République Algérienne Démocratique et Populaire

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

وزارة التعليم العالي و البحث العلمي

المدرسة العليا في العلوم التطبيقية- تلمسان

Ecole Supérieure en Sciences Appliquées Tlemcen

POLYCOPIE

Mécanique Rationnelle I
Exercices Corrigés

Deuxième année formation préparatoire

Elaboré par :

TENNOUGA Lahcène & KHELLADI Smaine

Avant-Propos

Ce polycopié est destiné aux étudiants inscrits en deuxième année formation préparatoire.

Le contenu de ce polycopié, correspond au programme officiel de la matière enseignée en semestre trois. Il contient des exercices résolus sur la mécanique rationnelle 1. Les solutions sont détaillées et permettent à l'élève de compléter sa compréhension du cours. Ce polycopié contient trois parties d'exercices corrigés :

1. Les outils mathématiques.

2. La Statique du solide (statique analytique, statique graphique et statique avec frottement).

3. La cinématique du solide.

Table des Matières

I. Outils Mathématiques

II. Statique du Solide

III. Cinématique du Solide

I. Outils Mathématiques

I. Outils Mathématiques

I.1. Calcul Vectoriel

Exercice 01 :

Soient trois points $A(-3,4)$; $B(-2,1)$ et $C(1,-1)$ repérés dans un repère $R(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

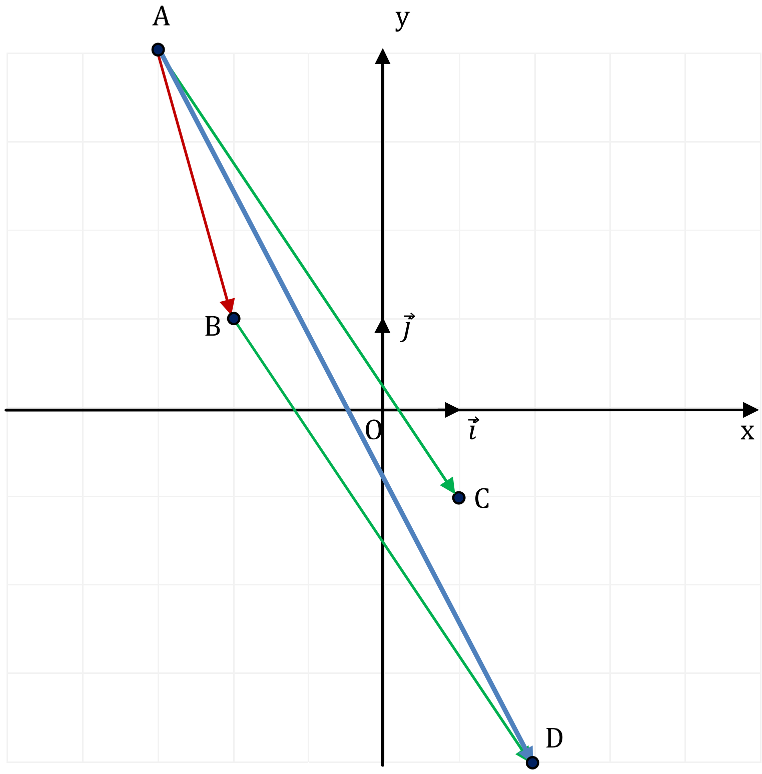
1. Représenter graphiquement les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.

2. Calculer les composantes du vecteur $\overrightarrow{AD}$.

Corrige :

1. Représentation graphique des vecteurs

a. On représente le vecteur $\overrightarrow{AB}$ d'origine le point A.



b. On représente le vecteur $\overrightarrow{AC}$ d'origine le point A.

c. On construit le représentant du vecteur $\overrightarrow{AC}$ d'origine le point B (point extrémité du vecteur $\overrightarrow{AB}$). Ce vecteur a par conséquent même direction, même sens et même norme que le vecteur $\overrightarrow{AC}$ et a pour origine B et l'autre extrémité le point D.

Finalement on représente le vecteur $\overrightarrow{AD}$ d'origine A.

2. Calculons les composantes du vecteur $\overrightarrow{AD}$.

Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées : $\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2+3 \\ 1-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$

Le vecteur $\overrightarrow{AC}$ a pour coordonnées : $\begin{pmatrix} x_C - x_A \\ y_C - y_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+3 \\ -1-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \end{pmatrix}$

D'où le vecteur $\overrightarrow{AD}$ a pour coordonnées : $\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -8 \end{pmatrix}$

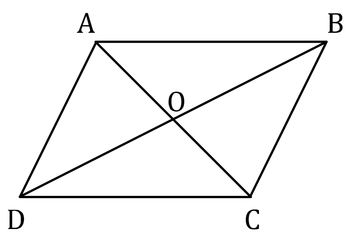
EXERCICE 02 :

Soit un parallélogramme $ABCD$ de centre O.

1. Représenter les transformés respectifs des points A, B et O par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.

2. Représenter les transformés respectifs des points A, B et O par la translation de vecteur $\overrightarrow{AD}$.

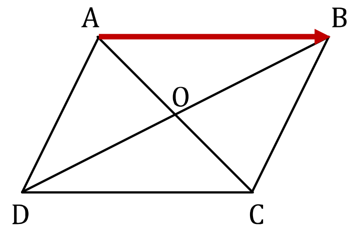
3. Représenter les transformés respectifs des points A, B et O par la translation de vecteur $\overrightarrow{OC}$.



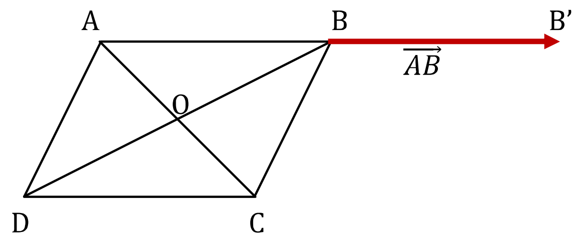
CORRIGE :

1. Représentons les transformés respectifs des points A, B et O par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.

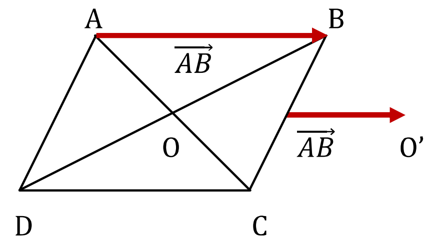
- La translation du vecteur $\overrightarrow{AB}$ transforme le point A en B. On dit que le point B est l'image du point A par la translation du vecteur $\overrightarrow{AB}$.



- Le point B est transformé en B' par la translation de $\overrightarrow{AB}$. En effet, le vecteur $\overrightarrow{BB'}$ a la même direction, même sens et même norme que $\overrightarrow{AB}$. Autrement dit, la translation du vecteur $\overrightarrow{BB'}$ et la translation du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont la même transformation.

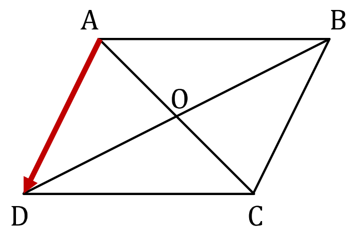


- Le point O est transformé en O' par la translation du vecteur $\overrightarrow{AB}$. En effet, le vecteur $\overrightarrow{OO'}$ a même direction, même sens et même norme que le vecteur $\overrightarrow{AB}$. Autrement dit, la translation de vecteur $\overrightarrow{OO'}$ et la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont la même transformation. On peut noter : $\overrightarrow{OO'} = \overrightarrow{AB}$.

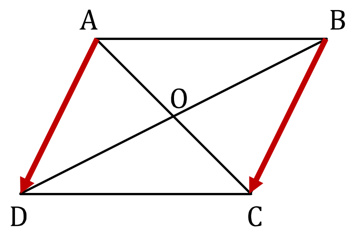


2. Représentons les transformés respectifs des points A, B et O par la translation de vecteur $\overrightarrow{AD}$.

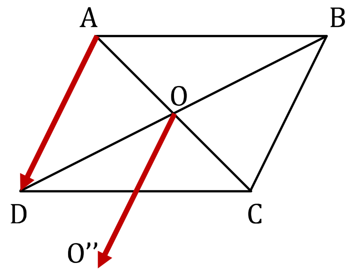
- La translation de vecteur $\overrightarrow{AD}$ transforme le point A en D.



- Le point B est transformé en C par la translation du vecteur $\overrightarrow{AD}$. En effet, le vecteur $\overrightarrow{BC}$ a même direction, même sens et même norme que le vecteur $\overrightarrow{AD}$. Autrement dit, la translation de vecteur $\overrightarrow{BC}$ et la translation de vecteur $\overrightarrow{AD}$ sont la même transformation.

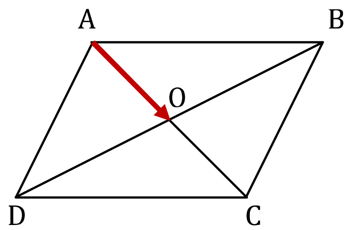


- Le point O est transformé en O'' par la translation de vecteur $\overrightarrow{AD}$. En effet, le vecteur $\overrightarrow{OO''}$ a même direction, même sens et même norme que le vecteur $\overrightarrow{AD}$. Autrement dit, la translation de vecteur $\overrightarrow{OO''}$ et la translation de vecteur $\overrightarrow{AD}$ sont la même transformation.

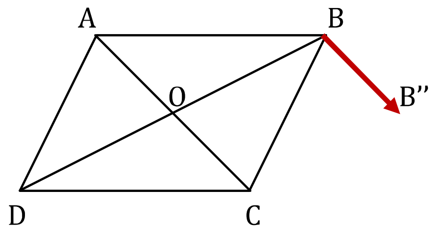


3. Représentons les transformés respectifs des points A, B et O par la translation de vecteur $\overrightarrow{OC}$.

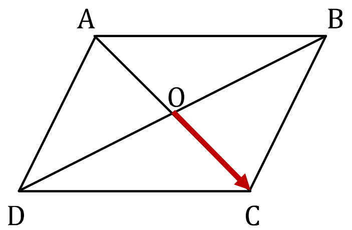
- Le point A est transformé en O par la translation de vecteur $\overrightarrow{OC}$. En effet, le vecteur $\overrightarrow{AO}$ a même direction, même sens et même norme que le vecteur $\overrightarrow{OC}$. Autrement dit, la translation de vecteur $\overrightarrow{AO}$ et la translation de vecteur $\overrightarrow{OC}$ sont la même transformation.



- Le point B est transformé en par la translation de vecteur $\overrightarrow{OC}$. En effet, le vecteur $\overrightarrow{BB''}$ a même direction, même sens et même norme que le vecteur $\overrightarrow{OC}$. Autrement dit, la translation de vecteur $\overrightarrow{BB''}$ et la translation de vecteur $\overrightarrow{OC}$ sont la même transformation.



- La translation de vecteur $\overrightarrow{OC}$ transforme le point O en C.



EXERCICE 03 :

A et B deux points de coordonnées cartésiennes: $A(2,\ 3,-3)$, $B(5,7,-3)$. Déterminer:

1. Les composantes du vecteur $\overrightarrow{AB}$.

2. Le module de $\overrightarrow{AB}$.

3. La direction de $\overrightarrow{AB}$.

4. Le sens de $\overrightarrow{AB}$.

5. Représenter graphiquement le vecteur $\overrightarrow{AB}$

CORRIGE :

1. Les composantes de $\overrightarrow{AB}$: $$\overrightarrow{AB} = \begin{vmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5-2 \\ 7-3 \\ -3+3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{vmatrix}$$

2. Le module de $\overrightarrow{AB}$: $$\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(3)^2 + (4)^2} = 5$$

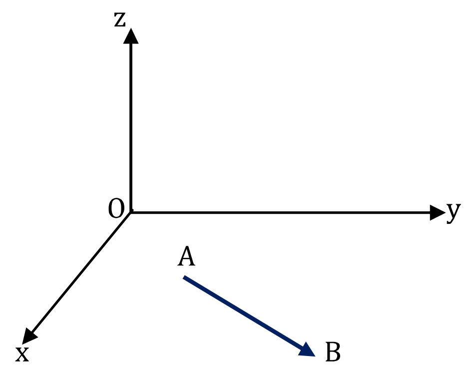
3. La direction :

$$\begin{cases} \vec{\imath}.\overrightarrow{AB} = \|\vec{\imath}\|.\|\overrightarrow{AB}\|.cos\alpha \Rightarrow cos\alpha = \dfrac{3}{5} = 0{,}6 \Rightarrow \alpha = 53{,}13°\,;\ \alpha = (\vec{\imath};\overrightarrow{AB}) \\ \vec{\jmath}.\overrightarrow{AB} = \|\vec{\jmath}\|.\|\overrightarrow{AB}\|.cos\beta \Rightarrow cos\beta = \dfrac{4}{5} = 0{,}8 \Rightarrow \beta = 36{,}87°\,;\ \beta = (\vec{\jmath};\overrightarrow{AB}) \\ \vec{k}.\overrightarrow{AB} = \|\vec{k}\|.\|\overrightarrow{AB}\|.cos\gamma \Rightarrow cos\gamma = \dfrac{0}{5} = 0 \Rightarrow \gamma = 90°\,;\ \gamma = (\vec{k};\overrightarrow{AB}) \end{cases}$$

Le support se trouve dans le plan (Oxy)

4. Le sens **:** Toutes les composantes sont positives, $\overrightarrow{AB}$ est orienté positivement suivant les 2 axes (Ox) et (Oy).

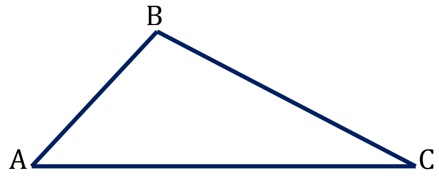
5. Représentation graphique de $\overrightarrow{AB}$



EXERCICE 04 :

ABC est un triangle quelconque.

1. Placer les points D, E et F tels que $\overrightarrow{AD} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{BE} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$ et F est le milieu de $[AC]$.



2. Exprimer, en justifiant, le vecteur $\overrightarrow{AB}$ en fonction de $\overrightarrow{FE}$.

3. a. Exprimer le vecteur $\overrightarrow{AE}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

b. En déduire un réel k tel que $\overrightarrow{AD} = k\,\overrightarrow{AE}$.

c. Que peut-on alors conclure ?

4. a. Placer le point M tel que : $\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB} = \vec{0}$

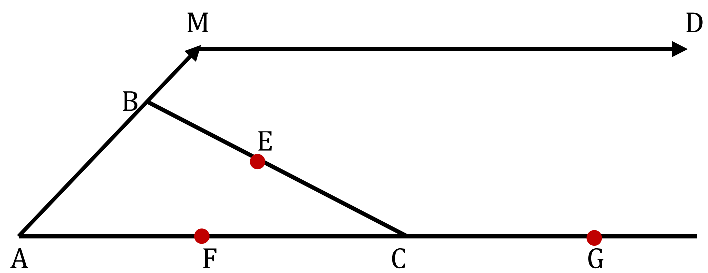
b. Placer le point G symétrique de F par rapport à C.

c. Montrer que $\overrightarrow{GA} = \frac{3}{2}\overrightarrow{CA}$ et $\overrightarrow{GD} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$.

d. En déduire la nature du quadrilatère $AMDG$.

CORRIGE :

1. Plaçons les points D, E et F



2. Dans le triangle ABC, E est le milieu de [BC] et F est le milieu de [AC]

Donc d'après le théorème des milieux $\overrightarrow{AB} = 2\,\overrightarrow{FE}$.

3. a. Exprimons le vecteur $\overrightarrow{AE}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$

$$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\,\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}\right) = \frac{1}{2}\,\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\,\overrightarrow{AC}$$

b. En déduire un réel k tel que $\overrightarrow{AD} = k\,\overrightarrow{AE}$.

$$\overrightarrow{AD} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AC} = 3\left(\frac{1}{2}\,\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\,\overrightarrow{AC}\right) = 3\,\overrightarrow{AE}$$

c. Les vecteurs $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AE}$ sont colinéaires et les points A, D et E sont alignés.

4. a. Plaçons le point M tel que : $\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB} = \vec{0}$

$$\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{AB} = \vec{0} \Rightarrow -2\overrightarrow{MA} = 3\overrightarrow{AB} \Rightarrow \overrightarrow{AM} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$$

b. Plaçons le point G symétrique de F par rapport à C

le point G symétrique de F par rapport à C, d'où C est le milieu de $[FG]$ et $\overrightarrow{FC} = \overrightarrow{CG}$

c. Montrons que $\overrightarrow{GA} = \frac{3}{2}\overrightarrow{CA}$ et $\overrightarrow{GD} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$

$$\overrightarrow{GA} = \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CF} + \overrightarrow{CA} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CA} = \frac{3}{2}\overrightarrow{CA}$$

$$\overrightarrow{GD} = \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AD} = \frac{3}{2}\overrightarrow{CA} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AC} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$$

d. En déduire la nature du quadrilatère $AMDG$.

On a: $\overrightarrow{GD} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AM} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB} \Rightarrow \overrightarrow{GD} = \overrightarrow{AM}$

D'où le quadrilatère AMDG est un parallélogramme.

EXERCICE 05 :

On considère dans le repère $R(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ les vecteurs :

$\vec{V}_1 = \vec{\imath} + 2\vec{\jmath} - 3\vec{k}$

$\vec{V}_2 = 3\vec{\imath} - 2\vec{\jmath} + 3\vec{k}$

$\vec{V}_3 = 3\vec{\imath} - 4\vec{\jmath} + 2\vec{k}$

1. Calculer la norme des vecteurs $\vec{V}_1, \vec{V}_2$ et $\vec{V}_3$

2. Calculer les composantes et les normes des vecteurs $\vec{A}$ et $\vec{B}$ définis par :

$\vec{A} = \vec{V}_1 + \vec{V}_2 + \vec{V}_3$ et $\vec{B} = \vec{V}_1 + \vec{V}_2 - \vec{V}_3$

3. Calculer le produit $\vec{V}_1 . \vec{V}_2$

4. Déterminer les composantes du produit $\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2$

5. Déterminer les composantes du produit $\vec{V}_1 \wedge (\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_3)$

CORRIGE :

1. La norme des vecteurs $\vec{V}_1, \vec{V}_2, \vec{V}_3$

$\|\vec{V}_1\| = \sqrt{(1)^2 + (2)^2 + (-3)^2} = \sqrt{14}$

$\|\vec{V}_2\| = \sqrt{(3)^2 + (-2)^2 + (3)^2} = \sqrt{22}$

$\|\vec{V}_3\| = \sqrt{(3)^2 + (-4)^2 + (2)^2} = \sqrt{29}$

2. Les composantes et les normes des vecteurs $\vec{A}$ et $\vec{B}$:

$$\vec{A} = \vec{V}_1 + \vec{V}_2 + \vec{V}_3 = (1+3+3)\vec{\imath} + (2-2-4)\vec{\jmath} + (-3+3+2)\vec{k} = 7\vec{\imath} - 4\vec{\jmath} + 2\vec{k} = \begin{vmatrix} 7 \\ -4 \\ 2 \end{vmatrix}$$

$\Rightarrow \|\vec{A}\| = \sqrt{(7)^2 + (-4)^2 + (2)^2} = \sqrt{69}$

$$\vec{B} = \vec{V}_1 + \vec{V}_2 - \vec{V}_3 = (1+3-3)\vec{\imath} + (2-2+4)\vec{\jmath} + (-3+3-2)\vec{k} = \vec{\imath} + 4\vec{\jmath} - 2\vec{k} = \begin{vmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \end{vmatrix}$$

$\Rightarrow \|\vec{B}\| = \sqrt{(1)^2 + (4)^2 + (-2)^2} = \sqrt{21}$

3. $\vec{V}_1.\vec{V}_2 = (\vec{\imath} + 2\vec{\jmath} - 3\vec{k}).(3\vec{\imath} - 2\vec{\jmath} + 3\vec{k}) = 1.3 + 2.(-2) + (-3).3 = 10$

4. $\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 = \begin{vmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} 3 \\ -2 \\ 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (2).(3) - (-3).(-2) \\ (-3).(3) - (1).(3) \\ (1).(-2) - (3).(2) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ -12 \\ -8 \end{vmatrix}$

5. $\vec{V}_1 \wedge (\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_3) = \begin{vmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{vmatrix} \wedge \left(\begin{vmatrix} 3 \\ -2 \\ 3 \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} 3 \\ -4 \\ 2 \end{vmatrix} \right) = \begin{vmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} 8 \\ 3 \\ -6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 \\ -18 \\ -13 \end{vmatrix}$

EXERCICE 06 :

Pour les vecteurs : $\vec{V_1} = 2\vec{\imath} - \vec{\jmath} + 5\vec{k}$; $\vec{V_2} = -3\vec{\imath} + 3\,\vec{\jmath} - 6\,\vec{k}$; $\vec{V_3} = -2\,\vec{\imath} + 4\vec{\jmath} + \vec{k}$

Calculer : $\vec{V_1}.\vec{V_2}$; $\vec{V_1}.\vec{V_1}$; $\vec{V_2}.\vec{V_2}$; $\vec{V_1} \wedge \vec{V_2}$; $\vec{V_2} \wedge \vec{V_3}$; $\vec{V_3} \wedge \vec{V_2}$; $\vec{V_1}.(\vec{V_2} \wedge \vec{V_3})$; $\vec{V_1} \wedge (\vec{V_2} \wedge \vec{V_3})$

CORRIGE :

$\vec{V_1}.\vec{V_2} = (2\vec{\imath} - \vec{\jmath} + 5\vec{k}).(-3\vec{\imath} + 3\vec{\jmath} - 6\vec{k}) = 2.(-3) + (-1).3 + 5.(-6) = -39$

$\vec{V_1}.\vec{V_1} = \vec{V_1}^2 = (2\vec{\imath} - \vec{\jmath} + 5\vec{k}).(2\vec{\imath} - \vec{\jmath} + 5\vec{k}) = 2.2 + (-1).(-1) + 5.5 = 30$

$\vec{V_2}.\vec{V_2} = \vec{V_2}^2 = (-3\vec{\imath} + 3\vec{\jmath} - 6\vec{k}).(-3\vec{\imath} + 3\vec{\jmath} - 6\vec{k}) = (-3)^2 + (3)^2 + (-6)^2 = 54$

$\vec{V_1} \wedge \vec{V_2} = \begin{vmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} -3 \\ 3 \\ -6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (-1).(-6) - (3).(5) \\ (-3).(5) - (2).(-6) \\ (2).(3) - (-3).(-1) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -9 \\ -3 \\ 3 \end{vmatrix} = -9\vec{\imath} - 3\vec{\jmath} + 3\vec{k}$

$\vec{V_2} \wedge \vec{V_3} = \begin{vmatrix} -3 \\ 3 \\ -6 \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} -2 \\ 4 \\ 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 27 \\ 15 \\ -6 \end{vmatrix}$

$\vec{V_3} \wedge \vec{V_2} = \begin{vmatrix} -2 \\ 4 \\ 1 \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} -3 \\ 3 \\ -6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -27 \\ -15 \\ 6 \end{vmatrix} = -\vec{V_2} \wedge \vec{V_3}$

$$\vec{V_1}\,.\,(\vec{V_2}\wedge\vec{V_3}) = \begin{vmatrix}2\\-1\\5\end{vmatrix}.\begin{vmatrix}27\\15\\-6\end{vmatrix} = 54-15-30 = 9 = \vec{V_3}\,.\,(\vec{V_1}\wedge\vec{V_2})$$

$$\vec{V_1}\wedge(\vec{V_2}\wedge\vec{V_3}) = \begin{vmatrix}2\\-1\\5\end{vmatrix}\wedge\begin{vmatrix}27\\15\\-6\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}-69\\147\\57\end{vmatrix} = \vec{V_2}.(\vec{V_1}.\vec{V_3}) - \vec{V_3}.(\vec{V_1}.\vec{V_2})$$

EXERCICE 07 :

On donne les vecteurs suivants :

$\vec{V}_1 = 3\vec{\imath} + 5\vec{\jmath}$; $\vec{V}_2 = x\vec{\imath} + 4\vec{\jmath} + z\vec{k}$; $\vec{V}_3 = 6\vec{\imath} - y\vec{\jmath} - \vec{k}$ et $\vec{V}_4 = 2\vec{\imath} + 5\vec{\jmath} + 7\vec{k}$

1. Déterminer x et z pour que les vecteurs $\vec{V}_1$ et $\vec{V}_2$ soient colinéaires.

2. Déterminer la valeur de y pour que les vecteurs $\vec{V}_3$ et $\vec{V}_4$ soient perpendiculaires.

CORRIGE :

1. $\vec{V}_1$ et $\vec{V}_2$ sont colinéaires, alors : $\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{vmatrix}3\\5\\0\end{vmatrix}\wedge\begin{vmatrix}x\\4\\z\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}5z\\-3z\\12-5x\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}0\\0\\0\end{vmatrix} \Rightarrow \begin{cases}z = 0\\ x = \frac{12}{5}\end{cases}$

2. $\vec{V}_3$ et $\vec{V}_4$ sont perpendiculaires, alors : $\vec{V}_3.\vec{V}_4 = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix}6\\-y\\-1\end{vmatrix}.\begin{vmatrix}2\\5\\7\end{vmatrix} = 12 - 5y - 7 = 0 \Rightarrow$

$y = 1$

EXERCICE 08 :

Démontrer que :

$$(\vec{A}\wedge\vec{B}).(\vec{C}\wedge\vec{D}) = (\vec{A}.\vec{C}).(\vec{B}.\vec{D}) - (\vec{A}.\vec{D}).(\vec{B}.\vec{C})$$

CORRIGE :

Posons : $(\vec{A}\wedge\vec{B}) = \vec{V}$

$(\vec{A}\wedge\vec{B}).(\vec{C}\wedge\vec{D}) = \vec{V}.(\vec{C}\wedge\vec{D}) = \vec{D}.(\vec{V}\wedge\vec{C}) = \vec{C}.(\vec{D}\wedge\vec{V})$ permutation cirulaire

$$= \vec{C}.(\vec{D} \wedge \vec{V}) = \vec{C}.\left(\vec{D} \wedge (\vec{A} \wedge \vec{B})\right) = \vec{C}.\left(\vec{A}.(\vec{B}.\vec{D}) - \vec{B}.(\vec{D}.\vec{A})\right)$$

$$= \vec{C}.\left(\vec{A}.(\vec{B}.\vec{D}) - \vec{B}.(\vec{D}.\vec{A})\right) = (\vec{C}.\vec{A}).(\vec{B}.\vec{D}) - (\vec{C}.\vec{B}).(\vec{D}.\vec{A})$$

Le produit scalaire est commutatif, d'où :

$$(\vec{A} \wedge \vec{B}).(\vec{C} \wedge \vec{D}) = (\vec{A}.\vec{C}).(\vec{B}.\vec{D}) - (\vec{A}.\vec{D}).(\vec{B}.\vec{C})$$

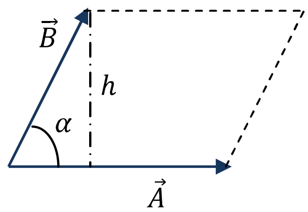
EXERCICE 09 :

Démontrer que la surface d'un parallélogramme de côtés $A\ et\ B$ est $\|\vec{A} \wedge \vec{B}\|$

CORRIGE :

La surface S d'un parallélogramme est :

$$S = \|\vec{A}\|.h$$



$$sin(\vec{A}, \vec{B}) = sin\,\alpha = \frac{h}{\|\vec{B}\|} \Rightarrow h = \|\vec{B}\|.sin\,\alpha$$

Soit: $S = \|\vec{A}\|.\|\vec{B}\|.sin\,\alpha = \|\vec{A} \wedge \vec{B}\|$

EXERCICE 10 :

Démontrer qu'étant donné trois vecteurs $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$, on a :

$$\vec{A} \wedge (\vec{B} \wedge \vec{C}) + \vec{C} \wedge (\vec{A} \wedge \vec{B}) + \vec{B} \wedge (\vec{C} \wedge \vec{A}) = \vec{0}$$

CORRIGE :

On utilise la formule du double produit vectoriel

$$\vec{A} \wedge (\vec{B} \wedge \vec{C}) = \vec{B}.(\vec{A}.\vec{C}) - \vec{C}.(\vec{A}.\vec{B}) \quad \rightarrow \quad (1)$$

$$\vec{C} \wedge (\vec{A} \wedge \vec{B}) = \vec{A}.(\vec{C}.\vec{B}) - \vec{B}.(\vec{C}.\vec{A}) \quad \rightarrow \quad (2)$$

$$\vec{B} \wedge (\vec{C} \wedge \vec{A}) = \vec{C}.(\vec{B}.\vec{A}) - \vec{A}.(\vec{B}.\vec{C}) \quad \rightarrow \quad (3)$$

La somme de (1), (2) et (3) donne :

$\vec{B}.(\vec{A}.\vec{C}) - \vec{C}.(\vec{A}.\vec{B}) + \vec{A}.(\vec{C}.\vec{B}) - \vec{B}.(\vec{C}.\vec{A}) + \vec{C}.(\vec{B}.\vec{A}) - \vec{A}.(\vec{B}.\vec{C})$

Le produit scalaire est commutatif alors :

$(\vec{A}.-\vec{A}).(\vec{C}.\vec{B}) + (\vec{B} - \vec{B}).(\vec{A}.\vec{C}) + (\vec{C} - \vec{C}).(\vec{A}.\vec{B}) = \vec{0}$

EXERCICE 11 :

Soit le repère orthonormé $R(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ et $(\vec{V},\vec{X},\vec{W})$ trois vecteurs non nuls. Si on a l'égalité suivante : $\vec{V} \wedge \vec{X} = \vec{W}$. Rechercher l'équation vectorielle donnant $\vec{X}$ en fonction de $\vec{V}$ et $\vec{W}$.

CORRIGE :

$\vec{V}$ et $\vec{W}$ étant deux vecteurs connus non nuls, existe-t-il un vecteur $\vec{X}$ tel que : $\vec{V} \wedge \vec{X} = \vec{W}$
$\vec{V}$ et $\vec{W}$ doivent être orthogonaux et $\vec{X}$ et $\vec{W}$ aussi par propriété du produit vectoriel.

Cherchons d'abord une solution particulière avec $\vec{X}_p$, tel que: $\vec{V} \perp \vec{X}_p \Rightarrow \vec{V}.\vec{X}_p = 0$.

Alors on a : $\vec{V} \wedge \vec{X}_p = \vec{W}$.

En multipliant vectoriellement par $\vec{V}$ l'équation $\vec{V} \wedge \vec{X}_p = \vec{W}$, on obtient :

$\vec{V} \wedge (\vec{V} \wedge \vec{X}_p) = \vec{V} \wedge \vec{W}$ ou bien $\vec{V}.(\vec{V}.\vec{X}_p) - \vec{X}_p.(\vec{V}.\vec{V}) = \vec{V} \wedge \vec{W}$

$$\Rightarrow \vec{X}_p = \frac{\vec{W} \wedge \vec{V}}{V^2}$$

On a ainsi : $\begin{cases} \vec{V} \wedge \vec{X}_p = \vec{W} & (1) \\ \vec{V} \wedge \vec{X} = \vec{W} & (2) \end{cases}$

D'où $(2) - (1)$ nous donne la solution générale $\vec{X}$:

$$\vec{V} \wedge \vec{X} - \vec{V} \wedge \vec{X}_p = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{V} \wedge (\vec{X} - \vec{X}_p) = \vec{0}$$

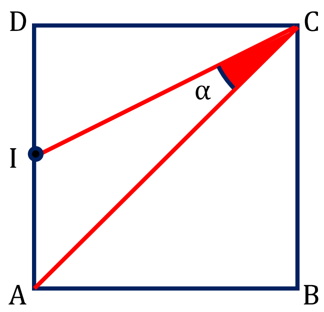
$$\Rightarrow \quad \vec{V} // (\vec{X} - \vec{X}_p) \Rightarrow (\vec{X} - \vec{X}_p) = \beta\, \vec{V}$$

Finalement :

$$\vec{X} = \vec{X}_p + \beta\, \vec{V} \Rightarrow \vec{X} = \frac{\vec{W} \wedge \vec{V}}{V^2} + \beta\, \vec{V}$$

EXERCICE 12 :

Soit un carré $ABCD$ de côté a, tel que I est le milieu de $[AD]$. Montrer que la mesure de l'angle $\widehat{ACI} = \alpha$ est indépendante de a.



CORRIGE :

Le triangle ABC est rectangle isocèle en B on a :

$$(CA)^2 = (AB)^2 + (BC)^2 = 2a^2$$

De même, le triangle DCI est rectangle en D :

$$(CI)^2 = (CD)^2 + (DI)^2 = a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{5}{4}a^2$$

Or le produit scalaire de :

$$\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CI} = \|\overrightarrow{CA}\|.\|\overrightarrow{CI}\|.cos\alpha = a\sqrt{2}.\frac{a}{2}\sqrt{5}.cos\alpha = a^2\sqrt{\frac{5}{2}}.cos\alpha \qquad (1)$$

$$\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CI} = \frac{1}{2}\left(\left\|\overrightarrow{CA}\right\|^2 + \left\|\overrightarrow{CI}\right\|^2 - \left\|\overrightarrow{CI} - \overrightarrow{CA}\right\|^2\right) = \frac{1}{2}(CI^2 + CA^2 - AI^2) = \frac{3}{2}a^2 \qquad (2)$$

En résumé $(1) = (2)$

$$\Rightarrow a^2\sqrt{\frac{5}{2}}.\,cos\alpha = \frac{3}{2}a^2 \quad \Rightarrow \quad cos\alpha = \cos(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CI}) = \frac{3}{\sqrt{10}}$$

Le $\cos(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CI})$ est constant donc la mesure de l'angle $\widehat{ACI}$ est indépendante du côté a.

EXERCICE 13 :

1. On considère le point $A(-2,4,1)$, les vecteurs $\vec{u}(1,1,1)$, $\vec{v}(2,2,-4)$ et $\vec{w}(3,-1,1)$ et le repère $R'(A,\vec{u},\vec{v},\vec{w})$. On note x', y', et z' les coordonnées dans ce repère. Donner les formules analytiques du changement de repère exprimant x, y, z en fonction de x', y', z'.

2. on considère la droite (D) : $\begin{cases} y - z = 3 \\ x + y = 2 \end{cases}$

Utiliser le changement de repère pour donner une équation de D dans le repère $(A,\vec{u},\vec{v},\vec{w})$.

3. Donner les formules analytiques du changement de repère inverse.

CORRIGE :

1. Notons R le repère initial $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$. Un point M a pour coordonnées (x,y,z) dans R signifie $\overrightarrow{OM} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$.

Si R' désigne un autre repère $(A,\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ alors le même point M a pour coordonnées (x',y',z') dans R' signifie $\overrightarrow{AM} = x'\vec{u} + y'\vec{v} + z'\vec{w}$.

La formule de changement c'est écrire les coordonnées de l'égalité $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM}$.

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM} \equiv \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + x'\vec{u} + y'\vec{v} + z'\vec{w}$$

Mais on connaît les coordonnées de $\vec{u},\vec{v},\vec{w}$ dans R.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + x' \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + y' \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} + z' \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

D'où l'égalité de changement de repère :

$$\begin{cases} x = -2 + x'' + 2y'' + 3z'' \\ y = 4 + x' + 2y'' - z' \\ z = 1 + x' - 4y' + z' \end{cases}$$

2. Equation de D dans le repère $R'(A, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$

On remplace x, y, z par la formule obtenue dans la première question, on obtient :

$$\begin{cases} (4 + x' + 2y'' - z') - (1 + x' - 4y' + z') = 3 & \Rightarrow \quad 6y' - 2z' = 0 \\ (-2 + x'' + 2y'' + 3z') + (4 + x' + 2y'' - z') = 2 & \Rightarrow \quad 2x' + 4y' + 2z' = 0 \end{cases}$$

ou encore $\begin{cases} 3y' - z' = 0 \\ x' + 2y' + z' = 0 \end{cases}$ qui est l'équation de D dans le repère $R'(A, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$

3. les formules analytiques du changement de repère inverse

Le changement de repère R' vers R s'écrit :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 + x'' + 2y'' + 3z'' \\ 4 + x' + 2y'' - z' \\ 1 + x' - 4y' + z' \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x + 2 \\ y - 4 \\ z - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'' + 2y'' + 3z'' \\ x' + 2y'' - z' \\ x' - 4y' + z' \end{pmatrix}$$

Posons $\begin{cases} X = x + 2 \\ Y = y - 4 \\ Z = z - 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'' + 2y'' + 3z'' \\ x' + 2y'' - z' \\ x' - 4y' + z' \end{pmatrix}$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x'' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x'' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = M^{-1} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = M^{-1} \begin{pmatrix} x+2 \\ y-4 \\ z-1 \end{pmatrix}$$

Où la matrice inverse du système s'écrit : $M^{-1} = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 1 & 7 & 4 \\ 1 & 1 & -2 \\ 3 & -3 & 0 \end{pmatrix}$

EXERCICE 14 :

Montrer que :

1. $\dfrac{d}{dt}(\vec{A}+\vec{B}) = \dfrac{d\vec{A}}{dt} + \dfrac{d\vec{B}}{dt}$

2. $\dfrac{d}{dt}(\vec{A}.\vec{B}) = \dfrac{d\vec{A}}{dt}.\vec{B} + \vec{A}.\dfrac{d\vec{B}}{dt}$

3. $\dfrac{d}{dt}(\vec{A}\wedge\vec{B}) = \dfrac{d\vec{A}}{dt}\wedge\vec{B} + \vec{A}\wedge\dfrac{d\vec{B}}{dt}$

CORRIGE :

Soients : $\vec{A} = \begin{vmatrix} A_X \\ A_y \\ A_z \end{vmatrix}$ et $\vec{B} = \begin{vmatrix} B_X \\ B_y \\ B_z \end{vmatrix}$

1. $\dfrac{d}{dt}(\vec{A}+\vec{B}) = \dfrac{d}{dt}\begin{vmatrix} A_X+B_X \\ A_y+B_y \\ A_z+B_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dot{A}_X+\dot{B}_X \\ \dot{A}_y+\dot{B}_y \\ \dot{A}_z+\dot{B}_z \end{vmatrix} = \dfrac{d\vec{A}}{dt} + \dfrac{d\vec{B}}{dt}$

2. $\frac{d}{dt}(\vec{A}.\vec{B}) = \frac{d}{dt}(A_X B_X + A_y B_y + A_z B_z)$

$$= \frac{dA_X}{dt}.B_X + A_X.\frac{dB_X}{dt} + \frac{dA_y}{dt}.B_y + A_y.\frac{dB_y}{dt} + \frac{dA_z}{dt}.B_z + A_z.\frac{dB_z}{dt}$$

$$= B_X.\frac{dA_X}{dt} + B_y.\frac{dA_y}{dt} + B_z.\frac{dA_z}{dt} + A_X.\frac{dB_X}{dt} + A_y.\frac{dB_y}{dt}A_z.\frac{dB_z}{dt}$$

$$= \vec{B}.\frac{d\vec{A}}{dt} + \vec{A}.\frac{d\vec{B}}{dt}$$

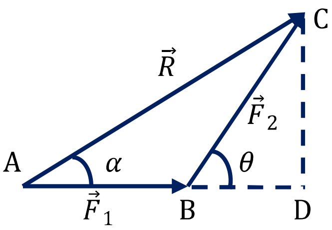
3. $\frac{d}{dt}(\vec{A}\wedge\vec{B}) = \begin{vmatrix} (\dot{A}_y B_z - \dot{A}_z B_y) + (A_y \dot{B}_z - A_z \dot{B}_y) \\ (\dot{A}_z B_x - \dot{A}_x B_z) + (A_z \dot{B}_x - A_x \dot{B}_z) \\ (\dot{A}_x B_y - \dot{A}_y B_x) + (A_x \dot{B}_y - A_y \dot{B}_x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dot{A}_y B_z - \dot{A}_z B_y \\ \dot{A}_z B_x - \dot{A}_x B_z \\ \dot{A}_x B_y - \dot{A}_y B_x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} A_y \dot{B}_z - A_z \dot{B}_y \\ A_z \dot{B}_x - A_x \dot{B}_z \\ A_x \dot{B}_y - A_y \dot{B}_x \end{vmatrix}$

$$= \frac{d\vec{A}}{dt}\wedge\vec{B} + \vec{A}\wedge\frac{d\vec{B}}{dt}$$

EXERCICE 15 :

La résultante de deux forces $\vec{F}_1$ et $\vec{F}_2$ est égale à 50N et fait un angle de 30° avec la force F_1=15N. Trouver le module de $\vec{F}_2$ et l'angle entre les deux forces.

CORRIGE :



Dans le triangle rectangle ACD, nous avons :

$AC^2 = AD^2 + DC^2$

$AD = AB + BD = F_1 + F_2 cos\theta$

$DC = F_2 sin\theta$

On obtient :

$R^2 = (F_1 + F_2 cos\theta)^2 + (F_2 sin\theta)^2 = F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2cos\theta$ (1)

Nous avons aussi :

$sin\alpha = \frac{CD}{R} \Rightarrow CD = Rsin\alpha \quad et \quad sin\theta = \frac{CD}{F_2} \Rightarrow CD = F_2 sin\theta \Rightarrow Rsin\alpha = F_2 sin\theta$ (2)

Et

$$\cos\alpha = \frac{AD}{R} = \frac{F_1 + F_2\cos\theta}{R} \Rightarrow \cos\theta = \frac{R\cos\alpha - F_1}{F_2} \qquad (3)$$

En remplaçant (3) dans (1)

$$R^2 = F_1^2 + F_2^2 + 2F_1(R\cos\alpha - F_1) \Rightarrow F_2 = \sqrt{R^2 - F_1^2 - 2F_1(R\cos\alpha - F_1)}$$

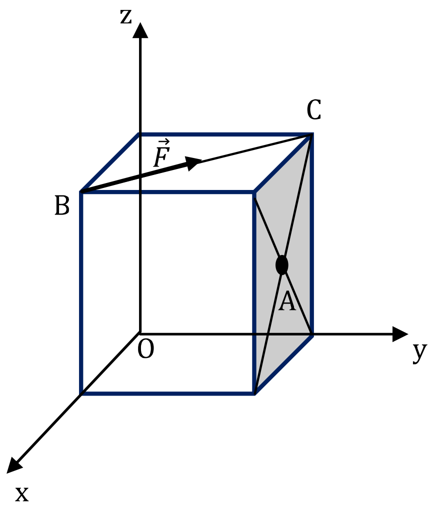
$$F_2 = \sqrt{50^2 - 15^2 - 2.15(50\cos 30° - 15)} = 44{,}44N$$

La relation (3), nous donne :

$$\cos\theta = \frac{50\cos 30° - 15}{44{,}44} = 0{,}636$$

EXERCICE 16 :

Soit un cube de 1m de côté et une force $\vec{F}$ de norme 100N. Calculer :



1. Les composantes du moment de $\vec{F}$ par rapport au point A.

2. la norme du moment.

3. Les angles entre le moment et les axes du repère.

CORRIGE :

1. Les composantes du moment de $\vec{F}$ par rapport au point A

Les coordonnées des points : $A(\frac{1}{2},1,\frac{1}{2})$; $B(1,0,1)$; $C(0,1,1)$

$\vec{F} = \|\vec{F}\|.\vec{u}$; $\vec{u}$: vecteur unitaire

$$\vec{u} = \frac{\overrightarrow{BC}}{\|\overrightarrow{BC}\|} \; ; \; \overrightarrow{BC} = \begin{vmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix} \Rightarrow \|\overrightarrow{BC}\| = \sqrt{(-1)^2 + (1)^2} = \sqrt{2}$$

D'où :

$$\vec{u} = \frac{-1}{\sqrt{2}}\vec{\imath} + \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{\jmath}$$

ET :

$$\vec{F} = \frac{-100}{\sqrt{2}}\vec{\imath} + \frac{100}{\sqrt{2}}\vec{\jmath} = \begin{vmatrix} -50\sqrt{2} \\ +50\sqrt{2} \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$\vec{M}_A(\vec{F}) = \overrightarrow{AB} \wedge \vec{F} = \begin{vmatrix} 0,5 \\ -1 \\ 0,5 \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} -50\sqrt{2} \\ +50\sqrt{2} \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -25\sqrt{2} \\ -25\sqrt{2} \\ -25\sqrt{2} \end{vmatrix}$$

2. la norme du moment

$$\|\vec{M}_A(\vec{F})\| = 25\sqrt{2}.\sqrt{3}\,Nm = 61{,}23\text{Nm}$$

3. Les angles entre le moment et les axes du repère

$$\vec{M}_A(\vec{F}).\vec{\imath} = -25\sqrt{2} = 25\sqrt{2}.\sqrt{3}.cos\alpha \Rightarrow cos\alpha = \frac{-25\sqrt{2}}{25\sqrt{2}.\sqrt{3}} = \frac{-1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \alpha = 125{,}26°$$

$$\vec{M}_A(\vec{F}).\vec{\jmath} = -25\sqrt{2} = 25\sqrt{2}.\sqrt{3}.cos\beta \Rightarrow cos\beta = \frac{-25\sqrt{2}}{25\sqrt{2}.\sqrt{3}} = \frac{-1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \beta = 125{,}26°$$

$$\vec{M}_A(\vec{F}).\vec{k} = -25\sqrt{2} = 25\sqrt{2}.\sqrt{3}.cos\gamma \Rightarrow cos\gamma = \frac{25\sqrt{2}}{25\sqrt{2}.\sqrt{3}} = \frac{-1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \gamma = 125{,}26°$$

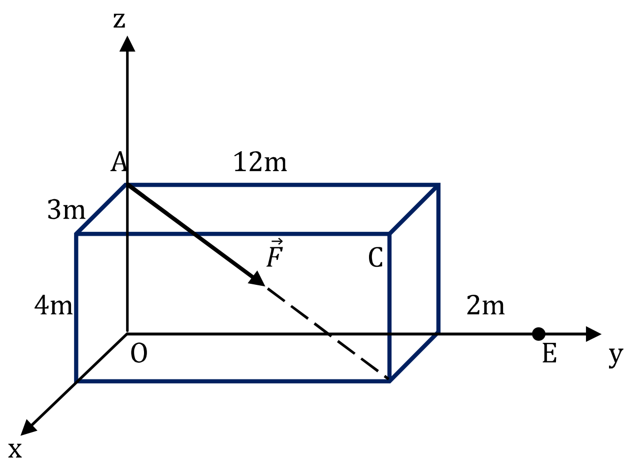
EXERCICE 17 :

Soit le vecteur $\vec{F}$ une force d'intensité 195.10^3 N qui a comme support la droite (AB) sur un solide (voir dessin ci-dessous).

1. Trouver le moment de $\vec{F}$ par rapport au point O.

2. Trouver les moments de $\vec{F}$ par rapport à chacun des axes $Ox, Oy\ et\ Oz$.

3. Trouver le moment de $\vec{F}$ par rapport à l'axe CE.



CORRIGE :

1. Le moment de $\vec{F}$ par rapport à O :

Les coordonnées des points : $A(0,0,4)$; $B(3,12,0)$; $C(3,12,4)$; $E(0,14,0)$

$\vec{F} = \|\vec{F}\|.\vec{u}$; $\vec{u}$: vecteur unitaire

$$\vec{u} = \frac{\overrightarrow{AB}}{\|\overrightarrow{AB}\|} \; ; \; \overrightarrow{AB} = \begin{vmatrix} 3 \\ 12 \\ -4 \end{vmatrix} \Rightarrow \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(3)^2 + (12)^2 + (-4)^2} = 13$$

D'où :

$$\vec{u} = \frac{3}{13}\vec{\imath} + \frac{12}{13}\vec{\jmath} - \frac{4}{13}\vec{k}$$

D'où : $\vec{F} = 195.10^3 \left(\frac{3}{13}\vec{\imath} + \frac{12}{13}\vec{\jmath} - \frac{4}{13}\vec{k}\right) = 45000\vec{\imath} + 180000\vec{\jmath} - 60000\vec{k} = \begin{vmatrix} 45000 \\ 180000 \\ -60000 \end{vmatrix}$

Le moment du vecteur $\vec{F}$ par rapport au point O est :

$$\vec{M}_O(\vec{F}) = \overrightarrow{OA} \wedge \vec{F} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} 45000 \\ 180000 \\ -60000 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -720000 \\ +180000 \\ 0 \end{vmatrix}$$

2. Les moments de $\vec{F}$ par rapport à chacun des axes Ox, Oy et Oz.

a. par rapport à Ox

$$\vec{M}_{Ox}(\vec{F}) = (\vec{M}_O(\vec{F}).\vec{\imath}).\vec{\imath} = \left(\begin{vmatrix} -720000 \\ +180000 \\ 0 \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}\right).\vec{\imath} = \begin{vmatrix} -720000 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

b. par rapport à Oy

$$\vec{M}_{Oy}(\vec{F}) = (\vec{M}_O(\vec{F}).\vec{\jmath}).\vec{\jmath} = \left(\begin{vmatrix} -720000 \\ +180000 \\ 0 \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix}\right).\vec{\jmath} = \begin{vmatrix} 0 \\ 180000 \\ 0 \end{vmatrix}$$

c. par rapport à Oz

$$\vec{M}_{Oz}(\vec{F}) = (\vec{M}_O(\vec{F}).\vec{k}).\vec{k} = \left(\begin{vmatrix} -720000 \\ +180000 \\ 0 \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix}\right).\vec{k} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

3. Le moment de $\vec{F}$ par rapport à l'axe CE

a. Calculons le moment de $\vec{F}$ par rapport à C (C appartenant à CE)

$$\overrightarrow{CA} = \begin{vmatrix} -3 \\ -12 \\ 0 \end{vmatrix} \Rightarrow \|\overrightarrow{CA}\| = \sqrt{3^2 + 12^2} = 12{,}37$$

$$\vec{M}_C(\vec{F}) = \overrightarrow{CA} \wedge \vec{F} = \begin{vmatrix} -3 \\ -12 \\ 0 \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} 45000 \\ 180000 \\ -60000 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 720000 \\ -180000 \\ 0 \end{vmatrix}$$

b. Détermination du vecteur unitaire $\vec{v}$:

$$\vec{v} = \frac{\overrightarrow{CE}}{\|\overrightarrow{CE}\|} = -\frac{3}{\sqrt{29}}\vec{\imath} + \frac{2}{\sqrt{29}}\vec{\jmath} - \frac{4}{\sqrt{29}}\vec{k}$$

Finalement :

$$\vec{M}_{CE}(\vec{F}) = (\vec{M}_C(\vec{F}).\vec{v}).\vec{v} = \left(\begin{vmatrix} -720000 \\ +180000 \\ 0 \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} -\frac{3}{\sqrt{29}} \\ \frac{2}{\sqrt{29}} \\ -\frac{4}{\sqrt{29}} \end{vmatrix}\right).\vec{v} = 467952{,}25.\vec{v} = \begin{vmatrix} -260689{,}65 \\ 173793{,}10 \\ 0 \end{vmatrix}$$

EXERCICE 18 :

Soit f un scalaire et deux vecteurs $\vec{A}$ *et* $\vec{B}$ quelconques, vérifier les relations suivantes :

1. $div(\vec{A} \wedge \vec{B}) = \vec{B}.\overrightarrow{rot}\vec{A} - \vec{A}.\overrightarrow{rot}\vec{B}$

2. $\overrightarrow{rot}\left(\overrightarrow{grad}f\right) = \vec{0}$

CORRIGE :

$$div\left(\vec{A} \wedge \vec{B}\right) = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} A_yB_z - A_zB_y \\ A_zB_x - A_xB_z \\ A_xB_y - A_yB_x \end{vmatrix}$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}(A_yB_z - A_zB_y) + \frac{\partial}{\partial y}(A_zB_x - A_xB_z) + \frac{\partial}{\partial z}(A_xB_y - A_yB_x)$$

$$= \frac{\partial A_y}{\partial x}.B_z + \frac{\partial B_z}{\partial x}.A_y - \frac{\partial A_z}{\partial x}.B_y - \frac{\partial B_y}{\partial x}.A_z + \frac{\partial A_z}{\partial y}.B_x + \frac{\partial B_x}{\partial y}.A_z - \frac{\partial A_x}{\partial y}.B_z$$

$$- \frac{\partial B_z}{\partial y}.A_x + \frac{\partial A_x}{\partial z}.B_y + \frac{\partial B_y}{\partial z}.A_x - \frac{\partial A_y}{\partial z}.B_x - \frac{\partial B_x}{\partial z}.A_y$$

$$= B_x\left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}.B_x\right) + B_y\left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}.B_y\right) + B_z\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)$$

$$+ A_x\left(\frac{\partial B_y}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial y}\right) + A_y\left(\frac{\partial B_z}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial z}\right) + A_z\left(\frac{\partial B_x}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial x}.A_z\right)$$

$$\Rightarrow \ div(\vec{A} \wedge \vec{B}) = \vec{B}.\overrightarrow{rot}\vec{A} - \vec{A}.\overrightarrow{rot}\vec{B}$$

2. $$\overrightarrow{rot}\left(\overrightarrow{grad}f\right) = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} = \vec{0}$$

I.2. TORSEURS

EXERCICE 01 :

Soit le torseur $[T_1]_0$ défini par les vecteurs $\vec{V}_1 = \vec{\imath} + \vec{2}j - 3\vec{k}$; $\vec{V}_2 = -\vec{\imath} + 4\vec{\jmath} + 4\vec{k}$; $\vec{V}_3 = 2\vec{\imath} - 3\vec{\jmath} + 5\vec{k}$, définis dans un repère orthonormé $R(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ respectivement au points A(2,1,1), B(-1,1,0), C(-2,0,1) ; et le torseur $[T_2]_O = \begin{cases} \vec{R}_2 = -3\vec{\imath} - \vec{\jmath} - 5\vec{k} \\ \vec{M}_{2O} = 2\vec{\imath} - 4\vec{\jmath} + 3\vec{k} \end{cases}$

1. Déterminer les éléments de réduction du torseur $[T_1]_O$.

2. Déterminer le pas et l'axe central du torseur$[T_2]_O$.

3. Calculer la somme et le produit des deux torseurs.

4. Calculer l'auto-moment du torseur somme.

CORRIGE :

1. Les éléments de réduction du torseur $[T_1]_O$:

Les éléments de réduction de $[T_1]_O$:

$$[T_1]_O = \begin{cases} \vec{R}_1 = \vec{V}_1 + \vec{V}_2 + \vec{V}_3 \\ \vec{M}_{1O} = \overrightarrow{OA} \wedge \vec{V}_1 + \overrightarrow{OB} \wedge \vec{V}_2 + \overrightarrow{OC} \wedge \vec{V}_3 \end{cases}$$

$$\vec{R}_1 = \vec{V}_1 + \vec{V}_2 + \vec{V}_3 = \begin{vmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{vmatrix}$$

$$\vec{V}_1 = \vec{\imath} + \vec{2}j - 3\vec{k} \;;\; \vec{V}_2 = -\vec{\imath} + 4\vec{\jmath} + 4\vec{k} \;;\; \vec{V}_3 = 2\vec{\imath} - 3\vec{\jmath} + 5\vec{k}$$

$$\vec{M}_{1O} = \begin{vmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} -1 \\ 4 \\ 4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} 2 \\ -3 \\ 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -5 \\ 7 \\ -7 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 4 \\ 4 \\ -3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 \\ 12 \\ 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 \\ 23 \\ 6 \end{vmatrix}$$

$$[T_1]_O = \begin{cases} \vec{R}_1 = \begin{vmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{vmatrix} = 2\vec{\imath} + 3\vec{\jmath} + 6\vec{k} \\ \vec{M}_{1O} = \begin{vmatrix} 2 \\ 23 \\ 6 \end{vmatrix} = 2\vec{\imath} + 23\vec{\jmath} + 6\vec{k} \end{cases}$$

2. Déterminer le pas et l'axe central du torseur$[T_2]_O$

a. Le pas :

$$P_2 = \frac{\vec{R}_2 . \vec{M}_{2O}}{R_2^2} = -\frac{17}{35}$$

b. L'axe central :

$$\overrightarrow{OP}_2 = \frac{\vec{R}_2 \wedge \vec{M}_{2O}}{R_2^2} + \alpha \vec{R}_2 = \frac{1}{35} \begin{vmatrix} -3 \\ -1 \\ -5 \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} 2 \\ -4 \\ 3 \end{vmatrix} + \alpha \begin{vmatrix} -3 \\ -1 \\ -5 \end{vmatrix} = \begin{cases} -\frac{23}{35} - 3\alpha \\ -\frac{1}{35} - \alpha \\ \frac{14}{35} - 5\alpha \end{cases}$$

3. Calculer la somme et le produit des deux torseurs.

a. la somme des deux torseurs :

$$[T]_O = [T_1]_O + [T_2]_O = \begin{cases} \vec{R} = \vec{R}_1 + \vec{R}_2 = \begin{vmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -3 \\ -1 \\ -5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{vmatrix} = -\vec{\imath} + 2\vec{\jmath} + \vec{k} \\ \vec{M}_O = \vec{M}_{1O} + \vec{M}_{2O} = \begin{vmatrix} 2 \\ 23 \\ 6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 \\ -4 \\ 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 \\ 19 \\ 9 \end{vmatrix} = 4\vec{\imath} + 19\vec{\jmath} + 9\vec{k} \end{cases}$$

b. le produit des deux torseurs :

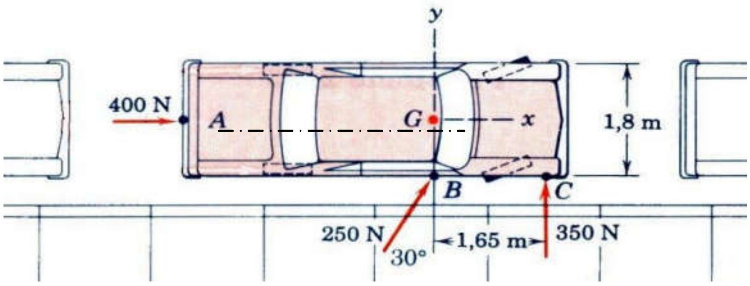
$$[T_1]_O . [T_2]_O = \vec{R}_1 . \vec{M}_{2O} + \vec{R}_2 . \vec{M}_{1O} = \begin{vmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} 2 \\ -4 \\ 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -3 \\ -1 \\ -5 \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} 2 \\ 23 \\ 6 \end{vmatrix} = -49$$

4. Calculer l'auto-moment du torseur somme

$$A = \vec{R} . \vec{M} = \begin{vmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} 4 \\ 19 \\ 9 \end{vmatrix} = 43$$

EXERCICE 02 :

Pour dégager une voiture en panne prise entre 2 automobiles stationnées, 3 personnes exercent des actions aux points A, B et C.



1. Déterminer le torseur résultant de ces actions au point G.

2. Déterminer l'équation de l'axe central du torseur.

3. Vérifier que ce torseur est un glisseur.

CORRIGE :

1. Les éléments de réduction du torseur résultant au pt G

$$[T]_G = \begin{cases} \vec{R} = \sum_i \vec{F}_i \\ \vec{M}_G = \sum_i \vec{M}_i \end{cases}$$

$$\vec{R} = \sum_i \vec{F}_i = \vec{F}_A + \vec{F}_B + \vec{F}_C = \begin{vmatrix} 400 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 250sin\theta \\ 250cos\theta \\ 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 \\ 350 \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 525 \\ 566{,}51 \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$\vec{M}_G = \sum_i \vec{M}_i = \overrightarrow{GA} \wedge \vec{F}_A + \overrightarrow{GB} \wedge \vec{F}_B + \overrightarrow{GC} \wedge \vec{F}_C = \begin{vmatrix} 0 \\ -0{,}9 \\ 0 \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} 250sin\theta \\ 250cos\theta \\ 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1{,}65 \\ -0{,}9 \\ 0 \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} 0 \\ 350 \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 690 \end{vmatrix} \; avec \; \overrightarrow{GA} \wedge \vec{F}_A = \vec{0} \; (car \; \overrightarrow{GA} \; // \; \vec{F}_A)$$

D'où : $$[T]_G = \begin{cases} \vec{R} = \begin{vmatrix} 525 \\ 566{,}51 \\ 0 \end{vmatrix} \\ \vec{M}_G = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 690 \end{vmatrix} \end{cases}$$

2. L'équation de l'axe central :

$$\overrightarrow{OP} = \frac{\vec{R} \wedge \vec{M}_G}{R^2} + \alpha\vec{R} = \frac{1}{596558,58}\begin{vmatrix} 525 \\ 566,51 \\ 0 \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 690 \end{vmatrix} + \alpha \begin{vmatrix} 525 \\ 566,51 \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0,65 + 525\alpha \\ -0,6 + 566,51\alpha \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{OP} = \begin{cases} x = 0,65 + 525\alpha \quad \Rightarrow \alpha = \dfrac{(x-0,65)}{525} \\ y = -0,6 + 566,51\alpha \ \Rightarrow y = -0,6 + 566,51\dfrac{(x-0,65)}{525} \\ z = 0 \end{cases}$$

Finalement: $y = 1,07x - 1,3$

3. l'auto-moment est nul $\left(\vec{R}.\vec{M}_G = 0\right)$, le torseur est un glisseur.

En conclusion, la droite représente l'axe central d'un torseur de type glisseur.

EXERCICE 03 :

Dans un repère orthonormé $R(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$, on considère le champ de vecteurs $\vec{V}(M)$ dont les composantes sont définies en fonction des coordonnées (x,y,z) de M par :

$$\begin{cases} V_x = 1 + 3y - tz \\ V_y = 2tz - 3x \\ V_z = 2 + tx - t^2y \end{cases}$$

Où t est un paramètre réel.

1. Calculer le vecteur $\vec{V}(M)$ au point O.

2. Pour quelles valeurs de t, ce champ est antisymétrique?

3. Pour chaque valeur trouvée de t, déterminer les éléments de réduction du torseur au point O.

CORRIGE :

1. Le point O à pour coordonnées : $O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{V}(O) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

2. Ce champ est antisymétrique (équiprojectif), si :

$$\overrightarrow{OM}.\vec{V}(O) = \overrightarrow{OM}.\vec{V}(M) \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1+3y-tz \\ 2tz-3x \\ 2+tx-t^2y \end{pmatrix}$$

$\Leftrightarrow x + 2z = x + 3xy - txy + 2tyz - 3xy + 2z + txz - t^2yz$

$\Rightarrow t^2 - 2t = 0 \Rightarrow \ t = 0 \ \ ou \ \ t = 2$

Le champ $\vec{V}(M)$ est antisymétrique (équiprojectif) pour$t = 0 \ \ ou \ \ t = 2 \ \Rightarrow \vec{V}(M)$ est un torseur.

3. Les éléments de réduction du torseur en O.

a. Pour t=0 :

$$[T_1]_O = \begin{cases} \vec{R} \\ \vec{V}(M)_O \end{cases}$$

Pour calculer la résultante, on applique la formule des transports :

$$\vec{V}(M) = \vec{V}(O) + \overrightarrow{MO} \wedge \vec{R}$$

$$\begin{pmatrix} 1+3y \\ -3x \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -x \\ -y \\ -z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} R_x \\ R_y \\ R_z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3y + yR_z - zR_y = 0 \\ -3x + zR_x - xR_z = 0 \\ xR_y - yR_x = 0 \end{pmatrix}$$

On trouve après la résolution du système d'équations :

$$\begin{cases} R_x = 0 \\ R_y = 0 \\ R_z = -3 \end{cases}$$

D'où :

$$[T_1]_O = \begin{cases} \vec{R} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ -3 \end{vmatrix} \\ \vec{V}(M)_O = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{vmatrix} \end{cases}$$

b. Pour t=2 (même raisonnement que t=0) :

$$[T_2]_O = \begin{cases} \vec{R} = \begin{vmatrix} -4 \\ -2 \\ -3 \end{vmatrix} \\ \vec{V}(M)_O = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{vmatrix} \end{cases}$$

EXERCICE 04 :

Soient $\vec{V_1} = 3\vec{\imath} + \vec{\jmath}$; $\vec{V_2} = -2\vec{\jmath} + \vec{k}$ et $\vec{V_3} = -5\vec{\imath} + 2\vec{k}$ trois vecteurs définis dans un repère orthonormé $R(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ et liés respectivement aux points de coordonnées : $A(2,0,0), B(0,1,0), C(0,0,3)$.

1. Déterminer les éléments de réduction en O du torseur $[T]_O$.

2. Déterminer le pas et l'axe central du torseur $[T]_O$.

3. Calculer le moment de deux façons différentes au point D de coordonnées (2, 1,-2).

4. En déduire $[T]_D$.

CORRIGE :

1. Les éléments de réduction du torseur au point O

$$[T]_O = \begin{cases} \vec{R} = \vec{V_1} + \vec{V_2} + \vec{V_3} \\ \vec{M_O} = \overrightarrow{OA} \wedge \vec{V_1} + \overrightarrow{OB} \wedge \vec{V_2} + \overrightarrow{OC} \wedge \vec{V_3} \end{cases}$$

$$\vec{R_1} = \vec{V_1} + \vec{V_2} + \vec{V_3} = \begin{vmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -5 \\ 0 \\ 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 \\ -1 \\ 3 \end{vmatrix}$$

$$\vec{M_O} = \begin{vmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} -5 \\ 0 \\ 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 \\ -15 \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 \\ -15 \\ 2 \end{vmatrix}$$

$$[T]_O = \begin{cases} \vec{R} = \begin{vmatrix} -2 \\ -1 \\ 3 \end{vmatrix} \\ \vec{M_O} = \begin{vmatrix} 1 \\ -15 \\ 2 \end{vmatrix} \end{cases}$$

2. Le pas et l'axe central du torseur $[T]_O$

a. Le pas :

$$P = \frac{\vec{R}.\vec{M}_0}{\vec{R}^2} = \frac{19}{14}$$

b. L'axe central :

$$\overrightarrow{OP} = \frac{\vec{R} \wedge \vec{M}_0}{\vec{R}^2} + \alpha\vec{R} = \frac{1}{14}\begin{vmatrix}-2\\-1\\3\end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix}1\\-15\\2\end{vmatrix} + \alpha\begin{vmatrix}-2\\-1\\3\end{vmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{43}{14} - 2\alpha \\ y = \frac{1}{2} - \alpha \\ z = \frac{31}{14} + 3\alpha \end{cases}$$

3. Calculer le moment au point D de coordonnées (2, 1,-2)

a. On applique la formule du transport des moments

$$\vec{M}_D = \vec{M}_0 + \overrightarrow{DO} \wedge \vec{R} = \begin{vmatrix}1\\-15\\2\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}-2\\-1\\2\end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix}-2\\-1\\3\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}0\\-13\\2\end{vmatrix}$$

B. Somme des moments des trois vecteurs : $A(2,0,0), B(0,1,0), C(0,0,3)$

$$\vec{M}_D = \overrightarrow{DA} \wedge \vec{V}_1 + \overrightarrow{DB} \wedge \vec{V}_2 + \overrightarrow{DC} \wedge \vec{V}_3 = \begin{vmatrix}0\\-1\\2\end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix}3\\1\\0\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}-2\\0\\2\end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix}0\\-2\\1\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}-2\\-1\\5\end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix}-5\\0\\2\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}0\\-13\\2\end{vmatrix}$$

4. $[T]_D = \begin{cases} \vec{R} = \begin{vmatrix}-2\\-1\\3\end{vmatrix} \\ \vec{M}_O = \begin{vmatrix}0\\-13\\2\end{vmatrix} \end{cases}$

EXERCICE 05 :

Soient les trois vecteurs $\vec{V}_1 = \vec{j} + \vec{k}$; $\vec{V}_2 = \vec{i} + \vec{k}$ et $\vec{V}_3 = \alpha\vec{i} + \beta\vec{j} - 2\vec{k}$, définis dans un repère orthonormé $R(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ respectivement aux points $A\left(-\frac{1}{2},1,0\right)$; $B\left(0,0,-\frac{1}{2}\right)$ et $C\left(-\frac{1}{2},0,-1\right)$ α,β sont des nombres réels.

1. Déterminer les éléments de réduction du torseur $[T_1]_O$.

2. Montrer que quel que soient α, β le torseur est un glisseur.

3. Pour quelles valeurs de α, β le torseur est-il nul ?

4. Calculer $(\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2).\vec{V}_3$, pour ces valeurs de α et β.

CORRIGE :

1. Les éléments de réduction du torseur au point O

$$[T]_O = \begin{cases} \vec{R} = \vec{V}_1 + \vec{V}_2 + \vec{V}_3 \\ \vec{M}_O = \overrightarrow{OA} \wedge \vec{V}_1 + \overrightarrow{OB} \wedge \vec{V}_2 + \overrightarrow{OC} \wedge \vec{V}_3 \end{cases}$$

$$\vec{R}_1 = \vec{V}_1 + \vec{V}_2 + \vec{V}_3 = \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \alpha \\ \beta \\ -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1+\alpha \\ 1+\beta \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$\vec{M}_O = \begin{vmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ -1 \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} \alpha \\ \beta \\ -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \beta \\ -\alpha-1 \\ -\frac{1}{2}\beta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \beta+1 \\ -\alpha-1 \\ -\frac{1}{2}(1+\beta) \end{vmatrix}$$

$$[T]_O = \begin{cases} \vec{R} = \begin{vmatrix} 1+\alpha \\ 1+\beta \\ 0 \end{vmatrix} \\ \vec{M}_O = \begin{vmatrix} \beta+1 \\ -(\alpha+1) \\ -\frac{1}{2}(1+\beta) \end{vmatrix} \end{cases}$$

2. Le torseur est un glisseur si : $\begin{cases} \vec{R} \neq \vec{0} \\ \vec{M}_O.\vec{R} = 0 \end{cases}$

$$\vec{R}.\vec{M}_O = \begin{vmatrix} 1+\alpha \\ 1+\beta \\ 0 \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} \beta+1 \\ -(\alpha+1) \\ -\frac{1}{2}(1+\beta) \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad [\mathrm{T}]_0 \text{ est un glisseur}$$

3. Valeurs de α, β pour lesquelles le torseur est nul :

$$[T]_O = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{R} = \vec{0} \\ \vec{M}_O = \vec{0} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \alpha = \beta = -1$$

4. Calculer $(\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2).\vec{V}_3$ pour ces valeurs de α, β:

$\vec{V}_1 = \vec{j} + \vec{k}$; $\vec{V}_2 = \vec{i} + \vec{k}$; $\vec{V}_3 = -\vec{i} - \vec{j} - 2\vec{k}$,

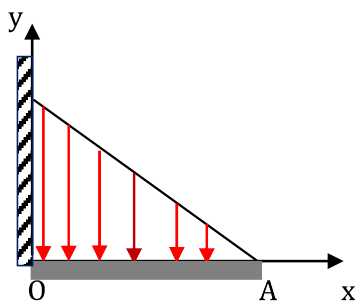
$$(\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2).\vec{V}_3 = \left(\begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix} \right) . \begin{vmatrix} -1 \\ -1 \\ -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} -1 \\ -1 \\ -2 \end{vmatrix} = 0$$

EXERCICE 06 :

Soit un repère $R(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ orthonormé direct. Sur une poutre OA de longueur l, encastrée dans un mur à son extrémité O, s'exerce une action mécanique répartie, définie en tout point $M(x)$ de OA par sa densité linéique $\vec{F}(M) = -\frac{P}{l}(l-x)\vec{j}$ où P représente la pression de contact au point O.

1. Déterminer la résultante et le moment au point O du champ de vecteurs $\vec{F}(M)$ défini en tout point M de OA.

2. En déduire l'expression du moment au point $B(x = \lambda)$ de l'ensemble infini de glisseurs.



CORRIGE :

1. La résultante et le moment au point O

a. La résultante

$\vec{F}(M)$ est la densité linéique de l'action mécanique, c'est la force mécanique qui s'exerce sur la poutre OA par unité de longueur.

$$\Rightarrow \quad \vec{F}(M) = \frac{\overrightarrow{df}}{dx} = -\frac{P}{l}(l-x)\vec{j} \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{df} = \vec{F}(M)dx$$

D'où la résultante de toutes les forces qui s'exercent sur OA est :

$$\vec{R} = \int \overrightarrow{df} = \int_0^l -\frac{P}{l}(l-x)\,dx\,\vec{j} = -\frac{Pl}{2}\vec{j} = \begin{vmatrix} 0 \\ -\frac{Pl}{2} \\ 0 \end{vmatrix}$$

b. Le moment en O

$$\vec{M}_O = \int \overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{df} = \int_0^l x\vec{i} \wedge (-\frac{P}{l}(l-x))\,dx\,\vec{j} = -\frac{Pl^2}{6}\vec{k} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{Pl^2}{6} \end{vmatrix}$$

2. Le moment au point B

$$\vec{M}_B = \vec{M}_O + \vec{R} \wedge \overrightarrow{OB} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{Pl^2}{6} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 \\ -\frac{Pl}{2} \\ 0 \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} \lambda \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{Pl}{2}(\lambda - \frac{l}{3}) \end{vmatrix}$$

EXERCICE 07 :

Soit le champ des moments $\vec{M}$ qui a pour valeur : $\vec{M}_A = (a, 2, -1)$; $\vec{M}_B = (1, b, 0)$; $\vec{M}_C = (1,1,C)$ où A, B et C sont les points : $A(1,0,0)$; $B(0,1,0)$ et $C(0,0,1)$.

1. Calculer a, b, c. Que représente le vecteur (a, b, c)?

2. Déterminer les éléments de réduction en O du torseur dont $\vec{M}$ est le moment.

3. Déterminer le moment résultant en un point N quelconque.

CORRIGE :

1. Calcul de a, b et c :

Le champ des moments est antisymétrique (équiprojectif) alors :

$$\vec{M}_A \,.\, \overrightarrow{AB} = \vec{M}_B \,.\, \overrightarrow{AB} \quad (1) \Rightarrow \begin{vmatrix} a \\ 2 \\ -1 \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 \\ b \\ 0 \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix} \Leftrightarrow -a + 2 = -1 + b \Rightarrow \boldsymbol{a + b = 3}$$

$$\vec{M}_A \,.\, \overrightarrow{AC} = \vec{M}_C \,.\, \overrightarrow{AC} \quad (2) \Rightarrow \begin{vmatrix} a \\ 2 \\ -1 \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ c \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix} \Leftrightarrow -a - 1 = -1 + c \Rightarrow \boldsymbol{a + c = 0}$$

$$\vec{M}_B \,.\, \overrightarrow{BC} = \vec{M}_C \,.\, \overrightarrow{BC} \quad (3) \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 \\ b \\ 0 \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ c \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{vmatrix} \Leftrightarrow -b = -1 + c \Rightarrow \boldsymbol{b + c = 1}$$

D'où : $\begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \\ c = -1 \end{cases}$

De même soient α, β et γ les composantes du moment au point $O(0,0,0)$. $\vec{M}_O$ vérifie :

$$\vec{M}_O \cdot \overrightarrow{OA} = \vec{M}_A \cdot \overrightarrow{OA} \quad (4) \quad \Rightarrow \begin{vmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a \\ 2 \\ -1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \Leftrightarrow \boldsymbol{\alpha = a = 1}$$

$$\vec{M}_O \cdot \overrightarrow{OB} = \vec{M}_B \cdot \overrightarrow{OB} \quad (5) \quad \Rightarrow \begin{vmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 \\ b \\ 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix} \Leftrightarrow \boldsymbol{\beta = b = 2}$$

$$\vec{M}_O \cdot \overrightarrow{OC} = \vec{M}_C \cdot \overrightarrow{0C} \quad (6) \quad \Rightarrow \begin{vmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ c \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix} \Leftrightarrow \boldsymbol{\gamma = c = -1}$$

Donc le vecteur de composante (a, b, c), représente le moment au point $O(0,0,0)$.

2. Les éléments de réduction du torseur $[T]_O$:

Soient (R_x, R_y, R_z) les composantes de la résultante $\vec{R}$ du torseur.

$$[T]_O = \begin{cases} \vec{R} = R_x \vec{\imath} + R_y \vec{\jmath} + R_z \vec{k} \\ \vec{M}_O = \vec{\imath} + 2\vec{\jmath} - \vec{k} \end{cases}$$

Pour déterminer les composantes de la résultante, on applique la formule du transport des moments :

$$\vec{M}_O = \vec{M}_A + \overrightarrow{0A} \wedge \vec{R} \Longrightarrow \begin{vmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} R_x \\ R_y \\ R_z \end{vmatrix} \Rightarrow R_y = 0 \ et \ R_z = 0$$

$$\vec{M}_O = \vec{M}_B + \overrightarrow{0B} \wedge \vec{R} \Longrightarrow \begin{vmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} R_x \\ R_y \\ R_z \end{vmatrix} \Rightarrow R_x = 1$$

D'où :

$$[T]_O = \begin{cases} \vec{R} = \vec{\imath} \\ \vec{M}_O = \vec{\imath} + 2\vec{\jmath} - \vec{k} \end{cases}$$

3- Le moment résultant en un point N quelconque

Soient (x, y, z) les coordonnées du point N. En appliquant la formule du transfert des moments pour déterminer le moment en ce point .

$$\vec{M}_N = \vec{M}_O + \overrightarrow{NO} \wedge \vec{R} \Rightarrow \begin{vmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -x \\ -y \\ -z \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{cases} M_x = 1 \\ M_y = 2 - z \\ M_z = y - 1 \end{cases}$$

D'où :

$$\vec{M}_N = \begin{vmatrix} 1 \\ 2 - z \\ y - 1 \end{vmatrix}$$

EXERCICE 08 :

Soient deux torseurs $[T_1]_O$ et $[T_2]_O$ définis au même point O par leurs éléments de réduction dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$:

$$[T_1]_O = \begin{cases} \vec{R}_1 = cos\alpha\vec{\imath} + sin\alpha\vec{\jmath} \\ \vec{M}_{1O} = -asin\alpha\vec{\imath} + acos\alpha\vec{\jmath} \end{cases} \quad \text{et} \quad [T_2]_O = \begin{cases} \vec{R}_2 = cos\alpha\vec{\imath} - sin\alpha\vec{\jmath} \\ \vec{M}_{2O} = -asin\alpha\vec{\imath} - acos\alpha\vec{\jmath} \end{cases}$$

a et α sont des constantes non nulles données avec $\alpha \in]0, \pi[$.

1. Préciser la nature des torseurs $[T_1]_O$ et $[T_2]_O$.

2. λ_1 *et* λ_2 étant deux réels, soit $[T]_O = \lambda_1 [T_1]_O + \lambda_2 [T_2]_O$. Trouver l'invariant scalaire I de $[T]_O$.

3. Trouver le comoment de $[T_1]_O$ et $[T_2]_O$.

4. Trouver une relation entre I et ce comoment.

CORRIGE :

1. La nature des torseurs $[T_1]_O$ et $[T_2]_O$

$$[T_1]_O = \begin{cases} \vec{R}_1 = cos\alpha\vec{\imath} + sin\alpha\vec{\jmath} \\ \vec{M}_{1O} = -asin\alpha\vec{\imath} + acos\alpha\vec{\jmath} \end{cases} \quad \text{et} \quad [T_2]_O = \begin{cases} \vec{R}_2 = cos\alpha\vec{\imath} - sin\alpha\vec{\jmath} \\ \vec{M}_{2O} = -asin\alpha\vec{\imath} - acos\alpha\vec{\jmath} \end{cases}$$

Calculons les invariants scalaires I_1 et I_2 des deux torseurs :

$I_1 = \vec{R}_1 . \vec{M}_{1O} = -cos\alpha . asin\alpha + sin\alpha . acos\alpha = 0$ et $I_2 = \vec{R}_2 . \vec{M}_{2O} = 0$

Or $\vec{R}_1$ et $\vec{R}_2$ ne peuvent être nuls, donc les deux torseurs sont des glisseurs.

2. Les éléments de réduction de $[T]_O$

$[T]_O = \lambda_1 [T_1]_O + \lambda_2 [T_2]_O$

$$[T]_O = \begin{cases} \vec{R} = (\lambda_1 + \lambda_2). cos\alpha \vec{\imath} + (\lambda_1 - \lambda_2) sin\alpha \vec{\jmath} \\ \vec{M}_O = -(\lambda_1 + \lambda_2). asin\alpha \vec{\imath} + (\lambda_1 - \lambda_2). acos\alpha \vec{\jmath} \end{cases}$$

L'invariant scalaire I de $[T]_O$

$$I = \vec{R}.\vec{M}_O = -(\lambda_1 + \lambda_2)^2 . acos\alpha . sin\alpha + (\lambda_1 - \lambda_2)^2 . acos\alpha . sin\alpha = -4a\lambda_1\lambda_2 cos\alpha . sin\alpha$$

3. Trouver le comoment de $[T_1]_O$ et $[T_2]_O$.

$$C = [T_1]_O . [T_2]_O = \vec{R}_1 . \vec{M}_{2O} + \vec{R}_2 . \vec{M}_{1O} = -4acos\alpha . sin\alpha$$

4. Relation entre I et C

$$\Rightarrow I = \lambda_1 \lambda_2 . C \quad \Rightarrow \quad C = \frac{I}{\lambda_1 \lambda_2}$$

EXERCICE 09 :

Un panneau indicateur est soumis à son propre poids et à l'action du vent sur sa partie rectangulaire. Le poids linéique des montants OA et AB est $\vec{q} = -q\vec{\jmath}$. Le poids du panneau CDEF est $\vec{P} = -Mg\vec{\jmath}$. L'action du vent sur CDEF est représentée par une densité surfacique d'efforts $\vec{p} = -p\vec{k}$.

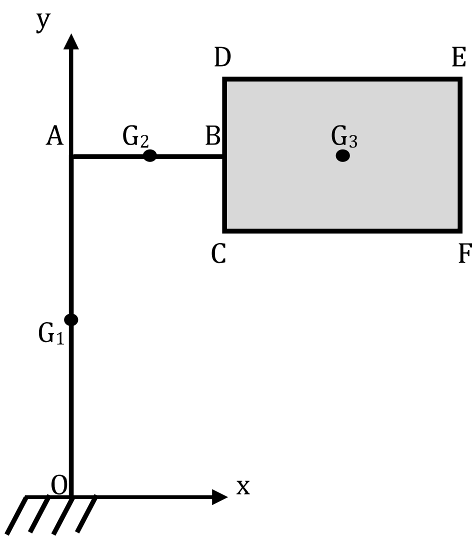
Calculer le torseur d'action mécanique en O du sol sur cette structure. On donne :

$OA = 7.5m;\ AB = 3m;\ DC = 3m;\ DE = 4m$

$q = 750N.m^{-1};\ P = 5.10^2 N.m^{-2};\ Mg = 7.10^3 N$

CORRIGE :

1. Le torseur d'action mécanique en O



$$[T]_O = \begin{cases} \vec{R} = \sum \vec{F}_i \\ \vec{M}_O = \sum \vec{M}_i \end{cases}$$

$$\vec{R} = \vec{q}_{OA} + \vec{q}_{AB} + \vec{P}_{CDEF} + \vec{p}_{vent} = \begin{vmatrix} 0 \\ -5625 \\ 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 \\ -2250 \\ 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 \\ -7000 \\ 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ -6000 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 \\ -14875 \\ -6000 \end{vmatrix}$$

$$\vec{M}_O(\vec{F}_i) = \vec{M}_O(\vec{q}_{OA}) + \vec{M}_O(\vec{q}_{AB}) + \vec{M}_O(\vec{P}_{CDEF)} + \vec{M}_O(\vec{p}_{vent})$$

$$\vec{M}_O(\vec{F}_i) = \overrightarrow{OG}_1 \wedge \vec{q}_{OA} + \overrightarrow{OG}_2 \wedge \vec{q}_{AB} + \overrightarrow{OG}_3 \wedge \vec{P}_{CDEF} + \overrightarrow{OG}_3 \wedge \vec{p}_{vent}$$

$$\vec{M}_O = \begin{vmatrix} 0 \\ 3{,}75 \\ 0 \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} 0 \\ -5625 \\ 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1{,}5 \\ 7{,}5 \\ 0 \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} 0 \\ -2250 \\ 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 5 \\ 7{,}5 \\ 0 \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} 0 \\ -7000 \\ 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 5 \\ 7{,}5 \\ 0 \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ -6000 \end{vmatrix}$$

$$\vec{M}_O = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 7{,}5 \\ -1{,}5 \\ -3375 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ -35000 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -45000 \\ 30000 \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -44992{,}5 \\ 29998{,}5 \\ -38375 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -45000 \\ 30000 \\ -38375 \end{vmatrix}$$

$$[T]_O = \begin{cases} \vec{R} = \begin{vmatrix} 0 \\ -14875 \\ -6000 \end{vmatrix} \\ \vec{M}_O = \begin{vmatrix} -45000 \\ 30000 \\ -38375 \end{vmatrix} \end{cases}$$

Le torseur $[T_1]_O$ d'action mécanique en O du sol sur cette structure

$$[T_1]_O = -[T]_O = \begin{cases} \vec{R} = \begin{vmatrix} 0 \\ 14875 \\ 6000 \end{vmatrix} \\ \vec{M}_O = \begin{vmatrix} 45000 \\ -30000 \\ 38375 \end{vmatrix} \end{cases}$$

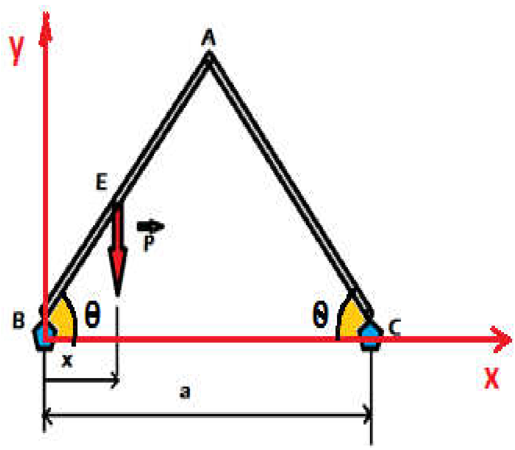
II. Statique du Solide

II. Statique du Solide

II.1. STATIQUE ANALYTIQUE

EXERCICE 01 :

Un système de deux tiges AB et AC de longueurs identiques (l) articulées en A, B et C formant toutes les deux un angle $\theta = 60°$ et soumis à l'action d'une charge $P = 5000N$ appliquée en E comme l'indique la figure. On donne $x = 1{,}5\,m$ et $a = 8\,m$. Déterminer les actions aux différentes articulations.



CORRIGE :

$$\sum \vec{F}_{ex} = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{R_A} + \overrightarrow{R_B} + \vec{P} = \vec{0}$$

$$\sum F_{ex/ox} = 0 \Leftrightarrow R_{Bx} - R_{Cx} = 0$$

$$\Rightarrow \quad R_{Bx} = R_{Cx}$$

Et

$$\sum F_{ex/oy} = 0 \Leftrightarrow R_{By} + R_{Cy} = P \quad \Rightarrow R_{By} = P - R_{Cy}$$

$$\sum \overrightarrow{M_B}(\vec{F}) = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad P.x - R_{Cy}.a = 0 \Leftrightarrow R_{Cy} = \frac{P.x}{a}$$

Donc, $R_{By} = P - \frac{P.x}{a} = P(1 - \frac{x}{a})$

A.N :

$$R_{Cy} = \frac{5000.1{,}5}{8} = 937{,}5\ N \qquad R_{By} = 5000\left(1 - \frac{1{,}5}{8}\right) = 4062{,}5\ N$$

Pour déterminer l'effort appliqué au point A, nous séparons la structure en deux sous-structures indiquées comme suit :

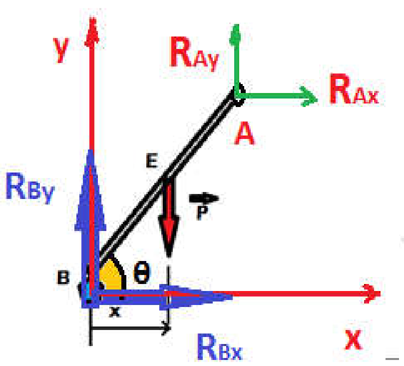


Schéma (1)

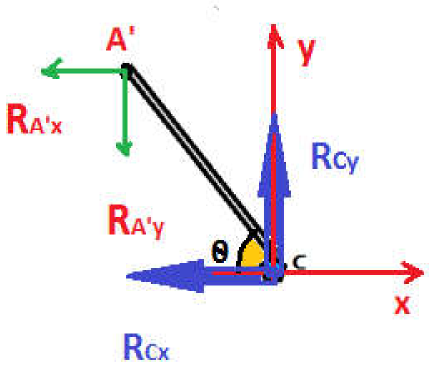


Schéma (2)

Pour le schéma (1) :

$$\sum \vec{F}_{ex} = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{R_A} + \overrightarrow{R_B} + \vec{P} = \vec{0}$$

$$\sum F_{ex/ox} = 0 \Leftrightarrow R_{Bx} + R_{Ax} = 0 \quad \Rightarrow \quad R_{Bx} = -R_{Ax}$$

Et

$$\sum F_{ex/oy} = 0 \Leftrightarrow R_{By} + R_{Ay} = P \quad \Rightarrow \quad R_{Ay} = P - R_{By}$$

$$\sum \overrightarrow{M_B}(\vec{F}) = \vec{0} \Rightarrow P.x - R_{Ay}.\frac{a}{2} + R_{Ax}.l.\sin\theta = 0 \Leftrightarrow R_{Ax} = \frac{R_{Ay}.\frac{a}{2} - P.x}{l.\sin\theta}$$

On a:

$$\cos\theta = \cos 60° = \frac{4}{l} \Rightarrow l = \frac{4}{\cos 60°} = 8\,m$$

A.N :

$$R_{Ay} = 5000 - 4062{,}5 = 937{,}5\ N$$

$$R_{Ax} = \frac{937{,}5.\frac{8}{2} - 5000.1{,}5}{8.\sin 60°} = -541{,}12\ N$$

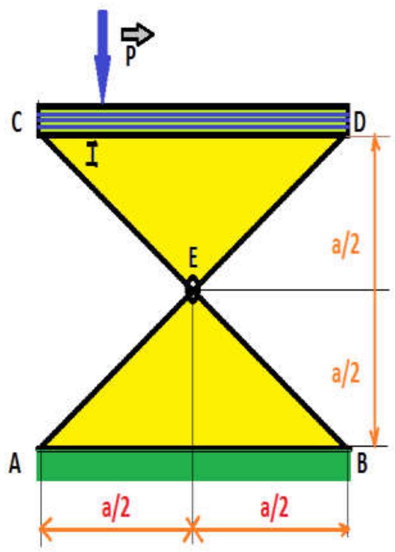
$$R_{Bx} = R_{Cx} = -R_{Ax} = 541{,}12\ N$$

$R_A = R_C = 1082{,}45\ N$ $\qquad\qquad$ $R_B = 4098{,}37\ N$

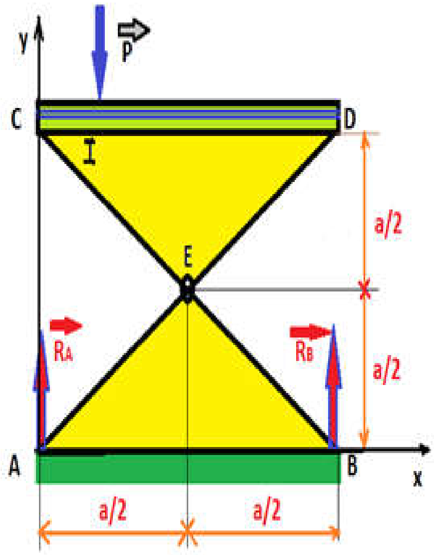
EXERCICE 02:

Un siège pliant assimilé à un cadre plan repose sur un plancher lisse horizontal. Ce siège est chargé par une force verticale P. Déterminer les efforts agissants sur l'axe (E) reliant les barres AD et BC.

On donne $CI = \lambda.a$



CORRIGE :



$$\sum \vec{F}_{ex} = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{R_A} + \overrightarrow{R_B} + \vec{P} = \vec{0}$$

$$\sum F_{ex/ox} = 0 \Leftrightarrow R_{Bx} - R_{Ax} = 0 \quad \Rightarrow \quad R_{Bx} = R_{Ax}$$

Et

$$\sum F_{ex/oy} = 0 \Leftrightarrow R_{By} + R_{Ay} = P \quad \Rightarrow R_{By} = P - R_{Ay}$$

$$\sum \overrightarrow{M_A}(\vec{F}) = \vec{0} \Rightarrow P.\lambda.a - R_{By}.a = 0 \Leftrightarrow R_{By} = P.\lambda.$$

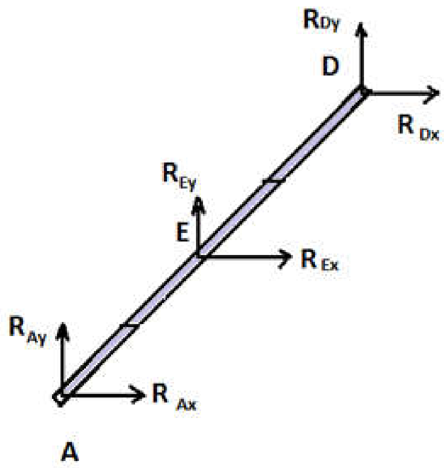
Donc, $\quad R_{Ay} = P - R_{By} = P - P.\lambda = P(1-\lambda).$

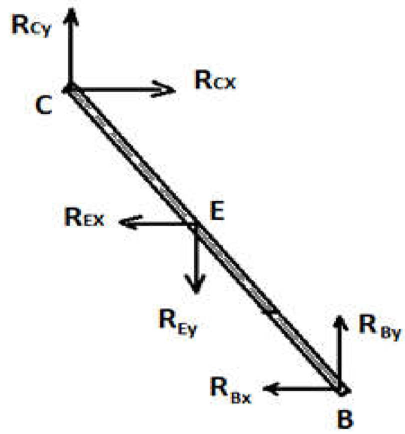
$$\sum \overrightarrow{M_E}(\vec{F}) = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad P.\left(\frac{a}{2} - \lambda.a\right) + R_{By}.\frac{a}{2} - R_{Ay}.\frac{a}{2} + R_{Ax}.\frac{a}{2} - R_{Bx}.\frac{a}{2} = 0$$

Et puisque : $\quad R_{Bx} = R_{Ax}$

$$\sum \overrightarrow{M_E}(\vec{F}) = \overrightarrow{0} \Rightarrow \quad R_{Bx} = R_{Ax} = 0$$

Pour déterminer l'effort appliqué au point E, nous séparons la structure en deux sous-structures :





Structure (1)

Structure (2)

Structure (1) :

$$\sum \vec{F}_{ex} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{R_A} + \overrightarrow{R_D} + \overrightarrow{R_E} = \vec{0}$$

$$\sum F_{ex/ox} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad R_{Ex} + R_{Ax} + R_{Dx} = 0 \quad \Rightarrow R_{Ex} = -R_{Dx}$$

Et

$$\sum F_{ex/oy} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad R_{Dy} + R_{Ay} + R_{Ey} = 0$$

$$\sum \overrightarrow{M_D}(\vec{F}) = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad -R_A.a - R_{Ey}.\frac{a}{2} + R_{Ex}\frac{a}{2} = 0 \Leftrightarrow 2R_A = R_{Ex} - R_{Ey} = 2P(1-\lambda)$$

Structure(2) :

$$\sum \overrightarrow{M_C}(\vec{F}) = \vec{0} \Rightarrow R_B.a - R'_{Ey}.\frac{a}{2} - R'_{Ex}\frac{a}{2} = 0 \Leftrightarrow 2R_B = R'_{Ex} + R'_{Ey} = 2P\lambda$$

$$2R_A = R_{Ex} - R_{Ey} = 2P(1-\lambda)$$

$2R_B = R'_{Ex} + R'_{Ey} = -R_{Ex} - R_{Ey} = 2P\lambda$

D'où on peut additionner les deux derniers termes, et on aura :

$2R_A + 2R_B = 2P(1-\lambda) + 2P\lambda = -2R_{Ey}$

Et de ce fait, on a : $R_{Ey} = -P$

Et finalement :

$R_{Ex} - R_{Ey} = 2R_A \Rightarrow R_{Ex} = 2P(1-\lambda) + P$

$R_{Ex} = P(3 - 2\lambda)$

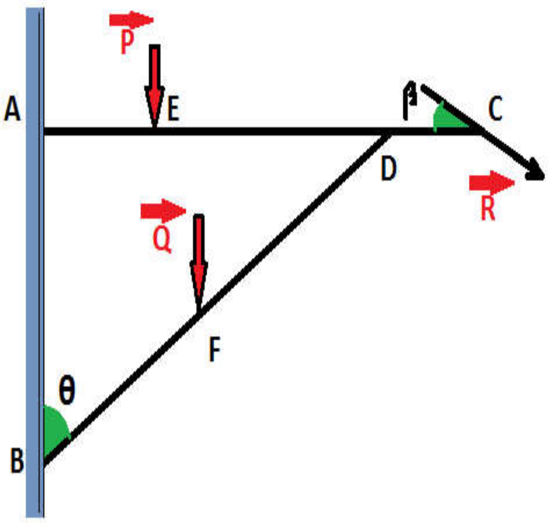
EXERCICE 03:

Deux barres AC et BD de longueurs égales sont articulées entre elles en D et à un mur vertical en A et B. La barre AC est soumise à l'effort $P = 20\ kN$ au point E, et sur la barre BD on applique un autre effort $Q = 20\ kN$ au point F (centre de BD).

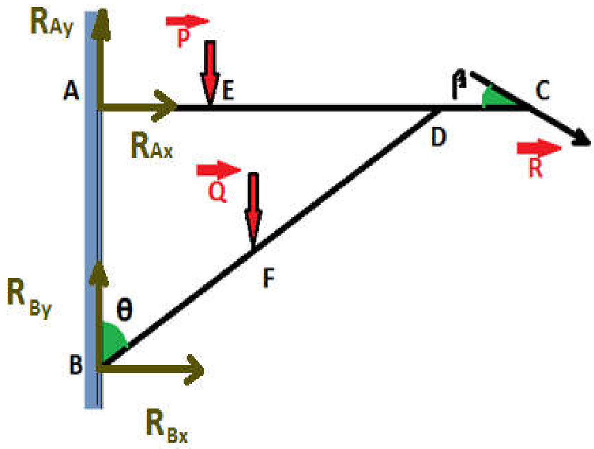
Une charge $R = 50\ kN$ est appliquée au point C et faisant un angle $\beta = 30°$ avec l'horizontale.

On donne : $AE = a = 2\ m$, $AC = BD = b = 6\ m$, $\theta = 60°$.

Déterminer les réactions R_A, R_B et R_D sachant que le système reste en équilibre.



CORRIGE :



$$\sum \vec{F}_{ex} = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{R_A} + \overrightarrow{R_B} + \vec{P} + \vec{Q} + \vec{R} = \vec{0}\,; \quad \sum F_{ex/ox} = 0 \Leftrightarrow R_{Ax} + R_{Bx} + R.cos30° = 0$$

Et

$$\sum F_{ex/oy} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad R_{By} + R_{Ay} - P - Q - Rsin30° = 0$$

$$\sum \overrightarrow{M_A}(\vec{F}) = \vec{0} \Rightarrow -P.a - Q.\frac{b}{2}.sin60° - R.bsin30° + R_{Bx}.b.cos60° = 0$$

D'où, on peut tirer :

$$R_{Bx} = \frac{1}{b.cos60°}(P.a + Q.\frac{b}{2}.sin60° + R.bsin30°)$$

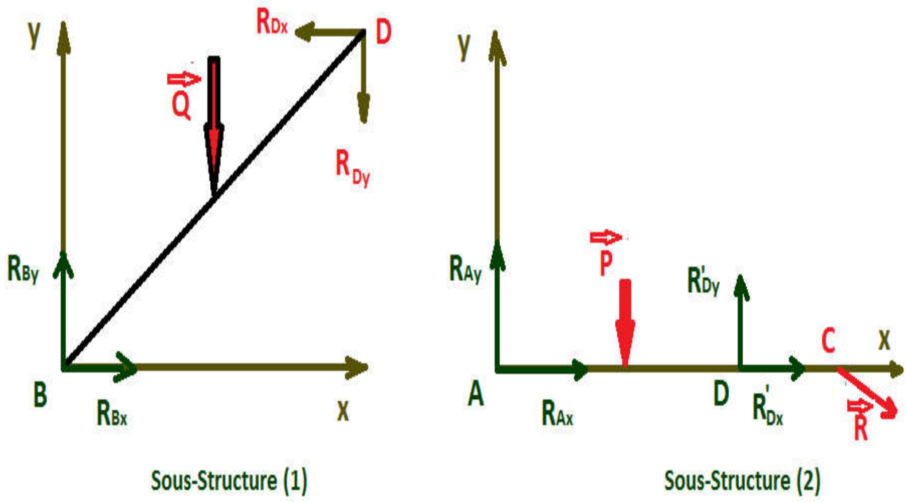
A.N :

$$R_{Bx} = \frac{1}{b.cos60°}\left(P.a + Q.\frac{b}{2}.sin60° + R.bsin30°\right) = 80{,}7\ kN$$

Et

$$R_{Ax} = -R_{Bx} - R.cos30° \Rightarrow R_{Ax} = -80{,}7 - 50.cos30° = -124\ kN$$

L'effort appliqué au point D, sera déterminé par une séparation de la structure en deux sous-structures (1) et (2) :



Sous-Structure (1) et (2) :

$$\sum \vec{F}_{ex} = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{R_D} + \overrightarrow{R_B} + +\vec{Q} = \vec{0} \quad \text{et} \quad \sum F_{ex/ox} = 0 \Leftrightarrow R_{Bx} - R_{Dx} = 0$$

Et

$$\sum F_{ex/oy} = 0 \Leftrightarrow R_{By} - R_{Dy} - Q = 0$$

$$\sum \overrightarrow{M_D}(\vec{F}) = \vec{0} \Rightarrow Q.\frac{b}{2}.cos30° - R_{By}.b.sin60° + R_{Bx}.b.cos60° = 0$$

D'où :

$$R_{By} = \frac{1}{b.sin60°}\left(Q.\frac{b}{2}.cos30° + R_{Bx}.b.cos60°\right)$$

A.N:

$$R_{By} = \frac{1}{6.0.866}\left(20.\frac{6}{2}.0.866 + 80,7.6.0,5\right) = 56,6\ kN.$$

La projection des efforts sur l'axe y, concernant la structure assemblée nous permet de déterminer :

$$R_{Ay} = -R_{By} + P + Q + Rsin30°$$

A.N:

$$R_{Ay} = -56{,}6 + 20 + 20 + 50.0{,}5 = 8{,}4\ kN$$

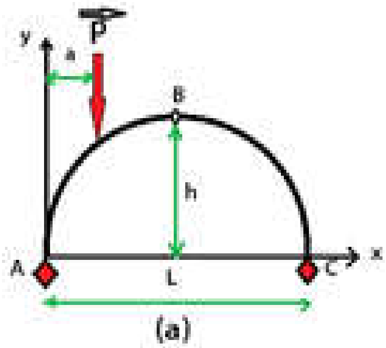
Puisque, $R_{Bx} - R_{Dx} = 0 \Rightarrow R_{Bx} = R_{Dx} = 80{,}7\ kN$

Et $R_{By} - R_{Dy} - Q = 0 \Rightarrow R_{Dy} = R_{By} - Q = 56{,}6 - 20 = 36{,}6\ kN$

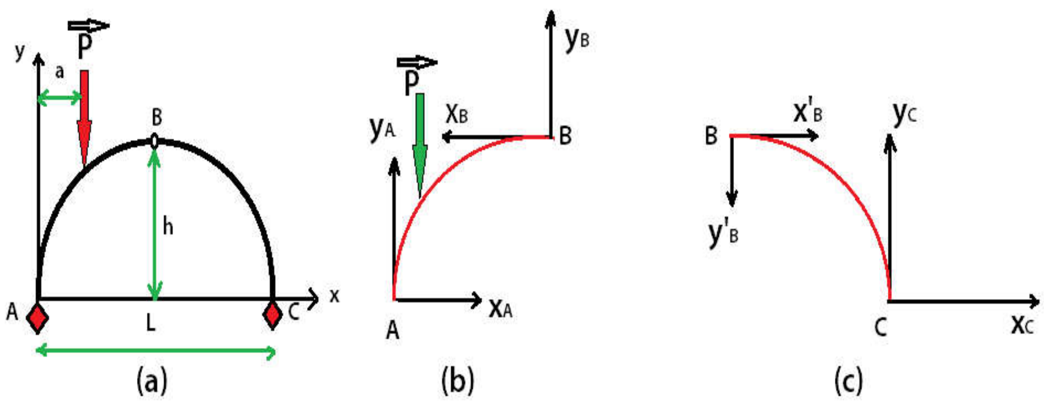
EXERCICE 04:

Soit un arc ABC à trois articulations de poids négligeable sollicité par une force verticale P. Toutes les dimensions sont indiquées sur la figure.

Déterminer les réactions aux articulations A, B et C.



CORRIGE :



Du schéma (a), on tire :

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow X_A + X_c = 0 \qquad (1)$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow Y_A + Y_c = P \qquad (2)$$

$$\sum \overrightarrow{M_A}(\vec{F}) = \vec{0} \Rightarrow -Pa + Yc.L = 0 \Rightarrow Yc = \frac{P.a}{L} \qquad (3)$$

Et $Y_A = P - Y_C = P - Y_{C=}P - \frac{P.a}{L} = P\left(1 - \frac{a}{L}\right)$

$(1) \Leftrightarrow X_{A=-}X_C$

Du schéma (c), on détermine :

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow X_c + X_B^{'} = 0 \qquad (4)$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow -Y_B^{'} + Y_c = 0 \qquad (5)$$

$$\sum \overrightarrow{M_C}(\vec{F}) = \vec{0} \Rightarrow -Y_B^{'}.\frac{L}{2} + X_B^{'}.h = 0 \qquad (6)$$

$(5) \quad \Rightarrow \quad Y_B^{'} = Y_c = \frac{P.a}{L}$

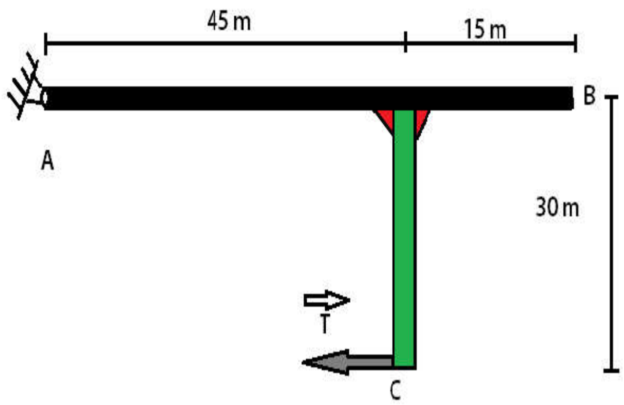
$(6) \quad \Rightarrow \quad -\frac{P.a}{L}.\frac{L}{2} + X_B^{'}.h = 0 \ \Rightarrow X_B^{'} = \frac{Pa}{2h}$

$(4) \quad \Rightarrow \quad X_c = -X_B^{'} = -\frac{Pa}{2h} = -X_A$

EXERCICE 05:

Un socle en cheval, articulé au point A et s'appuyant en B sur un appui fixe servant à maintenir au pied C un câble tendu par une force tension T horizontale dont l'intensité est donnée. Déterminer analytiquement les valeurs des actions en A et B exercées par les appuis sur le socle. Frottement et poids propre du socle négligés.

On donne T = 500 N.



CORRIGE :

$$\sum \vec{F}_{ex} = \vec{0} \Rightarrow \sum F{ex}_{/ox} = 0 \Leftrightarrow R_{Ax} - T = 0 \quad \Rightarrow \quad R_{Ax} = T = 500\ N$$

Et

$$\sum F{ex}_{/oy} = 0 \Leftrightarrow R_B - R_{Ay} = 0 \Rightarrow R_{Ay} = R_B$$

$$\sum \overrightarrow{M_A}(\vec{F}) = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad -30.T + 60.R_B = 0 \Leftrightarrow R_B = \frac{T}{2} = 250\ N$$

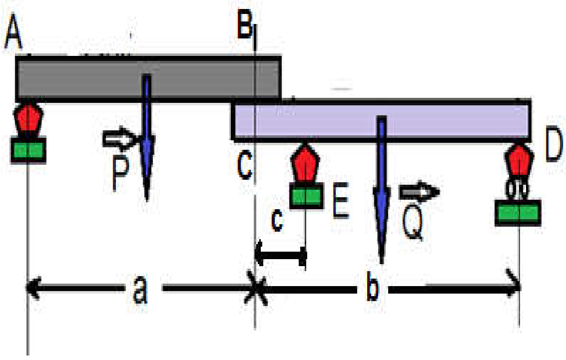
Donc, $R_{Ay} = R_B = 250\ N$

$$R_A = \sqrt{R_{Ax}^2 + R_{Ay}^2} = \sqrt{500^2 + 250^2} = 559{,}01\ N$$

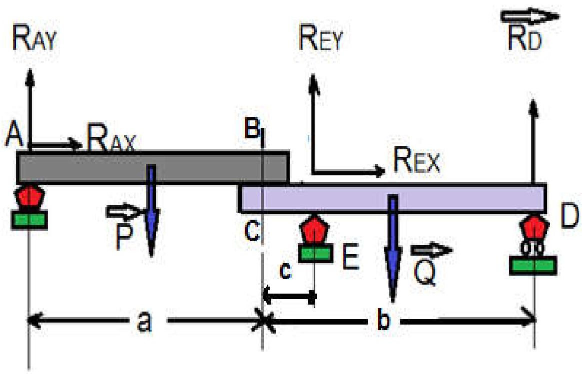
EXERCICE 06:

La structure suivante composée de deux barres AB et CD solidaires entre elles et reposant sur trois appuis comme c'est indiqué sur la figure. Déterminer les efforts agissants sur l'ensemble des deux barres aux points A, B, C, D et E. On donne :

$Q = 2P, \quad a = b, c = \dfrac{a}{3}$



CORRIGE :



$$\sum \vec{F}_{ex} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{R_A} + \overrightarrow{R_D} + \overrightarrow{R_E} + \vec{P} + \vec{Q} = \vec{0}$$

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow R_{Ax} + R_{Ex} = 0 \Rightarrow R_{Ax} = -R_{Ex} \qquad (1)$$

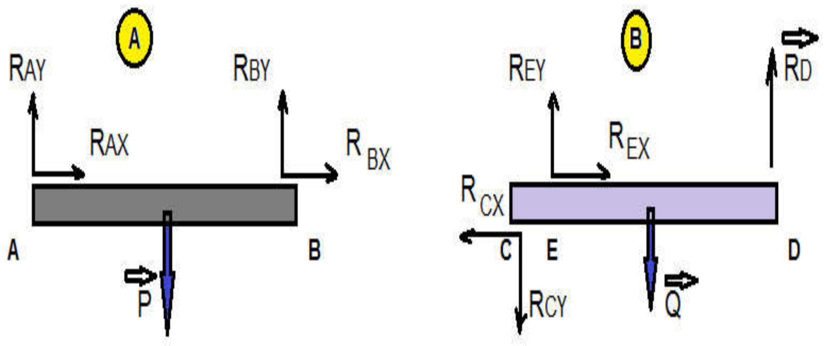
$$\sum F_y = 0 \Rightarrow R_{Ay} + R_{Ey} + R_D = P + Q \qquad (2)$$

$$\sum \overrightarrow{M_A}(\vec{F}) = \vec{0} = \vec{0} \Rightarrow -P\frac{a}{2} + R_{Ey}(a+c) - Q\left(a + \frac{b}{2}\right) + R_D(a+b) = 0 \qquad (3)$$

$$\Leftrightarrow \frac{4a}{3}R_{Ey} + 2a.R_D = P\frac{7a}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{4}{3}R_{Ey} + 2R_D = \frac{7}{2}P$$

Pour pouvoir déterminer l'effort appliqué au point de contact (B) des deux barres, nous sommes obligés de dissocier la structure en deux sous structures (A) et (B) indiquées sur la figure suivante :



Sous-structure (A) :

$$\sum \vec{F}_{ex} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{R_A} + \overrightarrow{R_B} + \vec{P} = \vec{0}$$

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow R_{Ax} + R_{Bx} = 0 \Rightarrow R_{Ax} = -R_{Bx}$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow R_{Ay} + R_{By} = P$$

$$\sum \overrightarrow{M_A}(\vec{F}) = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad -P\frac{a}{2} + R_{By}.a = 0$$

$$\Leftrightarrow R_{By} = \frac{P}{2} \Rightarrow R_{Ay} = P - R_{By} = \frac{P}{2}$$

Le point B est en même temps le point C, ce qui nous permet d'écrire :

$R_{Bx} = -R_{Cx}$ et $R_{By} = -R_{Cy} = \frac{P}{2}$

Sous-structure (B) :

$$\sum \vec{F}_{ex} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{R_C} + \overrightarrow{R_D} + \overrightarrow{R_E} + \vec{Q} = \vec{0}$$

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow -R_{Cx} + R_{Ex} = 0 \Rightarrow R_{Cx} = R_{Ex}$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow -R_{Cy} + R_{Ey} + R_D = Q$$

$$\sum \overrightarrow{M_E}(\vec{F}) = \vec{0} \Rightarrow R_{Cy}(c) - Q\left(\frac{b}{2} - c\right) + R_D(b - c) = 0$$

$$\Rightarrow R_{Cy}\frac{a}{3} - Q\left(\frac{a}{6}\right) + R_D(\frac{2a}{3}) = 0$$

$$\Rightarrow R_D = \frac{3P}{4}$$

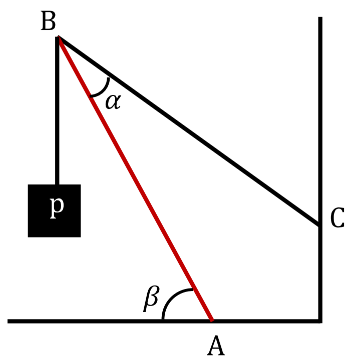
Donc, on peut en déduire que :

$$\frac{4}{3}R_{Ey} + 2R_D = \frac{7}{2}P \Rightarrow R_{Ey} = \frac{3P}{2}$$

II.2. STATIQUE GRAPHIQUE

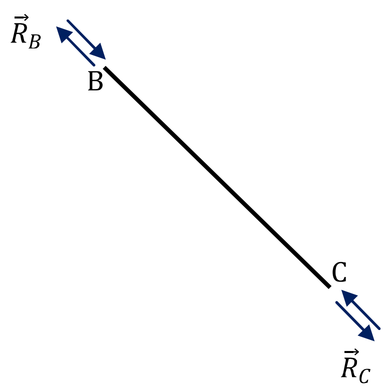
EXERCICE 01:

Soit une barre rigide AB articulée en A et soutenue par un câble BC (voir figure). Une charge étant supportée en B exerce en ce point un effort $P = 2000N$, on donne : $\alpha = 30°$ et $\beta = 45°$. Déterminer graphiquement les efforts qui sollicitent la structure.



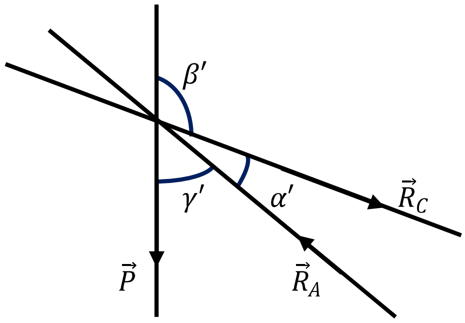
CORRIGE :

Isolons le câble BC sollicité par deux efforts aux extrémités B et C ce qu'il le ramène à être soit tendu ou comprimé:

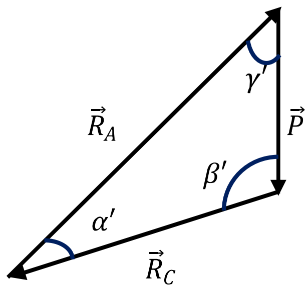


$\overrightarrow{R_B} = -\overrightarrow{R_C}$ et $R_B = R_C$

Isolons par la suite la barre AB sollicitée par trois efforts (efforts concourants):



Le théorème des sinus est tiré à partir du polygone des forces :



$$\frac{P}{sin\alpha'} = \frac{R_c}{sin\gamma'} = \frac{R_A}{sin\beta'}$$

Où $\alpha = \alpha' = 30°\, et\, \beta = \gamma' = 45°$ et $\alpha' + \beta' + \gamma' = \pi$

D'où $\beta' = 180° - \alpha' - \gamma' = 105°$

$\alpha = \alpha' = 30°, \quad \beta = \gamma' = 45°, \quad \beta' = 105°$

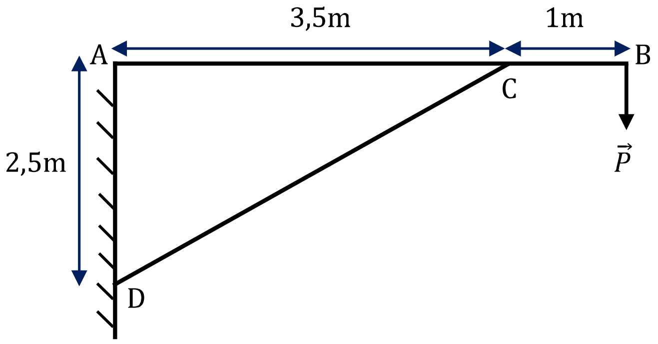
$$R_A = \frac{Psin\beta'}{sin\alpha'} = \frac{2000.sin105°}{sin30°} = 3863,7N$$

$$R_C = \frac{Psin\gamma'}{sin\alpha'} = \frac{2000.sin45°}{sin30°} = 2828,4N$$

$R_A = 3863,7N$ et $R_C = 2828,4N$

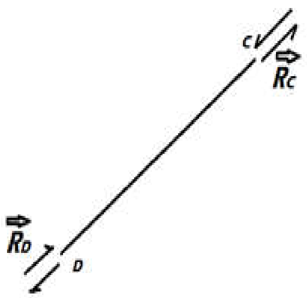
EXERCICE 02:

On considère une structure composée de deux barres AB et CD articulées respectivement en A, D et C et dont le poids est négligeable. On applique à l'extrémité B une charge P = 1000N. Déterminer graphiquement les efforts qui sollicitent les deux barres.

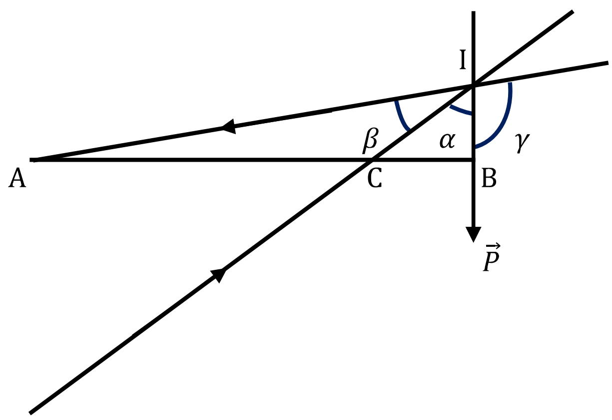


CORRIGE :

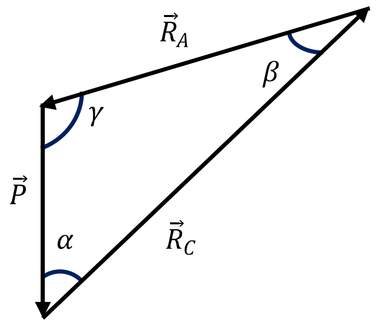
Sur la barre CD, on a : $R_D = R_C$ avec $\overrightarrow{R_D} = -\overrightarrow{R_C}$



Isolons par la suite la barre AB sollicitée par trois efforts (efforts concourants):



Le théorème des sinus est tiré à partir du polygone des forces.



$$\frac{R_A}{sin\alpha} = \frac{R_c}{sin\gamma} = \frac{P}{sin\beta}$$

On a:

$$tg\alpha = \frac{BC}{IB} = \frac{1}{IB} = \frac{AC}{AD} = \frac{3,5}{2,5} = 1,4 \quad \Rightarrow \quad \alpha = 54,46° = 54°27'$$

D'où :

$$IB = \frac{1}{1,4} = 0,714\ m$$

$$tg(\alpha + \beta) = \frac{4,5}{0,714} = 6,30 \Rightarrow (\alpha + \beta) = 80,98° = 80°84' = 81°24'$$

$$\beta = 80,98° - 54,46° = 26,52°$$

$$\gamma = \pi - (\alpha + \beta) = 180° - 80,98° = 99,02°$$

$$\alpha = 54,46°, \qquad \beta = 26,52°, \qquad \gamma = 99,02°$$

$$R_C = \frac{P\ sin\gamma}{sin\beta} = \frac{1000. \sin 99,02°}{\sin 26,52°} = 2260\ N$$

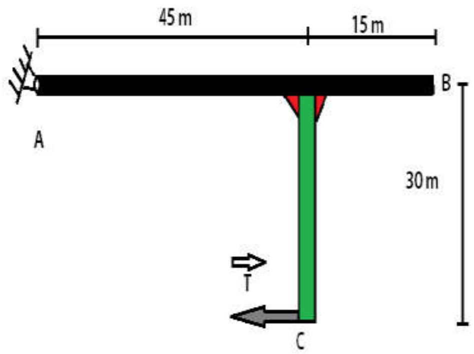
$$R_A = \frac{P\ sin\alpha}{sin\beta} = \frac{1000. \sin 54,46°}{\sin 26,52°} = 1845,5\ N$$

$$R_A = 1845,5\ N \qquad \text{et} \qquad R_c = 2260\ N$$

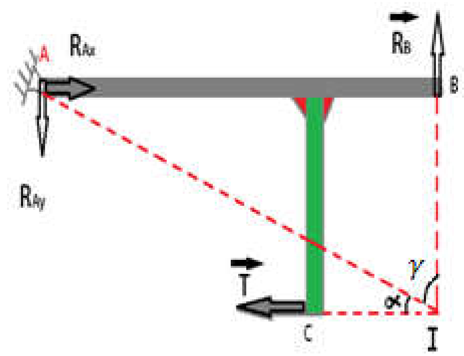
EXERCICE 03:

Un socle en cheval, articulé au point A et s'appuyant en B sur un appui fixe servant à maintenir au pied C un câble tendu par une force tension T horizontale dont l'intensité est donnée. Déterminer graphiquement les valeurs des actions en A et B exercées par les appuis sur le socle. Frottement et poids propre du socle négligés.

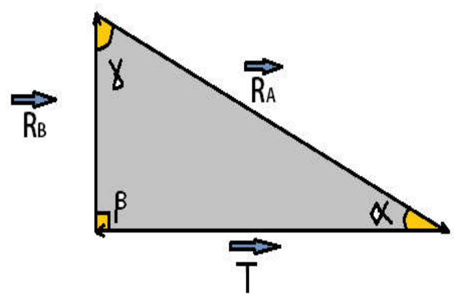
On donne T = 500 N.



CORRIGE :



Polygone des forces :



Théorèmes des sinus :

$$\frac{R_B}{sin\alpha} = \frac{T}{sin\gamma} = \frac{R_A}{sin\beta} \qquad (1)$$

avec $\beta = 90°$

$$\text{tg}\,\gamma = \frac{45 + 15}{30} = 2 \quad \Rightarrow \gamma = 63{,}43°$$

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi \Rightarrow \alpha = 180° - (\beta + \gamma) = 180° - (90° + 63{,}43°) = 26{,}57°$$

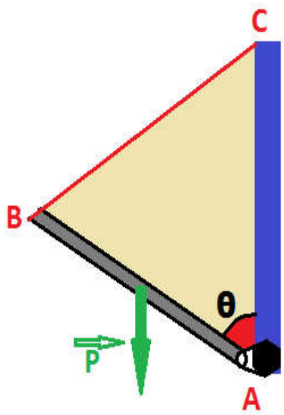
$$(1) \quad \Rightarrow \quad R_A = \frac{T.sin\beta}{\sin\gamma} = 500\frac{1}{0{,}894} = 559{,}28\ N$$

$$(1) \quad \Rightarrow \quad R_B = \frac{T.sin\alpha}{\sin\gamma} = 500\frac{0{,}447}{0{,}894} = 250\ N$$

EXERCICE 04:

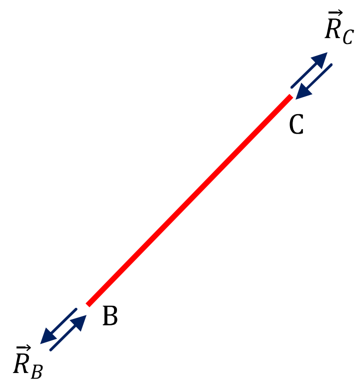
Une barre homogène (AB) de poids (P) est articulée en A à la paroi verticale. Trouver la tension T du câble ainsi que la réaction au point A de l'articulation.

On donne : $AC = AB$.



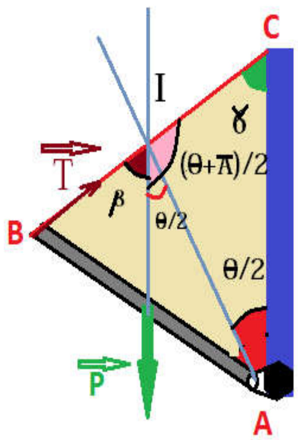
CORRIGE :

On commence par isoler le câble BC : $R_B = R_C$ avec $\overrightarrow{R_B} = -\overrightarrow{R_C}$

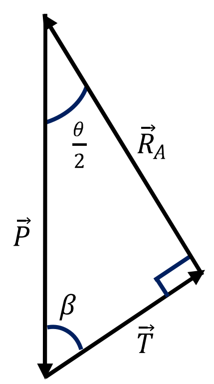


Le câble est soit sollicité par une traction, soit par une compression.

La barre AB est sollicitée par les efforts suivants :



Le polygone des forces, nous donne :



Le théorème des sinus est déterminé à partir du polygone des forces :

$$\frac{P}{sin\frac{\pi}{2}}=\frac{T}{sin\frac{\theta}{2}}=\frac{R_A}{sin\beta}$$

Avec :

$$\frac{\pi}{2}+\frac{\theta}{2}+\gamma=\pi=180°\ \ d'où:\ \gamma=\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2}$$

$$\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2}+\beta+\frac{\theta}{2}=\pi\Rightarrow\beta=\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2}$$

$$\beta=\gamma=\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2}$$

$$\frac{P}{sin\frac{\pi}{2}}=\frac{T}{sin\frac{\theta}{2}}=\frac{R_A}{sin(\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2})}$$

$$\mathrm{T}=Psin\frac{\theta}{2}$$

$$R_A=\frac{P\ sin(\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2})}{sin\frac{\pi}{2}}=P\ sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2}\right)=Pcos\frac{\theta}{2}$$

$$T=Psin\frac{\theta}{2}\qquad\qquad R_A=Pcos\frac{\theta}{2}$$

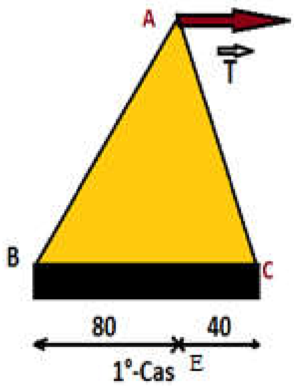
EXERCICE 05:

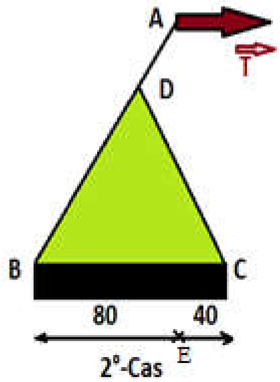
Soit un chevalet à deux montants indiqué sur la figure suivante, avec un effort T exercé au point A égal à 400 N.

a. Déterminer les efforts qui s'exercent en B et C si les deux montants sont articulés en B et C, (1°cas).

b. Déterminer les efforts qui s'exercent en B, C et D si les deux montants sont articulés en B C et D, (2°cas).

On donne : $AE=130\ cm$ et $DE=108\ cm$.

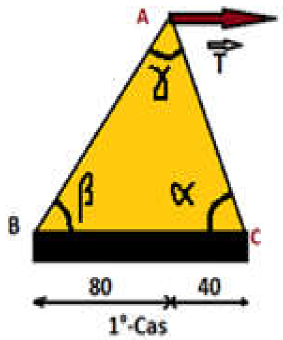


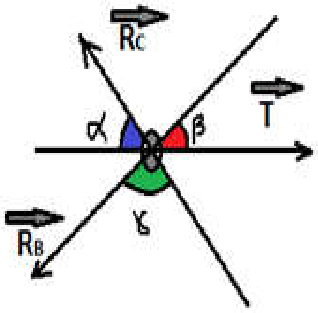


CORRIGE :

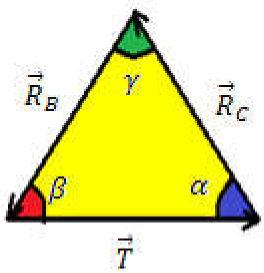
1°cas :

Au début, comme d'habitude, on isole la barre AC ou AB, le point A est un point de concours présenté sous forme de nœud et qui est sollicité par des efforts de traction ou de compression des deux barres AC et AB agissants sur ce nœud, et qui sont représentés aux schémas suivants :





Le théorème des sinus est appliqué à partir du polygone des forces schématisé comme suit :



$$tg\alpha = \frac{130}{40} = 3,25 \Rightarrow \alpha = 72,89° \quad \text{et} \quad tg\beta = \frac{130}{80} = 1,625 \Rightarrow \beta = 58,39°$$

$\gamma = \pi - (\alpha + \beta) = 180° - (72{,}89° + 58{,}39°) = 48{,}72°$

$\alpha = 72{,}89°, \qquad \beta = 58{,}39° \;$ et $\; \gamma = 48{,}72°$

$$\frac{R_B}{sin\alpha} = \frac{T}{\sin\gamma} = \frac{R_c}{sin\beta}$$

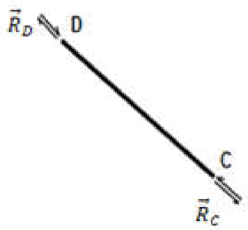
$$R_c = \frac{T.sin\beta}{\sin\gamma} = 400\frac{\sin 58{,}39°}{\sin 48{,}72°} = 453{,}33\ N$$

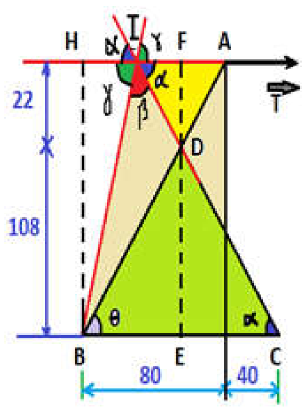
$$R_B = \frac{T.sin\alpha}{\sin\gamma} = 400\frac{\sin 72{,}89°}{\sin 48{,}72°} = 508{,}71\ N$$

$R_B = 508{,}71\ N \quad$ et $\quad R_c = 453{,}33\ N$

2°Cas :

En ce second cas, on procède de la même manière, en commençant par isoler la barre DC sollicitée par deux efforts aux points extrêmes Cet D traduisant ainsi une sollicitation de cette barre soit par une traction ou une compression où le point D présente un nœud en contact avec la barre AB, et le point (I) est un point de concours des différentes forces agissantes sur ce dernier où on représente les deux barres comme suit:





$$tg\alpha = \frac{108}{CE}\ et\ AB = \sqrt{80^2 + 130^2} = \sqrt{23300} = 152{,}64$$

$$tg\theta = \frac{130}{80} = 1{,}625 \Rightarrow \theta = 58{,}39°$$

$$tg\theta = \frac{108}{BE} \Rightarrow BE = \frac{108}{tg\theta} = \frac{108}{1{,}625} = 66{,}46$$

$BE = 66{,}46$

$CE = BC - BE = 120 - 66{,}46 = 53{,}54$

$$tg\alpha = \frac{108}{53{,}54} = 2{,}017 \Rightarrow \alpha = 63{,}63°$$

$$tg\beta = \frac{130}{HI} \; d'où \; HI = HF - IF = BE - IF$$

D'où on peut tirer à partir de :

$$tg\alpha = \frac{DF}{IF} = \frac{22}{IF} \Rightarrow IF = \frac{22}{2{,}017} = 10{,}90$$

Donc, en revenant sur l'expression précédente : $HI = HF - IF = BE - IF$

$HI = 66{,}46 - 10{,}90 = 55{,}56$

Et finalement, on a :

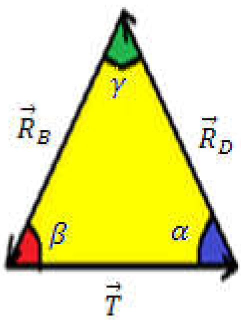
$$tg\beta = \frac{130}{HI} = \frac{13}{55{,}56} = 2{,}33 \Rightarrow \beta = 66{,}85°$$

Pour le dernier angle (γ), on a : $\gamma = \pi - (\alpha + \beta) = 18° - (63{,}63° + 66{,}85°) = 49{,}52°$

Finalement : $\alpha = 63{,}63°, \beta = 66{,}85°, \gamma = 49{,}52° \; et \;\; \theta = 58{,}39°$

$\alpha = 63{,}63°$, $\beta = 66{,}85°$ et $\gamma = 49{,}52°$

Le théorème des sinus nous permet de déterminer les efforts demandés :



$$\frac{R_B}{sin\alpha} = \frac{T}{\sin\gamma} = \frac{R_c}{sin\beta}$$

(puisque $R_C = R_D$), cela nous permet d'écrire :

$$R_c = R_D = \frac{T.sin\beta}{\sin\gamma} = 400\frac{\sin 66{,}85°}{\sin 49{,}52°} = 670{,}56 \; N$$

$$R_B = \frac{T.sin\alpha}{\sin\gamma} = 400\frac{\sin 63{,}63°}{\sin 49{,}52°} = 609{,}41\ N$$

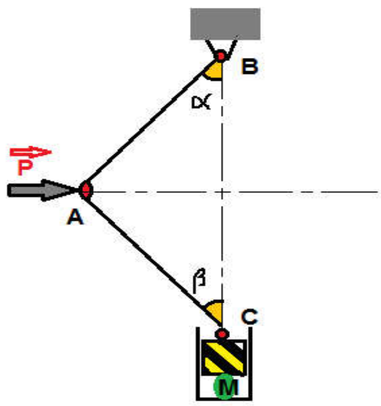
$R_c = R_D = 670{,}56\ N$ et $R_B = 609{,}41\ N$

EXERCICE 06:

Une force horizontale P est appliquée au point A d'un mécanisme composé de deux tiges AB et AC de poids négligeables.

L'effet de cette force horizontale entraine le glissement vertical vers le bas du piston C créant une force de pression sur le corps M.

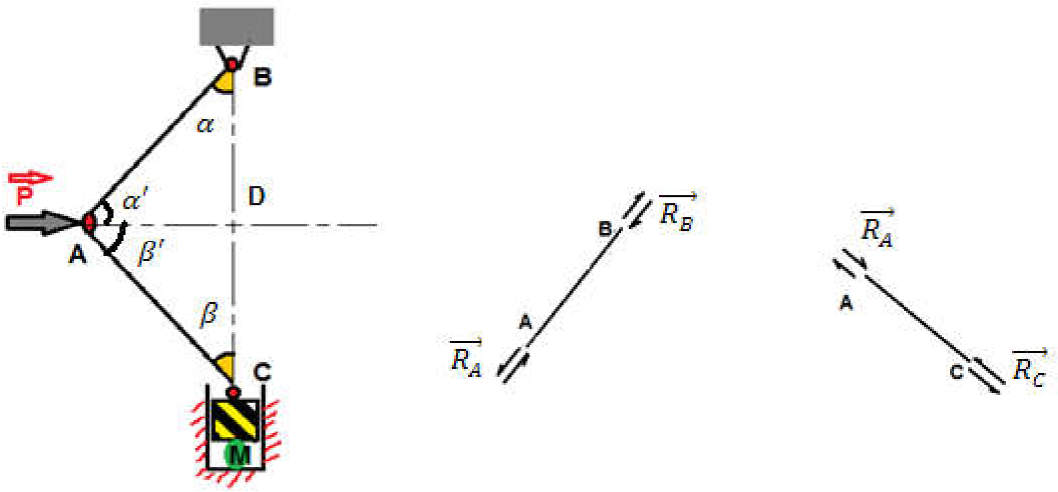
Déterminer graphiquement la force de pression sur le corps M pour les angles $\alpha\ et\ \beta$.

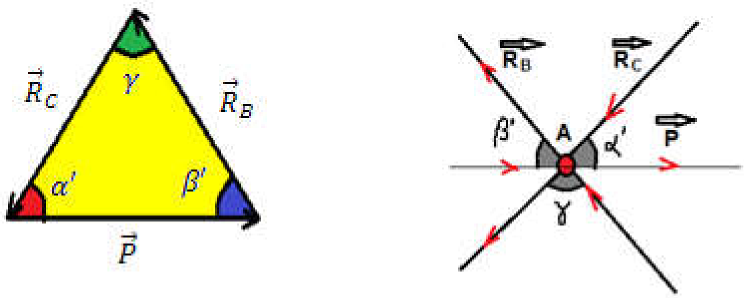


CORRIGE :

Le même principe d'isolement s'applique que ce soit à la barre AB ou la barre AC qui nous permet d'écrire : $R_A = R_C$ avec $\overrightarrow{R_A} = -\overrightarrow{R_C}$ ou $R_A = R_B$ avec $\overrightarrow{R_A} = -\overrightarrow{R_B}$

Par la suite, on peut isoler le nœud A sollicité par les efforts agissants de la part des deux barres AB et AC.





Pour le triangle (BDA) : $\alpha + \alpha' + \frac{\pi}{2} = \pi \Rightarrow \alpha' = \frac{\pi}{2} - \alpha$

Pour le triangle (CDA) : $\beta + \beta' + \frac{\pi}{2} = \pi \Rightarrow \beta' = \frac{\pi}{2} - \beta$

Pour le triangle des forces, on a : $\alpha' + \beta' + \gamma = \pi \Rightarrow \frac{\pi}{2} - \alpha + \frac{\pi}{2} - \beta + \gamma = \pi$

$$\Rightarrow \gamma = \alpha + \beta$$

$$\alpha' = \frac{\pi}{2} - \alpha; \qquad \beta' = \frac{\pi}{2} - \beta; \qquad \gamma = \alpha + \beta$$

Le théorème des sinus tiré à partir du triangle des forces :

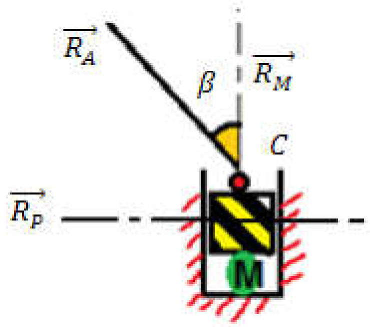
$$\frac{P}{sin\gamma} = \frac{R_C}{sin\beta'} = \frac{R_B}{sin\alpha'} \Rightarrow \frac{P}{\sin(\alpha + \beta)} = \frac{R_C}{\sin(\frac{\pi}{2} - \beta)} = \frac{R_B}{\sin(\frac{\pi}{2} - \alpha)}$$

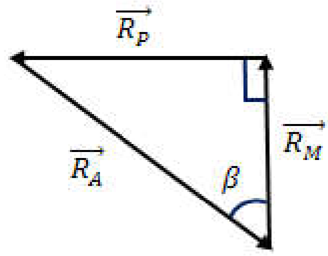
$$\frac{R_C}{\cos\beta} = \frac{R_B}{\cos\alpha} = \frac{P}{\sin\alpha\,.\,cos\beta + \cos\alpha\,.\,sin\beta}$$

D'où :

$$R_C = \frac{P\cos\beta}{\sin\alpha\,.\,cos\beta + \cos\alpha\,.\,sin\beta} \quad \text{et} \quad R_B = \frac{P\cos\alpha}{\sin\alpha\,.\,cos\beta + \cos\alpha\,.\,sin\beta}$$

La force de pression sur le corps (M) est calculée suite à la sélection du piston (C) sollicité par trois efforts dus à la paroi, au corps (M) et à la barre AC.





$$cos\beta = \frac{R_M}{R_A} \quad \Rightarrow \quad R_M = R_A cos\beta$$

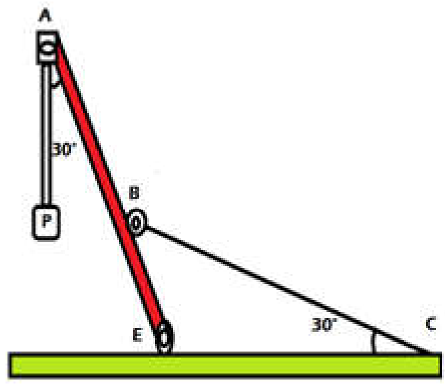
EXERCICE 07:

Un appareil de manutention est représenté par la (figure ci-dessous) doit soulever une charge maximale de 8000N. Il est maintenu en B par un câble BC et il s'articule en E.

a. Etudier graphiquement l'équilibre du câble BC et son action sur le mécanisme.

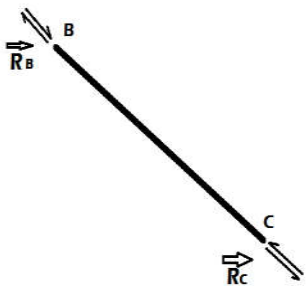
b. Trouver l'action de contact du sol sur l'appareil au point E.

On donne : AE = 6m, CE = 4m.



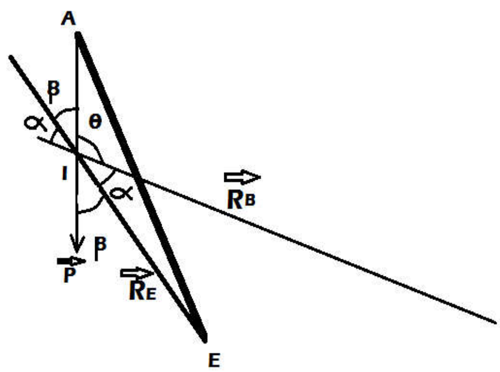
CORRIGE :

Isolons le câble BC sur lequel agissent deux efforts aux extrémités B et C ce qu'il le ramène à être soit sous une tension ou une compression:

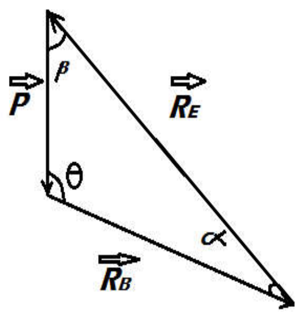


$\overrightarrow{R_B} = -\overrightarrow{R_C}$ et $R_B = R_C$

Isolons par la suite la barre AE sollicitée par trois efforts (efforts concourants):



Le théorème des sinus est tiré à partir du polygone des forces



$$\frac{P}{sin\alpha} = \frac{R_E}{sin\theta} = \frac{R_B}{sin\beta}$$

Où : $\alpha + \beta = 60°$ et $\alpha + \beta + \theta = \pi$

$sin60° = \frac{AN}{AE} \quad \Rightarrow \quad AN = AE.\sin 60° = 6.0{,}866 = 5{,}196m$

$\alpha + \beta = 60° \ \Rightarrow \alpha + \beta + \theta = \pi \Rightarrow 60° + \theta = \pi$ donc $\theta = 180° - 60° = 120°$

$R_E = \frac{Psin\theta}{sin\alpha}$

Puisque :

$sin30° = \frac{EN}{AE} \Rightarrow EN = AE.sin30° = 6.0{,}5 = 3m$

$\mathrm{tg}\,\beta = \frac{EN}{IN}$ et $\mathrm{tg}\,30° = \frac{IN}{4+3} \Rightarrow IN = 7tg30° = 4{,}041m$

$\Rightarrow \mathrm{tg}\,\beta = \frac{EN}{IN} = \frac{3}{4{,}041} = 0{,}742$ d'où $\beta = 36{,}58°$

$\alpha = \pi - (\beta + \theta) = 180° - (36{,}58° + 120°) = 23{,}42°$

Calcul des efforts :

$R_E = \frac{Psin\theta}{sin\alpha} = \frac{8000.sin120°}{sin23{,}42°} = 17430N$

$R_B = \frac{Psin\beta}{sin\alpha} = \frac{8000.sin36{,}58°}{sin23{,}42°} = 11994N$

$R_E = 17430N$ et $R_B = 11994N$

$\alpha = 23{,}42°,\ \beta = 36{,}58°$ et $\theta = 120°$

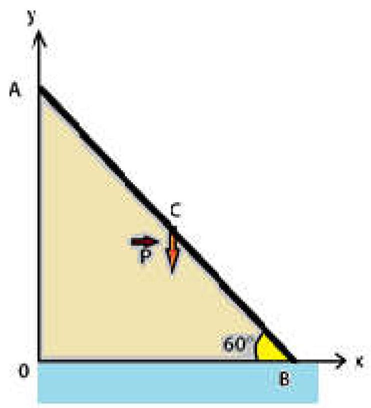
II.3. STATIQUE AVEC FROTTEMENTS

EXERCICE 01:

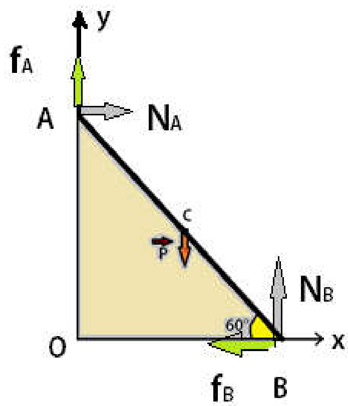
Une échelle de longueur 2L est appuyée en A contre un mur vertical rugueux, et repose en B sur un sol rugueux. Son inclinaison par rapport au sol est de 60°. Un homme de poids P monte sur l'échelle.

Trouver le coefficient de frottement en B tout en négligeant le poids de l'échelle et en supposant que l'homme se trouve au milieu de l'échelle.

On donne : $\alpha = 60°$ et $f_A = 0{,}16$.



CORRIGE :



$$\sum \vec{F}_{ex} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{R_A} + \overrightarrow{R_B} + \vec{P} = \vec{0}$$

$$F_{ex_{/ox}} = 0 \Leftrightarrow N_A - F_B = 0 \qquad (1)$$

$\Rightarrow N_A = f_B N_B \qquad\qquad (2)$

Puisque $tg\varphi = \mu = f_B = \frac{F_B}{N_B}$

Et

$$\sum F_{ex/oy} = 0 \Leftrightarrow N_B + f_A N_A - P = 0$$

$$\sum \overrightarrow{M_B}(\vec{F}) = \vec{0} \Rightarrow P.L.cos\alpha - 2L\,N_A sin\alpha - 2L.F_A cos\alpha = 0$$

Donc, $\qquad P.L.cos\alpha - 2L.N_A(sin\alpha + f_A cos\alpha) = 0$

D'où :

$$N_A = \frac{Pcos\alpha}{2(sin\alpha + f_A cos\alpha)}$$

Remplaçons dans (2), on aura :

$$N_B = P - f_A \frac{Pcoc\alpha}{2(sin\alpha + f_A cos\alpha)} = P\left[1 - \frac{f_A coc\alpha}{2(sin\alpha + f_A cos\alpha)}\right]$$

$$= P\left[\frac{2f_A coc\alpha + 2sin\alpha - f_A cos\alpha}{2(sin\alpha + f_A cos\alpha)}\right] = P\left[\frac{f_A coc\alpha + 2sin\alpha}{2(sin\alpha + f_A cos\alpha)}\right] = P - f_A N_A$$

Enfin,

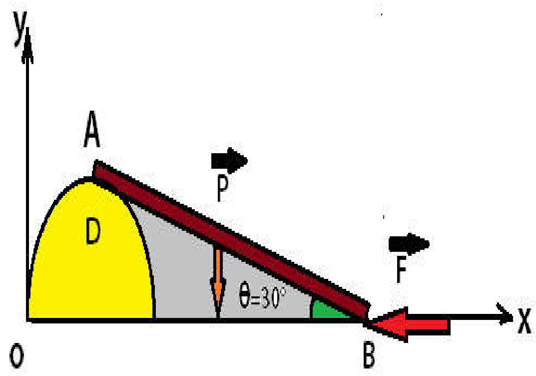
$$f_B = \frac{N_A}{N_B} = \frac{Pcoc\alpha}{f_A coc\alpha + 2sin\alpha}$$

EXERCICE 02:

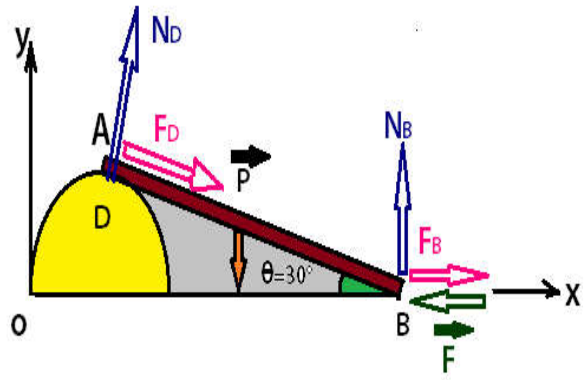
Une barre homogène AB de longueur (L) et de poids (P), repose en son extrémité B sur le plan horizontal OB et en son point D sur la surface d'un demi-cylindre de rayon R.

Les surfaces du plan horizontal et du demi-cylindre sont rugueux de même coefficient de frottement μ.

Quelle force horizontale F doit-on appliquer en B pour maintenir l'équilibre de la barre ? On donne $BD = \frac{2L}{3}$



CORRIGE :



$$\sum \vec{F}_{ex} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{R_D} + \overrightarrow{R_B} + \vec{P} + \vec{F} = \vec{0}$$

$$\sum F_{ex/ox} = 0 \Leftrightarrow F_B - F + F_D cos\theta + N_D sin\theta = 0 \qquad (1)$$

Et

$$\sum F_{ex/oy} = 0 \Leftrightarrow N_B - P - F_D sin\theta + N_D cos\theta = 0 \qquad (2)$$

$$\sum \overrightarrow{M_B}(\vec{F}) = \vec{0} \Rightarrow P.\frac{L}{2}.cos\theta - \frac{2}{3}L\, N_D = 0$$

$$\Rightarrow N_D = \frac{3}{4}Pcos\theta \qquad \text{et} \qquad F_D = \frac{3}{4}\mu Pcos\theta$$

(2) $\Leftrightarrow N_B = P + N_D(-cos\theta + \mu sin\theta)$

$$N_B = P(\frac{3}{8}\mu.sin2\theta - \frac{3}{4}cos^2\theta + 1)$$

Donc,

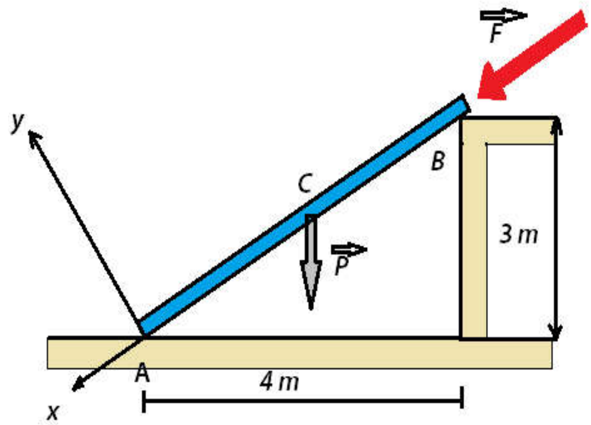
$$F_B = P(\frac{3}{8}\mu^2.sin2\theta - \frac{3}{4}\mu.cos^2\theta + \mu)$$

Enfin la valeur maximale de l'effort F :

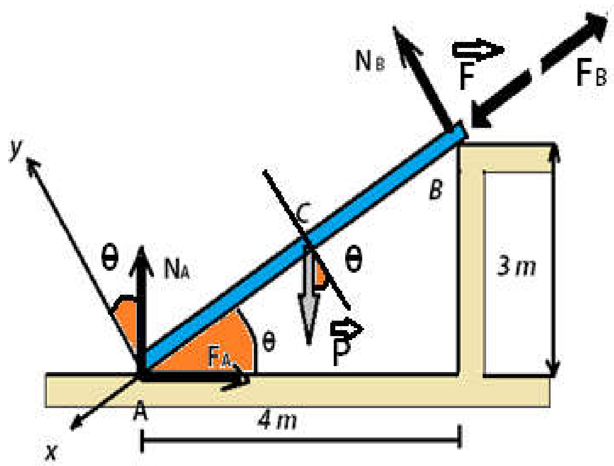
$$F \leq F_B + F_D cos\theta + N_D sin\theta$$

EXERCICE 03:

Déterminer la valeur maximale de la force F qu'on peut appliquer à la barre AB de longueur (L) et de poids P sans perturber son équilibre (coefficient de frottement aux points A et B est $\mu = 0{,}5$).



CORRIGE :



$$\sum \vec{F}_{ex} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{R_A} + \overrightarrow{R_B} + \vec{P} + \vec{F} = \vec{0}$$

$$\sum F_{ex/oy} = 0 \Leftrightarrow -F_B + F - F_A cos\theta - N_A sin\theta + Psin\theta = 0 \qquad (1)$$

Et

$$\sum F_{ex/oy} = 0 \Leftrightarrow N_B - Pcos\theta - F_A sin\theta + N_A cos\theta = 0 \qquad (2)$$

$$\sum \overrightarrow{M_B}(\vec{F}) = \vec{0} \Rightarrow P.\frac{L}{2}.cos\theta + 3.F_A - 4.N_A = 0 \qquad (3)$$

$$\sum \overrightarrow{M_A}(\vec{F}) = \vec{0} \Rightarrow -P.\frac{L}{2}.cos\theta + N_B.L = 0 \qquad (4)$$

Où

$$tg\theta = \frac{3}{4} = 0{,}75 \Rightarrow \theta = 36{,}86°$$

$(4) \Leftrightarrow N_B = \frac{P}{2}.cos\theta$ d'où $F_B = \mu.N_B$

$(3) \Leftrightarrow P.\frac{L}{2}.cos\theta + (3.\mu - 4)N_A = 0$

$$\Rightarrow N_A = \frac{P.\frac{L}{2}.cos\theta}{4 - 3\mu}$$

A.N :

$N_B = \frac{P}{2}.cos36{,}86° = 0.4.P$ et $F_B = 0{,}5.0{,}4.P = 0{,}2.P$

$$L = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5m.$$

$$\mathrm{N_A} = \frac{\mathrm{P}.\frac{5}{2}.\cos 36{,}86°}{4 - 3.0{,}5} = 0{,}8.P$$

et

$$F_A = 0{,}5.0{,}8.P = 0{,}4.P$$

$$F \leq F_B + F_A cos\theta + N_A sin\theta - Psin\theta$$

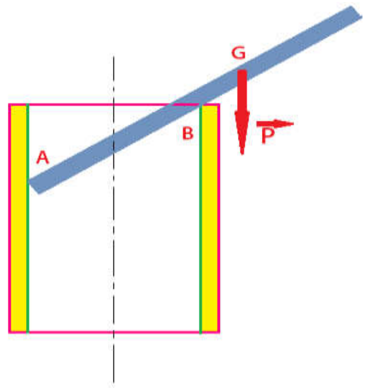
A.N:

$F \leq 0{,}2P + 0{,}4P.0{,}8 + 0{,}8.P.0{,}59 - 0{,}59.P \leq 0{,}402.P$

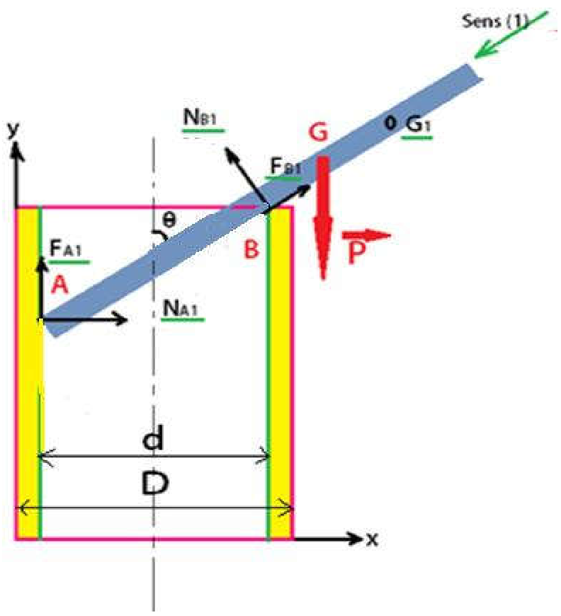
EXERCICE 04:

Une tige cylindrique homogène de poids (P) et de longueur (L) s'appuie en B et A sur la paroi intérieure et sur le bord d'un tube vertical creux. La tige fait un angle ($\theta = 45°$) avec l'axe vertical du cylindre. Le coefficient de frottement au contact tige-cylindre est de 0,15.

Entre quelles limites doit-être comprise la longueur de la tige pour rester en équilibre ?



CORRIGE :



Sens (1) :

$$\sum \vec{F}_{ex} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{R_A} + \overrightarrow{R_B} + \vec{P} = \vec{0}$$

$$\sum F_{ex/ox} = 0 \Leftrightarrow N_{A1} + F_{B1}sin\theta - N_{B1}cos\theta = 0 \qquad (1)$$

$$\sum F_{ex/oy} = 0 \Leftrightarrow F_{A1} - P + F_{B1}sin\theta + N_{B1}cos\theta = 0 \qquad (2)$$

$$\sum \overrightarrow{M_A}(\vec{F}) = \vec{0} \Rightarrow N_{B1}.AB - PAG_1 sin\theta = 0$$

$(1) \Leftrightarrow N_{A1} = N_{B1}cos\theta(1-\mu)$

Or: $\theta = 45° \Rightarrow cos\theta = sin\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$(2) \Leftrightarrow \ \mu N_{B1}cos\theta(1-\mu) + \mu N_{B1}sin\theta + N_{B1}cos\theta = P$

$$\Rightarrow N_{B1} = \frac{P}{\mu cos\theta(1-\mu) + \mu sin\theta + cos\theta}$$

A.N:

$N_{B1} = \frac{P}{0,9} = 1,11.P$ et $F_{B1} = 0,16.P$

$\Leftrightarrow N_{A1} = 1.11.Pcos45°(1-\mu) = 0,67.P$

$$sin\theta = \frac{d}{AB} \Rightarrow d = ABsin\theta$$

$$AG_1 = \frac{N_{B1}.AB}{Psin45°} = \frac{1.11.P.AB}{Psin45°}$$

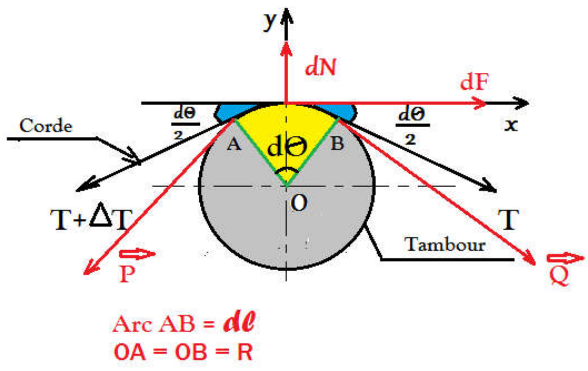
$AG_1 = 2,22.d$

EXERCICE 05:

Une force P est appliquée sur un fil passant autour d'un arbre cylindrique comme c'est indiqué sur la figure.

Trouver qu'elle doit être la force minimale Q qu'il faudrait appliquer à l'autre extrémité du fil pour avoir l'équilibre.

R étant le rayon du cylindre



CORRIGE :

$$dl = R.d\theta$$

La différence de tension ΔT du fil aux points A et B, est équilibrée par la force de frottement.

$dF = \mu.dN \; et \;\; \Delta T = \; dF = \mu.dN$

Projection sur l'axe (Ox) :

$-(T + \Delta T).sin\dfrac{d\theta}{2} - Tsin\dfrac{d\theta}{2} + dN = 0$

$\Leftrightarrow dN = (T + \Delta T).sin\dfrac{d\theta}{2} + Tsin\dfrac{d\theta}{2}$

L'angle θ étant très petit, $\Rightarrow sin\frac{d\theta}{2} \approx \frac{d\theta}{2}$

Donc ; $dN = (T + \Delta T)\frac{d\theta}{2} + T\frac{d\theta}{2}$

$\Leftrightarrow dN = T\dfrac{d\theta}{2} + T\dfrac{d\theta}{2} = T.d\theta$

Puisque $\Delta T = \; dF = \mu.dN$

Donc ; $\Delta T = \mu.T.d\theta$

Et $\frac{\Delta T}{T} = \mu\,.d\theta$

Ce qui nous permet d'écrire : $\int_Q^P \frac{\Delta T}{T} = \mu \int_0^\alpha d\theta \Rightarrow Log\frac{P}{Q} = \alpha.\mu$

Et on aura : $\frac{P}{Q} = e^{\alpha.\mu}$

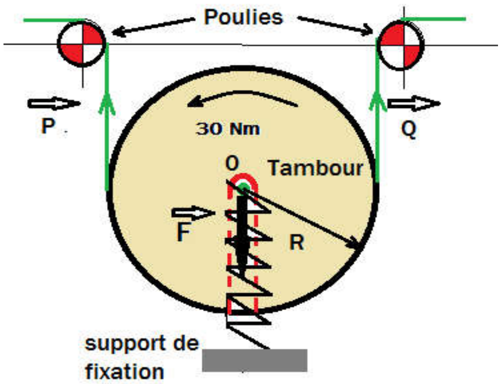
Finalement l'effort Q sera :

$$Q = P.e^{-\alpha.\mu}$$

EXERCICE 06:

Une courroie plane passe par deux poulies folles entourant un tambour de 8 cm de diamètre ayant un coefficient de frottement de 0,3 et animé d'un mouvement de rotation. L'axe de tambour peut se déplacer le long d'une rainure verticale mais il est soumis à la tension du ressort qui maintient le tambour en contact avec la courroie. Quelle est la force minimale développée par le ressort si on veut éviter le glissement de la courroie lorsqu'un couple $C = 30\ N.m$ est appliqué au tambour.

On donne : $P > Q$



CORRIGE :

$$\sum \vec{F}_{ex} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{P} + \vec{Q} + \vec{F} = \vec{0}$$

Et

$$\sum F_{ex/oy} = 0 \Leftrightarrow P + Q - F = 0 \Leftrightarrow \quad F = P + Q$$

$$\sum \overrightarrow{M_O}(\vec{F}) = \vec{0} \Rightarrow Q.R - P.R + 30 = 0 \ \Leftrightarrow R(Q-P) = -30\ Nm$$

$P = Qe^{\mu\theta}$ avec $\theta = \pi$

D'où $\quad R(Q - Qe^{\mu\theta}) = -30\ Nm \qquad \Rightarrow \qquad Q = \frac{-30}{0{,}04(1-e^{0{,}3.\pi})}$

$$Q = 57{,}3\ N; P = 147{,}3\ N; F = 204{,}6\ N$$

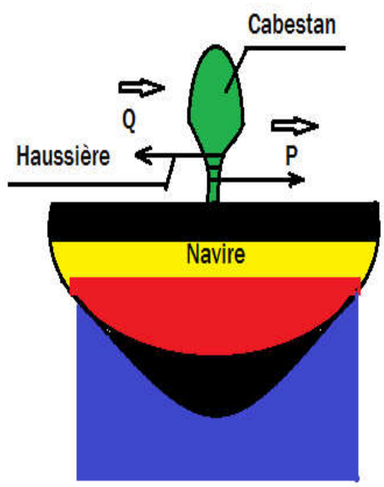
EXERCICE 07:

Une haussière lancée d'un navire est enroulée deux fois autour d'un cabestan, l'effort de tension appliqué par le navire sur la haussière est $P = 7500\ N$ en exerçant un effort au bout libre, $Q = 150\ N$. Un débardeur peut tout juste empêcher la haussière de glisser en cas d'un glissement imminent. Déterminer :

1. Le coefficient de frottement de la haussière et du cabestan.

2. L'effort de tension que la haussière est capable de développer si on l'avait roulé trois fois autour du cabestan.

CORRIGE :



1.

$$P = Qe^{\mu\theta} \Rightarrow \frac{P}{Q} = e^{\mu\theta} \Leftrightarrow Log\frac{P}{Q} = \mu.\theta$$

D'où $\qquad \mu = \frac{Log\frac{P}{Q}}{\theta} \qquad$ avec $\quad \theta = 4\pi\ (n = 2\ tours)$

A.N :

$$\mu = \frac{Log\,\frac{7500}{150}}{4.\pi} = 0.31$$

2. Pour $n = 3\ tours;\quad (\theta = 6\pi)$

$$\theta = 6\pi = 6.3{,}14 = 18{,}84$$

$$\frac{P}{Q} = e^{\mu\theta} \Rightarrow Q = \frac{P}{e^{\mu\theta}} = P.e^{-\mu\theta} = 7500.e^{0{,}31.18{,}84} = 52500\ N$$

III. Cinématique du Solide

III. Cinématique du Solide

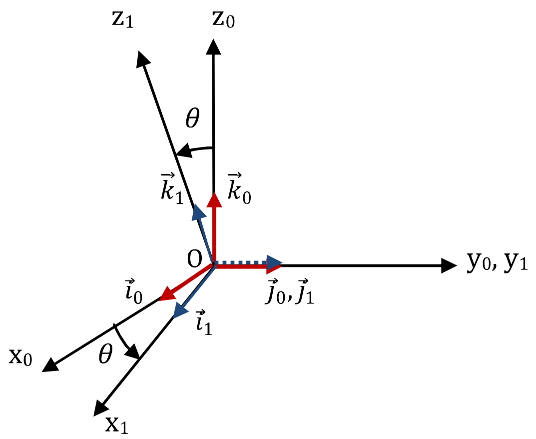
EXERCICE 01 :

Un repère mobile $R_1(Ox_1y_1z_1) \equiv (1)$ tourne autour de l'axe (Oy_0) d'un repère fixe $R_0(Ox_0y_0z_0) \equiv (0)$ à la vitesse angulaire $\dot{\theta}$. Soit un vecteur $\vec{u}(x_1, y_1, z_1)$ projeté dans le repère R_1.

Calculer $\left.\dfrac{d\vec{u}}{dt}\right|_{(0)}$

1. En exprimant $\vec{\imath}_1, \vec{\jmath}_1$ et $\vec{k}_1$ en fonction de $\vec{\imath}_0, \vec{\jmath}_0$ et $\vec{k}_0$

2. A l'aide de la dérivée d'un vecteur



CORRIGE :

$R_0(Ox_0y_0z_0) \equiv (0)$: Repère fixe

$R_1(Ox_1y_1z_1) \equiv (1)$: Repère mobile

Le vecteur taux de rotation du repère (1) par rapport au repère (0) :

$$\vec{\omega}_{1/0} = \begin{vmatrix} 0 \\ \dot{\theta} \\ 0 \end{vmatrix}_{(1),(0)}$$

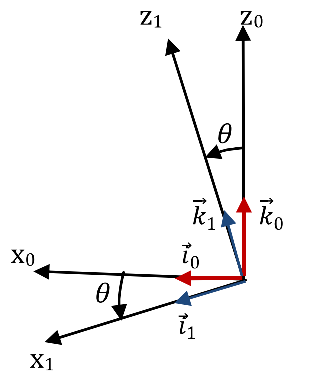
Calculons $\left.\dfrac{d\vec{u}}{dt}\right|_{(0)}$

x_1, y_1 et z_1 sont les composantes de $\vec{u}$ dans R_1:

$$\vec{u} = \begin{vmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{vmatrix}_{(1)} = x_1\vec{i}_1 + y_1\vec{j}_1 + z_1\vec{k}_1$$

$$\left.\frac{d\vec{u}}{dt}\right|_{(0)} = \left.\frac{dx_1}{dt}\right|_{(0)} \vec{i}_1 + x_1 \left.\frac{d\vec{i}_1}{dt}\right|_{(0)} + \left.\frac{dy_1}{dt}\right|_{(0)} \vec{j}_1 + y_1 \left.\frac{d\vec{j}_1}{dt}\right|_{(0)} + \left.\frac{dz_1}{dt}\right|_{(0)} \vec{k}_1 + z_1 \left.\frac{d\vec{k}_1}{dt}\right|_{(0)} \quad (1)$$

1. Exprimant $\vec{i}_1, \vec{j}_1$ et $\vec{k}_1$ en fonction de $\vec{i}_0, \vec{j}_0$ et $\vec{k}_0$



Rotation autour de $(Oy_0) \Rightarrow \vec{j}_1 = \vec{j}_0$

$$\begin{pmatrix} \vec{i}_1 \\ \vec{j}_1 \\ \vec{k}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cos\theta & 0 & -sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ sin\theta & 0 & cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{i}_0 \\ \vec{j}_0 \\ \vec{k}_0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{i}_1 = cos\theta\, \vec{i}_0 - sin\theta\, \vec{k}_0 \\ \vec{j}_1 = \vec{j}_0 \\ \vec{k}_1 = sin\theta\, \vec{i}_0 + cos\theta\, \vec{k}_0 \end{cases}$$

$$\left.\frac{d\vec{i}_1}{dt}\right|_{(0)} = \begin{vmatrix} -\dot{\theta}sin\theta \\ 0 \\ -\dot{\theta}cos\theta \end{vmatrix}_{(0)} \; ; \; \left.\frac{d\vec{j}_1}{dt}\right|_{(0)} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}_{(0)} \text{ et } \left.\frac{d\vec{k}_1}{dt}\right|_{(0)} = \begin{vmatrix} \dot{\theta}cos\theta \\ 0 \\ -\dot{\theta}sin\theta \end{vmatrix}_{(0)}$$

$$\left.\frac{d\vec{i}_1}{dt}\right|_{(0)} = -\dot{\theta}\vec{k}_1$$

$$\left.\frac{d\vec{k}_1}{dt}\right|_{(0)} = \dot{\theta}\vec{i}_1$$

On remplace dans (1), on obtient :

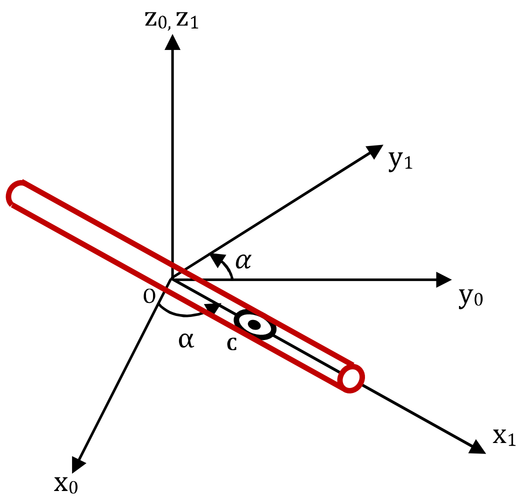
$$\left.\frac{d\vec{u}}{dt}\right|_{(0)} = \dot{x}_1\vec{\imath}_1 - x_1\dot{\theta}\vec{k}_1 + \dot{y}_1\vec{\jmath}_1 + \dot{z}_1\vec{k}_1 + z_1\dot{\theta}\vec{\imath}_1 = \begin{vmatrix} \dot{x}_1 + z_1\dot{\theta} \\ \dot{y}_1 \\ \dot{z}_1 - x_1\dot{\theta} \end{vmatrix}_{(1)}$$

2. La dérivée d'un vecteur

$$\left.\frac{d\vec{u}}{dt}\right|_{(0)} = \left.\frac{d\vec{u}}{dt}\right|_{(1)} + \vec{\omega}_{1/0} \wedge \vec{u} = \begin{vmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{y}_1 \\ \dot{z}_1 \end{vmatrix}_{(1)} + \begin{vmatrix} 0 \\ \dot{\theta} \\ 0 \end{vmatrix}_{(1)} \wedge \begin{vmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{vmatrix}_{(1)} = \begin{vmatrix} \dot{x}_1 + z_1\dot{\theta} \\ \dot{y}_1 \\ \dot{z}_1 - x_1\dot{\theta} \end{vmatrix}_{(1)}$$

EXERCICE 02 :

Une bille de centre de gravité C se déplace à l'intérieur d'un tube creux. Ce tube pouvant être mis en rotation autour de l'axe (Oz_0) à l'aide d'un moteur par une vitesse angulaire constante $\dot{\alpha}$. On donne $= \lambda$. Déterminer la vitesse et l'accélération du centre de gravité C par rapport au repère fixe $R_0(0x_0y_0z_0)$.



CORRIGE :

1. La vitesse du centre de gravité C par rapport au repère fixe $R_0(0x_0y_0z_0)$.

a. Si on prendra $R_1(0x_1y_1z_1) \equiv (1)$ comme repère de projection :

$$\overrightarrow{OC} = \begin{vmatrix} \lambda \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}_{(1)} \qquad \text{et} \qquad \dot{\alpha} = \text{constante}$$

Le vecteur taux de rotation du repère (1) par rapport au repère (0) est :

$$\vec{\omega}_{1/0} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\alpha} \end{vmatrix}_{(1),(0)}$$

$$\vec{V}(C)/_0 = \left.\frac{d\overrightarrow{OC}}{dt}\right|_{(0)} = \left.\frac{d\overrightarrow{OC}}{dt}\right|_{(1)} + \vec{\omega}_{1/0} \wedge \overrightarrow{OC} = \begin{vmatrix} \dot{\lambda} \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}_{(1)} + \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\alpha} \end{vmatrix}_{(1)} \wedge \begin{vmatrix} \lambda \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}_{(1)} = \begin{vmatrix} \dot{\lambda} \\ \dot{\alpha}\lambda \\ 0 \end{vmatrix}_{(1)}$$

2. L'accélération du centre de gravité C par rapport au repère fixe $R_0(0x_0y_0z_0)$.

$$\vec{\Gamma}(C)/_0 = \left.\frac{d\vec{V}(C)/_0}{dt}\right|_{(0)}$$

$$= \left.\frac{d\vec{V}(C)/_0}{dt}\right|_{(1)} + \vec{\omega}_{1/0} \wedge \vec{V}(C)/_0 = \begin{vmatrix} \ddot{\lambda} \\ \dot{\alpha}\dot{\lambda} \\ 0 \end{vmatrix}_{(1)} + \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\alpha} \end{vmatrix}_{(1)} \wedge \begin{vmatrix} \dot{\lambda} \\ \dot{\alpha}\lambda \\ 0 \end{vmatrix}_{(1)} = \begin{vmatrix} \ddot{\lambda} - \dot{\alpha}^2\lambda \\ 2\dot{\alpha}\dot{\lambda} \\ 0 \end{vmatrix}_{(1)}$$

b. Si on prendra $R_0(0x_0y_0z_0) \equiv (0)$ comme repère de projection :

$$\overrightarrow{OC} = \begin{vmatrix} \lambda cos\alpha \\ \lambda sin\alpha \\ 0 \end{vmatrix}_{(0)}$$

La vitesse de C :

$$\vec{V}(C)/_0 = \left.\frac{d\overrightarrow{OC}}{dt}\right|_{(0)} = \begin{vmatrix} \dot{\lambda} cos\alpha - \lambda\dot{\alpha} sin\alpha \\ \dot{\lambda} sin\alpha + \lambda\dot{\alpha} cos\alpha \\ 0 \end{vmatrix}_{(0)}$$

L'accélération de C:

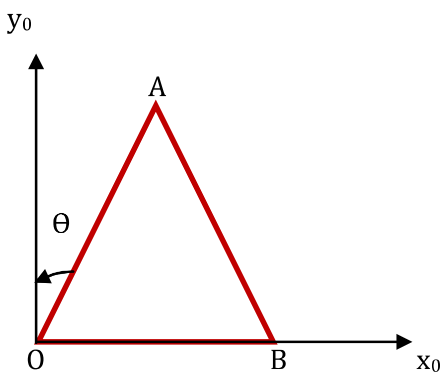
$$\vec{\Gamma}(C)/_0 = \left.\frac{d\vec{V}(C)/_0}{dt}\right|_{(0)} = \begin{vmatrix} \ddot{\lambda} cos\alpha - 2\dot{\lambda}\dot{\alpha} sin\alpha - \lambda\dot{\alpha}^2 cos\alpha \\ \ddot{\lambda} sin\alpha + 2\dot{\lambda}\dot{\alpha} cos\alpha - \lambda\dot{\alpha}^2 sin\alpha \\ 0 \end{vmatrix}_{(0)}$$

EXERCICE 03 :

Une échelle double est posée sur le sol. Un de ses points d'appui reste constamment en contact avec le coin O d'un mur. La position de l'échelle à l'instant t est repérée par l'angle θ. L'extrémité B glisse sur le sol. L'échelle est telle que $OA = AB = L$. On prendra $R0$ comme repère de projection :

1. Exprimer les vecteurs vitesse et accélération du point A en fonction de $L, \theta, \dot{\theta}, \ddot{\theta}$.

2. Exprimer les vecteurs vitesse et accélération du point B en fonction de $L, \theta, \dot{\theta}, \ddot{\theta}$.



CORRIGE :

$OA = AB = L$

1. La vitesse et l'accélération du point A

$$\vec{V}(A)/_0 = \left.\frac{d\overrightarrow{OA}}{dt}\right|_{(0)}$$

Le vecteur $\overrightarrow{OA}$ s'écrit dans le repère $R_0(0x_0y_0z_0) \equiv (0)$: $\overrightarrow{OA} = \begin{vmatrix} Lsin\theta \\ Lcos\theta \\ 0 \end{vmatrix}_{(0)}$

$$\vec{V}(A)/_0 = \left.\frac{d\overrightarrow{OA}}{dt}\right|_{(0)} = \begin{vmatrix} L\dot{\theta}cos\theta \\ -L\dot{\theta}sin\theta \\ 0 \end{vmatrix}_{(0)}$$

Et l'accélération

$$\vec{\Gamma}(A)/_0 = \left.\frac{d\vec{V}(A)/_0}{dt}\right|_{(0)} = \begin{vmatrix} L\ddot{\theta}cos\theta - L\dot{\theta}^2 sin\theta \\ -L\,\ddot{\theta}sin\theta - L\dot{\theta}^2 cos\theta \\ 0 \end{vmatrix}_{(0)}$$

2. La vitesse et l'accélération du point B

$$\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \begin{vmatrix} Lsin\theta \\ Lcos\theta \\ 0 \end{vmatrix}_{(0)} + \begin{vmatrix} Lsin\theta \\ -Lcos\theta \\ 0 \end{vmatrix}_{(0)} = \begin{vmatrix} 2Lsin\theta \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}_{(0)}$$

$$\vec{V}(B)/_0 = \frac{d\overrightarrow{OB}}{dt}\bigg|_{(0)} = \begin{vmatrix} 2L\dot{\theta}cos\theta \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}_{(0)}$$

$$Et \quad \vec{\Gamma}(B)/_0 = \frac{d\vec{V}(B)/_0}{dt}\bigg|_{(0)} = \begin{vmatrix} 2L\ddot{\theta}cos\theta - 2L\dot{\theta}^2 sin\theta \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}_{(0)}$$

EXERCICE 04 :

Le parallélogramme $ABCD$ est en rotation dans le plan Axy, autour du point A. Si α est constant, calculer la vitesse et l'accélération de son centre de masse G en fonction de $\theta, \dot{\theta}$ et $\ddot{\theta}$. Utiliser :

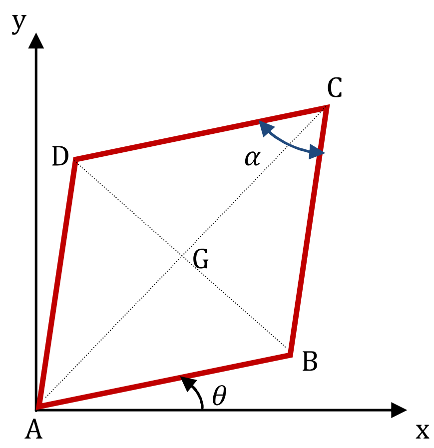
1. La méthode de dérivation.

2. Les formules de distribution des vitesses et des accélérations.

3. Calculer la $\vec{V}(D)/_0$ par application de la loi de composition des vitesses.

On donne :

$AB = L$ et $BC = \dfrac{3L}{4}$



CORRIGE :

1. La vitesse et l'accélération du centre de masse G par dérivation

a. La vitesse :

$$\vec{V}(G)/_0 = \left.\frac{d\overrightarrow{AG}}{dt}\right|_{(0)}$$

Le vecteur taux de rotation du repère (1) par rapport au repère (0) est :

$$\vec{\omega}_{1/0} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{vmatrix}_{(1),(0)}$$

Si on prendra $(\mathbf{R_0}) \equiv (\mathbf{Axyz}) = (\mathbf{0})$ comme repère de projection :

$$\overrightarrow{AG} = \frac{\overrightarrow{AC}}{2} \quad et \quad \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$$

$$\overrightarrow{AB} = \begin{vmatrix} L\,cos\theta \\ L\,sin\theta \\ 0 \end{vmatrix}_{(0)} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{BC} = \begin{vmatrix} \frac{3L}{4}\cos(\theta+\alpha) \\ \frac{3L}{4}sin(\theta+\alpha) \\ 0 \end{vmatrix}_{(0)} \Rightarrow \overrightarrow{AG} = \begin{vmatrix} \frac{L}{2}cos\theta + \frac{3L}{8}\cos(\theta+\alpha) \\ \frac{L}{2}sins\theta + \frac{3L}{8}sin(\theta+\alpha) \\ 0 \end{vmatrix}_{(0)}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{V}(G)/_0 = \left.\frac{d\overrightarrow{AG}}{dt}\right|_{(0)} = \begin{vmatrix} -\frac{L}{2}\dot{\theta}sin\theta - \frac{3L}{8}\dot{\theta}\sin(\theta+\alpha) \\ \frac{L}{2}\dot{\theta}cos\theta + \frac{3L}{8}\dot{\theta}cos(\theta+\alpha) \\ 0 \end{vmatrix}_{(0)}$$

b. L'accélération :

$$\vec{\Gamma}(G)/_0 = \left.\frac{d\vec{V}(G)/_0}{dt}\right|_{(0)}$$

$$= \begin{vmatrix} -\frac{L}{2}\ddot{\theta}sin\theta - \frac{L}{2}\dot{\theta}^2cos\theta - \frac{3L}{8}\ddot{\theta}\sin(\theta+\alpha) - \frac{3L}{8}\dot{\theta}^2cos\theta(\theta+\alpha) \\ \frac{L}{2}\ddot{\theta}cos\theta - \frac{L}{2}\dot{\theta}^2sin\theta + \frac{3L}{8}\ddot{\theta}cos(\theta+\alpha) - \frac{3L}{8}\dot{\theta}^2sin(\theta+\alpha) \\ 0 \end{vmatrix}_{(0)}$$

2. La vitesse et l'accélération du centre de masse G par la méthode de distribution

a. La vitesse

$$\vec{V}(G)/_0 = \vec{V}(A)/_0 + \vec{\omega}_{1/0} \wedge \overrightarrow{AG}$$

$$\vec{V}(G)/_0 = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{vmatrix}_{(0)} \wedge \begin{vmatrix} \frac{L}{2}cos\theta + \frac{3L}{8}\cos(\theta+\alpha) \\ \frac{L}{2}sins\theta + \frac{3L}{8}sin(\theta+\alpha) \\ 0 \end{vmatrix}_{(0)} = \begin{vmatrix} -\frac{L}{2}\dot{\theta}sins\theta - \frac{3L}{8}\dot{\theta}sin(\theta+\alpha) \\ \frac{L}{2}\dot{\theta}cos\theta + \frac{3L}{8}\dot{\theta}\cos(\theta+\alpha) \\ 0 \end{vmatrix}_{(0)}$$

b. L'accélération

$$\vec{\Gamma}(G)/_0 = \left.\frac{d\vec{V}(A)/_0}{dt}\right|_{(0)} + \frac{d\vec{\omega}_{1/0}}{dt} \wedge \overrightarrow{AG} + \vec{\omega}_{1/0} \wedge \left.\frac{d\overrightarrow{AG}}{dt}\right|_{(0)}$$

$$\vec{\Gamma}(G)/_0 = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{\theta} \end{vmatrix}_{(0)} \wedge \begin{vmatrix} \frac{L}{2}cos\theta + \frac{3L}{8}\cos(\theta+\alpha) \\ \frac{L}{2}sins\theta + \frac{3L}{8}sin(\theta+\alpha) \\ 0 \end{vmatrix}_{(0)} + \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{vmatrix}_{(0)}$$

$$\wedge \begin{vmatrix} -\frac{L}{2}\dot{\theta}sins\theta - \frac{3L}{8}\dot{\theta}sin(\theta+\alpha) \\ \frac{L}{2}\dot{\theta}cos\theta + \frac{3L}{8}\dot{\theta}\cos(\theta+\alpha) \\ 0 \end{vmatrix}_{(0)}$$

$$\vec{\Gamma}(G)/_0 = \begin{vmatrix} -\frac{L}{2}\ddot{\theta}sins\theta - \frac{3L}{8}\ddot{\theta}sin(\theta+\alpha) \\ \frac{L}{2}\ddot{\theta}cos\theta + \frac{3L}{8}\ddot{\theta}\cos(\theta+\alpha) \\ 0 \end{vmatrix}_{(0)} + \begin{vmatrix} -\frac{L}{2}\dot{\theta}^2cos\theta - \frac{3L}{8}\dot{\theta}^2\cos(\theta+\alpha) \\ -\frac{L}{2}\dot{\theta}^2sins\theta - \frac{3L}{8}\dot{\theta}^2sin(\theta+\alpha) \\ 0 \end{vmatrix}_{(0)}$$

$$\vec{\Gamma}(G)/_0 = \begin{vmatrix} -\frac{L}{2}\dot{\theta}^2cos\theta - \frac{L}{2}\ddot{\theta}sins\theta - \frac{3L}{8}\dot{\theta}^2\cos(\theta+\alpha) - \frac{3L}{8}\ddot{\theta}sin(\theta+\alpha) \\ \frac{L}{2}\ddot{\theta}cos\theta - \frac{L}{2}\dot{\theta}^2sins\theta - \frac{3L}{8}\dot{\theta}^2sin(\theta+\alpha) + \frac{3L}{8}\ddot{\theta}\cos(\theta+\alpha) \\ 0 \end{vmatrix}_{(0)}$$

Si on prendra $(R_1) \equiv (Ax_1y_1z_1) = (1)$ comme repère de projection :

1. La vitesse et l'accélération du point G par dérivation

$$\overrightarrow{AG}=\begin{vmatrix}\frac{L}{2}+\frac{3L}{8}\cos\alpha\\ \frac{3L}{8}\sin\alpha\\ 0\end{vmatrix}_{(1)}$$

$$\vec{V}(G)/_0=\left.\frac{d\overrightarrow{AG}}{dt}\right|_{(0)}=\left.\frac{d\overrightarrow{AG}}{dt}\right|_{(1)}+\vec{\omega}_{1/0}\wedge\overrightarrow{AG}=\begin{vmatrix}0\\0\\0\end{vmatrix}_{(1)}+\begin{vmatrix}0\\0\\\dot{\theta}\end{vmatrix}_{(1)}\wedge\begin{vmatrix}\frac{L}{2}+\frac{3L}{8}\cos\alpha\\ \frac{3L}{8}\sin\alpha\\ 0\end{vmatrix}_{(1)}$$

$$=\begin{vmatrix}-\frac{3L}{8}\dot{\theta}\sin\alpha\\ \frac{3L}{8}\dot{\theta}\cos\alpha+\frac{L}{2}\dot{\theta}\\ 0\end{vmatrix}_{(1)}$$

$$\vec{\Gamma}(G)/_0=\left.\frac{d\vec{V}(G)/_0}{dt}\right|_{(0)}=\left.\frac{d\vec{V}(G)/_0}{dt}\right|_{(1)}+\vec{\omega}_{1/0}\wedge\vec{V}(G)/_0$$

$$=\begin{vmatrix}-\frac{3L}{8}\ddot{\theta}\sin\alpha\\ \frac{3L}{8}\ddot{\theta}\cos\alpha+\frac{L}{2}\ddot{\theta}\\ 0\end{vmatrix}_{(1)}+\begin{vmatrix}0\\0\\\dot{\theta}\end{vmatrix}_{(1)}\wedge\begin{vmatrix}-\frac{3L}{8}\dot{\theta}\sin\alpha\\ \frac{3L}{8}\dot{\theta}\cos\alpha+\frac{L}{2}\dot{\theta}\\ 0\end{vmatrix}_{(1)}$$

$$=\begin{vmatrix}-\frac{3L}{8}\ddot{\theta}\sin\alpha-\frac{3L}{8}\dot{\theta}^2\cos\alpha-\frac{L}{2}\dot{\theta}^2\\ \frac{3L}{8}\ddot{\theta}\cos\alpha+\frac{L}{2}\ddot{\theta}\ -\frac{3L}{8}\dot{\theta}^2\sin\alpha\\ 0\end{vmatrix}_{(1)}$$

2. La vitesse et l'accélération du centre de masse G par la méthode de distribution

$$\vec{V}(G)/_0=\vec{V}(A)/_0+\vec{\omega}_{1/0}\wedge\overrightarrow{AG}=\begin{vmatrix}0\\0\\0\end{vmatrix}_{(1)}+\begin{vmatrix}0\\0\\\dot{\theta}\end{vmatrix}_{(1)}\wedge\begin{vmatrix}\frac{L}{2}+\frac{3L}{8}\cos\alpha\\ \frac{3L}{8}\sin\alpha\\ 0\end{vmatrix}_{(1)}=\begin{vmatrix}-\frac{3L}{8}\dot{\theta}\sin\alpha\\ \frac{3L}{8}\dot{\theta}\cos\alpha+\frac{L}{2}\dot{\theta}\\ 0\end{vmatrix}_{(1)}$$

$$\vec{\Gamma}(G)/_0 = \left.\frac{d\vec{V}(A)/_0}{dt}\right|_{(0)} + \frac{d\vec{\omega}_{1/0}}{dt} \wedge \overrightarrow{AG} + \vec{\omega}_{1/0} \wedge \left.\frac{d\overrightarrow{AG}}{dt}\right|_{(0)}$$

$$= \left.\frac{d\vec{V}(A)/_0}{dt}\right|_{(1)} + \vec{\omega}_{1/0} \wedge \vec{V}(A)/_0 + \frac{d\vec{\omega}_{1/0}}{dt} \wedge \overrightarrow{AG} + \vec{\omega}_{1/0}$$

$$\wedge \left(\left.\frac{d\overrightarrow{AG}}{dt}\right|_{(1)} + \vec{\omega}_{1/0} \wedge \overrightarrow{AG} \right)$$

$$= \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}_{(1)} + \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{vmatrix}_{(1)} \wedge \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}_{(1)} + \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{\theta} \end{vmatrix}_{(1)} \wedge \begin{vmatrix} \frac{L}{2} + \frac{3L}{8}\cos\alpha \\ \frac{3L}{8} sin\alpha \\ 0 \end{vmatrix}_{(1)} + \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{vmatrix}_{(1)}$$

$$\wedge \left(\begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}_{(1)} + \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{vmatrix}_{(1)} \wedge \begin{vmatrix} \frac{L}{2} + \frac{3L}{8}\cos\alpha \\ \frac{3L}{8} sin\alpha \\ 0 \end{vmatrix}_{(1)} \right) =$$

$$= \begin{vmatrix} -\frac{3L}{8}\ddot{\theta} sin\alpha \\ \frac{L}{2}\ddot{\theta} + \frac{3L}{8}\ddot{\theta}\cos\alpha \\ 0 \end{vmatrix}_{(1)} + \begin{vmatrix} -\frac{3L}{8}\dot{\theta}^2 cos\alpha - \frac{L}{2}\dot{\theta}^2 \\ -\frac{3L}{8}\dot{\theta}^2 sin\alpha \\ 0 \end{vmatrix}_{(1)} = \begin{vmatrix} -\frac{3L}{8}\ddot{\theta} sin\alpha - \frac{3L}{8}\dot{\theta}^2 cos\alpha - \frac{L}{2}\dot{\theta}^2 \\ \frac{3L}{8}\ddot{\theta} cos\alpha + \frac{L}{2}\ddot{\theta} - \frac{3L}{8}\dot{\theta}^2 sin\alpha \\ 0 \end{vmatrix}_{(1)}$$

3. La $\vec{V}(D)/_0$ par application de la loi de composition des vitesses

On a : $\vec{V}(D)/_0 = \vec{V}(D)/_1 + \vec{V}_e$

$$\vec{V}(D)/_1 = \left.\frac{d\overrightarrow{AD}}{dt}\right|_{(1)}$$

Et

$$\overrightarrow{AD} = \begin{vmatrix} \frac{3L}{4}\cos\alpha \\ \frac{3L}{4} sin\alpha \\ 0 \end{vmatrix}_{(1)} \Rightarrow \vec{V}(D)/_1 = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}_{(1)}$$

Soit un point D' lié à $R_1 \cong (1)$ et qui coïncide avec D à l'instant t :

$$\vec{V}_e = \left.\frac{d\overrightarrow{AD'}}{dt}\right|_{(0)} = \left.\frac{d\overrightarrow{AD'}}{dt}\right|_{(1)} + \vec{\omega}_{1/0} \wedge \overrightarrow{AD'} = \vec{\omega}_{1/0} \wedge \overrightarrow{AD'}$$

à l'instant t : $D \equiv D'$ $\Rightarrow$ $\vec{V}_e = \vec{\omega}_{1/0} \wedge \overrightarrow{AD} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{vmatrix}_{(1)} \wedge \begin{vmatrix} \frac{3L}{4}\cos\alpha \\ \frac{3L}{4} sin\alpha \\ 0 \end{vmatrix}_{(1)}$

$$= \begin{vmatrix} -\frac{3L}{4}\dot{\theta}\sin\alpha \\ \frac{3L}{4}\dot{\theta}cos\alpha \\ 0 \end{vmatrix}_{(1)}$$

D'où : $\vec{V}(D)/_0 = \begin{vmatrix} -\frac{3L}{4}\dot{\theta}\sin\alpha \\ \frac{3L}{4}\dot{\theta}cos\alpha \\ 0 \end{vmatrix}_{(1)}$

EXERCICE 05 :

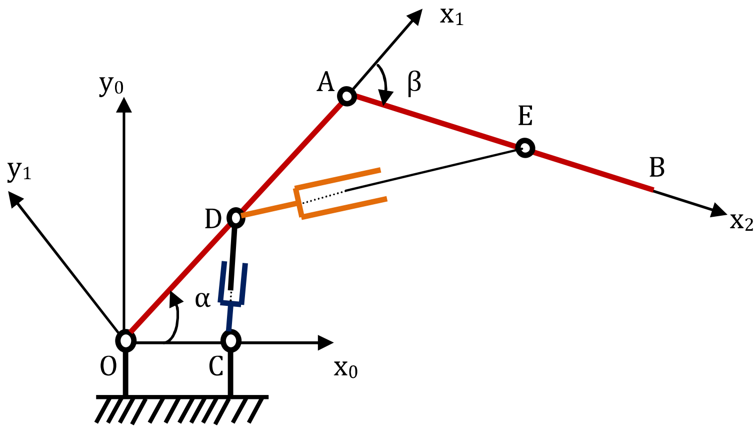
Le schéma présenté ci-dessous représente un bras manipulateur d'atelier flexible, chargé de transporter des pièces d'un poste de travail à un autre est composé de :

Un bras $(0A)$, de longueur $2a$, lié au bâti par une liaison pivot en O.

Un bras (AB), de longueur $2a$, lié au bras (OA) par une liaison pivot en A. Un vérin d'épaule (CD) lié au bâti par une liaison pivot en C ainsi qu'au bras (OA) par une liaison pivot en D (situé à la moitié de (OA)).

Un vérin d'épaule (DE) lié au bras (OA) par une liaison pivot en A ainsi qu'au bras (AB) par une liaison pivot en E (situé à la moitié de AB). On considère les vitesses de sortie des vérins constantes et égale à $V = 1mm/s$. Déterminer la vitesse de B en fonction de α, β et V .

On donne : $OC = a\frac{\sqrt{2}}{2}$



CORRIGE :

La vitesse de B

On applique la loi de distribution des vitesses

$$\vec{\omega}_{1/0} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\alpha} \end{vmatrix}_{(1),(0)} \quad \text{et} \quad \vec{\omega}_{2/1} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ -\dot{\beta} \end{vmatrix}_{(2),(1),(0)} \quad \Rightarrow \vec{\omega}_{2/0} = \vec{\omega}_{2/1} + \vec{\omega}_{1/0} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\alpha} - \dot{\beta} \end{vmatrix}_{(1),(0)}$$

$$\vec{V}(B)/_0 = \vec{V}(A)/_0 + \vec{\omega}_{2/0} \wedge \overrightarrow{AB}$$

$$\vec{V}(A)/_0 = \left.\frac{d\overrightarrow{OA}}{dt}\right|_{(0)}$$

Si on prend R_1 comme repère de projection :

$$\overrightarrow{OA} = \begin{vmatrix} 2a \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}_{(1)} \Rightarrow \vec{V}(A)/_0 = \left.\frac{d\overrightarrow{OA}}{dt}\right|_{(0)} = \left.\frac{d\overrightarrow{OA}}{dt}\right|_{(1)} + \vec{\omega}_{1/0} \wedge \overrightarrow{OA} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\alpha} \end{vmatrix}_{(1)} \wedge \begin{vmatrix} 2a \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}_{(1)} = \begin{vmatrix} 0 \\ 2a\dot{\alpha} \\ 0 \end{vmatrix}_{(1)}$$

$$\overrightarrow{AB} = \begin{vmatrix} 2acos\beta \\ -2asin\beta \\ 0 \end{vmatrix}_{(1)}$$

$$\vec{V}(B)/_0 = \begin{vmatrix} 0 \\ 2a\dot{\alpha} \\ 0 \end{vmatrix}_{(1)} + \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\alpha}-\dot{\beta} \end{vmatrix}_{(1)} \wedge \begin{vmatrix} 2acos\beta \\ -2asin\beta \\ 0 \end{vmatrix}_{(1)} = \begin{vmatrix} 2a(\dot{\alpha}-\dot{\beta})sin\beta \\ 2a\dot{\alpha}+2a(\dot{\alpha}-\dot{\beta})cos\beta \\ 0 \end{vmatrix}_{(1)} \qquad (1)$$

Exprimant $\dot{\alpha}$ et $\dot{\beta}$ en fonction de V

$$\|\vec{V}\| = \frac{d\|\overrightarrow{CD}\|}{dt}$$

Or:

$$CD^2 = OD^2 + OC^2 - 2\,\overrightarrow{OC}.\overrightarrow{OD} = a^2 + \frac{1}{2}a^2 - a^2\sqrt{2}.cos\alpha = a^2(\frac{3}{2} - \sqrt{2}.cos\alpha)$$

$$\Rightarrow \frac{dCD}{dt} = \frac{\frac{1}{2}a^2\sqrt{2}\dot{\alpha}sin\alpha}{(\frac{3}{2}a^2 - a^2\sqrt{2}cos\alpha)^{\frac{1}{2}}} = V \qquad \Rightarrow \quad \dot{\alpha} = \frac{(3-2\sqrt{2}cos\alpha)^{\frac{1}{2}}.V}{asin\alpha} \qquad (2)$$

De même:

$$\|\vec{V}\| = \frac{d\|\overrightarrow{DE}\|}{dt}$$

$$DE^2 = DA^2 + AE^2 + 2\,\overrightarrow{DA}.\overrightarrow{AE} = a^2 + a^2 + 2a^2.cos\beta = 2a^2(1+cos\beta)$$

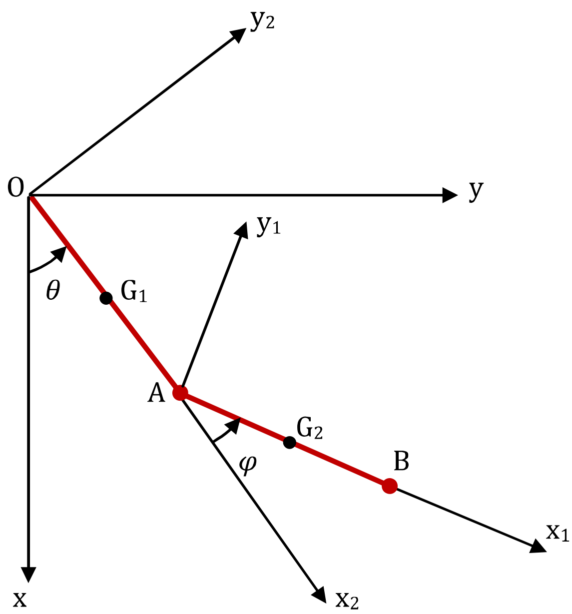
$$\Rightarrow \frac{dDE}{dt} = \frac{-a^2\dot{\beta}sin\beta}{(2a^2(1+cos\beta)^{\frac{1}{2}}} = V \qquad \Rightarrow \quad \dot{\beta} = \frac{-(2+2cos\beta)^{\frac{1}{2}}.V}{asin\beta} \qquad (3)$$

On remplace $\dot{\alpha}$ et $\dot{\beta}$ dans l'équation (1) :

$$\vec{V}(B)/_0 = \left| \begin{array}{c} 2aV\sin\beta\left(\dfrac{(3-2\sqrt{2}\cos\alpha)^{\frac{1}{2}}}{a\sin\alpha}+\dfrac{(2+2\cos\beta)^{\frac{1}{2}}}{a\sin\beta}\right) \\ 2aV\left(\dfrac{(3-2\sqrt{2}\cos\alpha)^{\frac{1}{2}}}{a\sin\alpha}\right)+2aV\cos\beta\left(\dfrac{(3-2\sqrt{2}\cos\alpha)^{\frac{1}{2}}}{a\sin\alpha}+\dfrac{(2+2\cos\beta)^{\frac{1}{2}}}{a\sin\beta}\right) \\ 0 \end{array} \right|_{(1)}$$

EXERCICE 06 :

Un bipendule est constitué de deux barres (OA) et (AB), de longueurs respectives L_1 et L_2. Déterminer les vecteurs vitesse et accélération des centres de masses G_1 et G_2 par leurs composantes sur (R_0) ; (R_1) et (R_2) sachant que le point O est fixe et que le système oscille dans le plan vertical (Oxy). On donne : $(R_0) \equiv (Oxyz)$ repère fixe, $(R_1) \equiv (Ax_1y_1zx_1)$ repère lié à la barre (AB) et $(R_2) \equiv (Ox_2y_2z_2)$ repère lié à (OA) avec $Ox_2//\overrightarrow{OA}$.



CORRIGE :

$(R_0) \equiv (Ox_0y_0z_0) = (0)$: Repère fixe

$(R_1) \equiv (Ax_1y_1z_1) = (1)$: Repère lié à la barre AB

$(R_2) \equiv (Ox_2y_2z_2) = (2)$: Repère lié à la barre OA

On a :

Le vecteur taux de rotation de R_1/R_2 : $\vec{\omega}_{1/2} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\varphi} \end{vmatrix}_{(1),(2)}$

Le vecteur taux de rotation de R_2/R_0 : $\vec{\omega}_{2/0} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{vmatrix}_{(2),(0)}$

D'où le vecteur taux de rotation de R_1/R_0: $\vec{\omega}_{1/0} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} + \dot{\varphi} \end{vmatrix}_{(1)}$

1. Les vecteurs vitesse de G_1 et G_2

a. Projection sur R_0

$$\vec{V}(G_1)/_0 = \left.\frac{d\overrightarrow{OG}_1}{dt}\right|_{(0)}$$

$$\overrightarrow{OG}_1 = \begin{vmatrix} \frac{L_1}{2}\cos\theta \\ \frac{L_1}{2}sin\theta \\ 0 \end{vmatrix}_{(0)} \Rightarrow \vec{V}(G_1)/_0 = \begin{vmatrix} -\frac{L_1}{2}\dot{\theta}\sin\theta \\ \frac{L_1}{2}\dot{\theta}cos\theta \\ 0 \end{vmatrix}_{(0)}$$

$$\vec{V}(G_2)/_0 = \left.\frac{d\overrightarrow{OG}_2}{dt}\right|_{(0)}$$

$$\overrightarrow{OG}_2 = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AG}_2 = \begin{vmatrix} L_1\cos\theta \\ L_1 sin\theta \\ 0 \end{vmatrix}_{(0)} + \begin{vmatrix} \frac{L_2}{2}\cos(\theta+\varphi) \\ \frac{L_2}{2}sin(\theta+\varphi) \\ 0 \end{vmatrix}_{(0)}$$

$$\Rightarrow \vec{V}(G_2)/_0 = \begin{vmatrix} -L_1\dot{\theta}\sin\theta - \frac{L_2}{2}(\dot{\theta}+\dot{\varphi})sin(\theta+\varphi) \\ L_1\dot{\theta}cos\theta + \frac{L_2}{2}(\dot{\theta}+\dot{\varphi})cos(\theta+\varphi) \\ 0 \end{vmatrix}_{(0)}$$

b. Projection sur R_1

$$\overrightarrow{OG_1}=\frac{\overrightarrow{OA}}{2}=\begin{vmatrix}\frac{L_1}{2}cos\varphi\\-\frac{L_1}{2}sin\varphi\\0\end{vmatrix}_{(1)}\Rightarrow\vec{V}(G_1)/_0=\left.\frac{d\overrightarrow{OG_1}}{dt}\right|_{(1)}+\vec{\omega}_{1/0}\wedge\overrightarrow{OG_1}$$

$$=\begin{vmatrix}-\frac{L_1}{2}\dot{\varphi}sin\varphi\\-\frac{L_1}{2}\dot{\varphi}cos\varphi\\0\end{vmatrix}_{(1)}+\begin{vmatrix}0\\0\\\dot{\theta}+\dot{\varphi}\end{vmatrix}_{(1)}\wedge\begin{vmatrix}\frac{L_1}{2}cos\varphi\\-\frac{L_1}{2}sin\varphi\\0\end{vmatrix}_{(1)}=\begin{vmatrix}\frac{L_1}{2}\dot{\theta}sin\varphi\\\frac{L_1}{2}\dot{\theta}cos\varphi\\0\end{vmatrix}_{(1)}$$

$$\overrightarrow{OG_2}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AG_2}=\begin{vmatrix}L_1cos\varphi+\frac{L_2}{2}\\-L_1sin\varphi\\0\end{vmatrix}_{(1)}\Rightarrow\vec{V}(G_2)/_0=\left.\frac{d\overrightarrow{OG_2}}{dt}\right|_{(1)}+\vec{\omega}_{1/0}\wedge\overrightarrow{OG_2}$$

$$=\begin{vmatrix}-L_1\dot{\varphi}sin\varphi\\-L_1\dot{\varphi}cos\varphi\\0\end{vmatrix}_{(1)}+\begin{vmatrix}0\\0\\\dot{\theta}+\dot{\varphi}\end{vmatrix}_{(1)}\wedge\begin{vmatrix}L_1cos\varphi+\frac{L_2}{2}\\-L_1sin\varphi\\0\end{vmatrix}_{(1)}$$

$$=\begin{vmatrix}L_1\dot{\theta}sin\varphi\\L_1\dot{\theta}cos\varphi+\frac{L_2}{2}(\dot{\theta}+\dot{\varphi})\\0\end{vmatrix}_{(1)}$$

c. Projection sur R_2

$$\overrightarrow{OG_1}=\begin{vmatrix}\frac{L_1}{2}\\0\\0\end{vmatrix}_{(2)}\Rightarrow\vec{V}(G_1)/_0=\left.\frac{d\overrightarrow{OG_1}}{dt}\right|_{(2)}+\vec{\omega}_{2/0}\wedge\overrightarrow{OG_1}=\begin{vmatrix}0\\0\\\dot{\theta}\end{vmatrix}_{(2)}\wedge\begin{vmatrix}\frac{L_1}{2}\\0\\0\end{vmatrix}_{(2)}=\begin{vmatrix}0\\\frac{L_1}{2}\dot{\theta}\\0\end{vmatrix}_{(2)}$$

$$\overrightarrow{OG_2} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AG_2} = \left|\begin{matrix} L_1 + \frac{L_2}{2}cos\varphi \\ \frac{L_2}{2}sin\varphi \\ 0 \end{matrix}\right|_{(2)} \Rightarrow \vec{V}(G_2)/_0 = \left.\frac{d\overrightarrow{OG_2}}{dt}\right|_{(2)} + \vec{\omega}_{2/0} \wedge \overrightarrow{OG_2}$$

$$= \left|\begin{matrix} -\frac{L_2}{2}(\dot{\theta} + \dot{\varphi})sin\varphi \\ L_1\dot{\theta} + \frac{L_2}{2}(\dot{\theta} + \dot{\varphi})cos\varphi \\ 0 \end{matrix}\right|_{(2)}$$

2. Les vecteurs accélération de G_1 et G_2

a. Projection sur R_0

$$\vec{\Gamma}(G_1)/_0 = \left.\frac{d\,\vec{V}(G_1)/_0}{dt}\right|_{(0)} = \left|\begin{matrix} -\frac{L_1}{2}\ddot{\theta}sin\theta - \frac{L_1}{2}\dot{\theta}^2cos\theta \\ \frac{L_1}{2}\ddot{\theta}cos\theta - \frac{L_1}{2}\dot{\theta}^2sin\theta \\ 0 \end{matrix}\right|_{(0)}$$

$$\vec{\Gamma}(G_2)/_0 = \left.\frac{d\,\vec{V}(G_2)/_0}{dt}\right|_{(0)}$$

$$= \left|\begin{matrix} -L_1\ddot{\theta}sin\theta - L_1\dot{\theta}^2cos\theta - \frac{L_2}{2}(\ddot{\theta} + \ddot{\varphi})sin(\theta + \varphi) - \frac{L_2}{2}(\dot{\theta} + \dot{\varphi})^2cos(\theta + \varphi) \\ L_1\ddot{\theta}cos\theta - L_1\dot{\theta}^2sin\theta + \frac{L_2}{2}(\ddot{\theta} + \ddot{\varphi})cos(\theta + \varphi) - \frac{L_2}{2}(\dot{\theta} + \dot{\varphi})^2sin(\theta + \varphi) \\ 0 \end{matrix}\right|_{(0)}$$

b. Projection sur R_1

$$\vec{\Gamma}(G_1)/_0 = \left.\frac{d\vec{V}(G_1)/_0}{dt}\right|_{(0)} = \left.\frac{d\vec{V}(G_1)/_0}{dt}\right|_{(1)} + \vec{\omega}_{1/0} \wedge \vec{V}(G_1)/_0$$

$$= \left|\begin{matrix} \frac{L_1}{2}\ddot{\theta}sin\varphi + \frac{L_1}{2}\dot{\theta}\dot{\varphi}cos\varphi \\ \frac{L_1}{2}\ddot{\theta}cos\varphi - \frac{L_1}{2}\dot{\theta}\dot{\varphi}sin\varphi \\ 0 \end{matrix}\right|_{(1)} + \left|\begin{matrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} + \dot{\varphi} \end{matrix}\right|_{(1)} \wedge \left|\begin{matrix} \frac{L_1}{2}\dot{\theta}sin\varphi \\ \frac{L_1}{2}\dot{\theta}cos\varphi \\ 0 \end{matrix}\right|_{(1)}$$

$$== \left|\begin{matrix} \frac{L_1}{2}\ddot{\theta}sin\varphi - \frac{L_1}{2}\dot{\theta}^2cos\varphi \\ \frac{L_1}{2}\ddot{\theta}cos\varphi + \frac{L_1}{2}\dot{\theta}^2sin\varphi \\ 0 \end{matrix}\right|_{(1)}$$

$$\vec{\Gamma}(G_2)/_0 = \left.\frac{d\vec{V}(G_2)/_0}{dt}\right|_{(0)} = \left.\frac{d\vec{V}(G_2)/_0}{dt}\right|_{(1)} + \vec{\omega}_{1/0} \wedge \vec{V}(G_2)/_0$$

$$= \left|\begin{matrix} L_1\ddot{\theta}sin\varphi + L_1\dot{\theta}\dot{\varphi}cos\varphi \\ L_1\ddot{\theta}cos\varphi - L_1\dot{\theta}\dot{\varphi}sin\varphi + \frac{L_2}{2}(\ddot{\theta}+\ddot{\varphi}) \\ 0 \end{matrix}\right|_{(1)} + \left|\begin{matrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}+\dot{\varphi} \end{matrix}\right|_{(1)} \wedge \left|\begin{matrix} L_1\dot{\theta}sin\varphi \\ L_1\dot{\theta}cos\varphi + \frac{L_2}{2}(\dot{\theta}+\dot{\varphi}) \\ 0 \end{matrix}\right|_{(1)}$$

$$== \left|\begin{matrix} L_1\ddot{\theta}sin\varphi - L_1\dot{\theta}^2cos\varphi - \frac{L_2}{2}(\dot{\theta}+\dot{\varphi})^2 \\ L_1\ddot{\theta}cos\varphi + L_1\dot{\theta}^2sin\varphi + \frac{L_2}{2}(\ddot{\theta}+\ddot{\varphi}) \\ 0 \end{matrix}\right|_{(1)}$$

c. Projection sur R_2

$$\vec{\Gamma}(G_1)/_0 = \left.\frac{d\vec{V}(G_1)/_0}{dt}\right|_{(0)} = \left.\frac{d\vec{V}(G_1)/_0}{dt}\right|_{(2)} + \vec{\omega}_{2/0} \wedge \vec{V}(G_1)/_0 = \left|\begin{matrix} 0 \\ \frac{L_1}{2}\ddot{\theta} \\ 0 \end{matrix}\right|_{(2)} + \left|\begin{matrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{matrix}\right|_{(2)} \wedge \left|\begin{matrix} 0 \\ \frac{L_1}{2}\dot{\theta} \\ 0 \end{matrix}\right|_{(2)}$$

$$= \left|\begin{matrix} -\frac{L_1}{2}\dot{\theta}^2 \\ \frac{L_1}{2}\ddot{\theta} \\ 0 \end{matrix}\right|_{(2)}$$

$$\vec{\Gamma}(G_2)/_0 = \left.\frac{d\vec{V}(G_2)/_0}{dt}\right|_{(0)} = \left.\frac{d\vec{V}(G_2)/_0}{dt}\right|_{(2)} + \vec{\omega}_{2/0} \wedge \vec{V}(G_2)/_0$$

$$= \left|\begin{matrix} -\frac{L_2}{2}(\ddot{\theta}+\ddot{\varphi})sin\varphi - \frac{L_2}{2}\dot{\varphi}(\dot{\theta}+\dot{\varphi})cos\varphi \\ L_1\ddot{\theta} + \frac{L_2}{2}(\ddot{\theta}+\ddot{\varphi})cos\varphi - \frac{L_2}{2}\dot{\varphi}(\dot{\theta}+\dot{\varphi})sin\varphi \\ 0 \end{matrix}\right|_{(2)} + \left|\begin{matrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{matrix}\right|_{(2)}$$

$$\wedge \left|\begin{matrix} -\frac{L_2}{2}(\dot{\theta}+\dot{\varphi})sin\varphi \\ L_1\dot{\theta} + \frac{L_2}{2}(\dot{\theta}+\dot{\varphi})cos\varphi \\ 0 \end{matrix}\right|_{(2)}$$

$$= \left|\begin{matrix} -\frac{L_2}{2}(\ddot{\theta}+\ddot{\varphi})sin\varphi - \frac{L_2}{2}\dot{\varphi}(\dot{\theta}+\dot{\varphi})cos\varphi - L_1\dot{\theta}^2 - \frac{L_2}{2}\dot{\theta}(\dot{\theta}+\dot{\varphi})cos\varphi \\ L_1\ddot{\theta} + \frac{L_2}{2}(\ddot{\theta}+\ddot{\varphi})cos\varphi - \frac{L_2}{2}\dot{\varphi}(\dot{\theta}+\dot{\varphi})sin\varphi - \frac{L_2}{2}\dot{\theta}(\dot{\theta}+\dot{\varphi})sin\varphi \\ 0 \end{matrix}\right|_{(2)}$$

EXERCICE 07 :

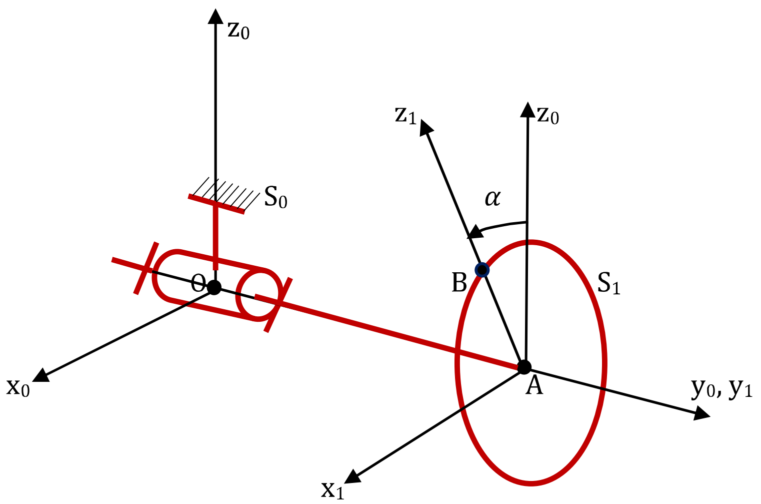
Soit $R_0(Ox_0y_0z_0)$ un repère lié au solide S_0. Le solide S_1 tourne par rapport à S_0 autour de l'axe (Oy_0). Soit $R_1(Ax_1y_0z_1)$ un repère lié à S_1, avec $\overrightarrow{OA} = a\vec{j}_0$ et $\alpha = (z_0, z_1)$. Soit un point B de S_1, avec $\overrightarrow{AB} = r\vec{k}_1$. On prendra R_1 comme repère de projection.

1. Déterminer la vitesse et l'accélération du point A par rapport au repère R_0.

2. Déterminer la vitesse et l'accélération du point B par rapport au repère R_0.

3. Ecrire le torseur de S_1/S_0 au point A et au point B. Quelle est la particularité du point A?

4. Retrouver $\vec{V}(A)/_0$, $\vec{V}(B)/_0$ $\vec{\Gamma}(A)/_0$ et $\vec{\Gamma}(B)/_0$, en utilisant les lois de composition des vitesses et des accélérations.



CORRIGE :

1. La vitesse et l'accélération du point A par rapport au repère R_0

a. La vitesse

Le vecteur $\overrightarrow{OA}$ s'écrit dans le repère R_1: $\overrightarrow{OA} = \begin{vmatrix} 0 \\ a \\ 0 \end{vmatrix}_{(1)}$

$$\vec{V}(A)/_0 = \left.\frac{d\overrightarrow{OA}}{dt}\right|_{(0)} = \left.\frac{d\overrightarrow{OA}}{dt}\right|_{(1)} + \vec{\omega}_{1/0} \wedge \overrightarrow{OA} = \begin{vmatrix} 0 \\ \dot{\alpha} \\ 0 \end{vmatrix}_{(1)} \wedge \begin{vmatrix} 0 \\ a \\ 0 \end{vmatrix}_{(1)} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}_{(1)} = \vec{0}$$

b. L'accélération

$$\vec{\Gamma}(A)/_0 = \vec{0}$$

2. La vitesse et l'accélération du point B par rapport au repère R_0

a. La vitesse

$$\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \begin{vmatrix} 0 \\ a \\ r \end{vmatrix}_{(1)}$$

$$\vec{V}(B)/_0 = \left.\frac{d\overrightarrow{OB}}{dt}\right|_{(0)} = \left.\frac{d\overrightarrow{OB}}{dt}\right|_{(1)} + \vec{\omega}_{1/0} \wedge \overrightarrow{OB} = \begin{vmatrix} 0 \\ \dot{\alpha} \\ 0 \end{vmatrix}_{(1)} \wedge \begin{vmatrix} 0 \\ a \\ r \end{vmatrix}_{(1)} = \begin{vmatrix} r\dot{\alpha} \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}_{(1)}$$

b. L'accélération

$$\vec{\Gamma}(B)/_0 = \left.\frac{d\vec{V}(B)/_0}{dt}\right|_{(0)} = \left.\frac{d\vec{V}(B)/_0}{dt}\right|_{(1)} + \vec{\omega}_{1/0} \wedge \vec{V}(B)/_0 = \begin{vmatrix} r\ddot{\alpha} \\ 0 \\ -r\dot{\alpha}^2 \end{vmatrix}_{(1)}$$

3. Le torseur de S_1/S_0 au point A

a. Le torseur cinématique : $\left[C_{S_{1/S_0}}\right]_A = \begin{cases} \vec{\omega}_{1/0} = \begin{vmatrix} 0 \\ \dot{\alpha} \\ 0 \end{vmatrix}_{(1),(0)} \\ \vec{V}(A)/_0 = \vec{0} \end{cases}$

b. Le torseur cinématique : $\left[C_{S_{1/S_0}}\right]_B = \begin{cases} \vec{\omega}_{1/0} = \begin{vmatrix} 0 \\ \dot{\alpha} \\ 0 \end{vmatrix}_{(1),(0)} \\ \vec{V}(B)/_0 = \begin{vmatrix} r\dot{\alpha} \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}_{(1)} \end{cases}$

Au point A, le torseur est un glisseur car : $\begin{cases} \vec{\omega}_{1/0} \neq \vec{0} \\ \vec{\omega}_{1/0}.\vec{V}(A)/_0 = 0 \end{cases}$

4. La loi de composition des vitesses et accélérations :

1. La vitesse absolue de A

$$\vec{V}(A)/_0 = \vec{V}(A)/_1 + \vec{V}_e$$

a. la vitesse relative de A

$$\vec{V}(A)/_1 = \left.\frac{d\overrightarrow{OA}}{dt}\right|_{(1)} = \vec{0}$$

b. la vitesse d'entraînement de R_1/R_0

Soit un point A' lié à R_1 et qui coïncide avec A à l'instant t donné $(A \equiv A')$, la vitesse d'entraînement s'écrit :

$$\vec{V_e} = \left.\frac{d\overrightarrow{OA'}}{dt}\right|_{(0)} = \left.\frac{d\overrightarrow{OA'}}{dt}\right|_{(1)} + \vec{\omega}_{1/0} \wedge \overrightarrow{OA} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}_{(1)}$$

$$\Rightarrow \vec{V}(A)/_0 = \vec{V}(A)/_1 + \vec{V_e} = \vec{0}$$

2. L'accélération absolue de A

$$\vec{\Gamma}(A)/_0 = \vec{\Gamma}(A)/_1 + \vec{\Gamma}_C + \vec{\Gamma}_e$$

a. l'accélération relative de A

$$\vec{\Gamma}(A)/_1 = \left.\frac{d\vec{V}(A)/_1}{dt}\right|_{(1)} = \vec{0}$$

b. l'accélération de Coriolis

$$\vec{\Gamma}_C = 2\vec{\omega}_{1/0} \wedge \vec{V}(A)/_1 = \vec{0}$$

c. l'accélération d'entraînement

$$\vec{\Gamma}_e = \left.\frac{d\vec{V}_e}{dt}\right|_{(0)} = \left.\frac{d\vec{V}_e}{dt}\right|_{(1)} + \vec{\omega}_{1/0} \wedge \vec{V}_e = \vec{0}$$

$$\vec{\Gamma}(A)/_0 = \vec{0}$$

3. La vitesse absolue de B

$$\vec{V}(B)/_0 = \vec{V}(B)/_1 + \vec{V}_e$$

a. la vitesse relative de B

$$\vec{V}(B)/_1 = \left.\frac{d\overrightarrow{OB}}{dt}\right|_{(1)} = \vec{0}$$

b. la vitesse d'entraînement de R_1/R_0

Soit un point B' lié à R_1 et qui coïncide avec B à l'instant t donné $(B \equiv B')$, la vitesse d'entraînement s'écrit :

$$\vec{V}_e = \left.\frac{d\overrightarrow{OB'}}{dt}\right|_{(0)} = \left.\frac{d\overrightarrow{OB'}}{dt}\right|_{(1)} + \vec{\omega}_{1/0} \wedge \overrightarrow{OB} = \left|\begin{matrix} 0 \\ \dot{\alpha} \\ 0 \end{matrix}\right|_{(1)} \wedge \left|\begin{matrix} 0 \\ a \\ r \end{matrix}\right|_{(1)} = \left|\begin{matrix} r\dot{\alpha} \\ 0 \\ 0 \end{matrix}\right|_{(1)}$$

$$\Rightarrow \vec{V}(B)/_0 = \vec{V}(B)/_1 + \vec{V}_e = \left|\begin{matrix} r\dot{\alpha} \\ 0 \\ 0 \end{matrix}\right|_{(1)}$$

4. L'accélération absolue de B

$$\vec{\Gamma}(B)/_0 = \vec{\Gamma}(B)/_1 + \vec{\Gamma}_C + \vec{\Gamma}_e$$

a. l'accélération relative de B

$$\vec{\Gamma}(B)/_1 = \left.\frac{d\vec{V}(B)/_1}{dt}\right|_{(1)} = \vec{0}$$

b. l'accélération de Coriolis

$$\vec{\Gamma}_C = 2\vec{\omega}_{1/0} \wedge \vec{V}(B)/_1 = \vec{0}$$

c. l'accélération d'entraînement

$$\vec{\Gamma}_e = \left.\frac{d\vec{V}_e}{dt}\right|_{(0)} = \left.\frac{d\vec{V}_e}{dt}\right|_{(1)} + \vec{\omega}_{1/0} \wedge \vec{V}_e = \begin{vmatrix} r\ddot{\alpha} \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}_{(1)} + \begin{vmatrix} 0 \\ \dot{\alpha} \\ 0 \end{vmatrix}_{(1)} \wedge \begin{vmatrix} r\dot{\alpha} \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}_{(1)} = \begin{vmatrix} r\ddot{\alpha} \\ 0 \\ -r\dot{\alpha}^2 \end{vmatrix}_{(1)}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{\Gamma}(B)/_0 = \begin{vmatrix} r\ddot{\alpha} \\ 0 \\ -r\dot{\alpha}^2 \end{vmatrix}_{(1)}$$

EXERCICE 08 :

Pour simplifier l'étude, le radar est modélisé par trois éléments : le piédestal (0), l'arbre de rotation azimut (1) et l'émetteur récepteur noté (2) comprenant la parabole fixée sur l'axe (IB). Une masse (3) fixée sur (2) en B assure le rôle de contrepoids. L'arbre (1) est en rotation par rapport au piédestal (0), l'angle azimut est noté α. L'émetteur-récepteur (2) est en rotation par rapport à l'arbre (1), l'angle site est β.

- Le repère $(R_0) \equiv (Ox_0y_0z_0) \equiv (0)$ est lié au piédestal 0.
- Le repère $(R_1) \equiv (Ox_1y_1z_1) \equiv (1)$ est lié à l'arbre de rotation azimut (1).

  On a $\alpha = (x_0, x_1) = (y_0, y_1)$.
- Le repère $(R_2) \equiv (Ax_2y_2z_2) \equiv (2)$ est lié à l'émetteur récepteur (2).

  On a $\beta = (y_1, y_2) = (z_1, z_2)$.

On donne : $OA = h,\ AC = a$ et $BC = b$.

1. Tracer les figures de changement de base.

2. Donner un vecteur position du point B(projeter dans R_2)

3. Que peut-on dire de la trajectoire du point B (dans son mouvement par rapport à R_0)?

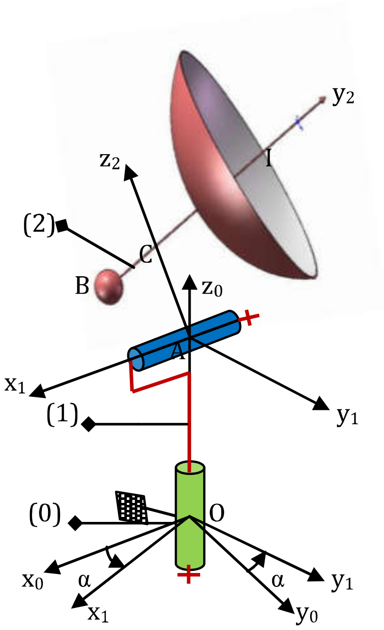
4. Déterminez le vecteur taux de rotation $\vec{\omega}_{2/0}$de l'ensemble (2) par rapport au piédestal (0).

5. Déterminer le vecteur vitesse du point B lié à 2 par rapport à R_0. Le résultat devra être exprimé dans R_2.

6. Déterminer le vecteur accélération du point B lié à 2 par rapport à R_0. Le résultat devra être exprimé dans R_2.

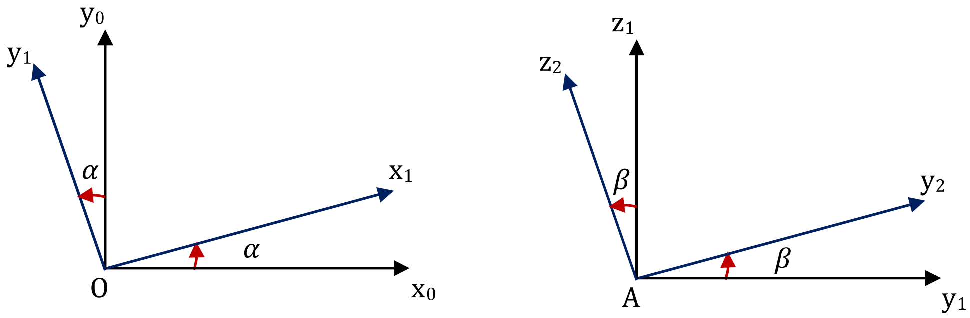
7. Déterminer le vecteur vitesse du point B lié à 2 par rapport à R_0, en utilisant la loi de composition des vitesses.

8. Déterminer le vecteur accélération du point B lié à 2 par rapport à R_0, en utilisant la loi de composition des accélérations.



CORRIGE :

1. Les figures de changement de base



2. Le vecteur position du point B

$$\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}=\begin{vmatrix}0\\ hsin\beta\\ hcos\beta\end{vmatrix}_{(2)}+\begin{vmatrix}0\\0\\a\end{vmatrix}_{(2)}+\begin{vmatrix}0\\-b\\0\end{vmatrix}_{(2)}=\begin{vmatrix}0\\ hsin\beta-b\\ hcos\beta+a\end{vmatrix}_{(2)}$$

3. La trajectoire du point B (dans son mouvement par rapport à R_0)

a. Si $\beta=$ cste, alors la trajectoire de B est un cercle d'axe $(A,\vec{k}_0)$.

b. Si $\alpha=$ cste, alors la trajectoire de B est un cercle d'axe $(A,\vec{\imath}_1)$.

La trajectoire de B est donc sur la sphère de centre A et de rayon AB.

4. Le vecteur taux de rotation $\vec{\omega}_{2/0}$de l'ensemble (2) par rapport au piédestal (0)

$$\vec{\omega}_{2/0}=\vec{\omega}_{2/1}+\vec{\omega}_{1/0}$$

On a: $\vec{\omega}_{1/0}=\begin{vmatrix}0\\0\\\dot{\alpha}\end{vmatrix}_{(1),(0)}$ et $\vec{\omega}_{2/1}=\begin{vmatrix}\dot{\beta}\\0\\0\end{vmatrix}_{(2),(1)}\Rightarrow\vec{\omega}_{2/0}=\begin{vmatrix}\dot{\beta}\\0\\\dot{\alpha}\end{vmatrix}_{(1)}$

Les composantes de $\vec{\omega}_{2/0}$ dans R_2

$$\vec{\omega}_{2/0}=\begin{vmatrix}\dot{\beta}\\ \dot{\alpha}sin\beta\\ \dot{\alpha}cos\beta\end{vmatrix}_{(2)}$$

5. Le vecteur vitesse du point B lié à 2 par rapport à R_0

$$\vec{V}(B)/_0=\left.\frac{d\overrightarrow{OB}}{dt}\right|_{(0)}=\left.\frac{d\overrightarrow{OB}}{dt}\right|_{(2)}+\vec{\omega}_{2/0}\wedge\overrightarrow{OB}=\begin{vmatrix}0\\ h\dot{\beta}cos\beta\\ -h\dot{\beta}sin\beta\end{vmatrix}_{(2)}+\begin{vmatrix}\dot{\beta}\\ \dot{\alpha}sin\beta\\ \dot{\alpha}cos\beta\end{vmatrix}_{(2)}\wedge\begin{vmatrix}0\\ hsin\beta-b\\ hcos\beta+a\end{vmatrix}_{(2)}$$

$$=\begin{vmatrix}\dot{\alpha}(asin\beta+bcos\beta)\\ \hbar \qquad -a\dot{\beta}\\ -b\dot{\beta}\end{vmatrix}_{(2)}$$

6. Le vecteur accélération du point B par rapport à R_0

$$\vec{\Gamma}(B)/_0 = \left.\frac{d\,\vec{V}(B)/_0}{dt}\right|_{(0)} = \left.\frac{d\,\vec{V}(B)/_0}{dt}\right|_{(2)} + \vec{\omega}_{2/0} \wedge \vec{V}(B)/_0$$

$$= \begin{vmatrix} \ddot{\alpha}(asin\beta + bcos\beta) + \dot{\alpha}\dot{\beta}\,(acos\beta - bsin\beta) \\ -a\ddot{\beta} \\ -b\ddot{\beta} \end{vmatrix}_{(2)} + \begin{vmatrix} \dot{\beta} \\ \dot{\alpha}sin\beta \\ \dot{\alpha}cos\beta \end{vmatrix}_{(2)}$$

$$\wedge \begin{vmatrix} \dot{\alpha}\,(asin\beta + bcos\beta) \\ -a\dot{\beta} \\ -b\dot{\beta} \end{vmatrix}_{(2)}$$

$$= \begin{vmatrix} \ddot{\alpha}\,(asin\beta + bcos\beta) + \dot{\alpha}\dot{\beta}\,(acos\beta - bsin\beta) - b\dot{\beta}\dot{\alpha}sin\beta + a\dot{\beta}\dot{\alpha}cos\beta \\ -a\ddot{\beta} + \dot{\alpha}^2cos\beta(asin\beta + bcos\beta) + b\dot{\beta}^2 \\ -b\ddot{\beta} - a\dot{\beta}^2 - \dot{\alpha}^2sin\beta(asin\beta + bcos\beta) \end{vmatrix}_{(2)}$$

$$\vec{\Gamma}(B)/_0 = \begin{vmatrix} \ddot{\alpha}\,asin\beta + \ddot{\alpha}bcos\beta - 2b\dot{\beta}\dot{\alpha}sin\beta + 2a\dot{\beta}\dot{\alpha}cos\beta \\ \hbar\ -a\ddot{\beta} + \dot{\alpha}^2acos\beta sin\beta + \dot{\alpha}^2bcos^2\beta + b\dot{\beta}^2 \\ -b\ddot{\beta} - a\dot{\beta}^2 - \dot{\alpha}^2asin^2\beta - \dot{\alpha}^2bcos\beta sin\beta \end{vmatrix}_{(2)}$$

7. Le vecteur vitesse du point B

La loi de composition des vitesses s'écrit :

$$\vec{V}(B)/_0 = \vec{V}(B)/_1 + \vec{V}_e$$

a. la vitesse relative de B

$$\vec{V}(B)/_1 = \left.\frac{d\overrightarrow{OB}}{dt}\right|_{(1)} = \left.\frac{d\overrightarrow{OB}}{dt}\right|_{(2)} + \vec{\omega}_{2/1} \wedge \overrightarrow{OB} = \begin{vmatrix} 0 \\ h\dot{\beta}cos\beta \\ -h\dot{\beta}sin\beta \end{vmatrix}_{(2)} + \begin{vmatrix} \dot{\beta} \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}_{(2)} \wedge \begin{vmatrix} 0 \\ hsin\beta - b \\ hcos\beta + a \end{vmatrix}_{(2)}$$

$$\vec{V}(B)/_1 = \begin{vmatrix} 0 \\ -a\dot{\beta} \\ -b\dot{\beta} \end{vmatrix}_{(2)}$$

b. la vitesse d'entraînement de R_1/R_0

Soit un point B' lié à R_1 et qui coïncide avec B à l'instant t donné ($B \equiv B'$), la vitesse d'entraînement s'écrit :

$$\vec{V_e} = \left.\frac{d\overrightarrow{OB'}}{dt}\right|_{(0)} = \left.\frac{d\overrightarrow{OB'}}{dt}\right|_{(1)} + \vec{\omega}_{1/0} \wedge \overrightarrow{OB} = \left|\begin{matrix} 0 \\ \dot{\alpha} sin\beta \\ \dot{\alpha} cos\beta \end{matrix}\right|_{(2)} \wedge \left|\begin{matrix} 0 \\ hsin\beta - b \\ hcos\beta + a \end{matrix}\right|_{(2)}$$

$$= \left|\begin{matrix} a\dot{\alpha} sin\beta + b\dot{\alpha} cos\beta \\ 0 \\ 0 \end{matrix}\right|_{(2)}$$

$$\Rightarrow \vec{V}(B)/_0 = \vec{V}(B)/_1 + \vec{V_e} = \left|\begin{matrix} \dot{\alpha}\,(asin\beta + bcos\beta) \\ \hbar \qquad -a\dot{\beta} \\ -b\dot{\beta} \end{matrix}\right|_{(2)}$$

8. L'accélération absolue de B

$$\vec{\Gamma}(B)/_0 = \vec{\Gamma}(B)/_1 + \vec{\Gamma}_C + \vec{\Gamma}_e$$

a. l'accélération relative de B

$$\vec{\Gamma}(B)/_1 = \left.\frac{d\vec{V}(B)/_1}{dt}\right|_{(1)} = \left.\frac{d\vec{V}(B)/_1}{dt}\right|_{(2)} + \vec{\omega}_{2/1} \wedge \vec{V}(B)/_1 = \left|\begin{matrix} 0 \\ -a\ddot{\beta} \\ -b\ddot{\beta} \end{matrix}\right|_{(2)} + \left|\begin{matrix} -\dot{\beta} \\ 0 \\ 0 \end{matrix}\right|_{(2)} \wedge \left|\begin{matrix} 0 \\ -a\dot{\beta} \\ -b\dot{\beta} \end{matrix}\right|_{(2)}$$

$$= \left|\begin{matrix} 0 \\ -a\ddot{\beta} - b\dot{\beta}^2 \\ -b\ddot{\beta} + a\dot{\beta}^2 \end{matrix}\right|_{(2)}$$

b. l'accélération de Coriolis

$$\vec{\Gamma}_C = 2\vec{\omega}_{1/0} \wedge \vec{V}(B)/_1 = 2\left|\begin{matrix} 0 \\ \dot{\alpha} sin\beta \\ \dot{\alpha} cos\beta \end{matrix}\right|_{(2)} \wedge \left|\begin{matrix} 0 \\ -a\dot{\beta} \\ -b\dot{\beta} \end{matrix}\right|_{(2)} = 2\left|\begin{matrix} -b\dot{\alpha}\dot{\beta} sin\beta + a\dot{\alpha}\dot{\beta} cos\beta \\ 0 \\ 0 \end{matrix}\right|_{(2)}$$

c. l'accélération d'entraînement

A l'instant considéré $\beta = \text{cste}$

$$\vec{\Gamma}_e = \left.\frac{d\vec{V}_e}{dt}\right|_{(0)} = \left.\frac{d\vec{V}_e}{dt}\right|_{(2)} + \vec{\omega}_{2/0} \wedge \vec{V}_e$$

$$= \begin{vmatrix} a\ddot{\alpha}sin\beta + b\ddot{\alpha}cos\beta \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}_{(2)} + \begin{vmatrix} \dot{\beta} \\ \dot{\alpha}sin\beta \\ \dot{\alpha}cos\beta \end{vmatrix}_{(2)} \wedge \begin{vmatrix} a\dot{\alpha}sin\beta + b\dot{\alpha}cos\beta \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}_{(2)}$$

$$= \begin{vmatrix} a\ddot{\alpha}sin\beta + b\ddot{\alpha}cos\beta \\ a\dot{\alpha}^2cos\beta sin\beta + b\dot{\alpha}^2cos^2\beta \\ -a\dot{\alpha}^2sin^2\beta - b\dot{\alpha}^2sin\beta cos\beta \end{vmatrix}_{(2)}$$

$$\Rightarrow \vec{\Gamma}(B)/_0 = \vec{\Gamma}(B)/_1 + \vec{\Gamma}_C + \vec{\Gamma}_e = \begin{vmatrix} a\ddot{\alpha}sin\beta + b\ddot{\alpha}cos\beta + 2a\dot{\alpha}\dot{\beta}cos\beta - 2b\dot{\alpha}\dot{\beta}sin\beta \\ a\dot{\alpha}^2cos\beta sin\beta + b\dot{\alpha}^2cos^2\beta - a\ddot{\beta} - b\dot{\beta}^2 \\ -a\dot{\alpha}^2sin^2\beta - b\dot{\alpha}^2sin\beta cos\beta - b\ddot{\beta} + a\dot{\beta}^2 \end{vmatrix}_{(2)}$$

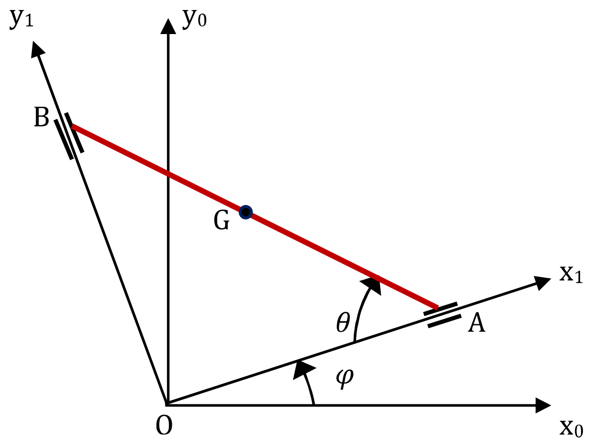
EXERCICE 09 :

Une tige mince (AB) de longueur $3L$ est reliée par deux glissières à deux droites perpendiculaires (Ox_1) et (Oy_1) qui tournent dans un plan fixe (Ox_0y_0). On choisit R_1 $(Ox_1y_1z_1)$ comme repère de projection.

Déterminer les vecteurs vitesse et accélération du centre G de la tige AB, en utilisant :

1. La méthode de dérivation directe.

2. La formule de distribution des vitesses et dans un solide.



CORRIGE :

1. La vitesse et l'accélération du centre G par dérivation directe

$$\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AG} = \begin{vmatrix} 3Lcos\theta \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}_{(1)} + \begin{vmatrix} -\dfrac{3L}{2}cos\theta \\ \dfrac{3L}{2}sin\theta \\ 0 \end{vmatrix}_{(1)} = \begin{vmatrix} \dfrac{3L}{2}cos\theta \\ \dfrac{3L}{2}sin\theta \\ 0 \end{vmatrix}_{(1)}$$

$$\vec{V}(G)/_0 = \left.\frac{d\overrightarrow{OG}}{dt}\right|_{(0)} = \left.\frac{d\overrightarrow{OG}}{dt}\right|_{(1)} + \vec{\omega}_{1/0} \wedge \overrightarrow{OG} = \begin{vmatrix} -\dfrac{3L}{2}\dot{\theta}sin\theta \\ \dfrac{3L}{2}\dot{\theta}cos\theta \\ 0 \end{vmatrix}_{(1)} + \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\varphi} \end{vmatrix}_{(1)} \wedge \begin{vmatrix} \dfrac{3L}{2}cos\theta \\ \dfrac{3L}{2}sin\theta \\ 0 \end{vmatrix}_{(1)}$$

$$= \begin{vmatrix} -\dfrac{3L}{2}(\dot{\theta}+\dot{\varphi})sin\theta \\ \dfrac{3L}{2}(\dot{\theta}+\dot{\varphi})cos\theta \\ 0 \end{vmatrix}_{(1)}$$

$$\vec{\Gamma}(G)/_0 = \left.\frac{d\vec{V}(G)/_0}{dt}\right|_{(0)} = \left.\frac{d\vec{V}(G)/_0}{dt}\right|_{(1)} + \vec{\omega}_{1/0} \wedge \vec{V}(G)/_0$$

$$= \begin{vmatrix} -\frac{3L}{2}(\ddot{\theta}+\ddot{\varphi})sin\theta - \frac{3L}{2}\dot{\theta}(\dot{\theta}+\dot{\varphi})cos\theta \\ \frac{3L}{2}(\ddot{\theta}+\ddot{\varphi})cos\theta - \frac{3L}{2}\dot{\theta}(\dot{\theta}+\dot{\varphi})sin\theta \\ 0 \end{vmatrix}_{(1)} + \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\varphi} \end{vmatrix}_{(1)}$$

$$\wedge \begin{vmatrix} -\frac{3L}{2}(\dot{\theta}+\dot{\varphi})sin\theta \\ \frac{3L}{2}(\dot{\theta}+\dot{\varphi})cos\theta \\ 0 \end{vmatrix}_{(1)}$$

$$= \begin{vmatrix} -\frac{3L}{2}(\ddot{\theta}+\ddot{\varphi})sin\theta - \frac{3L}{2}(\dot{\theta}^2+\dot{\varphi}^2)cos\theta - 3L\dot{\theta}\dot{\varphi}cos\theta \\ \frac{3L}{2}(\ddot{\theta}+\ddot{\varphi})cos\theta - \frac{3L}{2}(\dot{\theta}^2+\dot{\varphi}^2)sin\theta - 3L\dot{\theta}\dot{\varphi}sin\theta \\ 0 \end{vmatrix}_{(1)}$$

2. La vitesse et l'accélération du centre G par la formule de distribution

$$\vec{V}(G)/_0 = \vec{V}(A)/_0 + \vec{\omega}_{2/0} \wedge \overrightarrow{AG}$$

Le vecteur $\overrightarrow{OA} = \begin{vmatrix} 3Lcos\theta \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}_{(1)}$

$$\Rightarrow \vec{V}(A)/_0 = \left.\frac{d\overrightarrow{OA}}{dt}\right|_{(0)} = \left.\frac{d\overrightarrow{OA}}{dt}\right|_{(1)} + \vec{\omega}_{1/0} \wedge \overrightarrow{OA} = \begin{vmatrix} -3L\dot{\theta}sin\theta \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}_{(1)} + \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\varphi} \end{vmatrix}_{(1)} \wedge \begin{vmatrix} 3Lcos\theta \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}_{(1)}$$

$$\Rightarrow \vec{V}(A)/_0 = \begin{vmatrix} -3L\dot{\theta}sin\theta \\ 3L\dot{\varphi}cos\theta \\ 0 \end{vmatrix}_{(1)}$$

$$\vec{V}(G)/_0 = \begin{vmatrix} -3L\dot{\theta}sin\theta \\ 3L\dot{\varphi}cos\theta \\ 0 \end{vmatrix}_{(1)} + \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ (\dot{\varphi}-\dot{\theta}) \end{vmatrix}_{(1)} \wedge \begin{vmatrix} -\frac{3L}{2}cos\theta \\ \frac{3L}{2}sin\theta \\ 0 \end{vmatrix}_{(1)} = \begin{vmatrix} -\frac{3L}{2}(\dot{\theta}+\dot{\varphi})sin\theta \\ \frac{3L}{2}(\dot{\theta}+\dot{\varphi})cos\theta \\ 0 \end{vmatrix}_{(1)}$$

$$\vec{\Gamma}(G)/_0 = \left.\frac{d\vec{V}(G)/_0}{dt}\right|_{(0)} = \left.\frac{d\vec{V}(A)/_0}{dt}\right|_{(0)} + \frac{d\vec{\omega}_{2/0}}{dt} \wedge \overrightarrow{AG} + \vec{\omega}_{2/0} \wedge \left.\frac{d\overrightarrow{AG}}{dt}\right|_{(0)}$$

$$= \left.\frac{d\vec{V}(A)/_0}{dt}\right|_{(1)} + \vec{\omega}_{1/0} \wedge \vec{V}(A)/_0 + \frac{d\vec{\omega}_{2/0}}{dt} \wedge \overrightarrow{AG} + \vec{\omega}_{2/0}$$

$$\wedge \left(\left.\frac{d\overrightarrow{AG}}{dt}\right|_{(1)} + \vec{\omega}_{1/0} \wedge \overrightarrow{AG} \right)$$

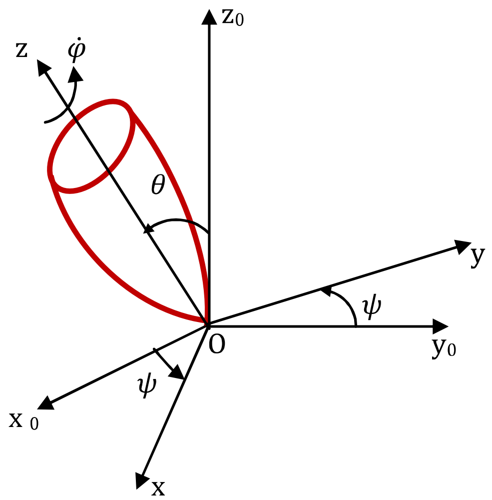
$$\Rightarrow \vec{\Gamma}(G)/_0 = \begin{vmatrix} -3L\ddot{\theta}sin\theta - 3L\dot{\theta}^2 cos\theta \\ 3L\ddot{\varphi}cos\theta - 3L\dot{\varphi}\dot{\theta}sin\theta \\ 0 \end{vmatrix}_{(1)} + \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ (\ddot{\varphi} - \ddot{\theta}) \end{vmatrix}_{(1)} \wedge \begin{vmatrix} -\frac{3L}{2}cos\theta \\ \frac{3L}{2}sin\theta \\ 0 \end{vmatrix}_{(1)} + \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ (\dot{\varphi} - \dot{\theta}) \end{vmatrix}_{(1)}$$

$$\wedge \left(\begin{vmatrix} \frac{3L}{2}\dot{\theta}sin\theta \\ \frac{3L}{2}\dot{\theta}cos\theta \\ 0 \end{vmatrix}_{(1)} + \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\varphi} \end{vmatrix}_{(1)} \wedge \begin{vmatrix} -\frac{3L}{2}cos\theta \\ \frac{3L}{2}sin\theta \\ 0 \end{vmatrix}_{(1)} \right)$$

$$\Rightarrow \vec{\Gamma}(G)/_0 = \begin{vmatrix} -\frac{3L}{2}(\ddot{\theta} + \ddot{\varphi})sin\theta - \frac{3L}{2}(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2)cos\theta - 3L\dot{\theta}\dot{\varphi}cos\theta \\ \frac{3L}{2}(\ddot{\theta} + \ddot{\varphi})cos\theta - \frac{3L}{2}(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2)sin\theta - 3L\dot{\theta}\dot{\varphi}sin\theta \\ 0 \end{vmatrix}_{(1)}$$

EXERCICE 10 :

Une toupie tourne autour de son axe de révolution à la vitesse angulaire $\dot{\varphi}$; cet axe fait l'angle θ constant avec la verticale et tourne autour de celle-ci à la vitesse angulaire $\dot{\psi}$. Déterminer le module de la vitesse angulaire de la toupie par rapport au sol et l'angle que fait cette vitesse avec la verticale.



CORRIGE :

$(R_0) \equiv (Ox_0y_0z_0) = (0)$: Repère fixe

$(R_1) \equiv (Ox_1y_1z_1) = (1)$: Repère mobile

$(R_2) \equiv (Ox_2y_2z_2) = (2)$: Repère mobile

$(R_3) \equiv (Ox_3y_3z_3) = (3)$: Repère lié à la toupie

On a :

$$\vec{\omega}_{1/0} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{vmatrix}_{(1),(0)} ; \ \vec{\omega}_{2/1} = \begin{vmatrix} \dot{\theta} \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}_{(2),(1)} ; \ \vec{\omega}_{3/2} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\varphi} \end{vmatrix}_{(3),(2)}$$

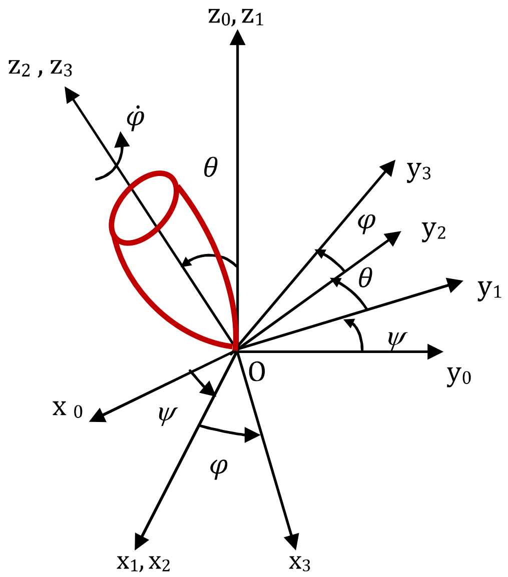
La toupie tourne avec une vitesse angulaire totale :

$$\vec{\omega}_{3/0} = \vec{\omega}_{3/2} + \vec{\omega}_{2/1} + \vec{\omega}_{1/0}$$

Or θ = constante $\Rightarrow \vec{\omega}_{2/1} = \vec{0}$

D'où

$$\vec{\omega}_{3/0} = \vec{\omega}_{1/0} + \vec{\omega}_{3/2} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{vmatrix}_{(1),(0)} + \vec{\omega}_{3/2} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\varphi} \end{vmatrix}_{(3),(2)}$$



Les composantes de $\vec{\omega}_{1/0}$ dans le repère (3) :

$$\vec{\omega}_{1/0} = \begin{vmatrix} 0 \\ \dot{\Psi}sin\theta \\ \dot{\Psi}cos\theta \end{vmatrix}_{(3)} \quad \Rightarrow \quad \vec{\omega}_{3/0} = \begin{vmatrix} 0 \\ \dot{\Psi}sin\theta \\ \dot{\Psi}cos\theta + \dot{\varphi} \end{vmatrix}_{(3)} = \dot{\Psi}sin\theta\vec{\jmath}_3 + (\dot{\Psi}cos\theta + \dot{\varphi})\vec{k}_3$$

1. Module de $\vec{\omega}_{3/0}$

$$\vec{\omega}_{3/0} = \sqrt{\left(\dot{\Psi}sin\theta\right)^2 + \left(\dot{\Psi}cos\theta + \dot{\varphi}\right)^2} = \sqrt{\left(\dot{\Psi}sin\theta\right)^2 + \left(\dot{\Psi}cos\theta\right)^2 + (\dot{\varphi})^2 + 2\dot{\varphi}\dot{\Psi}cos\theta}$$

$$= \sqrt{\dot{\Psi}^2 + \dot{\varphi}^2 + 2\dot{\varphi}\dot{\Psi}cos\theta}$$

2. Soit α l'angle que fait $\vec{\omega}_{3/0}$ avec la verticale $\vec{k}_0$ ou $\vec{k}_1$

$$\vec{\omega}_{3/0} \,.\, \vec{k}_0 = \vec{\omega}_{3/0} \,.\vec{k}_1 = \|\vec{\omega}_{3/0}\| . \|\vec{k}_0\| cos\alpha$$

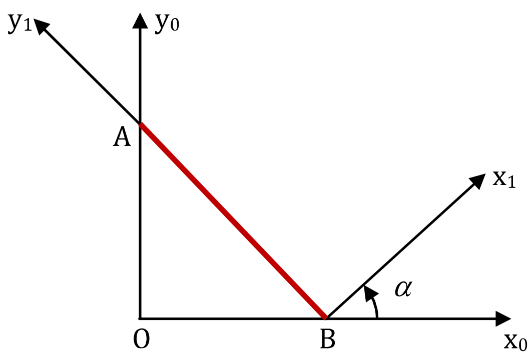
$$\Rightarrow cos\alpha = \frac{\vec{\omega}_{3/0} \,.\, \vec{k}_0}{\|\vec{\omega}_{3/0}\| . \|\vec{k}_0\|} = \frac{\begin{vmatrix} 0 \\ \dot{\Psi}sin\theta \\ \dot{\Psi}cos\theta + \dot{\varphi} \end{vmatrix}_{(3)} . \begin{vmatrix} 0 \\ \dot{\Psi}sin\theta \\ \dot{\Psi}cos\theta \end{vmatrix}_{(3)}}{\sqrt{\dot{\Psi}^2 + \dot{\varphi}^2 + 2\dot{\varphi}\dot{\Psi}cos\theta} \,.\, \sqrt{\dot{\Psi}^2}} = \frac{\dot{\Psi} + \dot{\varphi}cos\theta}{\sqrt{\dot{\Psi}^2 + \dot{\varphi}^2 + 2\dot{\varphi}\dot{\Psi}cos\theta}}$$

EXERCICE 11 :

Les extrémités A et B d'une barre homogène de masse M et de longueur $2L$ glissent sans frottement : A sur un axe vertical et B sur un axe horizontal.

1. Déterminer le centre instantané de rotation I du mouvement de S_1 par rapport à S_0 de manière analytique puis graphique.

2. Trouver la base et la roulante du mouvement de S_1 par rapport à S_0.



CORRIGE :

1. Recherche du CIR du mouvement de S_1 par rapport à S_0

De façon graphique

Le (CIR) I est tel que $\vec{V}(I \in S_1/S_0) = 0$. Sa position est repérée en traçant deux droites, l'une perpendiculaire à la vitesse $\vec{V}(A \in S_1/S_0)$ au point A et l'autre perpendiculaire à $\vec{V}(\mathrm{B} \in S_1/S_0)$ au point B. Le point d'intersection de ces deux droites est le (CIR) de la barre.

On déduit facilement les coordonnées du point I tel que :

$$\overrightarrow{OI} = \left| \begin{matrix} 2Lsin\alpha \\ 2Lcos\alpha \\ 0 \end{matrix} \right|_{(0)}$$

Analytiquement

$\overrightarrow{OA} = \begin{vmatrix} 0 \\ 2L\cos\alpha \\ 0 \end{vmatrix}_{(0)}$ et $\overrightarrow{OB} = \begin{vmatrix} 2L\sin\alpha \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}_{(0)}$ On en déduit que :

$$\vec{V}(A)/_0 = \frac{d\overrightarrow{OA}}{dt}/_0 = \begin{vmatrix} 0 \\ -2L\dot{\alpha}\sin\alpha \\ 0 \end{vmatrix}_{(0)}$$

$$\vec{V}(B)/_0 = \frac{d\overrightarrow{OB}}{dt}/_0 = \begin{vmatrix} 2L\dot{\alpha}\cos\alpha \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}_{(0)}$$

On a $\vec{V}(B)/_0 = \vec{V}(I)/_0 + \vec{\omega}_{1/0} \wedge \overrightarrow{IB} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\alpha} \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} x_0 \\ y_0 \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\dot{\alpha}y_0 \\ \dot{\alpha}x_0 \\ 0 \end{vmatrix}$ (1)

$\vec{V}(A)/_0 = \vec{V}(I)/_0 + \vec{\omega}_{1/0} \wedge \overrightarrow{IA} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\alpha} \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} x_0 \\ y_0 \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\dot{\alpha}y_0 \\ \dot{\alpha}x_0 \\ 0 \end{vmatrix}$ (2)

(1) : Par identification avec la vitesse du pt B on trouve : $\overrightarrow{BI} = \begin{vmatrix} 0 \\ 2L\cos\alpha \\ 0 \end{vmatrix}_{(0)}$

(2) : Par identification avec la vitesse du pt A.

On retrouve bien le résultat de la méthode graphique : $\overrightarrow{OI} = \begin{vmatrix} 2L\sin\alpha \\ 2L\cos\alpha \\ 0 \end{vmatrix}_{(0)}$

2. Base et roulante

La roulante est la trajectoire du point I dans le repère associé à S_1.

On a $\overrightarrow{BI} = \begin{vmatrix} 0 \\ 2L\cos\alpha \\ 0 \end{vmatrix}_{(0)} = 2L\cos\alpha\, \vec{j}_0 = 2L\cos\alpha\,(\sin\alpha\vec{\imath}_1 + \cos\alpha\vec{j}_1)$

On passe en angle moitié

$$\overrightarrow{BI} = 2L\cos\alpha.\sin\alpha\vec{\imath}_1 + 2L\cos^2\alpha\,\vec{j}_1 = \frac{2L\sin2\alpha}{2}\,\vec{\imath}_1 + 2L\left(\frac{1+\cos2\alpha}{2}\right)\vec{j}_1$$

On en déduit la relation :

$$x_I^2 + (y_I - L)^2 = L^2$$

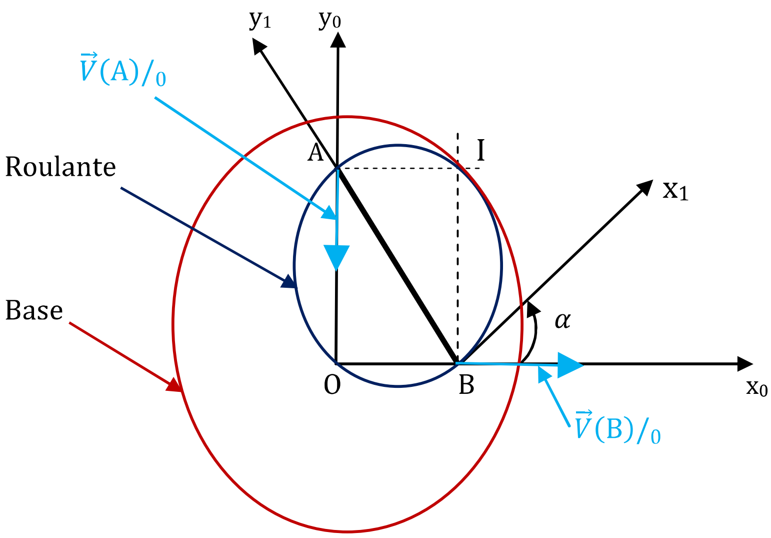
Il s'agit de l'équation d'un cercle de centre $(0, L)$ dans R_1 et de diamètre la tige AB. Le point C centre du cercle est donc au milieu de la tige.

La base est la trajectoire du point I dans le repère associé à S_0.

On a $\overrightarrow{OI} = \begin{vmatrix} 2L\sin\alpha \\ 2L\cos\alpha \\ 0 \end{vmatrix}_{(0)} = x_I\vec{\imath}_0 + y_I\vec{\jmath}_0$.

On en déduit la relation $\quad x_I^2 + {y_I}^2 = 4L^2$

qui est l'équation d'un cercle de centre $(0, 0)$ dans R_0 (donc le point O) et de rayon AB $(2L)$.

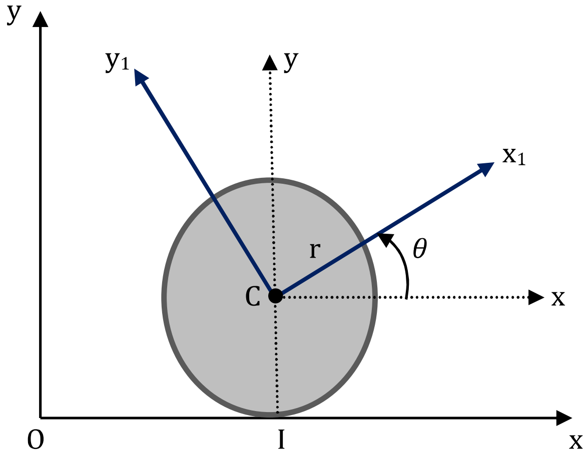


EXERCICE 12 :

On considère le roulement d'un disque (D) de centre C et de rayon r sur un axe (O, x_0). Le repère $R(C, x, y, z)$ est lié au disque.

1. Ecrire la condition de roulement sans glissement de (D) au point de contact I avec l'axe (O, x_0).

2. Ecrire le torseur cinématique au centre C du disque.



CORRIGE :

1. La condition de roulement sans glissement de (D) au point de contact I :

La vitesse de glissement $\vec{V}_g$ est nulle :

$\vec{V}_g = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{V}(\mathrm{I})/_0 = \vec{0}$

On applique la relation de distribution des vitesses dans un solide, on obtient :

$\vec{V}(\mathrm{I})/_0 = \vec{V}(\mathrm{C})/_0 + \vec{IC} \wedge \vec{\omega}_{1/0} = \vec{0}$

$(R_0) \equiv (Oxyz) = (0)$: Repère fixe

$(R_1) \equiv (Cx_1y_1z_1) = (1)$: Repère lié au disque (D)

Le disque est en mouvement hélicoïdal (translation+rotation), θ est l'angle de rotation de (D) autour de l'axe (Cz), le vecteur taux de rotation est donné par : $\vec{\omega}_{1/0} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{vmatrix}_{(0),(1)}$

$\vec{V}(C)/_0 = \left.\dfrac{d\vec{OC}}{dt}\right|_{(0)}$ avec $\vec{OC} = \vec{OI} + \vec{IC} = \begin{vmatrix} x \\ r \\ 0 \end{vmatrix}_{(0)}$

$\Rightarrow \vec{V}(C)/_0 = \begin{vmatrix} \dot{x} \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}_{(0)}$

D'où:

$$\Rightarrow \vec{V}(I)/_0 = \begin{vmatrix} \dot{x} \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}_{(0)} + \begin{vmatrix} 0 \\ r \\ 0 \end{vmatrix}_{(0)} \wedge \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{vmatrix}_{(0)} = \begin{vmatrix} \dot{x} + r\dot{\theta} \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}_{(0)} = \vec{0}$$

Finalement: $\dot{x} + r\dot{\theta} = 0$

2. Le torseur cinématique au centre C du disque

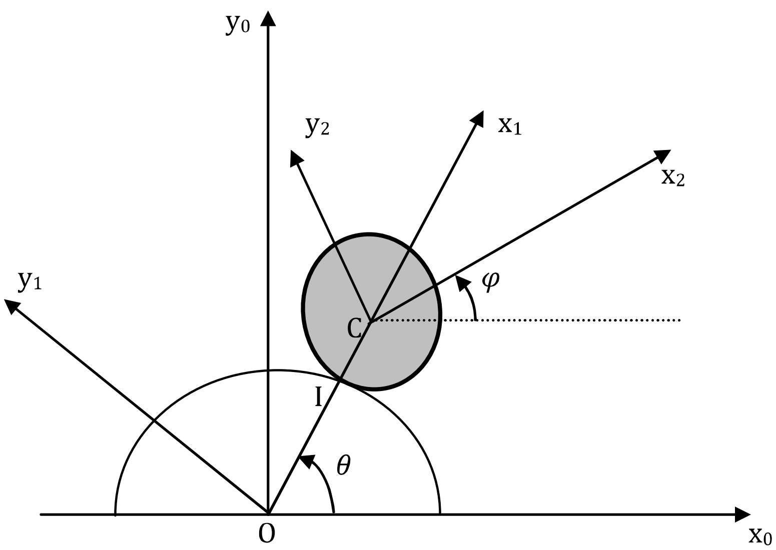
$$[V]_C = \begin{cases} \vec{\omega}_{1/0} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{vmatrix}_{(0),(1)} \\ \vec{V}(C)/_0 = \begin{vmatrix} \dot{x} \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}_{(0)} \end{cases}$$

EXERCICE 13 :

Un disque (D) de centre C et de rayon r est situé initialement au sommet d'un demi cerceau (C) fixe de centre O et de rayon R. Le disque est légèrement déplacé de telle sorte qu'il roule sans glisser sur (C). On désigne par $\dot{\varphi}$ la vitesse angulaire de rotation du disque et par θ l'angle que fait OC avec l'axe horizontal (Ox_0). Outre le repère fixe $R_0(O, x_0, y_0, z_0) \equiv (0)$, on définit le repère $R_1(O, x_1, y_1, z_1) \equiv (1)$ avec (Ox_1) selon OC et (Oz_1) confondu avec (Oz_0), ainsi que le repère $R_2(C, x_2, y_2, z_2) \equiv (2)$ lié à (D) (voir figure ci-contre).

1. Déterminer la vitesse du point C par rapport à R_0.

2. Ecrire la condition de roulement sans glissement de (D) sur (C).



CORRIGE :

1. La vitesse du point C par rapport à R_0.

$$\vec{V}(C)/_0 = \left.\frac{d\overrightarrow{OC}}{dt}\right|_{(0)}$$

Si on prendra R_1 comme repère de projection

$$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OI} + \overrightarrow{IC} = \begin{vmatrix} R+r \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}_{(1)}$$

$$\Rightarrow \vec{V}(C)/_0 = \left.\frac{d\overrightarrow{OC}}{dt}\right|_{(0)} = \left.\frac{d\overrightarrow{OC}}{dt}\right|_{(1)} + \vec{\omega}_{1/0} \wedge \overrightarrow{OC} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{vmatrix}_{(0),(1)} \wedge \begin{vmatrix} R+r \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}_{(1)} = \begin{vmatrix} 0 \\ (R+r)\dot{\theta} \\ 0 \end{vmatrix}_{(1)}$$

2. La condition de roulement sans glissement de (D) sur (C)

$$\vec{V}_g = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{V}(\mathrm{I})/_0 = \vec{0}$$

On applique la relation de distribution des vitesses dans un solide, on obtient :

$$\vec{V}(\mathrm{I})/_0 = \vec{V}(\mathrm{C})/_0 + \overrightarrow{IC} \wedge \vec{\omega}_{2/0} = \vec{0}$$

$$\overrightarrow{IC} = \begin{vmatrix} r \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}_{(1)} \Rightarrow \overrightarrow{IC} \wedge \vec{\omega}_{2/0} = \begin{vmatrix} r \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}_{(1)} \wedge \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\varphi} \end{vmatrix}_{(1)} = \begin{vmatrix} 0 \\ -r\dot{\varphi} \\ 0 \end{vmatrix}_{(1)}$$

D'où :

$$\vec{V}(\mathrm{I})/_0 = \vec{V}(\mathrm{C})/_0 + \overrightarrow{IC} \wedge \vec{\omega}_{2/0} = \vec{0} = \begin{vmatrix} 0 \\ (R+r)\dot{\theta} \\ 0 \end{vmatrix}_{(1)} + \begin{vmatrix} 0 \\ -r\dot{\varphi} \\ 0 \end{vmatrix}_{(1)} = \vec{0}$$

Finalement:

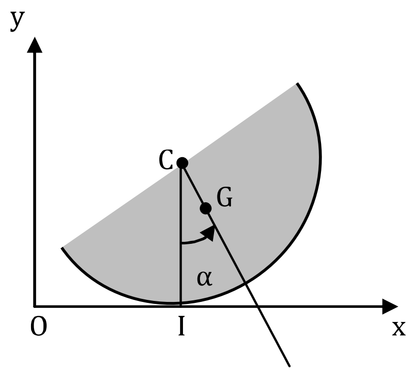
$$(R+r)\dot{\theta} - r\dot{\varphi} = 0 \Rightarrow \dot{\theta} = \frac{r\dot{\varphi}}{(R+r)}$$

EXERCICE 14 :

On considère un demi-disque (D) homogène, de centre C, de centre de masse G, de rayon R et de masse m. Tout en restant dans le plan vertical (Oxy), (D) roule sans glisser sur le plan horizontal et on désigne par I le point de contact entre le sol et (D). On repère la position de (D) par l'abscisse x de son centre C et par l'angle $\alpha = (\overrightarrow{CI}, \overrightarrow{CG})$. A l' instant initial, on lâche (D) sans vitesse initiale dans la position $\alpha = \alpha_0$. On donne : $CG = b = \frac{4R}{3\pi}$.

1. Exprimer les composantes de la vitesse et de l'accélération du centre de masse G par rapport à $R_0(Oxyz) \equiv (0)$.

2. Établir une relation entre $\dot{x}$ et $\dot{\alpha}$ exprimant le roulement sans glissement.



CORRIGE :

1. Les composantes de la vitesse du centre de masse G par rapport à R_0

$$\vec{V}(G)/_0 = \left.\frac{d\overrightarrow{OG}}{dt}\right|_{(0)}$$

$$\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CG} = \left|\begin{matrix} x + bsin\alpha \\ R - bcos\alpha \\ 0 \end{matrix}\right|_{(0)}$$

$$\Rightarrow \vec{V}(G)/_0 = \left.\frac{d\overrightarrow{OG}}{dt}\right|_{(0)} = \left|\begin{matrix} \dot{x} + b\dot{\alpha}cos\alpha \\ b\dot{\alpha}sin\alpha \\ 0 \end{matrix}\right|_{(0)}$$

Les composantes de l'accélération du centre de masse G par rapport à R_0

$$\Rightarrow \vec{\Gamma}(G)/_0 = \left.\frac{d\,\vec{V}(G)/_0}{dt}\right|_{(0)} = \left|\begin{matrix} \ddot{x} + b\ddot{\alpha}cos\alpha - b\dot{\alpha}^2 sin\alpha \\ b\ddot{\alpha}sin\alpha + b\dot{\alpha}^2 cos\alpha \\ 0 \end{matrix}\right|_{(0)}$$

2. La relation entre $\dot{x}$ et $\dot{\alpha}$ exprimant le roulement sans glissement

$$\vec{V}_g = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{V}(\mathrm{I})/_0 = \vec{0}$$

On applique la relation de distribution des vitesses dans un solide, on obtient :

$$\vec{V}(\mathrm{I})/_0 = \vec{V}(\mathrm{C})/_0 + \overrightarrow{IC} \wedge \vec{\omega}_{1/0} = \vec{0}$$

$$\vec{V}(C)/_0 = \left.\frac{d\overrightarrow{OC}}{dt}\right|_{(0)} = \begin{vmatrix} \dot{x} \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}_{(0)}$$

$$\overrightarrow{IC} = \begin{vmatrix} 0 \\ R \\ 0 \end{vmatrix}_{(0)} \Rightarrow \overrightarrow{IC} \wedge \vec{\omega}_{1/0} = \begin{vmatrix} 0 \\ R \\ 0 \end{vmatrix}_{(0)} \wedge \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\alpha} \end{vmatrix}_{(0)} = \begin{vmatrix} R\dot{\alpha} \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}_{(0)}$$

D'où :

$$\vec{V}(\mathrm{I})/_0 = \vec{V}(\mathrm{C})/_0 + \overrightarrow{IC} \wedge \vec{\omega}_{1/0} = \begin{vmatrix} \dot{x} + R\dot{\alpha} \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}_{(0)} = \vec{0}$$

Finalement : $\dot{x} + R\dot{\alpha} = 0$

Bibliographie

[1] P. Beer Ferdinand, « Mécanique à l'usage des l'ingénieurs – Statique », Edition Russell.

[2] Starjinski, "Mécanique rationnelle", Editions Mir (Moscou).

[3] S. Pommier & Y. Berthand, Mécanique générales, Dunod, Paris.

[4] P. Lambert, Mécanique Rationnelle, Syllabus d'exercices, Syllabus corrigé et complété par Benjamin Mertens sur base du travail d'Emmanuelle VIN et Vincent RAMAN.

[5] A. Kassoul, Mécanique Rationnelle, polycopie, UHBC.

[6] www.sos-devoirs-corriges.com

[7] A. Kadi, Mécanique Rationnelle, polycopie, UMBB.

[8] https://prepabooks.blogspot.com/2016/09/51-exercices-si-mpsimp.html

[9] L. Bougarfa, Mécanique du solide, Université ibn zohr agadir.

[10] http://tsi.christophe-lienard.fr/fichiers_sii_tsi/devoirs/DL-Dynamique-Radar_meteo.pdf

[11] M. Khouane, Mécanique Rationnelle, polycopie, UABB.