^B \mathbf{B} \cdot d\vec{\ell} + \int_B^C \mathbf{B} \cdot d\vec{\ell} + \int_C^D \mathbf{B} \cdot d\vec{\ell} + \int_D^A \mathbf{B} \cdot d\vec{\ell} = -n\ell\mu_0\mathbf{I}$$

Car le nombre de spires qui passent à travers la surface de ce contour est $n\ell$, donc $n\ell\mathbf{I}$ passent à travers. Le signe moins indique que, selon la convention, le courant \mathbf{I} positif correspondant au contour orienté devrait sortir de la page et non pas rentrer, comme c'est le cas ici.

La circulation

$$\int_A^B \mathbf{B} \cdot d\vec{\ell}$$

est nulle car le champ \mathbf{B} y est nul. Aussi, les circulations

$$\int_B^C \mathbf{B} \cdot d\vec{\ell} = \int_A^D \mathbf{B} \cdot d\vec{\ell} = 0$$

car le champ \mathbf{B} y est perpendiculaire au contour. Il nous reste juste la circulation

$$\int_C^D \mathbf{B} \cdot d\vec{\ell} = -n\ell\mu_0\mathbf{I}$$

On choisit un droite $CD = \ell$ très petite de telle sorte que le champ magnétique y est constant. On peut écrire :

$$\int_C^D \mathbf{B} \cdot d\vec{\ell} = \mathbf{B} \cdot \overrightarrow{CD} = B_z(\rho)\vec{u}_z \cdot \ell(-\vec{u}_z) = -\ell B_z(\rho) = -n\ell\mu_0\mathbf{I}$$

ou encore

$$B_z(\rho) = n\mu_0\mathbf{I}$$

Finalement, le champ magnétique à l'intérieur du solénoïde est donnée par :

$$\mathbf{B} = n\mu_0\mathbf{I}\vec{u}_z$$

alors qu'il est nul à l'extérieur du solénoïde.

EXERCICE 05 :

- (a) Lorsqu'un fil conducteur, parcouru par un courant permanent I , est placé dans un champ magnétique B (constant) chaque élément $d\vec{\ell}$ du fil subit une force de Laplace égale à :

$$d\vec{F} = I d\vec{\ell} \wedge \vec{B}$$

On suppose que le cadre $ABCD$ est sur le plan Oyz et le champ magnétique uniforme :

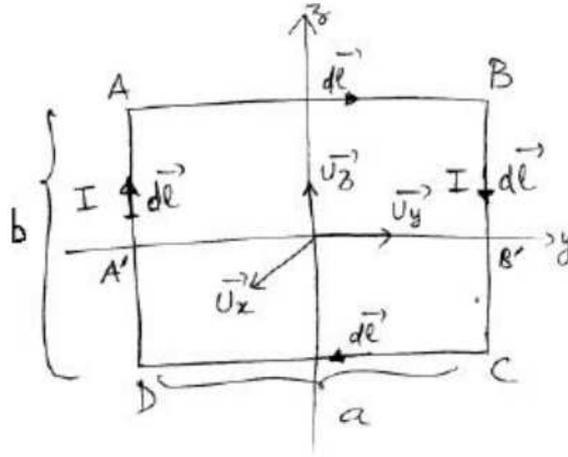


FIGURE 7.7 – Cadre mobile parcouru par un courant électrique permanent I plongé dans un champ magnétique constant.

$$\vec{B} = B\vec{u}_y$$

A l'instant où on met le cadre dans la région où règne le champ magnétique \vec{B} , les 4 cotés du cadre subissent les forces suivantes :

Force sur le coté AB : $d\vec{\ell} \wedge \vec{B} = \vec{0}$ car $d\vec{\ell}$ est parallèle à \vec{B} :

$$\vec{F}_{AB} = \vec{0}$$

Force sur le coté CD : $d\vec{\ell} \wedge \vec{B} = \vec{0}$ car $d\vec{\ell}$ est parallèle à \vec{B} :

$$\vec{F}_{CD} = \vec{0}$$

Force sur coté DA :

$$d\vec{F}_{DA} = I d\vec{\ell} \wedge \vec{B} = I(d\ell\vec{u}_z) \wedge (B\vec{u}_y) = Id\ell B(-\vec{u}_x) = -Id\ell B\vec{u}_x$$

La force appliquée sur la ligne entière DA est obtenue par intégration entre $-\frac{b}{2}$ et $\frac{b}{2}$

$$\vec{F}_{DA} = \left(-IB \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} d\ell \right) \cdot \vec{u}_x = -IBb\vec{u}_x$$

La force \vec{F}_{DA} est représentée par symétrie en A' .

Force sur le coté BC :

$$d\vec{F}_{BC} = I d\vec{\ell} \wedge \vec{B} = I(d\ell\vec{u}_z) \wedge (B\vec{u}_y) = -Id\ell B\vec{u}_x$$

La force appliquée sur la ligne entière BC est obtenue par intégration entre $\frac{b}{2}$ et $-\frac{b}{2}$

$$\vec{F}_{BC} = \left(-IB \int_{\frac{b}{2}}^{-\frac{b}{2}} d\ell \right) \cdot \vec{u}_x = IBb\vec{u}_x$$

On voit bien que la somme des forces qui s'appliquent sur le cadre \vec{F}_{DA} et \vec{F}_{BC} est nulle, et pourtant ça tourne! Pour caractériser ce mouvement, on calcule le moment de ces deux forces par rapport à l'axe oz , autour duquel le cadre tournera :

$$\mathcal{M}_{/O} = \vec{OA}' \wedge \vec{F}_{DA} + \vec{OB}' \wedge \vec{F}_{BC}$$

ou encore

$$\mathcal{M}_{/O} = \frac{a}{2}(-\vec{u}_y) \wedge (-IBb) \cdot \vec{u}_x + \frac{a}{2}\vec{u}_y \wedge IBb\vec{u}_x$$

ce qui donne

$$\mathcal{M}_{/O} = a b I B (\vec{u}_y \wedge \vec{u}_x)$$

$$\mathcal{M}_{/O} = -a b I B \vec{u}_z$$

Ce moment $\mathcal{M}_{/O}$ donne naissance à une accélération angulaire qui fait tourner le cadre autour de l'axe z dans la direction représentée sur la figure ci-dessous.

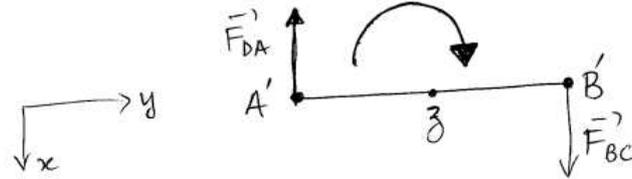


FIGURE 7.8 – Sens de rotation du cadre parcouru par un courant permanent I dans un champ magnétique uniforme B .

- (b) Ce moment va faire tourner le cadre à partir du repos, en faisant un angle α avec l'axe oy . Les forces F_{DA} et F_{BC} sont représentées ci-dessous. Les moments des forces F_{DA} et F_{BC} sont donnés par :

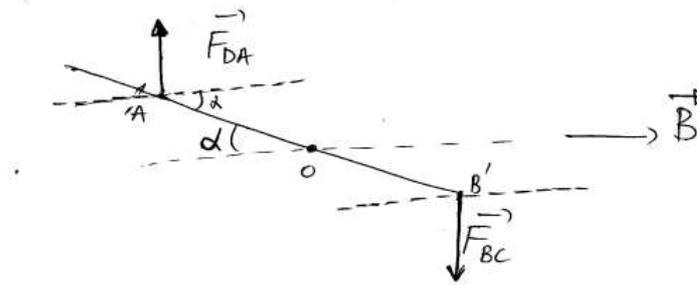


FIGURE 7.9 – Sens de rotation du cadre en fonction d'un angle α .

$$\mathcal{M}_{/O} = \vec{OA}' \wedge F_{DA} + \vec{OB}' \wedge F_{BC}$$

ou encore

$$\mathcal{M}_{/O} = \frac{a}{2} F_{DA} \sin(\vec{OA}', F_{DA}) \vec{u}_z + \frac{a}{2} F_{BC} \sin(\vec{OB}', F_{BC}) (-\vec{u}_z)$$

L'angle entre \vec{OA}' et F_{DA} est égal à $\pi/2 + \alpha$ avec

$$\sin(\pi/2 + \alpha) = \cos \alpha$$

On obtient donc :

$$\mathcal{M}_{/O} = -\frac{a}{2} (F_{AB} \cos \alpha + F_{BC} \cos \alpha)$$

$$\mathcal{M}_{/O} = -a b I B \cos \alpha \vec{u}_z$$

Remarquons que dans le cas où $\alpha \neq 0$, les éléments de forces dF_{AB} et dF_{DC} ne sont plus nuls car sur les cotés AB et CD , les éléments $d\ell$ et B ne sont plus parallèles entre eux.

$$dF_{AB} = Id\ell \wedge B \neq 0$$

$$dF_{DC} = Id\ell \wedge B \neq 0$$

mais ces forces sont dirigées suivant l'axe de rotation dans deux directions opposées : elles ne contribuent pas donc à la rotation du cadre.

- (c) L'énergie potentielle d'un circuit parcouru par un courant I , placé dans un champ magnétique \mathcal{B} est donnée par :

$$E_p = -\vec{m} \cdot \mathcal{B}$$

\vec{m} est le moment magnétique (mesuré en $A.m^2$) du circuit donné par :

$$\vec{m} = IS\vec{n}$$

où S est la surface du circuit électrique (cadre) et I le courant électrique parcourant le circuit. Le vecteur \vec{n} est un vecteur unité perpendiculaire à la surface selon la convention suivante :

$$S = ab\vec{k}$$

ce qui donne

$$E_p = -m \cdot B \cos(\vec{m}, \mathcal{B})$$

$$E_p = -IS B \cos\left(\frac{\pi}{2}, -\alpha\right)$$

$$E_p = -m S B \sin \alpha$$