

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

MINISTRY OF HIGHER EDUCATION
AND SCIENTIFIC RESEARCH

HIGHER SCHOOL IN APPLIED SCIENCES
--T L E M C E N--



المدرسة العليا في العلوم التطبيقية
École Supérieure en
Sciences Appliquées

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

المدرسة العليا في العلوم التطبيقية
-تلمسان-

Mémoire de fin d'étude

Pour l'obtention du diplôme d'Ingénieur

Filière : Automatique
Spécialité : Automatique

Présenté par : Dinar Sarah
Taibi Hadjar

Thème

**Analyse d'observabilité et synthèse
d'observateur pour des système décrit
par les réseaux de Petri**

Soutenu publiquement, le 06 / 07 / 2022, devant le jury composé de :

M. B. CHERKI	Professeur	ESSA. Tlemcen.	Président
M. F. ARICHI	MCA	ESSA. Tlemcen.	Directeur de mémoire
M. S.M. ABDI	MCB	ESSA. Tlemcen.	Examineur 1
M. R. MOKHTARI	MCA	ESSA. Tlemcen.	Examineur 2

Année universitaire : 2021 / 2022

Résumé :

Le travail de ce mémoire s'inscrit dans le contexte d'analyse d'observabilité et la recherche de méthodes de synthèse d'observateurs pour les systèmes à événements discrets décrits par les réseaux de Petri . Une nouvelle caractérisation algébrique de l'observabilité basée sur l'utilisation des techniques d'observation des systèmes descripteurs a été présentée. Nous proposons une méthode pour la synthèse d'un observateur à entrée inconnue afin d'estimer à la fois le vecteur des marquages des places et le vecteur des transitions. L'idée principale est basée sur l'utilisation des techniques d'observation des systèmes descripteurs. L'utilisation de la théorie des systèmes descripteur est motivée par la capacité de formuler l'évolution du marquage d'un RdP sous forme d'un système descripteur. Un système de production a été présenté comme un exemple d'application pour montrer l'efficacité de l'approche proposée.

Mots clés : Observabilité, Observateurs, Réseaux de Petri, Systèmes à événements discrets.

Abstract :

This work investigates observability and observer design for discrete events systems described by partially observed Petri net (POP_N). Two major contributions are presented. A novel characterization of observability for POP_N systems is presented and a new and simple method to construct an Unknown Input (UI) observer for POP_N systems in order to estimate both the marking vector and the firing vector of transitions. The proposed observer is derived from the description of the evolution of markings in a POP_N by a descriptor system. The introduction of descriptor systems to describe the evolution of the marking of POP_N allows the use of the same ideas and techniques used in dynamical linear systems. A production system is presented as an example of application to demonstrate the effectiveness of the proposed approach.

Keywords : Observability, Observer design, Petri nets, Discrete events systems.

الملخص:

يجرى العمل في هذه المذكرة في سياق تحليل قابلية الملاحظة والبحث عن أساليب تركيب مراقبين في أنظمة أحداث منفصلة المنمجة بواسطة شبكات بيتري. لقد قمنا بتقديم جبري جديد للملاحظة في إطار استخدام تقنيات رصد النظم الوصفية. اقترحنا طريقة تخليق لمراقب مجهول الدخول لتقدير كلا من ناقل العلامات وانتقال السير. وتستند الفكرة الرئيسية إلى استخدام تقنيات رصد نظم الوصف. ويستند استخدام نظرية النظم الوصفية إلى القدرة على صياغة تطور وضع علامات على نظام شبكات بيتري على شكل نظام وصفي. وقد عرض نظام الإنتاج كمثال على التطبيق لإظهار فعالية النهج المقترح.

الكلمات المفتاحية: قابلية الملاحظة، المراقبين، شبكات بيتري وأنظمة أحداث منفصلة.

Remerciements

Avant tout nous remercions dieu le tout puissant de m'avoir donné le courage, la volativité, la patience et la force nécessaire, pour affronter toutes les difficultés durant la préparation de ce modeste mémoire.

Mes remerciements les plus vifs et chaleureux, vont à mon directeur de mémoire Monsieur ARICHI Fayssal pour son aide, son orientation judicieuse et sa disponibilité, aussi pour la confiance, la patience et la compréhension qu'il m'a toujours manifesté.

Nous tenons également à remercier Monsieur le Professeur CHERKI Brahim pour l'honneur qu'elle m'a fait en acceptant de participer à ce jury en tant que président.

Je remercie Mr. ABDI Sidi Mohamed. et M. MOKHTARI Mohamed Rida, qui ont aimablement accepté d'examiner ce travail et de faire partie du jury de soutenance. Mes vifs remerciements à tous mes enseignants qui ont su nous donner une formation didactique et appréciable tout au long de notre cursus. Nous tenons tout particulièrement à remercier toute ma famille pour son soutien moral et pour l'appui inconditionnel qu'elle m'a toujours apporté.

Nous voudrions aussi remercier tous mes amis, pour leur aide sympathique tant sur le plan, scientifique que humain et pour la bonne humeur dans laquelle ce travail a été accompli.

Enfin, nous remercions tous ceux qui ont pu m'aider dans la réalisation de ce travail et être présents à mes côtés tout au long de cette étude.

Dédicace :

Je tient c'est avec un grand plaisir que je dédie ce modeste travail :

A ma mère qui m'a soutenu et encouragé durant ces années d'étude. Qu'elle trouve ici le témoignage de ma profonde reconnaissance.

A mon père Mohammed, qui nous a quittés un peu trop tôt. J'espère qu'il me regarde de la haut et qui'il est aussi fière de moi qu'au première jour, tu as toujours accompagné mes pensé.

A mon frère Nacer, aucun mot ne pourrait exprimer l'attachement, l'amour et la tendresse que j'éprouve pour vous, que dieu te garde.

A mes chères sœurs et mes nièces Feriel, Loujayn, Ayaat, Rinad pour l'amour q'elles me réservent. Je leurs souhaite une vie pleine de bonheur et de séccés.

A mon chère binôme Hadjer et à toute sa famille.

Atout mes amis

Aucun hommage ne pourrait à la hauteur de l'amour dont il ne cesse de nous combler. Vous êtes des parties de nos familles sur qui je pouvons compter.

"SARAH"

Dédicace :

Je dédie ce modeste travail qui est le fruit de plusieurs Années d'étude :

A mon très cher père

qui est aujourd'hui absent à mes yeux, mais toujours présent dans mes pensées et mon esprit. J'aurais espéré qu'il soit présent aujourd'hui dans ce monde, il aurait apprécié cet humble geste comme preuve de reconnaissance de la part d'une fille qui a toujours prié pour le salut de son âme. Puisse Allah le tout puissant et Miséricordieux accorder à mon père sa Sainte Miséricorde et l'accueillir en son vaste Paradis.

A ma très chère mère

Tu as toujours été pour moi un exemple de la mère respectueuse, de la personne méticuleuse, je tiens à honorer la femme que tu es. Grâce à toi Mama, j'ai appris le sens du travail et de la responsabilité. Je voudrais te remercier pour ton amour, ta générosité et ta compréhension. Ton soutien fut une lumière dans tout mon parcours. Aucune dédicace ne saurait exprimée l'amour, l'estime et le respect que j'ai toujours eu pour toi. Ce modeste travail est le fruit de tous les sacrifices que tu as déployé pour mon éducation et ma formation. Je t'aime maman et j'implore le tout-puissant pour qu'il t'accorde une bonne santé et une vie longue et heureuse.

A mes chers frères et sœurs

Pour leur dévouement, leur compréhension et leur grande tendresse, qui m'ont encouragé tout le long de mes études, m'ont consacré beaucoup de temps et disponibilité, et qui par leur soutien, leurs conseils et leur amour, m'ont permis d'arriver jusqu'à ici, car ils ont toujours cru en moi. Merci de m'avoir toujours soutenu et merci pour tous les bons moments passés ensemble, et ce n'est pas fini.

A TOUTE MA FAMILLE TAIBI et FATMIA

Aucun langage ne saurait exprimé mon respect et ma considération pour votre soutien et encouragements. Je vous dédie ce travail en reconnaissance de l'amour que vous m'offrez quotidiennement et votre bonté exceptionnelle. Qu'Allah, le tout puissant, vous garde et vous procure santé et bonheur.

A ma chère binôme

Dinar Sarah, je ne peux trouver les mots justes et sincères pour t'exprimer mon affection et mes pensées, tu es pour moi, une vraie sœur, sur qui je peux compter.

A mes cher(e) amis(e)

Assala, Ines, Amina, Chaimaa, Naouel, Salma, Hibat, Asmaa Nari-mane, Hakima, Ihcene et Seif El Islam je vous souhaite une vie pleine de santé et de bonheur.

"HADJER"

Table des matières

Table des figures	11
Liste des tableaux	13
Introduction générale	15
1 Généralités sur les systèmes à événements discrets	19
1.1 Introduction	19
1.2 Systèmes à événements discrets	19
1.2.1 Propriétés des systèmes à événements discrets	20
1.3 Automate à états finis	21
1.3.1 Langage et automate	22
1.4 Les Réseaux de Petri	25
1.4.1 Notations et définitions de base	25
1.4.2 Marquage d'un RdP.	27
1.4.3 Franchissement d'une transition et séquence de franchissement.	28
1.4.4 Propriétés structurelles et comportementales des RdP	31
1.4.5 Analyse des propriétés d'un réseau de Petri	33
1.4.6 Extension des Réseaux de Petri	34
1.5 Conclusion	36
2 Analyse d'observabilité des systèmes à événements discrets	37
2.1 Introduction	37
2.2 Principe d'observabilité	37
2.2.1 Observabilité des systèmes linéaires	38
2.3 Observabilité des systèmes à événements discrets	39
2.3.1 Les approches basées sur les automates à état finis	39
2.3.2 Les approches basées sur les RdP	40
2.4 Présentation des SED modélisés par les réseaux de Petri partiellement observables	42
2.4.1 Réseaux de Petri partiellement observables	42
2.4.2 Représentation d'état d'un Réseau de Petri partiellement observable	44
2.5 Observabilité des SED modélisés par les RdPPO	47
2.5.1 Observabilité des systèmes descripteurs ou singulier	47
2.5.2 Causalité	48
2.5.3 Observabilité des réseaux de Petri partiellement observables	49
2.6 Conclusion	56

3 Synthèse d'observateur des systèmes à événements discrets	57
3.1 Introduction	57
3.2 Principe d'observation	57
3.3 Observateur pour les systèmes à événement discret	60
3.3.1 Approche propose par Alessandro Giua, Carla Seatzu	61
3.3.2 Synthèse d'observateurs pour les SED modélises par les RdPPO	64
3.4 Conclusion	66
4 Synthèse d'observateur à entrée inconnue pour les RdPPO	67
4.1 Introduction	67
4.2 Observateur à entrée inconnue pour les RdPPO	67
4.2.1 Estimation de l'état discret	68
4.2.2 Estimation de la séquence de franchissement	70
4.2.3 Exemple de Simulation	71
4.2.4 Exemple d'application	75
4.2.5 Modélisation fonctionnelle du système étudié par un RdP	78
4.3 Conclusion	86
Conclusion générale et Perspectives	87
Annexe	89
Bibliographie	91

Table des figures

1.1	Changement d'état par occurrence des événements dans un SED	21
1.2	Graphe de transition d'états d'un automate fini.	23
1.3	Automate à états finis déterministe.	24
1.4	Modèle RdP d'une machine à trois états.	26
1.5	Un exemple d'un RdP.	27
1.6	Franchissement d'une transition.	28
1.7	Séquence de franchissement d'un RdP.	29
1.8	Réseaux de petri places –transitions.	30
1.9	Synchronisation et précédence dans un RdP.	31
1.10	Conflit ou pas.	31
1.11	Les propriétés structurelles d'un RdP.	32
1.12	Exemple de RdP persistant.	33
3.1	Principe de l'observateur.	58
3.2	Le schéma fonctionnel de système avec l'observateur.	59
3.3	Exemple d'un RdP et de son graphe de recouvrement observateur.	63
4.1	Le modèle du RdP	72
4.2	Haut Le mode réel et estimé du p_1 en fonction de k . Milieu Le mode réel et estimé du p_2 en fonction de k . Bas Le mode réel et estimé du p_3 en fonction de k	74
4.3	Haut Le mode réel et estimé du p_4 en fonction de k . Milieu Le mode réel et estimé du p_5 en fonction de k . Bas Le mode réel et estimé du p_6 en fonction de k	75
4.4	Cellule de production	76
4.5	Modélisation des stocks d'entrées 1 et 2	77
4.6	Modélisation de robot 1 et 2	77
4.7	Modélisation des convoyeurs	78
4.8	Modélisation des stocks de sorties	78
4.9	Modélisation fonctionnelle du système étudié	79
4.10	Le mode réel et estimé des places P_1, P_3, P_6, P_8, P_9 et P_{11} respectivement en fonction de k	83
4.11	Le mode réel et estimé des places $P_{13}, P_{15}, P_{16}, P_{18}, P_{23}$ et P_{25} respectivement en fonction de k	83
4.12	Le mode réel et estimé des $P_2, P_4, P_5, P_7, P_{10}$ et P_{12} respectivement en fonction de k	84
4.13	Le mode réel et estimé des places $P_{14}, P_{17}, P_{19}, P_{20}, P_{21}$ et P_{22} respectivement en fonction de k	84

4.14	Haut Le mode réel et estimé du P_{24} en fonction de k . Bas Le mode réel et estimé du P_{26} en fonction de k	85
------	--	----

Liste des tableaux

4.1	Les notations associées à la modélisation du RdP.	80
-----	---	----

Introduction Générale

Contexte et motivations

Un système peut être décrit comme un ensemble de composants, interagissant entre eux, formant une entité complexe. L'automatique est la discipline qui traite de la modélisation, de l'analyse et de l'identification de ces systèmes. Elle propose de considérer un système connu, que l'on est capable de synthétiser sous forme d'un modèle mathématique, et de lui appliquer une configuration d'entrées de façon à ce qu'il exécute une fonction donnée.

En fonction du type de modèles mathématiques obtenu lors de la modélisation, les systèmes peuvent être classés en plusieurs catégories. La théorie classique des systèmes continus s'intéresse à des systèmes obéissant essentiellement aux lois de la physique, et descriptibles par des équations différentielles ou aux dérivées partielles. Le vocable systèmes à événements discrets (SED) recouvre des systèmes également dynamiques, mais dont la dynamique échappe totalement à ce genre de description. En réalité, au lieu de s'intéresser au déroulement continu des phénomènes, on ne se soucie que des "début" et des "fin" de ces phénomènes (les événements discrets) et de leur enchaînement dynamique, logique ou temporel. Au cours de ce travail, on s'intéressera à la catégorie des Systèmes à Événements Discrets (SED).

A partir des années 80, les notions de systèmes à événements discrets ont fait leur apparition et se sont imposées comme des modèles pertinents de beaucoup de systèmes industriels. Les modèles SED sont utilisés dans le domaine de la production manufacturière, la robotique, les trafics des véhicules, la logistique, les réseaux de communications, . . . etc. L'étude des SED peut être menée avec différents outils tels que la simulation sur ordinateur, réseaux de files d'attente, les langages de programmation parallèle/temps réel, des modèles dynamiques algébriques, comme l'algèbre "Max Plus" et finalement les réseaux de Petri, les automates et les langages qui reposent sur l'ordre exact d'occurrence des événements.

Parmi ces différents formalismes, les RdP qui offrent un grand pouvoir de modélisation des phénomènes complexes liés au fonctionnement du système, et ceci de manière compacte par rapport aux automates à états finis. Ils sont modulaires et donc parfaitement adaptés aux systèmes actuels composés de plusieurs modules qui interagissent entre eux. Ils sont aussi évolutifs dans le sens où ils peuvent facilement être mis à jour pour s'adapter aux changements que peut subir le système durant son cycle de vie (ajout de nouveaux composants ou modules, reconfiguration. . .).

Objectifs de la mémoire :

La théorie de l'estimation d'état occupe une place importante en automatique. La connaissance des variables d'état du système étudié est nécessaire, afin de concevoir des méthodes de surveillance, de détection et de localisation de fautes. Sur le plan pratique, il est difficile de mesurer toutes les variables d'état du système, pour des raisons physiques (capteur nécessaire indisponible, capteur irréalisable...) ou économiques (installer un minimum de capteur afin de réduire les coûts d'instrumentations). Le problème de l'estimation d'état pour les SED n'est pas limité à l'estimation d'état, mais aussi au problème de la reconstitution de la séquence de franchissement de transitions qui conduisent à un état donné d'où la nécessité de faire recours à un système dynamique auxiliaire, appelé observateur, qui a pour rôle d'estimer l'état du système. En effet, plusieurs travaux ont été présentés dans le cadre d'estimation d'état notamment dans le cas où seules des informations partielles sur les événements sont disponibles. Ce mémoire a pour but d'analyse d'observabilité et la recherche de méthodes de synthèse d'observateurs pour quelques classes de SED. On s'intéresse particulièrement aux classes de SED modélisées par les RdP.

Contributions de la mémoire :

Ce mémoire contribue à :

La présentation d'une nouvelle caractérisation algébrique d'observabilité et la synthèse d'un observateur à entrée inconnue pour une classe de SED modélisée par des réseaux de petri partiellement observables (RdPPO). L'idée principale est basée sur l'utilisation des techniques d'observation des systèmes descripteurs. L'utilisation de la théorie des systèmes descripteurs est motivée par la capacité de formuler l'évolution du marquage d'un RdP sous forme d'un système descripteur. Le traitement que nous allons présenter est purement algébrique et donc facile à comprendre. Parallèlement à l'élaboration de résultats théoriques, une attention est également accordée à la facilité des résultats pour le calcul numérique.

Organisation des chapitres :

Ce mémoire est organisé en 4 chapitres qui traitent l'analyse d'observabilité et la recherche de méthodes de synthèse d'observateurs pour des systèmes décrits par les RdP.

Ce mémoire est organisé en quatre chapitres, comme suit :

Dans le premier chapitre, nous introduirons les notions fondamentales relatives aux SED. D'abord, nous présenterons les deux formalismes les plus utilisés pour l'analyse des SED : les automates à états finis et les RdP. Nous mettrons l'accent sur les RdP, les différentes notions et notations nécessaires dans la suite du document seront données.

Le deuxième chapitre est divisé en deux parties, la première partie de ce chapitre sera consacrée à l'analyse d'observabilité. En effet, la propriété d'observabilité consiste à garantir que les mesures faites sur un système sont suffisamment informatives pour pouvoir en déduire toutes les variables non mesurées du système. Nous nous présentons par la suite un état de l'art plus complet mais aussi moins détaillé sur l'observabilité des SED modélisés par les automates finis et les RdPs. Dans la deuxième partie de ce chapitre, nous consacrons à l'analyse d'observabilité des SED modélisés par des RdPPO. Une nouvelle caractérisation algébrique de l'observabilité basée sur l'utilisation des techniques d'observation des systèmes descripteurs sera présentée.

Dans le troisième chapitre, nous présentons tout d'abord un état de l'art concernant l'estimation d'état des SED, et plus particulièrement pour les SED modélisés par des RdPPO. Ainsi, deux méthodes de synthèse d'observateurs sera présentée, une méthode développée dans [33] qui traite du problème de l'estimation du marquage d'un réseau, et autre développée dans [40] pour la synthèse d'un observateur de Luenberger d'ordre réduit pour les RdPPO.

Dans le quatrième chapitre, nous proposons une méthode de synthèse d'un observateur à entrée inconnue afin d'estimer à la fois le vecteur des marquages des places et le vecteur des transitions. Nous allons étudier par la suite deux systèmes déferents en vue de faire montrer l'efficacité de l'observateur proposé. Pour cela une modélisation fonctionnelle des systèmes étudiés sera réalisée et une conception d'observateur à entrée inconnu sera synthétisé. Finalement des simulations sous Matlab permettent de vérifier le bien-fondé de la méthode proposée.

Enfin une conclusion générale et des perspectives seront données.

Chapitre 1

Généralités sur les systèmes à événements discrets

1.1 Introduction

Dans ce premier chapitre nous ferons un survol des aspects logiques des systèmes à événements discrets (SED). Nous évoquerons tout d'abord quelques notions relatives aux langages formels. Puis nous présenterons brièvement les deux outils de base pour l'étude et la modélisation des SED à savoir les automates à état fini et les réseaux de Petri (RdP). Nous mettrons l'accent sur les RdP dans la mesure où c'est le modèle de base utilisé dans ce mémoire pour lequel on donnera les principales propriétés.

1.2 Systèmes à événements discrets

Un système à événements discrets est un système dans lequel l'espace des états est discret. Un tel système est à opposer à un système continu pour lequel l'état est représenté par des grandeurs qui prennent des valeurs dans un domaine continu.

Les SED sont des systèmes qui sont fondamentalement asynchrones, c'est-à-dire que ceux-ci ne sont pas cadencés par une horloge. La dynamique de ces systèmes est assurée par l'occurrence des événements, ils se produisent de manière instantanée. En l'absence d'événement, l'état du système demeure inchangé et l'évolution du temps entre deux occurrences ne provoque aucun effet détectable sur le système. L'évolution d'un SED peut être décrite par un ensemble de couples : (e,t) où "e" représente un événement et "t" représente l'instant d'occurrence de cet événement. Un ensemble ordonné de couples constitue ce que l'on appelle une séquence. Une telle description se place à un niveau temporel dans le sens où l'instant d'occurrence des événements est une information considérée comme pertinente. En revanche, si l'on considère un modèle logique pour décrire le SED, seul l'ordre d'occurrence des événements importe[66].

En général, un SED peut avoir un comportement non déterministe. Nous entendons ici le "non-déterminisme" par le fait que nous ne pouvons pas prévoir, a priori, quelle sera l'évolution du système. En d'autres termes, pour un état donné du système, plusieurs événements différents sont supposés susceptibles de se pro-

duire. Donc une séquence unique ne suffit alors plus pour décrire le comportement du système. Ainsi, l'évolution d'un SED sera en général décrite par un ensemble de séquences d'événements. Cet ensemble de séquences constitue un langage sur l'ensemble des événements possibles dans le système. Dans la suite, nous nous intéresserons uniquement à des modèles logiques[66].

- **Spécification** : Avant de concevoir un système, il faut déterminer ce qu'on veut lui faire, que doit être sa réponse dans certain nombre de situations-type.
- **Conception, architecture** : Une fois spécifié le comportement fonctionnel du système, il faut le concevoir, notamment du point de vue de son architecture : composants, agencement et articulations, mécanismes de synchronisation et d'exécution.
- **Validation logique** : Il faut ensuite vérifier que le système ainsi conçu répond bien aux spécifications désirées, et qu'il n'engendre pas d'autres comportements indésirables.
- **Evaluation de performance** : A cette étape, la notion de temps intervient. On cherche alors à répondre à des questions du type : combien d'événements d'un type donné se produisent en une heure ? à quelle date de produira le nième événement ?
- **Ordonnancement** : L'ordonnancement a pour but d'établir des politiques de priorité, de routage. destinées à résoudre les problèmes posés par les phénomènes de concurrence[39].

1.2.1 Propriétés des systèmes à événements discrets

Les systèmes dynamiques à événements discrets (SDED) ou plus largement, les systèmes à événements discrets, satisfont aux deux propriétés suivantes :

- L'espace d'état est un ensemble discret.
- Le mécanisme de transition d'état est piloté par les événements.

Un SED est un système à états discrets, piloté par les événements, c'est-à-dire, l'évolution de son état dépend entièrement de l'occurrence d'événements discrets asynchrones dans le temps. Un événement représente indifféremment une action (une personne appuyant sur un bouton d'urgence), un début ou une fin de tâche (fin de cycle de nettoyage d'une machine à laver). Un événement peut être provoqué par un être humain, par une machine, par la nature ou par toute combinaison possible d'actions[16].

La figure suivante montre un exemple d'une trajectoire d'un système à événement discret :

La trajectoire est constante par morceaux, et le changement d'un état à un autre se fait par l'occurrence d'un événement. Dans cette trajectoire, on peut remarquer que :

- Des événements différents (e_2 et e_6) peuvent conduire à un même état.
- Des événements (e_3) peuvent se produire et être inactifs pour le système.

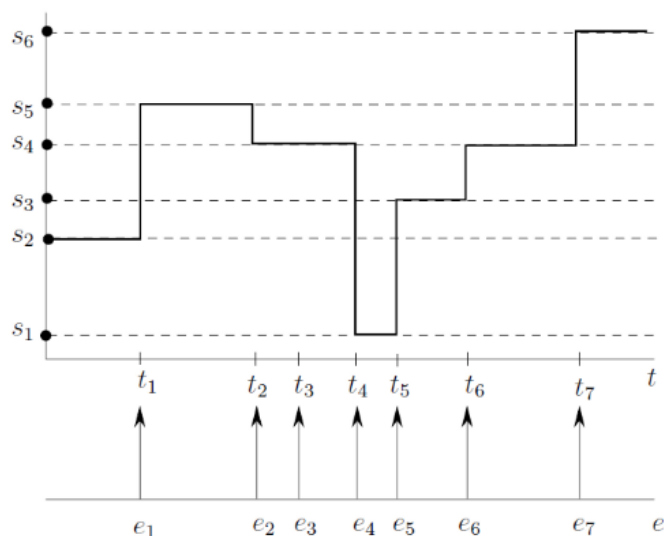


FIGURE 1.1 – Changement d'état par occurrence des événements dans un SED

De nombreux systèmes, en particulier les systèmes technologiques, sont en fait des systèmes à événement discrets. Même si ce n'est pas le cas, pour de nombreuses applications d'intérêt, une vue à événement discrets d'un système complexe peut être nécessaire. Voici quelques exemples simples de systèmes à événement discrets :

- L'état d'une machine peut être sélectionné dans un ensemble tel que $\{\text{ON}, \text{OFF}\}$ ou $\{\text{BUSY}, \text{IDLE}, \text{DOWN}\}$.
- Un ordinateur exécutant un programme peut être considéré comme étant dans l'un des trois états suivants : $\{\text{ATTENTE D'ENTRÉE}, \text{EXÉCUTION}, \text{ARRÊT}\}$. En outre, l'état RUNNING peut être décomposé en plusieurs états individuels, par exemple, de la ligne de code en cours d'exécution à un moment donné.
- Tout type d'inventaire constitué d'entités discrètes (par exemple, des produits, des unités monétaires, personnes) possède un espace d'état naturel dans les entiers non négatifs $\{0, 1, 2, \dots\}$.
- La plupart des jeux peuvent être modélisés comme ayant un espace d'état discret. Aux échecs, par exemple, chaque configuration possible du plateau définit un état, l'espace d'état résultant est énorme, mais il est discret[16].

L'étude des SED peut être menée avec différents outils tels que : les langages de programmation parallèle/temps réel, les modèles dynamiques algébriques, comme l'algèbre Max Plus, les automates à états finis et les RdP. Ces deux derniers seront présents en détail dans la suite de ce chapitre.

1.3 Automate à états finis

La technique la plus ancienne et la plus classique pour représenter les comportements dynamiques d'un SED est d'utiliser un automate à états finis. Un automate fini (on dit parfois machine à états finis), en anglais finite state automaton ou finite state machine (FSA, FSM).

Un automate à états finis est constitué d'états et de transitions. Son comportement est dirigé par un mot fourni en entrée : l'automate passe d'état en état, suivant les transitions, à la lecture de chaque lettre de l'entrée. Un automate fini possède un nombre fini d'états distincts : il ne dispose donc que d'une mémoire bornée. Une automate à état fini peut être représentée graphiquement par un graphe étiqueté. Les états sont des cercles et les transitions sont des flèches orientées de leur état de départ vers leur état de destination [24]. Avant de présenter les automates à états finis, nous rappelons quelques notions de base de la théorie des langages.

1.3.1 Langage et automate

1.3.1.1 Événement , chaîne et langage

Pour formaliser les systèmes à événements discrets sous forme de langage, on représente les événements par des symboles. L'ensemble de tous ces symboles $(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$ est fini et constitue un alphabet noté Σ .

Toutes les séquences finies d'événements, ou trace, peuvent alors être représentées par une séquence de symboles $s = \sigma_1.\sigma_2\dots$ appelée chaîne (ou mot) sur l'alphabet Σ .

On appelle alphabet (ou vocabulaire), un ensemble fini de symboles noté Σ . Dans le cas d'un SED, l'alphabet pourra représenter l'ensemble des événements possibles dans le système. Cet ensemble est composé de tous les événements qui font évoluer le SED.

Une chaîne (ou mot ou séquence) définie sur un alphabet Σ est une suite finie d'éléments de Σ notée s [4], fabriquée par concaténation, s_1, s_2, \dots, s_n de symboles inclus dans Σ . Pour la simplification, l'écriture $s_1 s_2$: est considéré comme équivalente à $s_1.s_2$. Le mot vide est un mot particulier et est communément noté ε .

L'ensemble de tous les mots qu'il est possible de créer avec les symboles de l'alphabet Σ est appelé Σ^* (ε est inclus dans Σ^*).

Un langage noté L , est un ensemble de mots constitués avec les symboles de l'alphabet Σ . Par conséquent, un langage L est inclus ou égal à l'ensemble Σ^* constitué par tous les mots réalisables sur l'alphabet Σ [8].

La relation entre un système et sa traduction sous forme de langage peut être comme Suite :

- Événement : symbole $\sigma \in \Sigma$
- Trace : séquence s
- Comportement du système : langage L

De façon générale, un automate est une machine qui a des entrées et des sorties discrètes et qui réagit à une modification de ses entrées en changeant ses sorties. Formellement un automate fini A peut être défini de la façon suivante :

Définition 1. *Un automate fini A est un quintuplet $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, Q_m)$ où :*
 Q est l'ensemble fini des états.

Σ est un ensemble fini de symboles d'entrée (ensemble des événements), appelé alphabet d'entrée.

δ est la fonction de transition d'états de $Q \times \Sigma \rightarrow Q$ qui associe un état d'arrivée q_k , à un état de départ q_i et à un symbole d'entrée $\sigma_j : \delta(q_i, \sigma_j) = q_k$.

$q_0 \in Q$ est l'état initial.

$Q_m \subseteq Q$ est l'ensemble des états marqués (états finaux).

1.3.1.2 Représentation graphique

Un automate à états finis peut être décrit par son graphe de transition d'états. Dans ce graphe :

- Les états sont symbolisés par des cercles : l'état initial est figuré par un cercle avec une flèche entrante et les états finaux sont indiqués par des doubles cercles.
- La fonction de transition d'états est représentée par des arcs orientés associés aux événements de Σ .

La figure (1.2) représente le graphe de transition d'états d'un automate fini.

Nous pouvons identifier $Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6, q_7, q_8\}$, $\Sigma = \{a, b, c\}$ et $Q_m =$

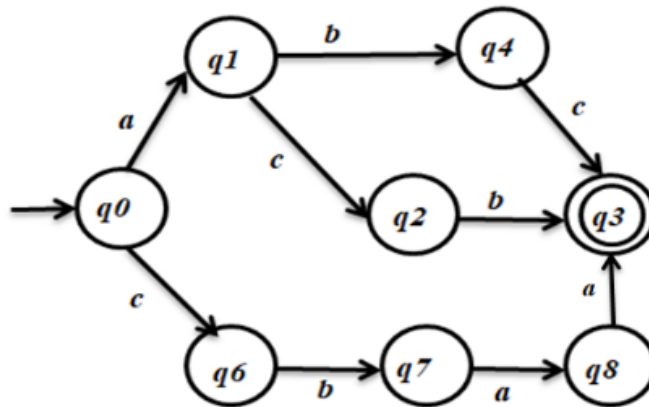


FIGURE 1.2 – Graphe de transition d'états d'un automate fini.

$\{q_3\}$. La transition d'état $\delta(q_0, a) = q_1$ est figurée par un arc orienté de q_0 à q_1 et étiqueté par le symbole a .

La fonction de transition d'état est définie par :

$$\begin{aligned}
 \delta(q_0, a) &= q_1 \\
 \delta(q_0, c) &= q_6 \\
 \delta(q_1, b) &= q_4 \\
 \delta(q_1, c) &= q_2 \\
 \delta(q_2, b) &= q_3 \\
 \delta(q_4, c) &= q_3 \\
 \delta(q_6, b) &= q_7 \\
 \delta(q_7, a) &= q_8 \\
 \delta(q_8, a) &= q_3
 \end{aligned}$$

Remarque 1. Dans le cas de ce modèle, la fonction de transition d'état est partielle, dès lors qu'elle n'est pas définie pour tout élément de produit cartésien $Q \times \Sigma$. Par exemple $\delta(q_0, b) = \emptyset$.

1.3.1.3 Automate déterministe

Un automate est dit déterministe, si l'état initial est unique, et si la relation de transition, appliquée à un couple (q_0, σ) , définit toujours un état unique $\delta : Q \times \Sigma \rightarrow Q$.

On remarque que, l'automate de la figure (1.2) satisfait cette condition donc, il est déterministe.

1.3.1.4 Propriétés

Accessibilité :

Un état $q \in Q$ est dit accessible s'il existe une chaîne $s \in \Sigma^*$ telle que $q = \delta(q_0, s)$, c'est à dire que l'automate peut y accéder depuis l'état initial. Par extension, l'automate A est accessible si tout états $q \in Q$ est accessible.

Co-Accessibilité :

Un état $q \in Q$ est dit co-accessible s'il existe une chaîne $s \in \Sigma^*$ telle que $\delta(q_0, s) \in Q_m$, c'est-à-dire qu'à partir de cet état l'automate peut atteindre un état marqué. Par extension, l'automate A est co-accessible si tout état $q \in Q$ est co-accessible.

Automate bloquant / non bloquant :

Un état $q \in Q$ est dit bloquant s'il est accessible mais pas co-accessible, Un automate A est dit non bloquant si tous ses états sont non bloquants.

Exemple 1. Soit l'automate suivant :

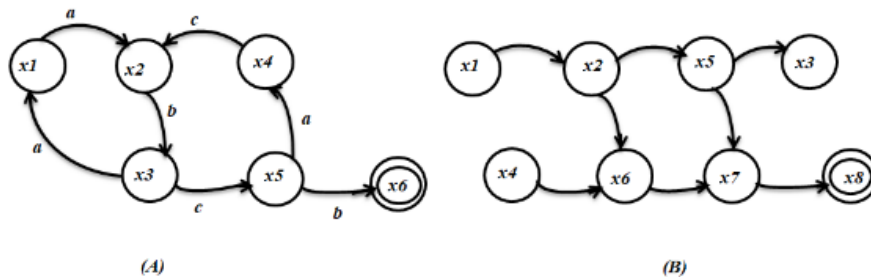


FIGURE 1.3 – Automate à états finis déterministe.

Dans l'automate A tous les états sont accessibles et co-accessibles. C'est pourquoi cet automate est accessible et co-accessible.

Dans l'automate B , les états $(x_1, x_2, x_3, x_5, x_6, x_8)$ sont des états accessibles mais x_4 n'est pas accessible. Aussi, tous les états de l'automate B sont co-accessibles sauf x_3 qui n'est pas co-accessible. Donc, l'automate B est ni accessible, ni co-accessible.

1.4 Les Réseaux de Petri

Dès leur création en 1962 par Carl Adam Petri, les réseaux de Petri (RdP) constituent un outil très approprié pour étudier les systèmes à événements discrets en raison de la puissance de modélisation et de leurs propriétés mathématiques. Les modèles obtenus, leur représentation graphique de la structure du système étudié, permettent une analyse des propriétés et par conséquent une validation de leurs spécifications [51]. Par leur relation avec les automates à états finis, qui représentent un puissant formalisme de modélisation des SED, leurs avantages sont néanmoins atténués par leur grande sensibilité au problème de l'explosion combinatoire du nombre d'états (même dans le cas de systèmes simples), la modélisation par RdP offre la possibilité de dépasser cet inconvénient, en fournissant des structures de modélisation beaucoup plus riches. En outre, les RdP sont aussi plus adaptés à la modélisation des activités distribuées au sein des systèmes complexes, permettant une représentation beaucoup plus concise et claire des différents sous-systèmes impliqués et de leurs interdépendances [4].

Dans la suite, nous présentons d'abord les concepts de base des RdP et les notations correspondantes, utilisées dans la suite de ce travail.

1.4.1 Notations et définitions de base

Un réseau de Petri est un graphe orienté comportant un ensemble fini de places (symbolisées par des cercles) et un ensemble fini de transitions (symbolisées par des traits), avec des arcs orientés qui assurent la liaison d'une place vers une transition ou d'une transition vers une place. Les transitions, les places et les arcs reliant celles-ci définissent les composants de base de la structure graphique d'un RdP. L'ensemble des places permet de représenter l'état du système et l'ensemble des transitions sont associées à des événements dont l'occurrence provoque le changement d'état du SED [35].

Autrement dit, un RdP est un graphe biparti, c'est-à-dire qu'il y a alternance des places et des transitions sur un chemin formé d'arcs consécutifs. Et tout arc doit obligatoirement avoir un nœud à chacune de ses extrémités.

Un exemple de RdP d'une machine à trois états est illustré à la figure (1.4). Un exemple de réseau de Petri est illustré dans la figure (1.4) où l'ensemble des places est $P = \{p_1, p_2, p_3\}$, avec p_1 représentant l'état d'arrêt, p_2 l'état de marche, et p_3 l'état de panne. Les transitions, $T = \{t_1, t_2, t_3\}$, représentent respectivement, début de cycle d'usinage, fin de cycle d'usinage, panne et la réparation de la machine.

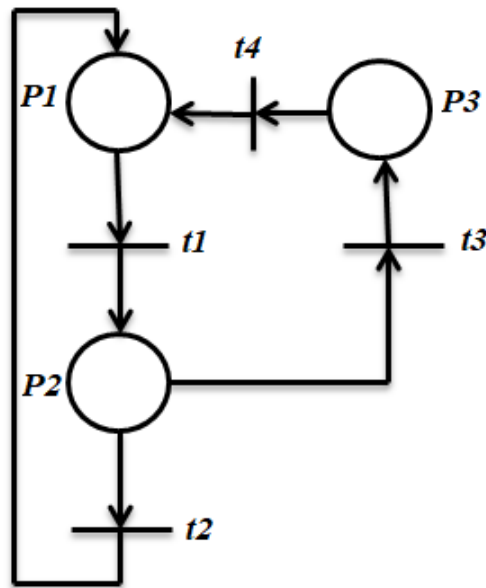


FIGURE 1.4 – Modèle RdP d'une machine à trois états.

Définition 2. Un RdP ordinaire non marqué est défini par un quadruplet $R = \{P, T, \text{Pré}, \text{Post}\}$ tel que :

- $P = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ est un ensemble fini et non vide de places.
- $T = \{t_1, t_2, \dots, t_m\}$ un ensemble fini non vide de transitions . $P \cap T = \emptyset$ c'est-à-dire que les ensembles P et T sont disjoints (avec $P \cup T \neq \emptyset$).
- $\text{Pré} : P \times T \rightarrow \{0, 1\}$ est la fonction de pré-incidence qui précise le poids d'arcs dirigés des places vers les transitions (appelés arcs "Pré") et est représentée par une matrice $m \times n$.
- $\text{Post} : P \times T \rightarrow \{0, 1\}$ est la fonction de post-incidence qui spécifie le poids de arcs dirigés des transitions vers les places (appelés arcs "Post") et est représentée par une matrice $m \times n$.
- $\text{Pré}(P_i, T_j)$ est le poids de l'arc $P_i \rightarrow T_j$, ce poids est égal à 1 si l'arc existe et 0 sinon.
- $\text{Post}(T_j, P_i)$ est le poids de l'arc $T_j \rightarrow P_i$.

Les applications "Pré" et "Post" sont relatives à la transition T_j du couple (P_i, T_j) .

Remarque 2. Lorsque le poids des éléments dans les matrices Pré , Post est soit nul, soit égal à 1, le réseau est dit *sauf*.

Définition 3. Un RdP généralisé \mathcal{R} est défini comme un RdP ordinaire non marqué R , sauf que : $\text{Pré} : P \times T \rightarrow \mathbb{N}$ et $\text{Post} : P \times T \rightarrow \mathbb{N}$ (\mathbb{N} est l'ensemble des entiers naturels).

Les applications Pré (respectivement Post), font correspondre à tout couple $(p_i, t_j) \in P \times T$ (respectivement $(t_j, p_i) \in P \times T$) un entier qui est le poids de l'arc.

Lors de la représentation graphique, en règle générale, si un arc n'a pas de poids associé (appelé aussi *valuation*), c'est que ce poids vaut 1, sinon l'arc est biffé et une

valuation lui est attribuée.

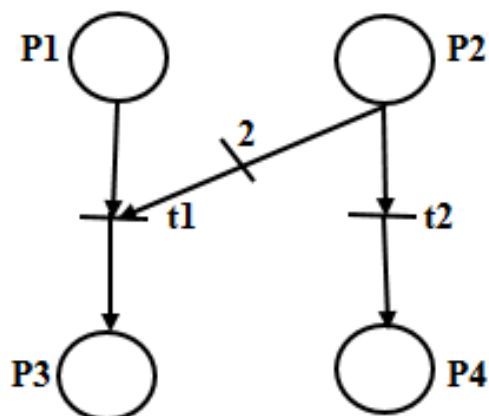


FIGURE 1.5 – Un exemple d'un RdP.

Exemple 2. Soit le RdP de la figure (1.5).

On a $Pré(p_1, t_1) = 1$, $Pré(p_2, t_1) = 2$, $Pré(p_2, t_2) = 1$. $Post(t_1, p_3) = 1$, $Post(t_2, p_4) = 1$.

1.4.2 Marquage d'un RdP.

Chaque place pourra contenir à un instant donné une plusieurs ou pas de marques (jetons). La distribution des jetons dans les places détermine le marquage du réseau. Ce marquage M associe un nombre entier $M(p_i)$ (positif ou nul) à chaque place p_i du réseau. On dira qu'un marquage M est binaire si toutes les places du réseau contiennent au plus un jeton.

Définition 4. (Réseau de Petri marqué) :

Un RdP marqué est défini par $\langle \mathcal{R}, M \rangle$ avec \mathcal{R} un RdP généralisé, M une application de P dans \mathbb{N} où pour toute place $p_i \in P$, $M(p_i)$ est le nombre de marques contenues par la place p_i . Le marquage initial est noté M_0 .

Les notations suivantes sont adoptées :

*t_j : l'ensemble des places en amont de la transition t_j (appelées aussi places en entrée de t_j).

t_j^* : l'ensemble des places en aval de la transition t_j (appelées aussi places en sortie de t_j).

*p_j : l'ensemble des transitions en amont de la place p_i (appelées aussi transitions en entrée de p_i).

p_j^* : l'ensemble des transitions en aval de la place p_i (appelées aussi transitions en sortie de p_i).

1.4.3 Franchissement d'une transition et séquence de franchissement.

L'évolution du marquage simule la dynamique de système. Ce changement d'état se fait par franchissement d'une transition. Le franchissement d'une transition peut s'effectuer seulement si les places en amont de cette transition contiennent au moins un nombre de jeton égale au poids de l'arc reliant la place à la transition. Une transition t_j est validée si et seulement si :

$$M(p_i) \geq \text{Pré}(p_i, t_j)$$

avec $p_i \in {}^*t_j$ et *t_j représente l'ensemble de places en amont de t_j . Le franchissement d'une transition validée modifie le marquage des places en amont et en aval de cette transition. Le franchissement d'une transition a pour conséquences le retrait d'un nombre de marques égale aux poids des arcs pour les places en amont de cette transition et l'ajout d'un nombre de marques égale aux poids des arcs pour les places en aval. Si le RdP considéré est ordinaire alors, le nombre de marques à ajouter et à retirer est égal à 1. La figure (1.6) illustre le franchissement d'une transition.

Une séquence de franchissement σ est représentée par une suite de transitions va-

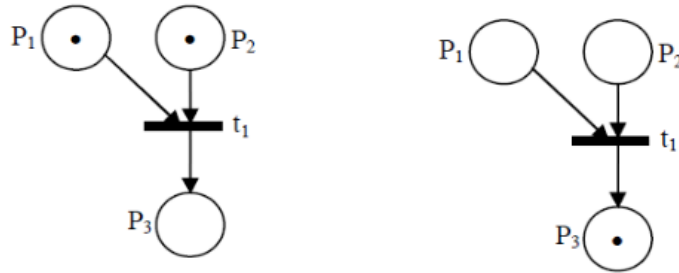


FIGURE 1.6 – Franchissement d'une transition.

lidées et franchies séquentiellement à partir d'un marquage donné. Si nous considérons le RdP de la figure (1.7) et son marquage initial $M_0 = [1 \ 0 \ 0 \ 0]^T$, nous dirons que nous sommes passés de M_0 à $M_3 = [0 \ 0 \ 0 \ 1]^T$ en effectuant le tirage de la séquence $\sigma = \langle t_1 t_2 t_3 \rangle$ et nous écrivons $M_0 \xrightarrow{\sigma} M_3$.

Le nouveau marquage M' obtenu par le franchissement de la transition t_j est donné :

$$M'(p_i) = M(p_i) - \text{Pré}(p_i, t_j) + \text{Post}(t_j, p_i) \quad (1.1)$$

Avec l'application d'incidence avant Pré peut être représentée par une matrice $n \times m$ ($n = |P|$ et $m = |T|$) notée $W^- \in \mathbb{N}^{n \times m}$ comme suit :

$$W^-(p_i, t_j) = \begin{matrix} & t_1 & \cdots & t_m \\ \begin{matrix} p_1 \\ \vdots \\ p_n \end{matrix} & \begin{bmatrix} \text{Pré}(p_1, t_1) & \cdots & \text{Pré}(p_1, t_m) \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \text{Pré}(p_n, t_1) & \cdots & \text{Pré}(p_n, t_m) \end{bmatrix} \end{matrix}$$

L'application d'incidence arrière peut être représentée par une matrice notée $W^+ \in \mathbb{N}^{n \times m}$ comme suit :

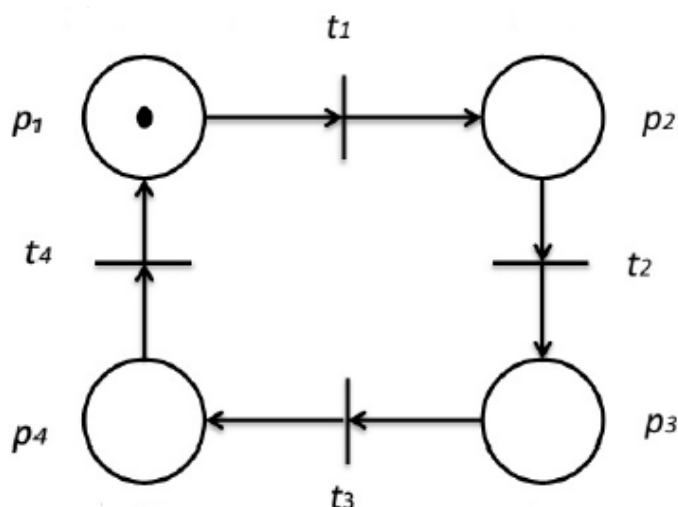


FIGURE 1.7 – Séquence de franchissement d'un RdP.

$$W^+(p_i, t_j) = \begin{matrix} & t_1 & \cdots & t_m \\ \begin{matrix} p_1 \\ \vdots \\ p_n \end{matrix} & \begin{bmatrix} Post(p_1, t_1) & \cdots & Post(p_1, t_m) \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ Post(p_n, t_1) & \cdots & Post(p_n, t_m) \end{bmatrix} \end{matrix}$$

On peut alors introduire la matrice d'incidence $W \in \mathbb{N}^{n \times m}$ telle que :

$$W(p_i, t_j) = Post(t_j, p_i) - Pré(p_i, t_j) \quad \forall p_i \in P \quad \text{et} \quad \forall t_j \in T$$

$$W = W^+ - W^-$$

On en déduit alors que l'équation fondamentale qui permet de représenter l'évolution du marquage d'un RdP M s'écrit comme suit

$$M_k = M_i + W\sigma$$

Nous appelons une séquence de franchissement une suite de transitions qui sont franchissables successivement. A chaque séquence de franchissement, on associe un vecteur caractéristique noté σ . C'est un vecteur de dimension m (le nombre de transitions) où, la composante numéro j correspond au nombre de franchissements de la transition t_j dans la séquence S .

Exemple 3. Soit RdP de la figure (1.8). Le vecteur du marquage initial est donné

$$\text{par } M_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

A partir du marquage initial de ce RdP, on peut avoir les séquences de transitions suivantes :

$$S_1 = \langle t_1 t_3 t_5 \rangle \quad \text{ou} \quad S_2 = \langle t_2 t_4 t_5 \rangle.$$

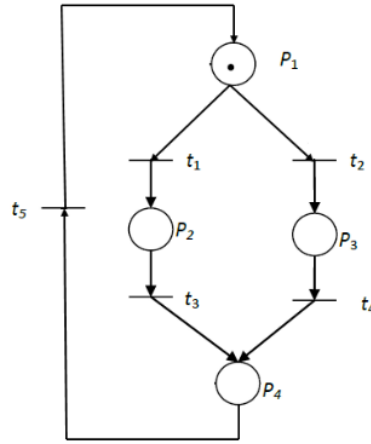


FIGURE 1.8 – Réseaux de petri places –transitions.

On associe un vecteur caractéristique (le vecteur de franchissement) à chacune

de ces séquences. Le vecteur caractéristique de S_1 est $\sigma_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$,

et celui de σ_2 est $\sigma_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

La matrice d'incidence avant de ce RdP est : $W^- = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$,

celle d'incidence arrière est : $W^+ = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

et la matrice d'incidence est : $W = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$.

Le franchissement de la séquence σ_1 depuis le marquage initial permet d'atteindre le marquage

$$M_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

1.4.4 Propriétés structurelles et comportementales des RdP

Dans cette section, Nous présentons quelques propriétés des RdP :

Les propriétés structurelles

Les propriétés dépendent uniquement de la structure du réseau. Il s'agit ici de faire ressortir les propriétés statiques du système étudié. Les différentes propriétés sont indépendantes du marquage. Ainsi, il est possible de faire apparaître, entre autres, les caractéristiques de synchronisation (a) ou de précedence (b) (1.9).

Parmi les propriétés structurelles nous pouvons citer :



FIGURE 1.9 – Synchronisation et précedence dans un RdP.

- **Les conflits** dans un RdP (figure 1.10), lorsqu'une place se trouve en amont de plusieurs transitions. On note le conflit de la place $P_i : K = (p_i, \{t_1, t_2, \dots\})$; Où K est l'ensemble des marquages accessibles $K =^* M_0$ et t_1, t_2, \dots sont les transitions en concurrence.

On parle de conflit structurel car cela ne dépend pas du marquage. Dans certains cas, le franchissement de l'une des transitions peut empêcher le franchissement de l'autre. Le conflit devient conflit effectif quand il y a effectivement conflit, cela dépend du marquage.

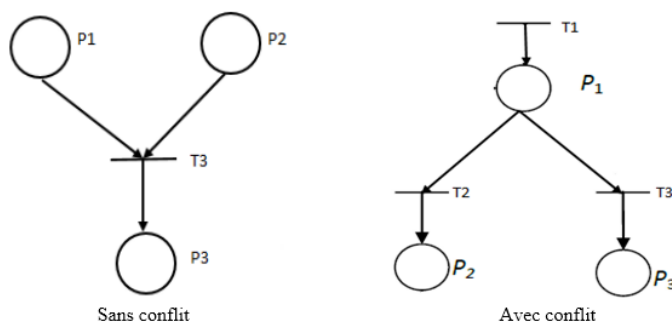


FIGURE 1.10 – Conflit ou pas.

- **Le choix libre** dans un RdP (figure 1.11(a)) : lorsque pour tout conflit $K = (P_i, \{t_1, t_2, \dots\})$, aucune des transitions ne possède d'autres places d'entrée que P_i .

- **RdP simple**(figure 1.11 (b)) : lorsque chaque transition n'est concernée que par un conflit au plus.
- **RdP pur** (figure 1.11 (c)) : lorsqu'il n'existe pas de place amont d'une transition qui soit aussi une place aval.
- Un RdP est un **graphe d'état** (figure 1.11(d)) : lorsque toute transition de cet RdP a une place d'entrée et place de sortie.
- Un RdP est un **graphe d'événement** (figure 1.11(e)) : lorsque toute place de cet RdP a exactement une transition d'entrée et une transition de sortie.

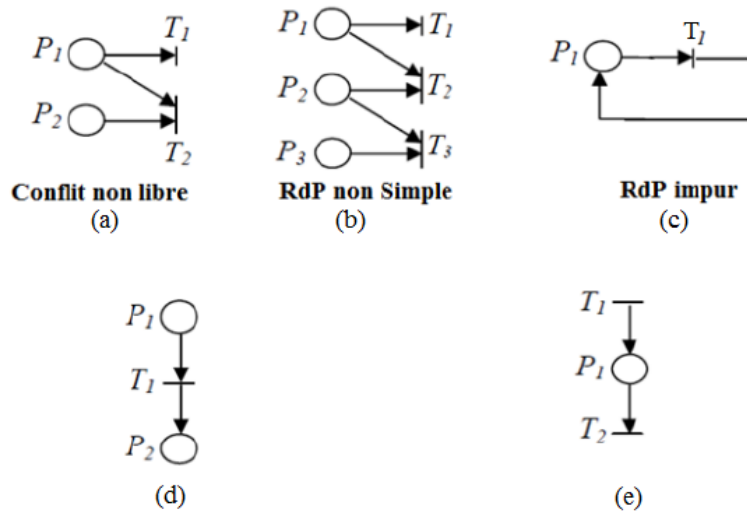


FIGURE 1.11 – Les propriétés structurales d'un RdP.

Les propriétés comportementales

Ces propriétés dépendent à la fois du marquage initial M_0 et de la structure du réseau. Parmi les propriétés comportementales nous pouvons citer :

- **L'accessibilité** : un marquage M_i est dit accessible à partir du marquage M_0 , s'il existe (au moins) une séquence exécutable S qui mène de M_0 à M_i , c'est-à-dire $M_0[S]M_k$, l'ensemble de marquages accessibles à partir de M_0 est noté par $*M_0$.
- **Le blocage** : lorsqu'un marquage ne valide aucune transition. Le RdP ne peut plus évoluer. On parle alors d'état puit ou de blocage mortel.
- **La persistance** : (Figure 1.12) un RdP est appelé persistant si, pour n'importe quelle paire de transitions validées, le franchissement de l'une ne rend pas l'autre infranchissable.

- Le RdP **borné** : Une place p_i est dite bornée pour un marquage initial M_0 s'il existe un entier naturel k , tel que pour tout marquage accessible à partir de M_0 , le nombre de marques dans p_i est inférieur ou égal à k (on dit que p_i est k - bornée). Un RdP est borné pour un marquage initial M_0 si toutes les places sont bornées pour M_0 (le réseau est k - borné si toutes les places sont k - bornées).
- Le RdP **sauf** : lorsque pour tout marquages les places contiennent au plus un jeton.
- Le RdP **conservatif** : lorsque le nombre de jetons reste inchangé quel que soit le marquage.
- Le RdP **vivant** : lorsque toutes les transitions sont franchissables par une séquence de tirs à partir de n'importe quel marquage atteignable par le marquage initial M_0 .
- Le RdP **quasi-vivant** : lorsque toutes les transitions sont franchissables par une séquence de tir à partir du marquage initial M_0 .
- Un RdP a un **état d'accueil** M_a : lorsque pour un marquage initial M_0 si pour tout marquage accessible $M_i \in^* M_0$, il existe σ_i tel que $M_i[\sigma_i]M_a$.
- Le RdP **réinitialisable** : lorsque pour tout marquage M_i atteignable par le marquage initial M_0 , il existe au moins une séquence de tir permettant de revenir au marquage initial M_0 [31].

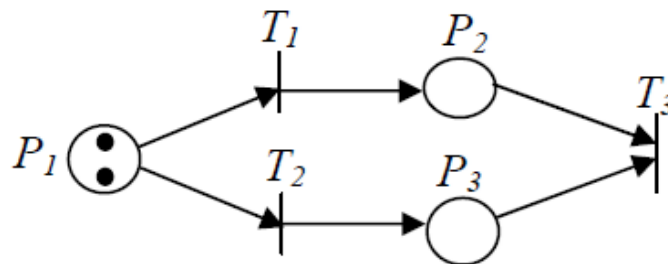


FIGURE 1.12 – Exemple de RdP persistant.

1.4.5 Analyse des propriétés d'un réseau de Petri

Pour vérifier qu'un réseau de Pétri possède ces propriétés, il existe trois méthodes principales :

- l'analyse par énumération (Arbre de couverture et énumération de marquages) ;
- l'analyse structurelle (Calcul des composantes) ;

— l'analyse par transformation (Réduction).

1.4.5.1 Analyse énumérative

L'analyse énumérative permet la validation d'un RdP. Elle consiste à établir le graphe des marquages accessibles du réseau. Ce graphe d'accessibilité se compose de nœuds, correspondant aux marquages accessibles, et d'arcs, correspondant aux franchissements des transitions permettant le passage d'un état à un autre.

Dans le cas d'un réseau borné, le graphe d'accessibilité est donc fini, et les propriétés facilement vérifiées. Par contre, dans les cas d'un réseau non borné, le graphe sera infini et impossible à construire. On utilise alors un autre graphe appelé graphe de couverture.

Cette méthode est donc parfois difficile, voire impossible à appliquer en raison de l'explosion combinatoire du nombre d'états.

1.4.5.2 Analyse structurelle

L'analyse structurelle se base sur l'algèbre linéaire puisqu'on se base sur l'équation d'état permettant d'utiliser des algorithmes étudiant les propriétés du RdP. Ces méthodes reposent sur la recherche d'invariants, qui permettent de caractériser les propriétés des marquages atteignables et des transitions franchissables, quelle que soit l'évolution du marquage.

Il existe deux types d'invariants :

- les p -invariants, également appelés p -semiflats ou composantes conservatives.
- les t -invariants, également appelés t -semiflats ou séquences répétitives.

Ils permettent de repérer les comportements cycliques, ces séquences de franchissement permettent de revenir au marquage initial lorsqu'elles sont appliquées à celui-ci.

1.4.5.3 Analyse par transformation

Dans le cas de RdP de grande taille, l'analyse des propriétés peut devenir difficile à cause de l'explosion combinatoire du nombre d'états. Il peut ainsi être judicieux de diminuer la taille du RdP marque initial afin d'étudier une propriété particulière au moyen de règles de réduction. Dans ce cas, le RdP réduit ne peut s'interpréter comme le modèle d'un système ; il ne sert qu'à l'étude d'une propriété particulière.

1.4.6 Extension des Réseaux de Petri

Contrairement à d'autres formes de modélisation, notamment les réseaux de file d'attente, les premiers résultats fournis par les RdP sont de nature qualitative. Depuis les années 1970, le concept de RdP a été largement développé par de nombreux auteurs à travers le monde, intégrant notamment des aspects temporels et stochastiques dans les modèles initiaux. La théorie des graphes et la théorie des processus stochastiques sont donc utilisées pour l'évaluation des performances. Citons des œuvres de Brams [11], Murata [55], Zhou [74], et d'autres. [1], Wang [70], Lindemann [46], Diaz [25] et Haas [29], qui traitent de la théorie, de la pratique et

des applications des réseaux de Petri. Des articles et des écrits tels que [55] et [20] décrivent les mutations que les réseaux de Petri ont subies depuis leur création. Les paragraphes suivants sont consacrés à la présentation de quelques extensions à la définition initiale des RdP.

1.4.6.1 Réseaux de Petri temporisés :

Les RdP temporisés introduisent la notion de temps dans le processus réseau, ce qui permet de décrire un système à événements discrets dont le fonctionnement dépend du temps [70].

Il existe deux grandes familles de RdP étendus en temps : les RdP temporels introduits par Ramchandani [61] et les RdP temporisés introduits par Merlin [53]. Pour les RdP temporisés, les temporisations ont d'abord été associées aux transitions (T-temporisés), puis aux places (P-temporisés). La temporisation représente alors la durée minimale de franchissement ou le temps de séjour minimum d'un jeton dans une place [68]. Les RdP T-temporisés fonctionnent de la manière suivante : lorsqu'un jeton franchit une transition, celui-ci est réservé pendant un certain temps. C'est seulement après ce temps d'attente que le jeton franchira effectivement la transition. Les RdP T-temporisés et P-temporisés sont équivalents. Concernant les RdP temporels, l'extension temporelle s'exprime sous la forme d'un intervalle associé principalement aux transitions (T-temporel) [53], ou aux places (P-temporel). Contrairement aux RdPs P-temporisés et T-temporisés, l'expressivité des RdPs T-temporels et P-temporels n'est pas équivalente.

1.4.6.2 Réseaux de Petri stochastiques (SPN) :

Les RdP stochastiques ont été introduits par Florin dès 1978 pour répondre à certains problèmes d'évaluation liés à la sûreté de fonctionnement de systèmes informatiques. Ces problèmes faisant intervenir des phénomènes aléatoires, les transitions du RdP ont comporté des temps de franchissement aléatoires, distribués par une loi exponentielle. Cette distribution exponentielle permet d'exploiter les propriétés mathématiques d'un processus de Markov [68].

Bien entendu, le concept s'est largement développé depuis le début des années 1980 [56], [54], [27] pour répondre à des besoins de modélisation de plus en plus complexes, comme la modélisation des systèmes de production. Les concepts de base ainsi que les principales propriétés se retrouvent dans de nombreux ouvrages [29],[1], [46] et [25]. De nombreuses classes de RdP stochastiques sont proposées pour l'analyse des performances des systèmes de production.

Les caractéristiques des différentes classes de RdP stochastiques se situent essentiellement dans la nature des transitions utilisées. Initialement un RdP stochastique a toutes ses transitions temporisées avec un temps aléatoire qui est distribué avec une loi exponentielle, mais nous retrouvons d'autres types de transitions.

1.4.6.3 Réseaux de Petri colorés :

Un RdP coloré est un RdP dans lequel le jeton est coloré. La couleur est une

information attachée au jeton. Ces informations permettent de distinguer les jetons et peuvent être de tout type [30],[36]. Malgré leur forte utilité, les réseaux colorés n'offrent aucun pouvoir descriptif supplémentaire par rapport aux RdP classiques, ils permettent simplement de condenser les informations.

Tout RdP coloré étiqueté correspond à RdP qui lui est isomorphe. De nombreux auteurs ont développé des extensions aux types aléatoires : Color Random RdP [17] et Generalized Random Color RdP [26]. Ce type de RdP est essentiellement utilisé comme outil de simulation.

1.4.6.4 Réseaux de Petri continus et hybrides :

Les approximations continues des phénomènes et des variables sont intéressantes dans le cas de systèmes avec un grand nombre de ressources et/ou des temps de fonctionnement variables dans le temps. La modélisation continue traite les transferts physiques comme des flux et remplace donc les variables discrètes par des variables continues. En ce sens, les réseaux de Petri continus (RdPC) ont été introduits à partir de RdP discrets par David et Alla [19]. RdPC est constitué de positions successives et de transitions successives, et son fonctionnement est lié à la notion de vitesse, liée aux transitions, qui peuvent être constantes ou variables. De tels RdP conduisent à une autre classe appelée (les RdP Hybrides). Le RdP hybride est une combinaison de la sémantique RdPC et de la sémantique RdP normale (discrète). Ils sont adaptés à la modélisation de systèmes dynamiques hybrides, et les RdPs Lots [22], [23] étendent les RdPs hybrides [21] en définissant un nouveau type de nœud, le nœud lot. Ils sont spécialement dédiés pour la modélisation et la simulation des systèmes de production à haute cadence ayant des éléments de transfert avec possibilité d'accumulation des entités (convoyeurs).

1.5 Conclusion

Nous avons présenté dans ce chapitre un bref synopsis de la théorie générale des SED, en nous passons à la description des deux outils de modélisation et d'analyse des SED les plus largement utilisés qui sont les automates à état finis et les RdPs, nous accordons une attention particulière aux RdPs. Ce formalisme est caractérisé par des structures de modélisation beaucoup plus riches, sont plus adaptés pour la modélisation des activités distribuées au sein des systèmes complexes, et permettant aussi une représentation beaucoup plus pratique et claire des différents systèmes. La dernière partie du chapitre a été consacré sur les différents extensions des RdP utilisé pour la modélisation et l'analyse de comportement des systèmes.

Dans le prochain chapitre, nous nous intéresserons aux méthodes d'analyse d'observabilité pour les SED en mise l'accent sur les SED modélisé par les RdP .

Chapitre 2

Analyse d'observabilité des systèmes à événements discrets

2.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous nous intéressons à l'analyse d'observabilité des SED modélisés par les RdPs. En effet, la propriété d'observabilité consiste à garantir que les mesures faites sur un système sont suffisamment informatives pour pouvoir en déduire toutes les variables non mesurées du système. Nous présentons dans la suite de ce chapitre quelques approches et travaux présentés sur l'observabilité des SED modélisés par les automates finis et les RdPs. Nous consacrons la dernière partie à l'analyse d'observabilité des SED modélisés par des RdP partiellement observables (RdPPO) c'est à dire les RdP équipés par des capteurs des places qui indiquent le nombre de jetons contenus dans certaines places (places mesurables ou connues) et des capteurs des transitions qui détectent les franchissements de certaines transitions (transitions mesurables ou connues).

2.2 Principe d'observabilité

Le problème fondamental de l'analyse d'observabilité d'un système physique est de pouvoir dire si l'état du système peut être déterminé en fonction des entrées et des sorties. Dans l'affirmative, la théorie de l'estimation fournit alors des outils pour reconstruire cet état, nous rappelons que la connaissance des composantes de l'état non mesurées est en général nécessaire pour régler un système ou pour détecter des fautes du système.

La valeur initiale de l'état d'un système est, en général, inconnue. On peut alors se poser la question : sous quelles conditions l'état du système peut-il être déterminé à partir des sorties et des entrées ? Ce problème est appelé problème d'observabilité.

L'observabilité d'un système est la possibilité de reconstruire l'état initial à partir des mesures et des entrées effectuées sur le système pendant un intervalle de temps fini.

Avant de passer en revue différents travaux concernant l'observabilité des SED, nous rappellerons la notion d'observabilité d'un système linéaire continu.

2.2.1 Observabilité des systèmes linéaires

Les critères d'observabilité d'un système linéaire sont décrits dans de nombreuses références [58, 28, 9]. Nous présenterons uniquement ceux concernant les systèmes linéaires réguliers. Considérons le système dynamique linéaire :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad (2.1)$$

avec $x \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur d'état, $u \in \mathbb{R}^m$ est le vecteur d'entrée et $y \in \mathbb{R}^p$ est le vecteur de sortie. A, B, C sont des matrices constantes de dimension appropriée.

En général, la notion d'observabilité a été introduite par Kalman [38] pour les systèmes linéaires. Le système (3.1) est dit observable à l'instant t_1 si à partir de la connaissance du vecteur de sortie y et du vecteur d'entrée u , il est possible en un temps fini $t_2 > t_1$ de déterminer l'état $x(t_1)$. Le critère d'observabilité de Kalman est donné par la matrice d'observabilité :

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

La dimension du sous-espace d'état observable est égale au rang de la matrice d'observabilité. Le résultat classique d'observabilité du système (3.1) énoncé par Kalman est le suivant :

Théorème 1. *Le système linéaire(3.1) est observable si et seulement si la matrice d'observabilité de Kalman est de rang complet c'est-à-dire :*

$$\text{rang}(\mathcal{O}) = n$$

avec n étant la dimension du vecteur d'état $x(t)$.

On dit alors que la paire (A, C) est observable. Si un système linéaire est complètement observable, il est globalement observable, c'est-à-dire que toutes les composantes du vecteur d'état du système sont observables, et donc peuvent être reconstruites par un observateur. Si le système est non linéaire, nous devons distinguer l'observabilité globale de l'observabilité locale.

Exemple 4. *Soit un système linéaire décrit par les équations suivantes :*

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u(t) \\ y(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} x(t) \end{cases}$$

On a :

$$\mathcal{O}(C, A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

D'où, $\text{rang } \mathcal{O}(C, A) = 2$, donc la paire (C, A) est observable.

2.3 Observabilité des systèmes à événements discrets

L'observabilité est une propriété d'un système dynamique qui définit s'il est possible ou non de reconstruire l'évolution temporelle de la trajectoire d'états internes d'un système à partir de la connaissance des entrées du système, des sorties et de la structure. D'autre manière l'observabilité est une propriété importante des représentations structurelles des systèmes dynamiques qui permettent, par l'intermédiaire d'une entité appelée observateur, le calcul de valeurs de variables d'état des systèmes dynamiques qui ne peuvent pas être mesurées directement. Dans le domaine des SED, plusieurs définitions et notions d'observabilité ont été présentées.

2.3.1 Les approches basées sur les automates à état finis

Pour les SED représentés comme des automates à état finis, Ramadge [60] a été abordé le problème de la détermination de l'état actuel du système sous l'hypothèse de la connaissance partielle de l'état du système et d'une partie des événements.

Caines et al [15] ont été présentée une approche pour reconstruire un ensemble des états cohérents avec le comportement observé en utilisant des informations fournies par les séquences d'observations précédentes. Certaines définitions de l'observabilité ont été formulées en langage régulier, où le notion d'observabilité est associée à l'existence de superviseur. Par exemple, dans [72] le problème de l'observabilité a été étudié en termes de contrôle sous l'observation partielle d'événements à l'aide des automates à états finis.

Özveren et Willsky [59] définissent l'observabilité comme une connaissance complète de l'état actuel à des instants séparés par un nombre borné de transitions à partir de l'observation d'un sous-ensemble des événements. Ils ont proposé une approche pour construire des observateurs qui permet de reconstruire l'état d'automates finis après qu'un mot de longueur limitée a été observé, montrant qu'un observateur peut avoir un nombre exponentiel d'états.

Une propriété appelée observabilité locale est donnée par Tripakis dans [69], Tripakis a montré que la propriété est décidable pour les langages arbitraires lorsque les mots sont d'une longueur limitée. Inversement, dans le cas où la longueur d'un mot peut être arbitrairement longue, la propriété est indécidable même lorsque les langages sont réguliers.

Finalement, l'observabilité est définie dans [57] comme la capacité de déterminer l'état actuel du système basé uniquement sur la sortie du système et les événements

liés à l'état actuel courant.

2.3.2 Les approches basées sur les RdP

L'utilisation des RdP s'est révélée beaucoup plus avantageuse dans la résolution de problèmes de type états et transitions inobservables. Leurs propriétés mathématiques et structurelles sont alors d'un grand intérêt pratique. Cependant, De nombreuses techniques et des travaux enquêtent sur le problème de l'observabilité dans le contexte des RdP [33, 34].

Dans le contexte des SED représentés par des RdP, le problème de l'observabilité a attirée beaucoup d'attention et plusieurs résultats sont disponibles dans la littérature. Généralement, les capteurs dans un RdP peuvent être classés en deux grandes catégories [65] : capteurs de places (par exemple, des capteurs qui comptent les jetons contenus dans une place) et des capteurs de transitions (capteurs qui peuvent détecter l'occurrence d'un événement, par exemple, des détecteurs de mouvement). En effet, plusieurs travaux ont été présentés dans le cadre d'estimation d'état notamment dans le cas où seulement des informations partielles sur les transitions sont disponibles.

En particulier, l'approche de (Giua et Seatzu, 2002) ont été présentées plusieurs notions d'observabilité. La notion, "uniformément observable" signifie qu'il possible de récupérer le marquage des places s'il existe une observation de séquence de franchissement et si le marquage initial est connu. Contrairement à l'observabilité uniforme qui repose sur la connaissance du marquage initial, l'observabilité structurelle est donnée dans le même papier [52] et ne dépend que de la structure du RdP. L'observabilité structurelle est définie de telle sorte que l'état actuel peut être reconstruit s'il existe une observation de séquence de franchissement pour n'importe quel marquage initial.

Dans Ramirez-Treviño et al l'observabilité est défini comme la possibilité de récupérer le marquage initial d'un RdP lorsque, seules des informations partielles de la séquence de franchissement de transitions sont disponibles. Tentent de résoudre le problème du calcul du marquage initial d'un RdP lorsque seulement des informations partielles de la séquence de franchissement de transitions sont disponibles. Dans ce cas, une définition de l'observabilité a été donnée et un observateur prend en compte les informations de sortie du système a été synthétisé.

Dans [62] où il a été démontré que l'observabilité défini comme dans [52] est équivalent à l'observabilité dans [33] et il a été montré comment construire un observateur pour les réseaux de Petri Interprétés binaires lorsque la propriété d'observabilité est vérifiée.

Zhang et Holloway [73] ont utilisé un modèle de RdP contrôlé pour l'évitement d'état interdit en observation partielle d'événements, en supposant que le marquage initial soit connu.

Lorsque les capteurs des places et des transitions sont disponibles, l'estimation

du vecteur du marquage doit être unique et précise. Dans ce cas, le RdP est appelé un RdP partiellement observable. Dans ce contexte, le concept d'observabilité structurelle est formulé dans [65] comme la capacité de déterminer de manière unique le vecteur du marquage à chaque instant, en se basant sur la connaissance du marquage initiale et sur les informations fournies par les capteurs des places et des transitions. Cette méthode a été utilisée pour sélectionner le nombre minimal des capteurs afin de maintenir l'observabilité structurelle.

Dans un RdP, les modifications du marquage ont été effectuées par les franchissements des transitions. Ainsi, si chaque changement produit une modification dans le symbole de sortie, alors l'apparition d'un événement du système peut être détectée par ces modifications. Cela signifie que les informations fournies par les capteurs des places sont suffisantes pour distinguer le passage d'un état à un autre et, en conséquence, la détection des franchissements des transitions. Cette discussion motive la notion de détectabilité des événements. Cette notion est définie comme suite :

Définition 5. *Un RdP est dit événement détectable si tout franchissement de transitions peut être déterminé uniquement en se basant sur des informations fournies par les capteurs des places et des transitions.*

Les conditions nécessaires et suffisantes pour la notion de détectabilité des événements sont données dans le lemme suivant :

Lemme 1. [2, 49] *Un RdP est dit événement détectable si et seulement si :*

1. $\forall t_i, t_j \in T$ tel que $\eta(t_i) = \eta(t_j)$ ou $\eta(t_i) = \varepsilon \Rightarrow \varphi W(:, i) \neq \varphi W(:, j)$, et
2. $\forall t_x \in T \Rightarrow \varphi W(:, x) \neq 0$.

Où $\eta(t)$ est une fonction de franchissement de la transition t
 ε représente une transition non observable et
 $\varphi W(:, i)$ est la i^{eme} colonne de la matrice formée par la ligne de la matrice d'incidence W correspondant aux places mesurables du RdP.

Ce résultat peut être expliqué comme suit :

Si la matrice φW a une colonne nulle, cela veut dire que la transition associée à cette colonne n'a pas une place d'entrée ou de sortie mesurable et dans ce cas, le franchissement de cette transition ne produit pas un changement dans la sortie. Donc, le franchissement de la transition ne peut pas être détecté. D'autre part, s'il y a deux colonnes égales dans la matrice φW , les transitions correspondantes ont une ou plusieurs places mesurables communes et cela veut dire que leurs franchissements produisent le même effet dans la sortie du système. Alors, les franchissements de ces transitions ne peuvent pas être distingués les uns des autres, à moins que leurs symboles d'entrée soient différents.

En se basant sur la notion de détectabilité des événements, une caractérisation géométrique de l'observabilité a été généralisée dans [49] de sorte que la séquence de marquage atteinte par le système peut être déterminée de façon unique pour toute séquence des signaux d'entrée-sortie. Une autre définition de l'observabilité

a été donnée dans [63] comme la possibilité de récupérer le marquage initial d'un RdP lorsque seules des informations partielles de la séquence de franchissement de transitions sont disponibles.

2.4 Présentation des SED modélisés par les réseaux de Petri partiellement observables

La classe des SED a été largement étudiée dans la littérature. Son intérêt est justifié par l'existence d'un grand nombre de systèmes réels évoluant à l'occurrence d'événements. Plusieurs outils de modélisation des SED ont été proposés permettant l'étude et l'analyse des SED dans divers contextes. Dans notre travail, nous nous intéressons à une classe de SED modélisée par des RdPPO. Nous introduisons d'abord les RdPPO d'une manière formelle.

Nous montrons ensuite que l'évolution du jeton dans un RdPPO est présentée par des équations d'états similaires à celles utilisées pour les systèmes descripteurs.

2.4.1 Réseaux de Petri partiellement observables

Un RdPPO est un RdP équipé de capteurs des places et des transitions. En général, les capteurs dans un RdP peuvent être classés en deux grandes catégories [65] :

- Capteurs des places qui indiquent le nombre de jetons contenus dans une place.
- Capteurs des transitions qui peuvent détecter l'occurrence d'un événement.

Remarque 3. *Le terme "état observable" classiquement utilisé pour les SED signifie que l'état est mesurable ou connu (appartient à l'ensemble des sorties), et non observable signifie inconnu (n'appartient pas à l'ensemble des sorties).*

Définition 6. *Un RdPPO Q peut être défini par un quadruplet $\{\mathcal{R}, P_o, T_o, M_0\}$ tel que :*

- \mathcal{R} est un RdP généralisé avec n places et m transitions.
- $P_o \subseteq P$ est l'ensemble de n_1 places observables avec $0 \leq n_1 \leq n$.
- $T_o \subseteq T$ est l'ensemble de m_1 transitions observables avec $0 \leq m_1 \leq m$.
- M_0 est le marquage initial.

Dans un RdPPO, l'ensemble de places P est partitionné comme $P = P_o \uplus P_{no}$ tel que : P_o est l'ensemble des places observables, et P_{no} est l'ensemble des places non observables. Une place observable $p \in P_o$ peut avoir un capteur qui compte le nombre de jetons contenus dans cette place. Cependant, une place non observable $p \in P_{no} = P - P_o$ ne peut pas avoir de capteur. Nous pouvons toujours renommer les places pour assurer que les n_1 premières places sont observables c-à-d

$$P_o = \{p_1, \dots, p_{n_1}\}.$$

De la même façon, l'ensemble de transitions T est partitionné comme $T = T_o \uplus T_{no}$: T_o est l'ensemble des transitions observables, et T_{no} est l'ensemble des transitions non observables. Une transition observable $t \in T_o$ peut avoir un capteur qui détecte le franchissement de cette transition. Cependant, une transition $t \in T_{no} = T - T_o$ non observable ne peut pas avoir de capteur. Nous pouvons toujours renommer les transitions pour assurer que les m_1 premières transitions sont observables c'est à dire $T_o = \{t_1, \dots, t_{m_1}\}$.

Une transition t est dite validée ou franchissable à partir d'un marquage M , on note $M[t\rangle$, si toute place d'entrée p de t contient un nombre de jetons au moins égal au poids de l'arc qui relie p à t . On note $M[t\rangle M'$ le passage du marquage M vers le marquage M' en franchissant la transition t .

On note $M[S\rangle M'$ le passage du marquage M vers le marquage M' à travers la séquence de franchissement S . L'ensemble des séquences finies qui sont franchies à partir du marquage initial M_0 est noté $L(\mathcal{R}, M_0)$, c'est à dire :

$$L(\mathcal{R}, M_0) = \{S \in T^* \mid M_0[S\rangle\}.$$

Le franchissement consécutif des transitions non observables est noté S_{no} , et on note $M[S_{no}\rangle M'$ le passage du marquage M vers le marquage M' à travers la séquence S_{no} . Aussi, l'ensemble des séquences finies des transitions non observables qui sont franchies à partir d'un marquage M est noté $L_{no}(\mathcal{R}, M)$, i.e., $L_{no}(\mathcal{R}, M) = \{S_{no} \in T_{no}^* \mid M[S_{no}\rangle\}$.

Le sous-RdP noté Q_{no} est un RdP associé par le franchissement de la séquence $S_{no} \in L_{no}(\mathcal{R}, M)$ à partir du marquage M .

Définition 7. *Le sous-RdP Q_{no} est cyclique à partir du marquage M si le franchissement de la séquence $S_{no} \in L_{no}(\mathcal{R}, M)$ donne le marquage M c'est à dire $M[S_{no}\rangle M$.*

Une fonction de franchissement $\eta : T \rightarrow \Sigma \cup \{\varepsilon\}$ qui associe à chaque transition un alphabet (un symbole) et vérifie :

$$\eta(t) = \varepsilon \text{ pour chaque } t \in T_{no}.$$

avec Σ est définie de telle sorte que, pour chaque $\nu \in \Sigma$, il existe une transition $t \in T_o$ satisfaisant $\eta(t) = \nu$. Par conséquent, $|\Sigma|$ représente le nombre de capteurs des transitions.

Lorsqu'une transition observable $t \in T_o$ est franchie, sa fonction correspondante $\eta(t)$ est observée et donc si $\eta(t_1) = \eta(t_2)$ pour deux transitions observables t_1 et t_2 , on ne peut pas distinguer le franchissement de t_1 et t_2 à partir de la fonction de franchissement $\eta(t)$ et dans ce cas, les transitions t_1 et t_2 sont dites non déterministes. De plus, si $\eta(t) = \varepsilon$, le franchissement de la transition t n'est pas observé.

2.4.2 Représentation d'état d'un Réseau de Petri partiellement observable

La dynamique du vecteur de marquage notée M dans un RdPPO est régie par l'équation suivante [6, 7, 40, 55] :

$$M_{k+1} = M_k + W\sigma_{k+1}, \quad (2.3)$$

où M_k est le vecteur de marquage des places.

σ_k le vecteur de franchissement des transitions à l'étape d'évolution k (itération).

W est la matrice d'incidence où les lignes représentent les places et les colonnes représentent les transitions.

Nous avons mentionné que le RdPPO se compose de places observables et de places non observables. Respectivement, le RdPPO est caractérisé par des transitions dont le franchissement est observé (transitions observables) et des transitions dont le franchissement est inobservé (transitions non observables). Le vecteur de marquage et le vecteur de transitions sont réarrangés de la manière suivante :

$$M_k = \begin{bmatrix} M_k^1 \\ M_k^2 \end{bmatrix} \text{ et } \sigma_k = \begin{bmatrix} \sigma_k^1 \\ \sigma_k^2 \end{bmatrix}, \quad (2.4)$$

où $M_k^1 \in \mathbb{N}^{n_1}$ est le marquage des places observables et $M_k^2 \in \mathbb{N}^{n_2}$ est le marquage des places non observables.

$\sigma_k^1 \in \mathbb{N}^{m_1}$ est le vecteur de transitions observables, $\sigma_k^2 \in \mathbb{N}^{m_2}$ est le vecteur de transitions non observables, avec $n = n_1 + n_2$, et $m = m_1 + m_2$.

Il est bien remarquable que l'équation du marquage (2.3) d'un RdP est similaire de celle utilisée pour les systèmes linéaires de la forme :

$$\begin{cases} x_{k+1} = Ax_k + Bu_k \\ y_k = Cx_k \end{cases}. \quad (2.5)$$

Donc, on peut utiliser les techniques d'observation du système (2.5) afin de résoudre le problème d'observation pour le système (2.3). Si on réécrit le système (2.3) avec l'équation de sortie, on obtient :

$$\begin{cases} M_{k+1} = M_k + W\sigma_{k+1} \\ \bar{y}_k = \bar{C}M_k = M_k^1 \end{cases}, \quad (2.6)$$

avec \bar{y} représente les places observables et la matrice \bar{C} donnée comme suit :

$$\bar{C} = \begin{bmatrix} I_{n_1} & 0_{n_1 \times n_2} \\ 0_{n_2 \times n_1} & 0_{n_2 \times n_2} \end{bmatrix}.$$

Maintenant, si on applique la condition nécessaire et suffisante d'observabilité sur le système (2.6), on trouve :

$$\text{rang} \begin{bmatrix} \bar{C} \\ \bar{C}I \\ \vdots \\ \bar{C}I^{n-1} \end{bmatrix} = \text{rang}[\bar{C}] = n_1. \quad (2.7)$$

La condition d'observabilité du système (2.6) ne porte que sur \bar{C} , ce qui implique que pour être observable, l'état d'un tel système doit être entièrement mesuré c'est à dire $n_1 = n$.

Dans le cas où $n_1 < n$, le système (2.6) n'est pas observable et les informations fournies par les places observables ne sont pas suffisantes pour connaître le vecteur de marquage complet M_k . Cependant, on peut renforcer la sortie du système (2.6) par les informations des transitions observables en considérant que l'état du système est constitué du vecteur de marquage M_k et du vecteur de transitions σ_k . Dans ce cas, on obtient un système singulier que l'on appelle aussi un système descripteur ou système généralisé.

Dans la suite, nous allons montrer que l'évolution du marquage dans un RdPPO peut être représenté sous forme d'un système descripteur par deux modèles différents mais équivalents.

Modèle 1

En remplaçant l'expression de (2.4) dans (2.3), nous obtenons :

$$\begin{bmatrix} I_n & -W \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_{k+1} \\ \sigma_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_n & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_k \\ \sigma_k \end{bmatrix}. \quad (2.8)$$

Nous considérons que l'ensemble des places observables et des transitions observables comme les sorties du RdPPO accessibles à la mesure. On note y l'ensemble des sorties du RdPPO. On obtient l'équation d'état et de sortie comme :

$$\begin{cases} E\Pi_{k+1} = A\Pi_k \\ y_k = C\Pi_k \end{cases}, \quad (2.9)$$

où Π_k , y_k sont respectivement le vecteur d'état généralisé et le vecteur de sortie définis comme [5] :

$$\Pi_k = \begin{bmatrix} M_k \\ \sigma_k \end{bmatrix} \in \mathbb{N}^{n+m} \text{ et } y_k = \begin{bmatrix} M_k^1 \\ \sigma_k^1 \end{bmatrix} \in \mathbb{N}^{n_1+m_1}.$$

Les matrices E , A et C sont définies comme :

$$E = \begin{bmatrix} I_n & -W \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} I_n & 0_{n \times m} \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} I_{n_1} & 0_{n_1 \times n_2} & 0_{n_1 \times m_1} & 0_{n_1 \times m_2} \\ 0_{m_1 \times n_1} & 0_{m_1 \times n_2} & I_{m_1} & 0_{m_1 \times m_2} \end{bmatrix}. \quad (2.10)$$

Modèle 2

Ce modèle est basé sur la décomposition de la matrice d'incidence W . Pour cela, on considère que la matrice W peut être décomposée comme suit :

$$W = [W_1 | W_2] = \left[\begin{array}{c|c} W_{11} & W_{12} \\ \hline W_{21} & W_{22} \end{array} \right],$$

avec $W_{11} \in \mathbb{R}^{n_1 \times m_1}$, $W_{12} \in \mathbb{R}^{n_1 \times m_2}$, $W_{21} \in \mathbb{R}^{n_2 \times m_1}$, et $W_{22} \in \mathbb{R}^{n_2 \times m_2}$.

Après la décomposition de W , le système (2.3) devient :

$$M_{k+1} = M_k + W_1 \sigma_{k+1}^1 + W_2 \sigma_{k+1}^2. \quad (2.11)$$

De la même façon que pour le modèle 1, en utilisant l'expression de (2.4) et (2.11), on obtient :

$$\begin{bmatrix} I_n & -W_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_{k+1} \\ \sigma_{k+1}^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_n & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_k \\ \sigma_k^1 \end{bmatrix} + W_2 \sigma_{k+1}^2, \quad (2.12)$$

la sortie du RdPPO reste la même pour ce modèle et donc, l'équation d'état et de sortie sont données par :

$$\begin{cases} \mathcal{E} \theta_{k+1} = \mathcal{A} \theta_k + W_2 \sigma_{k+1}^2 \\ y_k = \mathcal{C} \theta_k \end{cases}, \quad (2.13)$$

avec θ_k est le vecteur d'état généralisé :

$$\theta_k = \begin{bmatrix} M_k \\ \sigma_k^1 \end{bmatrix} \in \mathbb{N}^{n+m_1}.$$

Les matrices \mathcal{E} , \mathcal{A} et \mathcal{C} sont définies comme :

$$\mathcal{E} = \begin{bmatrix} I_n & -W_1 \end{bmatrix}, \mathcal{A} = \begin{bmatrix} I_n & 0_{n \times m_1} \end{bmatrix}, \mathcal{C} = \begin{bmatrix} I_{n_1} & 0_{n_1 \times n_2} & 0_{n_1 \times m_1} \\ 0_{m_1 \times n_1} & 0_{m_1 \times n_2} & I_{m_1} \end{bmatrix}. \quad (2.14)$$

Proposition 1. *Le modèle 1 représenté par le système (2.9) est équivalent au modèle 2 représenté par système (2.13).*

$$\begin{aligned} \text{Preuve 1. } \begin{cases} E\Pi_{k+1} = A\Pi_k \\ y_k = C\Pi_k \end{cases} &\iff \begin{cases} \begin{bmatrix} I_n \\ -W_1 \\ -W_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} M_{k+1} \\ \sigma_{k+1}^1 \\ \sigma_{k+1}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_n \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} M_k \\ \sigma_k^1 \\ \sigma_k^2 \end{bmatrix} \\ y_k = \begin{bmatrix} I_{n_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_{m_1} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_k \\ \sigma_k^1 \\ \sigma_k^2 \end{bmatrix} \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} \begin{bmatrix} \mathcal{E} \\ -W_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \theta_{k+1} \\ \sigma_{k+1}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{A} \\ 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \theta_k \\ \sigma_k^2 \end{bmatrix} \\ y_k = \begin{bmatrix} \mathcal{C} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_k \\ \sigma_k^2 \end{bmatrix} \end{cases} \end{aligned}$$

Donc on obtient :

$$E\Pi_{k+1} = A\Pi_k \iff \begin{cases} \mathcal{E} \theta_{k+1} = \mathcal{A} \theta_k + W_2 \sigma_{k+1}^2 \\ y_k = \mathcal{C} \theta_k \end{cases}.$$

Remarque 4. *Les transitions observables dans notre travail ne sont pas représentées par des alphabets ou des symboles comme c'est souvent le cas dans les SED, mais par un nombre binaire $\{0, 1\}$ c'est à dire lorsqu'une transition observable $t_j (j = 1, \dots, m_1)$ est franchie, sa valeur à la sortie vaut 1. Alors, toutes les transitions observables peuvent être distinguées à partir de la sortie y_k , même dans le cas où se trouvent des transitions non déterministes.*

2.5 Observabilité des SED modélisés par les RdPPO

L'observabilité est une propriété importante des représentations structurelles des systèmes dynamiques qui permet, à travers une entité appelée observateur, le calcul des valeurs de variables d'états des systèmes dynamiques qui ne peuvent pas être mesurées directement. Dans le cadre des SED, l'observabilité a attirée beaucoup d'attention et plusieurs travaux ont été présentés notamment pour les RdP. En effet, la plupart des définitions d'observabilité existantes à base des RdP, se base soit sur l'observabilité des événements ou bien sur d'autres hypothèses inspirées des propriétés des RdP. Pour l'instant, on peut citer, l'observabilité uniforme et fortement uniforme [33], l'observabilité structurelle [65], l'observabilité des RdP interprétés [2, 49].

Dans ce paragraphe, nous nous intéressons à l'étude d'observabilité pour les SED modélisés par les RdPPO. L'idée principale est basée sur l'utilisation des techniques d'observabilité des systèmes descripteurs pour caractériser l'observabilité des RdPPO après l'écriture de l'évolution du marquage d'un RdPPO sous forme d'un système descripteur comme nous l'avons vu précédemment. Pour cela, une nouvelle caractérisation algébrique d'observabilité dite "causale" pour les RdPPO sera présentée.

Maintenant, nous rappelons quelques définitions et conditions concernant l'observabilité des systèmes descripteurs.

2.5.1 Observabilité des systèmes descripteurs ou singulier

Les systèmes descripteurs ou systèmes singuliers peuvent être considérés comme une généralisation des systèmes dynamiques linéaires usuels. En effet, si les systèmes usuels font apparaître exclusivement des relations dynamiques, les systèmes singuliers comportent également des relations algébriques. Depuis une vingtaine d'années, certains sujets d'études traités, en particulier le problème d'estimation d'état et de diagnostic pour systèmes singuliers en présence de retards, d'entrées inconnues et/ou d'incertitudes, et surtout la généralisation des travaux d'estimation d'état des multi-modèles non singuliers aux systèmes singuliers.

Un système descripteur en temps discret peut être décrit sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \bar{E}x_{k+1} = \bar{A}x_k + \bar{B}u_k \\ y_k = \bar{C}x_k \end{cases}, \quad (2.15)$$

où $x_k \in \mathbb{R}^\alpha$, $u_k \in \mathbb{R}^\gamma$, $y_k \in \mathbb{R}^\delta$ sont respectivement le vecteur d'état, l'entrée et la

sortie du système (2.15) à l'instant k . $\bar{E}, \bar{A} \in \mathbb{R}^{\beta \times \alpha}$ avec $\text{rank } \bar{E} < \alpha$, \bar{B} et \bar{C} sont des matrices réelles, constantes et de dimensions compatibles avec les dimensions de x_k, u_k et y_k .

Le système (2.15) est appelé un système descripteur, système généralisé, ou système singulier. Ainsi, le système (2.15) représente la classe la plus générale des systèmes descripteurs linéaires. Si $\beta = \alpha$, le système (2.15) est dit carré et si $|\lambda \bar{E} - \bar{A}| \neq 0$, le système (2.15) est dit régulier. Si $\beta \neq \alpha$, le système (2.15) est dit rectangulaire ou non carré.

Comme dans le cas des systèmes usuels, l'observabilité se définit comme la possibilité de reconstruire l'état par la connaissance des entrées et des sorties du système. A la différence que pour les systèmes singuliers, une partie importante des activités de recherche en automatique s'est focalisée sur le problème d'observabilité et la synthèse d'observateurs pour les systèmes descripteurs en temps continu [32, 41] et en temps discret [18]. Dans [18], l'auteur prouve que les systèmes descripteurs en temps discret et en temps continu ont la même observabilité.

Généralement l'observabilité des systèmes descripteurs est inspirée de la théorie de système linéaire et peut être formellement posée comme suit :

Définition 8. [18] *Le système (2.15) est dit observable, si la condition initiale x_0 peut être déterminée de manière unique à partir de l'entrée u_k et la sortie y_k , pour tout $k \geq 0$.*

Cette définition de l'observabilité est générale et correspond à celle des systèmes standards. Une autre notion d'observabilité appelée observabilité causale a été présentée dans [18] pour les systèmes descripteurs en temps discret et dans [32] pour les systèmes descripteurs en temps continu. Pour définir cette observabilité, une discussion sur la notion de causalité est nécessaire.

2.5.2 Causalité

En toute généralité, la causalité est une relation qui s'établit entre des événements, des variables ou des états. Il est généralement présumé que l'ordre chronologique de la cause précède l'effet.

La causalité peut être comprise en termes de flux entre les processus et exprimée en langage mathématique. Les statistiques actuelles incluent l'inférence causale, considérée comme l'un des problèmes les plus importants à étudier.

Définition 9. [18, 32] *Le système (2.15) est dit causal, si l'état du système x_k ($0 < k$) peut être déterminé complètement à partir de la condition initiale x_0 , l'entrée u_k et la sortie y_k , pour tout $k \geq 0$.*

Le théorème suivant donne la condition de causalité :

Théorème 2. [32] Le système (2.15) est causal si :

$$\text{rang} \begin{bmatrix} \bar{E} & \bar{A} \\ 0 & \bar{E} \end{bmatrix} = \text{normal-rang}(\lambda\bar{E} - \bar{A}) + \text{rang}\bar{E}.$$

Le rang normal d'une matrice est défini comme son rang maximal.

Définition 10. [18, 32] Le système (2.15) est dit causal observable (Y -observable), si l'état du système x_k ($0 < k$) peut être déterminé de manière unique à partir de la condition initiale x_0 , l'entrée u_k et la sortie y_k , pour tout $k \geq 0$.

Théorème 3. [18, 32, 41]

1. Le système (2.15) est causal observable ssi :

$$\text{rang} \begin{bmatrix} \bar{E} & \bar{A} \\ 0 & \bar{E} \\ 0 & \bar{C} \end{bmatrix} = \alpha + \text{rang}\bar{E} \text{ ou } \text{rang} \begin{bmatrix} \bar{E} \\ \bar{C} \end{bmatrix} = \alpha.$$

2. Le système (2.15) est observable ssi il est causal observable et :

$$\text{rang} \begin{bmatrix} \lambda\bar{E} - \bar{A} \\ \bar{C} \end{bmatrix} = \alpha, \forall \lambda \in \mathbb{C}, |\lambda| \geq 1.$$

Avec α est la dimension du vecteur d'état x_k .

2.5.3 Observabilité des réseaux de Petri partiellement observables

L'utilisation de la théorie des systèmes descripteurs est motivée par la capacité de présenter le RdPPO sous forme d'un système descripteur (2.15). Une nouvelle caractérisation algébrique de l'observabilité sera proposée pour les RdPPO. Le traitement que nous allons présenter est purement algébrique et donc facile à comprendre.

Dans le système (2.9), l'indice k ne correspond pas à la $k^{\text{ème}}$ période d'échantillonnage (comme c'est souvent le cas dans les systèmes discrets), mais correspond à l'instant d'occurrence d'événement (le $k^{\text{ème}}$ franchissement de transition). Ensuite, si on considère la durée entre l'occurrence des deux événements consécutifs comme une période d'échantillonnage, le système descripteur (2.15) peut être traité comme un système à entraînement temporel. Par conséquent, la théorie des systèmes descripteurs en temps discret reste valable.

Contrairement au système (2.9), le système (2.13) n'a pas la même forme que système (2.15), car le système (2.13) comporte un terme σ_{k+1}^2 qui représente une entrée inconnue (transitions non observables) et donc, on ne peut pas appliquer directement les techniques d'observabilité du système (2.15) sur le système (2.13). Par conséquent, l'observabilité dans ce document est basée sur la sortie d'un système RdPPO et il est facile de remarquer que les deux systèmes (2.9) et (2.13) ont la même sortie. Donc, le modèle (2.9) et son équivalent ont la même propriété d'observabilité (c'est à dire système (2.9) est observable \iff le système (2.13) est observable). Pour cela, l'observabilité du système (2.13) est caractérisée à partir de celle du système

(2.9).

D'après le théorème (2), on peut donner la proposition suivante :

Proposition 2. *Le RdPPO représenté par système (2.9) est causal i.e.*

$$\text{rang} \begin{bmatrix} E & A \\ 0 & E \end{bmatrix} = \text{normal-rang}(\lambda E - A) + \text{rang}E.$$

Preuve 2. $\text{rang} \begin{bmatrix} E & A \\ 0 & E \end{bmatrix} = \text{rang} \begin{bmatrix} I_n & -W & I_n & 0 \\ 0 & 0 & I_n & -W \end{bmatrix} = 2n,$

$\text{rang}[E] = \text{rang} \begin{bmatrix} I_n & -W \end{bmatrix} = n,$ et

$$\begin{aligned} \text{normal-rang}(\lambda E - A) &= \text{normal-rang} \left(\begin{bmatrix} \lambda I_n \\ -\lambda W \end{bmatrix}^T - \begin{bmatrix} I_n \\ 0 \end{bmatrix}^T \right) \\ &= \text{normal-rang} \left(\begin{bmatrix} (\lambda - 1)I_n & -\lambda W^T \end{bmatrix} \right) = n \end{aligned}$$

Alors, $\text{rang} \begin{bmatrix} E & A \\ 0 & E \end{bmatrix} = \text{normal-rang}(\lambda E - A) + \text{rang}E = 2n.$

□

Remarque 5. *L'état initial Π_0 du système (2.9) (θ_0 du système (2.13)) est composé du vecteur de marquage initial M_0 et du vecteur initial des transitions σ_0 (σ_0^1 pour le système (2.13)).*

On suppose qu'aucune transition n'est franchie à l'instant initial $k = 0$. Alors, les vecteurs Π_0 et θ_0 sont donnés par :

$$\Pi_0 = \begin{bmatrix} M_0 \\ 0_m \end{bmatrix} \text{ et } \theta_0 = \begin{bmatrix} M_0 \\ 0_{m_1} \end{bmatrix}$$

Alors, la connaissance de Π_0 ou θ_0 nécessite la connaissance de M_0 . Pour l'étude d'observabilité le vecteur du marquage M_0 sera donc utilisé au lieu de Π_0 ou θ_0 .

Dans ce travail, en utilisant les techniques des systèmes descripteurs pour présenter quelques résultats concernant l'observabilité d'un RdPPO décrit par le système (2.9). Ensuite, nous allons exploiter ces résultats pour la caractérisation de l'observabilité pour le système (2.13).

Nous utilisons le même raisonnement pour le système (2.15), l'observabilité causale d'un RdPPO décrit par système (2.9) peut être formulée comme suit :

Définition 11. *Un RdPPO décrit par le système (2.9) est dit causal observable si pour un marquage initial M_0 connu, les informations fournies par l'ensemble des places observables P_o et transitions observables T_o sont suffisantes pour déterminer de manière unique le vecteur de marquage M_k et le vecteur de transitions σ_k à chaque instant k .*

La définition ci-dessus signifie qu'il est possible de récupérer d'une façon unique le marquage des n_2 places non observables et de détecter le franchissement des m_2 transitions non observables à chaque instant k à partir de la connaissance du marquage initial M_0 et de l'observation des n_1 places et m_1 transitions. A partir de cette définition, on peut constater que la propriété d'observabilité n'est pas basée seulement sur la structure du RdP, mais aussi sur la connaissance du marquage initial M_0 .

Une caractérisation d'observabilité similaire dite structurelle a été formulée dans [65], comme la capacité de déterminer d'une façon unique l'état du système (le marquage des places) à chaque instant, basée sur les informations des capteurs des places et des transitions et sur la connaissance du marquage initial. Dans [33], une notion d'observabilité dite uniforme a été présentée. Les auteurs ont montré que cette observabilité a une importance lorsque le marquage initial est connu.

Dans le cas où le marquage initial est inconnu, l'observabilité peut être définie comme :

Définition 12. *Un RdPPO décrit par le système (2.9) est dit observable si les informations fournies par l'ensemble des places observables P_o et transitions observables T_o sont suffisantes pour déterminer de manière unique le marquage initial M_0 , le vecteur du marquage M_k et le vecteur de transitions σ_k à chaque instant k .*

L'observabilité dans la définition (12) est formulée comme la capacité de récupérer le vecteur du marquage initial M_0 et de déterminer d'une façon unique le marquage des n_2 places non observables et le franchissement des m_2 transitions non observables. Plusieurs définitions qui sont liées à cette notion d'observabilité sont présentées dans la littérature.

Dans [49], une caractérisation de l'observabilité pour les RdP interprétés est généralisée de telle sorte que pour importe quelle séquence entrée/sortie (l'entrée désigne les transitions observables et la sortie désigne les places observables), le marquage des places peut être déterminé uniquement. Dans le même papier, une caractérisation géométrique a été présentée. Contrairement à l'observabilité uniforme présentée dans [33], qui est basée sur la connaissance du marquage initial, l'observabilité structurelle du marquage est donnée dans le même papier et dépend seulement de la structure du RdP.

Cette observation est définie de telle sorte que le marquage actuel peut être reconstruit si la séquence de transitions est observable pour importe quel marquage initial.

Remarque 6. *Si le système (2.9) n'est pas observable, mais causal observable, l'état du système Π_k peut être déterminé uniquement à partir de la sortie y_k et la connaissance du marquage initial M_0 .*

Suite à la définition (11) et Théorème (3), on peut formuler le théorème suivant :

Théorème 4. *Un RdPPO décrit par le système (2.9) est causal observable si et seulement si :*

1. *Le nombre des places observables est supérieur ou égal au nombre des transitions non observables c'est à dire $n_1 \geq m_2$.*
2. $\text{rang}[W_2] = \text{rang} \begin{bmatrix} W_{12} \\ W_{22} \end{bmatrix} = m_2$.

Preuve 3. *Nous allons prouver que la condition 1 du Théorème (3) est satisfaite si les conditions 1 et 2 du Théorème (4) sont satisfaites.*

$$\text{rang} \begin{bmatrix} E \\ C \end{bmatrix} = \text{rang} \begin{bmatrix} I_{n_1} & 0 & -W_{11} & -W_{12} \\ 0 & I_{n_2} & -W_{21} & -W_{22} \\ I_{n_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_{m_1} & 0 \end{bmatrix},$$

si $n_1 \geq m_2$ alors le nombre des lignes de $\begin{bmatrix} E \\ C \end{bmatrix}$ est satisfait .

$$n_1 + n_2 + n_1 + m_1 \geq n + m_1 + m_2 = n + m.$$

Le rang de la matrice $\begin{bmatrix} 0 & -W_{12} \\ I_{n_2} & -W_{22} \end{bmatrix}$ est toujours égal à $n_2 + \text{rank} \begin{bmatrix} W_{12} \\ W_{22} \end{bmatrix}$, parce que :

— *Si W_{12} est une matrice nulle, alors W_{22} ne peut être ni une matrice nulle, ni une matrice d'identité à cause des propriétés de la matrice d'incidence (c'est à dire, chaque colonne de la matrice d'incidence contient au moins deux éléments 1 et -1).*

— *Si la matrice W_{12} n'est pas complètement nulle, donc le résultat est évident.*

Donc, si $\text{rang}[W_2] = \text{rang} \begin{bmatrix} W_{12} \\ W_{22} \end{bmatrix} = m_2$, alors $\text{rang} \begin{bmatrix} E \\ C \end{bmatrix} = n_1 + n_2 + m_1 + m_2 = n + m$

ce qui signifie que la condition 1 du Théorème (3) est satisfaite.

Nous pouvons énoncer le résultat suivant :

Théorème 5. *Un RdPPO décrit par le système (2.9) est observable si et seulement si :*

1. *Toutes les places du RdP sont observables et le nombre de ces places doit être supérieur ou égal au nombre des transitions non observables c'est à dire $n_1 = n \geq m_2$.*
2. $\text{rang}[W_2] = \text{rang} \begin{bmatrix} W_{12} \\ W_{22} \end{bmatrix} = m_2$.

Preuve 4. *Nous allons prouver que la condition 2 du Théorème (3) est satisfaite si les conditions 1 et 2 du Théorème (5) sont satisfaites.*

Les conditions 1 et 2 du Théorème (5) signifient que le RdPPO est causal observable par le Théorème (4) et il reste à prouver que :

$$\text{rang} \begin{bmatrix} \lambda E - A \\ C \end{bmatrix} = n + m, \forall \lambda \in \mathbb{C}, |\lambda| \geq 1.$$

$$\begin{bmatrix} \lambda E - A \\ C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda I_{n_1} - I_{n_1} & 0 & -\lambda W_{11} & -\lambda W_{12} \\ 0 & \lambda I_{n_2} - I_{n_2} & -\lambda W_{21} & -\lambda W_{22} \\ I_{n_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_{m_1} & 0 \end{bmatrix}.$$

Alors, les conditions 1 et 2 du Théorème (5) impliquent que

$$\text{rang} \begin{bmatrix} \lambda E - A \\ C \end{bmatrix} = n + m, \forall \lambda \in \mathbb{C}, |\lambda| \geq 1.$$

La condition $\text{rang}[W_2] = m_2$ signifie que les transitions non observables doivent être linéairement indépendantes c'est à dire que le sous-RdP Q_{no} formé par le franchissement consécutif des transitions non observables ne doit pas être cyclique (définition (7)). En outre, la condition 1 du Théorème (4) représente le nombre suffisant de places observables telles que les transitions non observables peuvent être détectées et cela conduit à la notion de la détectabilité des événements telle que présentée dans [2, 49]. La notion de détectabilité des événements est définie dans [2, 49] comme la possibilité de détecter le franchissement de chaque transition en se basant sur des informations fournies par les capteurs des places et des transitions.

Nous rappelons les conditions nécessaires et suffisantes pour la détectabilité des événements :

Lemme 2. [2, 49] Un RdP est dit événements détectable si et seulement si :

1. $\forall t_i, t_j \in T$ tel que $\eta(t_i) = \eta(t_j)$ ou $\eta(t_i) = \varepsilon \Rightarrow \varphi W(:, i) \neq \varphi W(:, j)$, et
2. $\forall t_x \in T \Rightarrow \varphi W(:, x) \neq 0$.

Avec $\eta(t)$ est une fonction de franchissement de la transition t , ε représente une transition non observable et $\varphi W(:, i)$ est la i^{eme} colonne de la matrice formée par la ligne de la matrice d'incidence W correspondant aux places mesurables (observables) du RdP.

Ce résultat signifie que s'il y a deux transitions non déterministes ou non observables qui ont deux colonnes identiques dans la matrice φW , cela veut dire que leurs franchissements produisent le même effet dans la sortie du système. Alors, les franchissements de ces transitions ne peuvent pas être distingués les uns des autres, à moins que leurs symboles d'entrée soient différents. D'autre part, si la matrice φW a une colonne nulle, cela veut dire que la transition associée à cette colonne n'a pas une place d'entrée ou de sortie mesurable et dans ce cas, le franchissement de cette transition ne produit pas un changement dans la sortie. Donc, le franchissement de la transition ne peut pas être détecté.

Maintenant, si on applique la notion de détectabilité des événements pour le RdPPO décrit par le système (2.9), le cas des transitions non déterministes peut

être ignoré car toutes les transitions observables peuvent être distinguées à partir de la sortie du système (2.9) comme nous l'avons mentionné dans la remarque (4). Alors, on peut reformuler les conditions nécessaires et suffisantes pour la détectabilité des événements du système (2.9) dans la proposition suivante :

Proposition 3. *Un RdPPO décrit par le système (2.9) est à événements détectable si et seulement si :*

1. $\forall t_i, t_j \in T_{uo} \implies \varphi W_2(:, i) \neq \varphi W_2(:, j)$, et
2. $\forall t_x \in T_{uo} \implies \varphi W_2(:, x) \neq 0$.

où W_2 est la matrice formée par les colonnes de la matrice d'incidence W correspondant aux transitions non observables.

Preuve 5. (Suffisance) *S'il existe deux transitions observables de telle sorte que chaque transition a une combinaison unique avec une colonne de la matrice φW , cela veut dire que leurs franchissements produisent un changement dans la sortie du système. Alors, leurs franchissements peuvent être distingués les uns des autres.*

(Nécessité) 1) *S'il existe deux colonnes identiques dans la matrice φW , les transitions non observables correspondantes ont au moins une place observable commune, et donc, leurs franchissements produisent le même effet dans la sortie du système. Alors, les franchissements de ces transitions ne peuvent pas être distingués les uns des autres.*

2) *Si la matrice φW a une colonne nulle, cela veut dire que la transition non observable associée à cette colonne n'a pas une place observable et dans ce cas, le franchissement de cette transition ne produit aucun changement dans la sortie. Donc, le franchissement de la transition ne peut pas être détecté.*

Le théorème suivant résume les dérivations précédentes et donne les conditions nécessaires et suffisantes de l'observabilité d'un DES modélisé par un RdPPO.

Théorème 6. *Un RdPPO décrit par le système (2.9) est causal observable si et seulement s'il est à événement détectable.*

Preuve 6. (Suffisance) *Si le RdPPO est à événements détectable, donc les transitions non observables peuvent être détectées uniquement en se basant sur les capteurs des places et des transitions. Puisque le marquage initial est connu, l'état du système peut être déterminé uniquement en utilisant le système (2.9) ou bien le système (2.3).*

(Nécessité) *Si le RdPPO n'est pas à événements détectable, il existe un marquage initial M_0 et deux transitions t_1 et t_2 telles que leurs franchissements ne peuvent pas être distinguables à partir des informations des capteurs. Le marquage M_k est produit par des séquences de franchissement contenant t_1 et t_2 , et les franchissements des t_1 et t_2 donnent des marquages différents car il n'y a pas de transitions qui ont le même comportement. Dans cette situation, on ne peut pas déterminer uniquement*

les marquages des systèmes avant le marquage M_k et donc, le RdPPO n'est pas observable causal.

Maintenant, nous nous intéressons à l'observabilité de système (2.13) et comme mentionné précédemment, le système (2.9) et son équivalent (2.13) ont la même sortie et représentent le même RdPPO. Par conséquent, l'observabilité du système (2.9) et de système (2.13) sont équivalentes et donc, l'observabilité du système (2.13) peut être déduite de l'observabilité du système (2.9).

Théorème 7. *Les résultats suivants concernant l'observabilité du système (2.13) sont équivalents.*

1. *Un RdPPO décrit par le système (2.13) est causal observable si et seulement si :*

$$\text{rank} \begin{bmatrix} \mathcal{E} & -W_2 \\ \mathcal{C} & 0 \end{bmatrix} = n + m.$$

2. *Un RdPPO décrit par système (2.13) est causal observable si et seulement si :*

(a) *le nombre des places observables est supérieur ou égal au nombre des transitions non observables c'est à dire $n_1 \geq m_2$.*

(b) *$\text{rank} [W_2] = m_2$.*

Preuve 7. *La condition 1 du Théorème (7) est déduite de l'observabilité du système (2.9) c'est à dire :*

$$\text{rank} \begin{bmatrix} E \\ C \end{bmatrix} = n + m \Leftrightarrow \text{rank} \begin{bmatrix} \mathcal{E} & -W_2 \\ \mathcal{C} & 0 \end{bmatrix} = n + m.$$

Maintenant, il est facile de démontrer que les conditions 1 et 2 du Théorème (7) sont équivalentes.

$$\begin{bmatrix} \mathcal{E} & -W_2 \\ \mathcal{C} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E \\ C \end{bmatrix} \text{ et on utilise la démonstration du Théorème (4).}$$

De la même façon, on peut énoncer le résultat suivant :

Théorème 8. *Un RdPPO décrit par le système (2.13) est observable si et seulement si :*

1. *Toutes les places du RdP sont observables et le nombre de ces places doit être supérieur ou égal au nombre des transitions non observables c'est à dire $n_1 = n \geq m_2$.*

2. *$\text{rank} [W_2] = m_2$.*

Preuve 8. $\begin{bmatrix} \mathcal{E} & -W_2 \\ \mathcal{C} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E \\ C \end{bmatrix}$, et on utilise la démonstration du Théorème (5).

2.6 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté les notions de base de la théorie d'observabilité des systèmes à événements discrets. Nous présentons également une étude bibliographique concernant les travaux d'observabilité de ces systèmes, initiée par les travaux qui sont basés sur les automates à état finis. Ensuite, nous mettrons l'accent sur les approches qui ont recours aux RdP, qui se sont révélés très avantageux par rapport aux automates à état finis, grâce à leurs propriétés mathématiques et structurelles. Dans la dernière partie de ce chapitre, nous nous sommes intéressés à l'analyse d'observabilité pour les SED modélisés par des réseaux de Petri partiellement observables. L'idée principale est basée sur l'utilisation des méthodes traditionnelles d'observabilité des systèmes descripteurs pour caractériser l'observabilité des RdPPO. Le traitement que nous avons présenté est purement algébrique et donc facile à comprendre. Aussi, les résultats d'observabilité présentés sont très importants pour résoudre le problème du choix du nombre optimal des capteurs pour les SED décrits par RdPPO surtout quand nous avons la liberté de placer les capteurs (par exemple, lorsque nous concevons le système), et donc, nous pouvons minimiser leur nombre.

Chapitre 3

Synthèse d'observateur des systèmes à événements discrets

3.1 Introduction

Après avoir présenté, au chapitre précédent, les principales théories concernant l'observabilité de quelques classes de SED, nous nous intéressons dans ce chapitre à la synthèse d'observateurs pour les SED modélisés par des réseaux de Petri partiellement observables (RdPPO). Nous rappelons dans un premier temps, le principe d'observation qui est un concept très important dans le domaine d'estimation de l'état. Cette dernière dans le cas des RdP a pour objectif de déterminer le marquage du système en fonction des mesures partielles des places et/ou des transitions. Dans ce qui suit, on complète l'état de l'art des chapitres précédents avec les contributions qui concernent l'estimation d'état des SED, et plus particulièrement, à partir de leurs modèles RdP. Ainsi, deux méthodes de synthèse d'observateurs sont présentes, une méthode proposée par Alessandro Giua, Carla Seatzu basé sur l'observation des tirs de transition et autre méthode de synthèse d'un observateur de type Luenberger d'ordre réduit .

3.2 Principe d'observation

Dans la plupart des systèmes industriels, toutes les variables d'états ne peuvent pas être accessibles à la mesure, seules l'entrée u et la sortie y qui sont accessibles. Le principe d'observation est de reconstruire un vecteur \hat{x} , qui soit aussi proche que possible de x , à partir des données exploiter de la commande u et la sortie y .

La synthèse d'un observateur (appeler aussi estimateur d'état ou capteur virtuel) consiste à trouver un modèle d'état pour l'observateur en s'appuyant sur le modèle d'état du système. Au début et avant toute synthèse d'observateur, on doit se demander si sa conception est possible, la notion d'observabilité et certaines propriétés des entrées appliquées au système fournissent des conditions nécessaires à la synthèse d'un observateur. L'observabilité d'un système est donc un concept très important dans le domaine d'estimation de l'état. En effet, pour reconstruire les états inaccessibles d'un système, il faut savoir, à priori, si les variables d'états sont observables ou non, L'observabilité d'un système est la propriété qui permet de dire

si l'état peut être déterminé uniquement à partir de la connaissance des signaux d'entrées et de sorties.

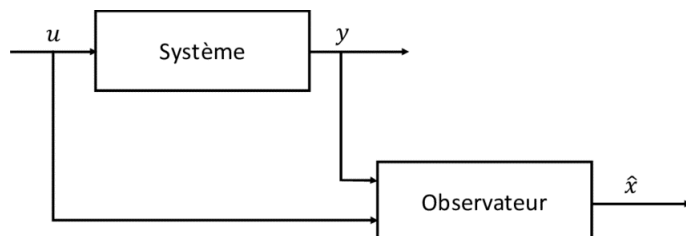


FIGURE 3.1 – Principe de l'observateur.

Un observateur est un système dynamique qui utilise la connaissance de la trajectoire de sa sortie pour estimer l'état d'un système.

Le but d'un observateur est de fournir une estimation de la valeur courante de l'état en fonction des entrées et sorties du système. Le principe de construction de l'observateur consiste aussi à corriger l'erreur d'estimation entre la sortie réelle et la sortie reconstruite c-à-dire d'exploiter u et y dans le but de reconstruire un vecteur \hat{x} qui soit aussi proche que possible de x .

Afin d'expliquer la procédure générale de la conception d'un observateur, on considère le système linéaire de la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad (3.1)$$

avec $x \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur d'état, $u \in \mathbb{R}^m$ est le vecteur d'entrée et $y \in \mathbb{R}^p$ est le vecteur de sortie. A, B, C sont des matrices constantes de dimension appropriée.

La structure de l'observateur peut être représentée par la figure (3.2) et exprimée sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + Bu(t) + L(y(t) - \hat{y}(t)) \\ \hat{y}(t) = C\hat{x}(t) \end{cases} \quad (3.2)$$

Le terme correctif $L(y(t) - \hat{y}(t))$ fait apparaître le gain de correction L , également appelé gain de l'observateur, relatif à l'erreur de la reconstruction de la sortie. On peut aussi écrire l'observateur sous la forme suivante :

$$\dot{\hat{x}}(t) = (A - LC)\hat{x}(t) + Bu(t) + Ly(t)$$

La dynamique de l'erreur de reconstruction, définie par $e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$, peut s'écrire :

$$\dot{e}(t) = (A - LC)e(t)$$

A partir de la condition initiale $e(0) = x(0) - \hat{x}(0)$, l'évolution de cette erreur d'estimation est telle que :

$$e(t) = e^{(A-LC)t}e(0)$$

Afin que l'observateur soit asymptotique, il faut que l'erreur d'estimation tende vers 0 lorsque $t \rightarrow \infty$. En effet, à $t = 0$, $e(0) \neq 0$ car l'état étant inaccessible, on ne peut en générale pas choisir $x(0) - \hat{x}(0)$. Afin de garantir une convergence asymptotique de l'erreur d'estimation ($\hat{x}(t) \rightarrow 0$ pour $t \rightarrow \infty$) et donc un bon fonctionnement de l'observateur, il faut choisir L de façon judicieuse.

Théorème 9. [50] Les valeurs propres de $(A-LC)$ peuvent être fixées arbitrairement si et seulement si (A, C) est observable.

La notion de stabilité d'un système en automatique est essentielle.

Le théorème suivant décrit la condition de stabilité.

Théorème 10. [50] Soit un système régi par (3.1). On dit que ce système est asymptotiquement stable si la matrice A est de Hurwitz. Une matrice A est dite de Hurwitz si toutes ses valeurs propres sont à parties réelles strictement négatives.

Lorsque le système n'est pas observable, il n'est pas possible de construire un observateur dont on choisit les dynamiques. Cependant, si le système est détectable il sera possible de dimensionner un observateur asymptotiquement stable, ce qui constitue l'objet du théorème suivant :

Théorème 11. [58] Pour un système régi par (3.1) est possible de dimensionner un observateur asymptotiquement stable si et seulement si la paire (A, C) est détectable. Les valeurs propres de $(A - LC)$ sont alors toutes ou en partie fixées.

Tout d'abord, il apparait clairement d'après les théorèmes (9) et (11) que la condition de convergence asymptotique de l'observateur dépend directement du dimensionnement de la matrice L .

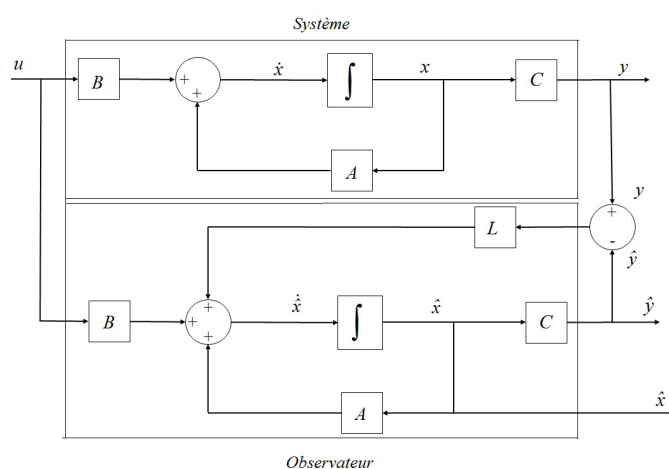


FIGURE 3.2 – Le schéma fonctionnel de système avec l'observateur.

Pour que l'observateur soit stable, il faut que les valeurs propres de la matrice

fondamentale de l'observateur ($A-LC$) doivent avoir des parties réelles négatives. Cependant si le système n'est pas observable mais détectable cela signifie que une partie des dynamiques de l'observateur sont stables mais ne sont pas choisies [71].

Pour bien choisir la dynamique de l'observateur (valeurs propres de $(A - LC)$), on peut s'appuyer sur les travaux de [37]. Cependant en pratique, on choisit une dynamique plus rapide pour l'erreur de reconstruction que celle du processus en boucle ouverte. Toutefois, on est limité au niveau de la grandeur de ces dynamiques choisies. Idéalement, une très grande dynamique devrait être utilisée pour assurer une convergence rapide et précise. Cependant, on ne peut utiliser que des gains réalisables, ce qui restreint le choix de L , et de plus, plus la valeur du gain sera élevée plus les bruits influenceront sur la reconstruction de l'état.

3.3 Observateur pour les systèmes à événement discret

Les travaux de recherche sur la synthèse d'observateurs des systèmes à événement discret susciter l'intérêt de la communauté automatique à travers le monde. Plusieurs approches ont été adoptées pour la synthèse de ces observateurs. La première approche est basée sur l'utilisation des automates à états finis et des langages formels, Ramadge [60] a été le premier à montrer comment un observateur pourrait être synthétisé pour un système partiellement observé. Caines et al [15] ont montré comment il est possible d'utiliser l'information contenue dans la séquence passée d'observations (donnée comme une séquence d'états d'observation et d'entrées de commande) pour calculer l'ensemble des états cohérents avec l'observation. Tandis que dans [73], la sortie de l'observateur est utilisée pour diriger l'état de l'usine vers un état terminal souhaité. Une approche similaire a également été utilisée par Kumar et al [42] dans le cadre des problèmes de surveillance par des contrôleurs dynamiques. Ozveren et Willsky [59] ont proposé une approche pour la construction d'observateurs qui permet de reconstruire l'état d'automates finis après une erreur de manipulation. Dans le même papier, les auteurs montrent que l'observateur peut avoir un nombre exponentiel d'états.

Pour les SED modélisés par les RdP, La plupart des méthodes d'estimation existantes se basent soit sur l'observabilité des événements ou bien sur d'autres hypothèses inspirées des propriétés des RdP. Le problème d'estimation pour les RdPs ne se limite pas uniquement à l'estimation d'état mais aussi au problème de reconstruction de la séquence de franchissement qui conduit un état donné. Pour le DES modélisé par les RdPs, les problèmes d'estimation les plus étudiés sont ceux concernant l'estimation d'état.

Dans le cas où seuls les capteurs de transitions sont disponibles l'estimation de l'état n'est généralement pas unique car les informations des capteurs peuvent être très limitées, elles sont représentées par un ensemble d'états cohérents (ensemble des marquage cohérents) dans lesquels le système peut se trouver. Nous trouvons une variété d'études effectuées dans [33, 62], [14] et autre, sous différentes hypothèses. Ainsi, les auteurs de [33] supposent que la structure du RdP est connue,

que le marquage initial est inconnu et que le franchissement de toutes les transitions est détectable. Par la suite, les auteurs de [62] se sont intéressés à la même problématique. Ils basent sur l'estimation du marquage initial ainsi que du marquage courant du système. Le but est de reconstruire ces marquages à partir d'une mesure partielle des transitions.

Plus tard, des événements silencieux sont considérés dans [12] mais le marquage initial est supposé connu. Dans [14], les auteurs traitent la problématique de l'estimation d'état des RdP dans un contexte probabiliste. Dans ce cas, ils supposent une connaissance a priori des probabilités de franchissement des transitions. D'autres contributions visent à s'affranchir de la connaissance du marquage initial, et ceci dans un contexte déterministe [48] ou probabiliste [13]. Dans ce dernier cas, les auteurs s'intéressent à la détermination du marquage initial.

Dans le cas où les capteurs des places et des transitions sont disponibles, l'estimation du vecteur du marquage doit être unique et exact. Dans ce contexte, les travaux présentés dans [44, 45] considèrent le problème de l'estimation d'état à partir d'une mesure partielle des événements et des marquages. Une autre méthodologie de synthèse d'observateur pour les SED modélisés par un RdP interprété est proposée dans [67], cet article traite du problème de la conception d'observateurs asymptotiques dans les systèmes à événements discrets modélisés par des réseaux de Petri interprétés (IPN) vivants, cycliques et conservateurs. Ensuite, une méthode d'estimation d'état des RdP partiellement observable en fonction d'une trajectoire de mesure a été présentée dans [3]. Cette approche est basée sur le calcul des probabilités des trajectoires compatibles.

Dans le cadre de problème d'estimation des séquences de franchissement, une approche dans [47] est proposé pour estimer les séquences de franchissement de transition à moindre cout qui correspondent à l'observation d'un séquence transitions dans une RdP donné. Dans [43], les auteurs ont étudié le problème de l'estimation de séquence de franchissement pour les transitions en suppose que le marquage du RdP est mesuré.

D'autres approche basée sur les RdPs ont été proposée dans la littérature. Dans la suite, nous allons présentés une approche développé dans [33] qui traite du problème de l'estimation du marquage d'un réseau, et autre développée dans [40] pour la synthèse d'un observateur de Luenberger d'ordre réduit pour les RdPPO.

3.3.1 Approche propose par Alessandro Giua, Carla Seatzu

Cette approche traite du problème de l'estimation du marquage d'un réseau de place/transition (P/T) basé sur l'observation des tirs de transition et présente un ensemble d'outils analytiques pour déterminer plusieurs propriétés d'observabilité. Un observateur construit selon cette approche peut également être utilisé dans une boucle de contrôle d'asservissement d'état.

Lorsque la structure et le marquage initial d'un RdP sont connus, la connaissance des tirs de transition est suffisante pour reconstituer le marquage que donne chaque

nouveau tir.

Cette approche est développée un algorithme pour l'estimation de l'état d'un réseau dont le marquage ne peut pas être directement observé à cause des trois hypothèses suivantes :

- La structure du réseau N est connue.
- Toutes les transitions sont observables.
- Le marquage initial est inconnu.

L'algorithme d'estimation des marquages d'un réseau de places/transitions est basé sur l'observation des événements en utilisant un graphe de recouvrement observateur et un vecteur d'erreur d'estimation relatif à chaque place du réseau. Les auteurs ont aussi montré que cette estimation, générée par l'observateur, pouvait être utilisée pour la synthèse de contrôleurs. L'algorithme proposé par Giua et Seatzu interdit le franchissement des transitions menant en dehors du comportement admissible. Cet algorithme n'est pas nécessairement optimal dans le sens où une transition admissible dans le comportement désiré peut être inhibée.

L'ensemble $M(W)$ représente l'ensemble des états consistants par rapport à une séquence de tirs w observée. Formellement, $M(W) = \{M | \exists M', M'[W]M\}$.

Dans la suite de cette partie, on note par M_w le marquage M tel que $M_0[W]M$ et par \vec{m} un vecteur $m1$ de zéro (de un) où m est le nombre de place du réseau. Pour une évolution du réseau donnée $M_{w_0}[t_{\alpha_1}]M_{w_1}[t_{\alpha_2}] \dots$, l'algorithme suivant est utilisé pour déterminer le marquage estimé μ_{w_i} relatif au marquage actuel M_{w_i} . Cet algorithme est basé sur l'observation de la séquence de tirs $w_i = t_{\alpha_1}t_{\alpha_2} \dots t_{\alpha_i}$.

Algorithme :

1. Soit le marquage estimé initial $\mu_{w_0} = \vec{0}_m$ et $w = w_0$ (séquence vide).
2. Soit $i = 1$.
3. Attendre le franchissement de t_{α_i} .
4. Mettre à jour le marquage estimé $\mu_{w_{i-1}} = \mu'_{w_i}$ avec

$$\mu'_{w_i}(p) = \max\{\mu_{w_{i-1}}(p), C^-(p, t_{\alpha_i})\}.$$
5. Soit $\mu'_{w_i} = \mu_{w_i} + C(\cdot, t_{\alpha_i})$.
6. Soit $i = i + 1$.
7. Aller en 3.

8. FIN.

Les auteurs ont établi un certain nombre d'hypothèses et définitions :

- Le marquage estimé est borné : $\mu_w = M_w$.
- On définit l'erreur de place : $e_p(M_w, \mu_w) \equiv M_w(p) - \mu_w(p)$ noté aussi e_p .
- On définit l'erreur d'estimation $e(M_w, \mu_w) \equiv \vec{1} \cdot (M_w, \mu_w)$.

Les deux fonctions d'erreur ainsi définies, ne sont pas croissantes :

$$e_p(M_{wt}, \mu_{wt}) = e_p(M_{wt}, \mu'_{wt}) \leq e_p(M_{wt}, \mu_{wt})$$

$$e(M_{wt}, \mu_{wt}) = e(M_{wt}, \mu'_{wt}) \leq e(M_{wt}, \mu_{wt})$$

L'ensemble des marquages consistants par rapport à la séquence de tirs observée w est alors :

$$M(w) = \{M | \exists M', M'[W]M\} \equiv \{M | M \geq \mu_w\}.$$

Le graphe de recouvrement observateur est ensuite défini et représente simultanément l'ensemble des marquages atteignables du réseau avec l'erreur d'estimation en utilisant l'algorithme précédent. Le marquage initial est représenté par un rectangle avec des angles arrondis. Les marquages dont le vecteur d'erreur d'estimation $= \vec{0}_m$ sont représentés par des rectangles foncés.

Exemple 5. Sur la Figure (3.3), un réseau de Petri est représenté ainsi que son graphe de recouvrement observateur. Chaque nœud de ce graphe représente le marquage réel M_w et l'erreur d'estimation : $e_p(M_w, \mu_w) \equiv M_w - \mu_w$.

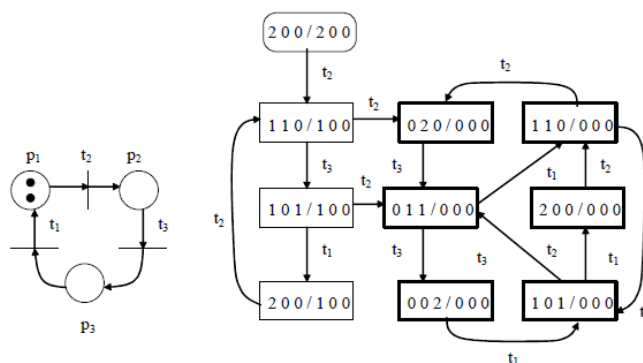


FIGURE 3.3 – Exemple d'un RdP et de son graphe de recouvrement observateur.

3.3.2 Synthèse d'observateurs pour les SED modélisés par les RdPPO

Dans ce paragraphe, nous nous intéressons à la synthèse d'observateurs pour les SED modélisés par les RdPPO. Nous allons présenter dans un premier temps une approche développée dans [40] pour la synthèse d'un observateur de Luenberger d'ordre réduit pour les RdPPO. Nous présenterons par la suite, une approche basée sur la synthèse d'un observateur à entrée inconnue pour les RdPPO représentés par le système (2.13), en considérant les transitions non observables comme des entrées inconnues.

3.3.2.1 Observateur d'ordre réduit pour les RdPPO

Nous présentons dans ce paragraphe, une méthode de synthèse d'un observateur de type Luenberger d'ordre réduit développée dans [40] pour un RdPPO représenté par système (2.9). L'observateur proposé est utilisé afin de reconstruire le vecteur global (composé par le vecteur des marquages des places complet M_k et le vecteur des transitions complet σ_k) à chaque instant k à partir d'un ensemble de marquages des places observables et des transitions observables. Avant de donner l'équation de l'observateur, nous supposons que le système (2.9) est au moins observable causal.

Nous verrons, dans le paragraphe suivant, comment utiliser cette forme d'état pour synthétiser un observateur d'ordre réduit capable de reconstruire n_2 places et m_2 transitions non observables.

Si la matrice E est de rang plein en lignes, nous pouvons trouver une matrice \mathcal{P} vérifiant l'équation suivante :

$$E\mathcal{P} = E \begin{bmatrix} E^+ & \mathcal{P} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_n & 0_{n \times m} \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

où $\mathcal{P}_1 = \text{Ker}(E) \in \mathbb{R}^{(n+m) \times m}$ est le noyau de la matrice E avec :

$$\mathcal{P}_1^T \mathcal{P}_1 = I_m.$$

et E^+ est la pseudo inverse de la matrice E et elle est donnée par :

$$E^+ = E^T (E \times E^T)^{-1}$$

La matrice \mathcal{P} est une matrice inversible avec :

$$\mathcal{P}\mathcal{P}^{-1} = \mathcal{P}^{-1}\mathcal{P} = I_{n+m}$$

et sa matrice inverse est :

$$\mathcal{P}^{-1} = \begin{bmatrix} E \\ \mathcal{P}_1^T \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

Le système (2.9) est équivalent à :

$$\begin{cases} \Pi_{k+1}^1 = A_1 \Pi_k^1 + A_2 \Pi_k^2 \\ y_k = C_1 \Pi_k^1 + C_2 \Pi_k^2 \end{cases} \quad (3.5)$$

Où

$$\begin{bmatrix} \Pi_k^1 \\ \Pi_k^2 \end{bmatrix} = \mathcal{P}^{-1} \Pi_k, \quad [A_1 \quad A_2] = A\mathcal{P}, \quad [C_1 \quad C_2] = C\mathcal{P} \quad (3.6)$$

De la même manière que précédemment, si la matrice C_2 est de rang plein, nous pouvons trouver une matrice \mathcal{P}_2 , telle que :

$$\mathcal{P}_2 C_2 = \begin{bmatrix} \mathcal{P}_3 \\ C_2^+ \end{bmatrix} C_2 = \begin{bmatrix} 0_{(n_1+m_1-m) \times m} \\ I_m \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

où $\mathcal{P}_3 = \text{Ker}((C_2)^T)$ et $C_2^+ = ((C_2)^T C_2)^{-1} (C_2)^T$.

Par pré-multiplication par \mathcal{P}_2 des deux côtés de l'équation de mesure dans système (3.5) nous obtenons :

$$\mathcal{P}_3 y_k = \mathcal{P}_3 C_1 \Pi_k^1 \quad (3.8)$$

$$\Pi_k^2 = C_2^+ y_k - C_2^+ C_1 \Pi_k^1 \quad (3.9)$$

Ensuite, nous remplaçons, l'équation (3.8) dans la première équation de (3.5), nous obtenons :

$$\begin{cases} \Pi_{k+1}^1 = \bar{A} \Pi_k^1 + A_2 C_2^+ y_k \\ \bar{y}_k = \bar{C} \Pi_k^1 \end{cases} \quad (3.10)$$

avec :

$$\begin{cases} \bar{A} = (A_1 - A_2 C_2^+ C_1) \\ \bar{C} = \mathcal{P}_3 C_1 \\ \bar{y}_k = \mathcal{P}_3 y_k \end{cases}$$

Suivant le principe de construction des observateurs, on peut proposer la structure classique d'un observateur d'ordre réduit suivante :

$$\begin{cases} \zeta_{k+1} = F\zeta_k + Gy_k \\ \hat{\Pi}_k = V\zeta_k + Dy_k \end{cases}, \quad (3.11)$$

où $\zeta_k \in \mathbb{R}^n$ est l'état de l'observateur et F, G, V et D sont des matrices de dimensions appropriées à calculer.

A partir de l'équation du système (3.10) et de son observateur (3.11), les estimations de Π_k^1, Π_k^2 et Π_k sont respectivement les vecteurs les vecteurs $\zeta_k, \hat{\Pi}_k^2$ et $\hat{\Pi}_k$

La construction de l'observateur consiste à trouver les matrices F, G, V et D tel que le vecteur d'état estimé $\hat{\Pi}_k$ converge asymptotiquement vers le vecteur l'état Π_k .

En tenant compte de la forme de l'équation d'état (3.10), l'équation de l'observateur (3.11) devient :

$$\begin{cases} \zeta_{k+1} = (\bar{A} - L\bar{C})\zeta_k + (A_2C_2^+ + LP_3)y_k \\ \hat{\Pi}_k^2 = C_2^+(y_k - C_1\zeta_k) \\ \hat{\Pi}_k^1 = [E^+ \quad P_1] \begin{pmatrix} \zeta_k \\ \hat{\Pi}_k^2 \end{pmatrix} \end{cases} \quad (3.12)$$

Avec L une matrice gain à calculer. Elle est choisie pour que $(\bar{A} - L\bar{C})$ soit stable. Finalement, l'observateur d'ordre réduit (3.11) est obtenu en choisissant les matrices F, G, V et D de la manière suivante :

$$\begin{cases} F = (\bar{A} - RC) \\ G = (A_2C_2^+ + LP_3) \\ V = (E^+ - P_1C_2^+C_1) \\ D = (P_1C_2^+) \end{cases} \quad (3.13)$$

avec L une matrice gain à calculer. Elle est choisie pour que $(\bar{A} - L\bar{C})$ soit stable.

3.4 Conclusion

Ce chapitre est consacré à la synthèse d'observateurs pour les SED modélisés par des réseaux de Petri partiellement observables. Dans un premier temps, nous avons fait un bref état de l'art sur les observateurs des SED. Bien entendu, cet état de l'art n'est pas complet, mais nous avons essayé d'être objectif à son contenu. Par la suite, les approches que nous avons proposées pour l'estimation du marquage discret du système est inspirée de celle développée dans [10] et s'appuie sur le principe d'un observateur de Luenberger d'ordre réduit et autre approche basée basé sur l'observation des tirs de transition.

Chapitre 4

Synthèse d'observateur à entrée inconnue pour les RdPPO

4.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous nous intéressons à la synthèse d'observateurs pour les SED modélisés par les RdPPO. Nous avons vu précédemment que les RdPPO peut être représenté sous forme d'un système descripteur (2.15). Pour cela, nous aborderons le problème d'estimation d'état pour les RdPPO basés sur les principes de la synthèse d'observateurs pour les systèmes descripteurs. Nous proposons dans la première partie une approche basée sur la synthèse d'un observateur à entrée inconnue pour les RdPPO représentés par le système (2.13), en considérant les transitions non observables comme des entrées inconnues. Nous présenterons dans la deuxième partie un système de production comme un exemple d'application pour monter l'efficacité de l'approche proposée.

4.2 Observateur à entrée inconnue pour les RdPPO

Le principe fondamental d'observateur à entrée inconnue repose sur l'injection d'un signal dépendant des informations mesurables, notamment les sorties afin de faire converger l'erreur d'estimation vers zéro selon une dynamique désirée.

Nous nous intéressons dans cette partie à la synthèse d'un observateur à entrées inconnues pour des systèmes modélisés par les RdPPO afin d'estimer l'état discret (marquage des places) et les séquences de franchissement de transitions (vecteurs de transition). L'idée principale est basée sur l'écriture de l'équation de marquage (2.3) sous la forme d'un système descripteur (2.15), et nous supposons que l'ensemble de transition non observable σ_k^2 comme des entrées inconnues pour le système (2.13).

L'observateur proposé fournit à chaque instant, vecteur global généralisé θ_k à chaque instant k se compose du vecteur marqueur M_k et du vecteur de transition mesurées σ_k^1 . Une fois le vecteur global θ_k est donné, nous pouvons calculer la transition non mesurée à partir de l'équation système (2.13).

4.2.1 Estimation de l'état discret

Notre objectif est de synthétiser un observateur à entrée inconnue pour le descripteur système (2.15) en utilisant des méthodes traditionnelles pour les systèmes descripteurs afin d'estimer le vecteur global θ_k .

Avant de donner l'équation de l'observateur, nous supposons que le système (2.13) est causal observable. Sous cette hypothèse, un OEI pour le système (2.13) est décrit par l'équation suivante :

$$\begin{cases} \zeta_{k+1} = N\zeta_k + Ly_k \\ \hat{\theta}_k = \zeta_k + Hy_k \end{cases}, \quad (4.1)$$

où $\zeta_k \in \mathbb{N}^{n+m_1}$ est l'état de l'observateur, y_k est la sortie du système à l'instant k et N, L et H sont des matrices de dimensions appropriées à calculer.

Le problème de la conception d'un observateur (4.1) pour le système (2.13) se réduit à trouver des matrices N, L et H telles que le vecteur global estimé $\hat{\theta}_k$ converge vers le vecteur de l'état θ_k .

Lorsque l'observateur (4.1) est appliqué au système (2.13) l'erreur de l'estimation est définie comme :

$$\begin{aligned} e_k &= \theta_k - \hat{\theta}_k \\ &= \theta_k - \zeta_k - HC\theta_k \\ &= (I_s - HC)\theta_k - \zeta_k. \end{aligned}$$

avec $s = n + m_1$

Soit $\mathcal{U} \in \mathbb{R}^{s \times n}$ une matrice réelle telle que :

$$\mathcal{U}\mathcal{E} = I_s - HC.$$

L'erreur d'estimation devient :

$$e_k = \mathcal{U}\mathcal{E}\theta_k - \zeta_k. \quad (4.2)$$

A l'instant t_{k+1} , l'erreur d'estimation est :

$$\begin{aligned} e_{k+1} &= \mathcal{U}\mathcal{E}\theta_{k+1} - \zeta_{k+1} \\ &= \mathcal{U}(\mathcal{A}\theta_k + W_2 \sigma_{k+1}^2) - N\zeta_k - LC\theta_k \\ &= \mathcal{U}\mathcal{A}\theta_k - N(\mathcal{U}\mathcal{E}\theta_k - e_k) - LC\theta_k + \mathcal{U}W_2\sigma_{k+1}^2. \end{aligned}$$

Par conséquent, l'évolution de l'erreur d'estimation est décrite par :

$$e_{k+1} = Ne_k + (\mathcal{U}\mathcal{A} - N\mathcal{U}\mathcal{E} - LC)\theta_k + \mathcal{U}W_2\sigma_{k+1}^2. \quad (4.3)$$

L'erreur d'estimation converge vers zéro si les conditions suivantes sont satisfaites :

$$\mathcal{U}\mathcal{E} = I_s - HC, \quad (4.4)$$

$$N \text{ est stable,} \quad (4.5)$$

$$\mathcal{U}\mathcal{A} = N\mathcal{U}\mathcal{E} + L\mathcal{C}, \quad (4.6)$$

$$\mathcal{U}W_2 = 0. \quad (4.7)$$

Maintenant, nous discuterons brièvement comment calculer les matrices \mathcal{U} , N , L et H .

D'après (4.4) et (4.7), on obtient :

$$[\mathcal{U} \quad H] \begin{bmatrix} \mathcal{E} & W_2 \\ \mathcal{C} & 0 \end{bmatrix} = [I_s \quad 0_{s \times m_2}].$$

La matrice $\begin{bmatrix} \mathcal{E} & W_2 \\ \mathcal{C} & 0 \end{bmatrix}$ est supposée de rang plein, car elle représente la condition d'observabilité causale comme mentionné dans le théorème (7). Alors, nous pouvons obtenir les matrices \mathcal{U} et H comme suit :

$$[\mathcal{U} \quad H] = [I_s \quad 0_{s \times m_2}] \begin{bmatrix} \mathcal{E} & W_2 \\ \mathcal{C} & 0 \end{bmatrix}^+, \quad (4.8)$$

où la pseudo-inverse d'une matrice $()$ est définie comme $()^+ = ()^T \times (() \times ()^T)^{-1}$. Remplaçant (4.4) dans (4.6), nous obtenons :

$$\mathcal{U}\mathcal{A} = N(I - HC) + L\mathcal{C} \Rightarrow N = \mathcal{U}\mathcal{A} - (L - NH)\mathcal{C}.$$

En posant :

$$K = L - NH. \quad (4.9)$$

On obtient :

$$N = \mathcal{U}\mathcal{A} - K\mathcal{C}, \quad (4.10)$$

$$L = K + NH. \quad (4.11)$$

L'erreur d'estimation peut être réécrite en utilisant l'équation (4.3) et (4.10) sous la forme :

$$e_{k+1} = (\mathcal{U}\mathcal{A} - K\mathcal{C})e_k. \quad (4.12)$$

Donc, l'erreur d'estimation converge vers zéro si la matrice $(N = \mathcal{U}\mathcal{A} - K\mathcal{C})$ est stable. Cette matrice peut être stabilisée par la matrice de gain K si la paire $(\mathcal{U}\mathcal{A}, \mathcal{C})$ est détectable.

Le théorème suivant résume les dérivations précédentes et donne des conditions nécessaires pour l'existence de l'observateur (4.1) :

Théorème 12. *Il existe un observateur (4.1) pour le système (2.13) si les conditions suivantes sont satisfaites :*

1. La paire $(\mathcal{U}\mathcal{A}, \mathcal{C})$ est détectable c'est à dire :

$$\text{rang} \begin{bmatrix} \lambda I_s - \mathcal{U}\mathcal{A} \\ \mathcal{C} \end{bmatrix} = s, \forall \lambda \in \mathbb{C}, |\lambda| \geq 1.$$

2. L'initialisation de l'observateur doit être donnée comme :

$$\zeta_0 = \mathcal{U}\mathcal{E}\theta_0,$$

avec la matrice $\mathcal{U} \in \mathbb{R}^{s \times n}$ calculée à l'aide de l'équation (4.8).

Preuve 9. [8] La condition 1 du Théorème (12) a déjà été prouvée précédemment. Ci-après, nous allons montrer que la condition 2 est nécessaire lorsque l'erreur initiale appartient au sous-espace non observable.

La condition 1 du théorème (12) implique que $\forall \lambda \in \mathbb{C}, |\lambda| \geq 1$,

$$\text{rang} \begin{bmatrix} \lambda \mathcal{U}\mathcal{E} - \mathcal{U}\mathcal{A} + \lambda \mathcal{H}\mathcal{C} \\ \mathcal{C} \end{bmatrix} = s,$$

il existe une matrice $\begin{bmatrix} \mathcal{U} & \mathcal{H} \end{bmatrix}$ de rang complet telle que :

$$= \text{rang} \left(\begin{bmatrix} \mathcal{U} & \mathcal{H} & 0 \\ 0 & 0 & I_\mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda \mathcal{E} - \mathcal{A} \\ \lambda \mathcal{C} \\ \mathcal{C} \end{bmatrix} \right),$$

avec $\mu = n_1 + m_1$

$$= \text{rang} \begin{bmatrix} \lambda \mathcal{E} - \mathcal{A} \\ \mathcal{C} \end{bmatrix}.$$

En utilisant l'équation (2.14), on obtient :

$$= \text{rang} \begin{bmatrix} \lambda I_{n_1} - I_{n_1} & 0 & -\lambda W_{11} \\ 0 & \lambda I_{n_2} - I_{n_2} & -\lambda W_{12} \\ I_{n_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_{m_1} \end{bmatrix},$$

$$= n_1 + \text{rang} \begin{bmatrix} 0 \\ \lambda I_{n_2} - I_{n_2} \\ 0 \end{bmatrix} + m_1.$$

Alors, pour $\lambda = 1$ le rang de la matrice $\begin{bmatrix} \lambda I_s - \mathcal{U}\mathcal{A} \\ \mathcal{C} \end{bmatrix}$ est inférieur à $(n + m_1)$ ce qui signifie que la paire $(\mathcal{U}\mathcal{A}, \mathcal{C})$ n'est pas complètement observable. Le sous-espace non observable est engendré par $\begin{bmatrix} 0 & I_{n_2} & 0 \end{bmatrix}^T$ et correspond à la valeur propre $\lambda = 1$. Ainsi, pour éviter l'instabilité de l'observateur, l'erreur d'estimation doit être nulle à l'instant initial. Ainsi, l'erreur initiale doit vérifier $e_0 = \mathcal{U}\mathcal{E}\theta_0 - \zeta_0 = 0 \Rightarrow \zeta_0 = \mathcal{U}\mathcal{E}\theta_0$.

4.2.2 Estimation de la séquence de franchissement

Nous avons vu dans le paragraphe précédent, comment estimer le vecteur de marquage des places du RdPPO. Maintenant, nous nous intéressons au problème de l'estimation de la séquence de franchissement. Ce problème revient à déterminer le vecteur de transitions σ_k composé d'un ensemble de transitions observables σ_k^1 et

un ensemble de transitions non observables σ_k^2 . Par conséquent, les transitions non observables σ_k^2 sont calculées dans le théorème suivant :

Théorème 13. *Les transitions non observables σ_k^2 sont calculées par l'équation suivante :*

$$\sigma_{k+1}^2 = W_2^+ \mathcal{E}\theta_{k+1} - W_2^+ \mathcal{A}\theta_k. \quad (4.13)$$

Preuve 10. *Sous l'hypothèse que le système (2.13) est causal observable c'est à dire $\text{rang}[W_2] = m_2$, on peut donc estimer les transitions non observables de l'équation (2.13) par l'équation (4.13).*

4.2.3 Exemple de Simulation

Dans cette section, nous allons présenter quelques résultats de simulation d'un exemple académique simple afin d'illustrer l'efficacité d'observateur proposé. Dans la phase consacrée à la simulation, deux étapes sont importantes. La première consiste à déterminer le modèle du RdP, nous avons utilisé StateFlow de Matlab pour présenter ce modèle qui a comme sortie les places et les transitions mesurables (connues). La deuxième partie présente un observateur pour le RdP qui reçoit comme entrées le vecteur de sortie du modèle RdP.

On considère le RdP présenté dans la figure (4.1), initialement marqué avec un jeton dans la place p_1 .

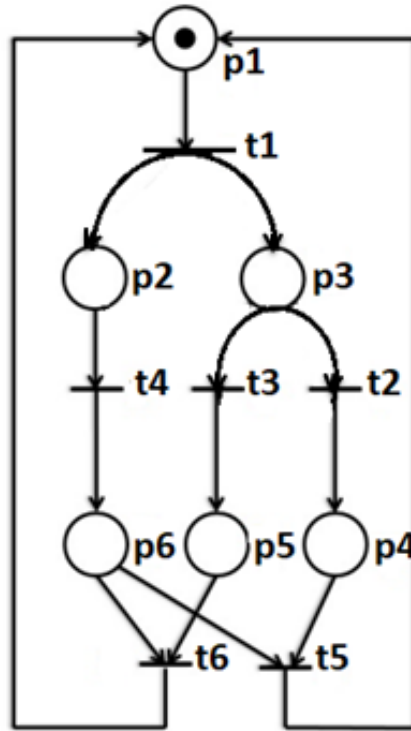


FIGURE 4.1 – Le modèle du RdP

La matrice d'incidence W et le vecteur de marquage initial M_0 associés au modèle du RdP présenté dans la figure (4.1) sont donnés par :

$$W = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \text{ et } M_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Dans ce système, nous supposons que les places p_1, p_2 et p_3 sont observables, et les transitions t_2, t_3 et t_5 sont observables c'est à dire ($n_1 = 3, n_2 = 3, m_1 = 3$ et $m_2 = 3$). Aussi, nous supposons que la transition t_4 est franchie en même temps que la transition t_2 ou t_3 c'est à dire les paires (t_4, t_2) ou (t_4, t_3) peuvent être franchies en une seule étape.

Le modèle mathématique correspondant au RdP indiqué sur la figure (4.1) peut être représenté par un système descripteur de type (2.9).

Pour décider de l'observabilité en se basant sur le test du rang d'une matrice, on obtient :

$$\text{rang} \begin{bmatrix} \mathcal{E} & -W_2 \\ \mathcal{C} & 0 \end{bmatrix} = 12.$$

La condition est vérifiée, donc le RdP étudié est causal observable.

Maintenant, en utilisant l'approche structurale pour les RdP comme dans [2] et [49], nous constatons que le RdP donné dans la figure (4.1) est observable car toutes les transitions sont détectables. Cependant dans le cas où les transitions t_2 et t_3 ont le même symbole (alphabet) et de même pour les transitions t_5 et t_6 (c'est à dire $\eta(t_2) = \eta(t_3)$ et $\eta(t_5) = \eta(t_6)$), le RdP n'est pas observable parce que les transitions ne peuvent être distinguées et l'estimation d'état n'est pas unique. Alors qu'avec notre approche, le RdP reste **causal observable** grâce à la représentation binaire des franchissements des transitions dans la sortie du système.

Maintenant, pour la conception de l'observateur à entrée inconnue (4.1), nous devons choisir, les matrices \mathcal{U}, H, K, N et L telles que l'estimation du vecteur global θ_k (composé des marquages des places et des transitions observables) peut être reconstruit exactement à n'importe quelle étape k . Pour cela, on peut calculer les matrices \mathcal{U} et H de l'équation (4.8), la matrice K doit être choisie de telle sorte que la matrice N soit stable. Enfin, N et L sont calculées respectivement à partir des équations (4.10) et (4.11). Les valeurs numériques de ces matrices sont données en annexe (4.3).

L'état initial du système est $\theta_0 = [M_0 \ 0_4]^T$ et l'état initial de l'observateur est $\zeta_0 = \mathcal{U}\mathcal{E}\theta_0$, nous obtenons le vecteur complet d'états comme :

$$\hat{\theta}_k = \begin{bmatrix} \hat{p}_1 \\ \hat{p}_2 \\ \hat{p}_3 \\ \hat{p}_4 \\ \hat{p}_5 \\ \hat{p}_6 \\ \hat{t}_2 \\ \hat{t}_3 \\ \hat{t}_5 \\ \hat{t}_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k=0 & k=1 & k=2 & k=3 & k=4 & k=5 & k=6 & k=7 & k=8 & k=9 & k=10 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

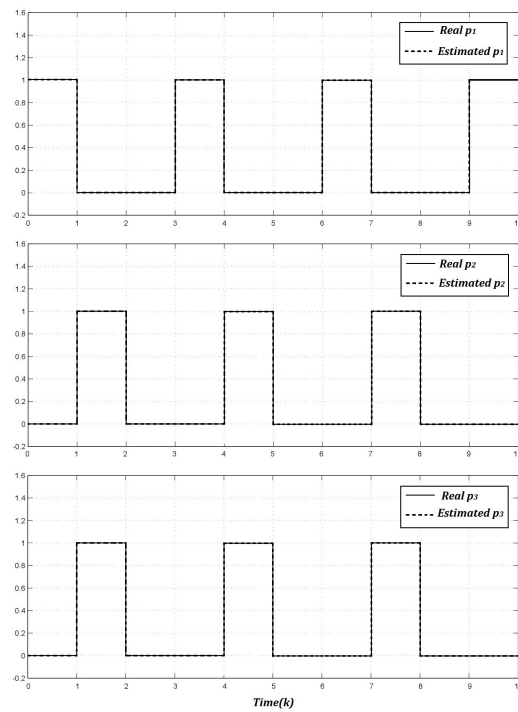


FIGURE 4.2 – **Haut** Le mode réel et estimé du p_1 en fonction de k . **Milieu** Le mode réel et estimé du p_2 en fonction de k . **Bas** Le mode réel et estimé du p_3 en fonction de k .

la figures (4.2) représente les modes réels et les modes estimés des places observables p_1, p_2 et p_3 et la figure (4.3) représente les modes réels et les modes estimés des places non observables p_4, p_5 et p_6 . On constate que le mode estimé suit parfaitement le mode réel, ce qui montre l'efficacité de l'observateur proposé.

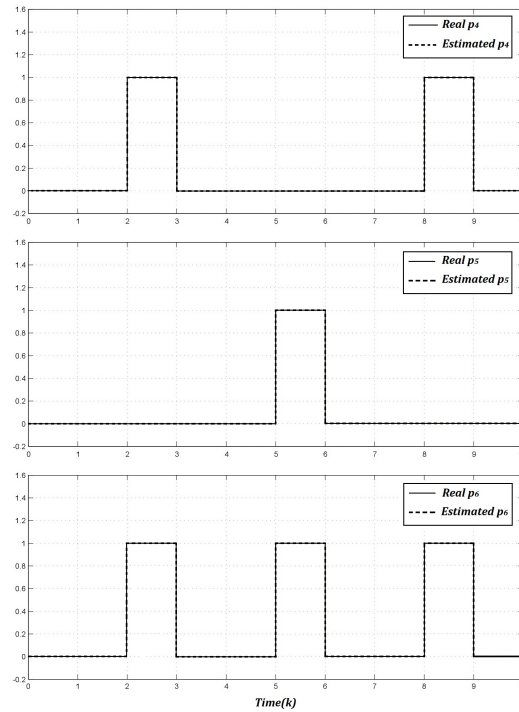


FIGURE 4.3 – **Haut** Le mode réel et estimé du p_4 en fonction de k . **Milieu** Le mode réel et estimé du p_5 en fonction de k . **Bas** Le mode réel et estimé du p_6 en fonction de k .

Enfin, à partir de l'équation (4.13), nous pouvons obtenir les entrées inconnues (les transitions non mesurés), comme indiqué dans le vecteur des transitions complet :

$$\hat{\sigma}_k = \begin{bmatrix} \hat{t}_1 \\ \hat{t}_2 \\ \hat{t}_3 \\ \hat{t}_4 \\ \hat{t}_5 \\ \hat{t}_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k=0 & k=1 & k=2 & k=3 & k=4 & k=5 & k=6 & k=7 & k=8 & k=9 & k=10 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

On peut remarquer que les transitions t_2 et t_4 sont franchies simultanément à $k = 2, k = 8$ et la même chose pour t_3 et t_4 à $k = 5$.

4.2.4 Exemple d'application

Dans cette section, l'observateur proposé est appliqué à un exemple d'un système de production (4.9)

Dans une cellule de production représentée sur la figure (4.4), est composé de deux lignes de production $LP_i, i = [1, 2]$. La ligne de production LP est composée un stock d'entrée de pièces ME_i , un tapis roulant CC_i et un stock de sortie de

pièces MS_i . Le tapis roulant CC_i a deux zones de travail ZT_i^j , $j = [1, 2]$. Il existe deux robots, nommés R_1 et R_2 , qui sont communs aux deux lignes de productions. Il existe des capteurs pour indiquer que les pièces sont chargées dans les zones de travail et indiquer que les opérations sont terminées, il existe aussi des signaux pour commander aux robots de choisir les pièces et de terminer les tâches [64].

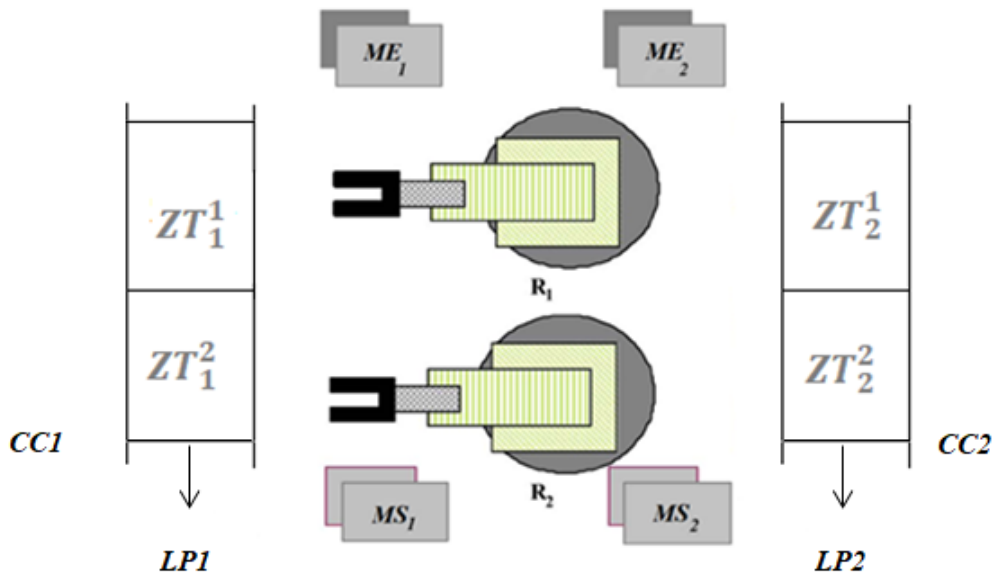


FIGURE 4.4 – Cellule de production

4.2.4.1 Modélisation du système étudié

Dans cette section, nous allons montrer comment modéliser notre système étudié par un RdP. Ce dernier est utilisé afin de donner une modélisation fonctionnelle de ce type de systèmes. La modélisation fonctionnelle permet de décrire le comportement du système dans les conditions de fonctionnement normal.

- **Modélisation des stocks d'entrées :** Le système étudié comporte deux entrées ME_1 et ME_2 chaque entrée est représenté par deux places et deux transition (P_1, P_2, t_1, t_2) et (P_3, P_4, t_3, t_4) respectivement. Les places P_1 et P_3 signifient que l'entrée est occupée tandis que P_2 et P_4 signifient que l'entrée est vide.

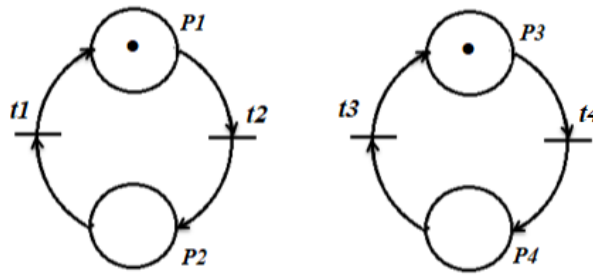


FIGURE 4.5 – Modélisation des stocks d'entrées 1 et 2

- **Modélisation des robots :** Le robot R_1 récupère une pièce de ME_i et la dépose dans ZT_i^1 de CC_i . Il effectue une tâche de perçage de la pièce en ZT_i^1 et déplace les pièces percées de ZT_i^1 à ZT_i^2 . Le robot R_2 exécute la tâche de polissage sur la pièce déposée dans ZT_i^2 . Quand les pièces est poli, le même robot R_2 décharge des pièces de ZT_i^2 et les déplace vers le stock de sortie MS_i .

La modélisation des robots R_1 et R_2 est donné dans la figure (4.6). Les places ($P_5, P_6, P_7, P_8, P_9, P_{10}, P_{11}$) représentent respectivement les états (Inactive, chargement de pièce 1, Perçage de pièce 1, pièce 1 est percée, chargement de pièce 2, perçage de pièce 2, pièce 2 est percée) et les places ($P_{12}, P_{13}, P_{14}, P_{15}, P_{16}, P_{17}, P_{18}, P_{19}$) représentent respectivement les états (Inactive, chargement de pièce 1, polissage pièce 1, pièce 1 est polie, chargement de pièce 2, polissage pièce 2, pièce 2 est polie).

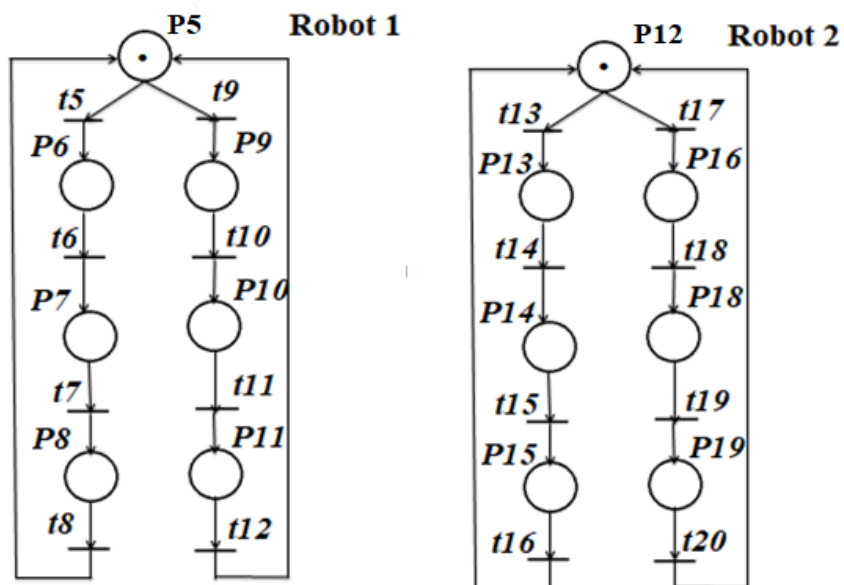


FIGURE 4.6 – Modélisation de robot 1 et 2

- **Modélisation des convoyeur :** Les convoyeurs (tapis roulant) CC_1 et CC_2 sont représentés par $(P_{19}, P_{20}, t_{21}, t_{22})$ et $(P_{21}, P_{22}, t_{23}, t_{24})$ respectivement. Les places P_{19} et P_{21} signifient que convoyeur de courrier est occupée tandis que P_{20} et P_{22} signifient que l'entrée est vide.

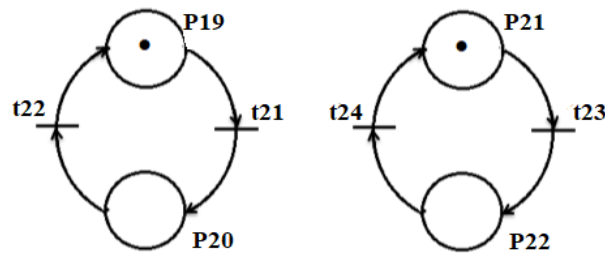


FIGURE 4.7 – Modélisation des convoyeurs

- **Modélisation de stocks de sorties :** Quand les pièces est poli, le même robot R_2 décharge des pièces de ZT_i^2 et les déplace vers le stock de sortie MS_1 où MS_2 , chaque sortie est représentée par deux places et deux transition $(P_{23}, P_{24}, t_{25}, t_{26})$ et $(P_{25}, P_{26}, t_{27}, t_{28})$ respectivement. Les places P_{23} et P_{25} signifient que le stock est occupée tandis que P_{24} et P_{26} signifient que le stock est vide.

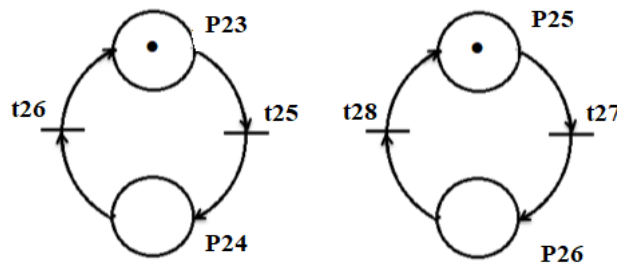


FIGURE 4.8 – Modélisation des stocks de sorties

4.2.5 Modélisation fonctionnelle du système étudié par un RdP

Dans cette partie, nous allons présenter la modélisation de notre système dans le cas de fonctionnement normal. La figure (4.9) montre la modélisation fonctionnelle du système étudié.

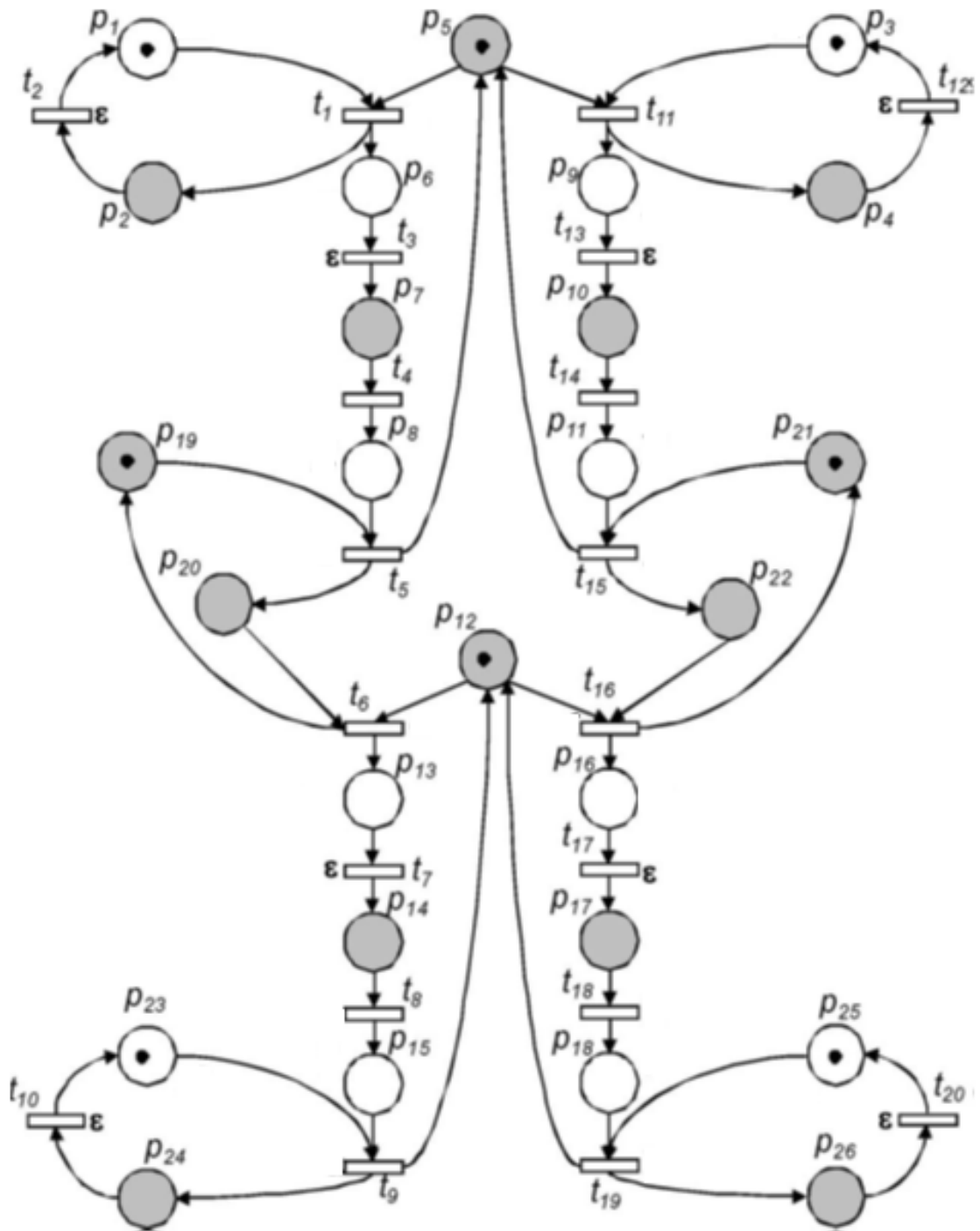


FIGURE 4.9 – Modélisation fonctionnelle du système étudié

[64]

Places /transitions	Significations
$ME_1\{P_1, P_2\}$	{Occupée, Vide}
$ME_2\{P_3, P_4\}$	{Occupée, Vide}
$CC_1\{P_{19}, P_{20}\}$	{Occupée, Vide}
$CC_2\{P_{21}, P_{22}\}$	{Occupée, Vide}
$R_1\{P_5, P_6, P_7, P_8, P_9, P_{10}, P_{11}\}$	(Inactive, chargement de pièce1, Perçage de pièce 1, pièce 1 est percée, chargement de pièce 2, perçage pièce 2, pièce2 est percée)
$R_2\{P_{12}, P_{13}, P_{14}, P_{15}, P_{16}, P_{17}, P_{18}\}$	(Inactive, chargement de pièce 1, polissage pièce 1, pièce 1 est polie, chargement de pièce 2, polissage pièce 2, pièce2 est polie)
$MS_1\{P_{23}, P_{24}\}$	{Occupée, Vide}
$MS_2\{P_{25}, P_{26}\}$	{Occupée, Vide}
t_1	Robot1 port la pièce de ME_1
t_{11}	Robot1 port la pièce de ME_2
t_4	Robot1 termine le perçage ZT_1^1
t_{14}	Robot1 termine le perçage ZT_1^2
t_6	Robot2 port la pièce de ZT_2^2
t_{11}	Robot2 port la pièce de ZT_1^1
t_7	Robot2 termine le perçage ZT_2^2
t_{17}	Robot2 termine le perçage ZT_1^2
t_5	Robot1 charge la pièce dans ZT_2^1
t_{15}	Robot2 charge la pièce dans ZT_2^2
t_9	Robot1 décharge la pièce ZT_2^1
t_{19}	Robot2 décharge la pièce ZT_2^2

TABLE 4.1 – Les notations associées à la modélisation du RdP.

Maintenant nous présentons un tableau qui montre la nomenclature de la modélisation :

Dans ce système, nous supposons que les places $P_1, P_3, P_6, P_8, P_9, P_{11}, P_{13}, P_{15}, P_{16}, P_{18}, P_{23}$ et P_{25} sont observables et les transitions $t_1, t_4, t_5, t_6, t_7, t_9, t_{11}, t_{14}, t_{15}, t_{16}, t_{17}$ et t_{19} sont observables c'est à dire ($n_1 = 12, n_2 = 14, m_1 = 12$ et $m_2 = 8$). Le modèle mathématique correspondant au RdP indiqué sur la figure (4.9) peut être représenté par un système descripteur de type (2.9).

La matrice d'incidence W et le vecteur de marquage initial M_0 associés au modèle du RdP présenté dans la figure (4.9) sont donnés par :

$$\hat{\theta}_k = \begin{bmatrix} \hat{P}_1 \\ \hat{P}_3 \\ \hat{P}_6 \\ \hat{P}_8 \\ \hat{P}_9 \\ \hat{P}_{11} \\ \hat{P}_{13} \\ \hat{P}_{15} \\ \hat{P}_{16} \\ \hat{P}_{18} \\ \hat{P}_{23} \\ \hat{P}_{25} \\ \hat{P}_2 \\ \hat{P}_4 \\ \hat{P}_5 \\ \hat{P}_7 \\ \hat{P}_{10} \\ \hat{P}_{12} \\ \hat{P}_{14} \\ \hat{P}_{17} \\ \hat{P}_{19} \\ \hat{P}_{20} \\ \hat{P}_{21} \\ \hat{P}_{22} \\ \hat{P}_{24} \\ \hat{P}_{26} \\ \hat{t}_1 \\ \hat{t}_4 \\ \hat{t}_5 \\ \hat{t}_6 \\ \hat{t}_8 \\ \hat{t}_9 \\ \hat{t}_{11} \\ \hat{t}_{14} \\ \hat{t}_{15} \\ \hat{t}_{16} \\ \hat{t}_{18} \\ \hat{t}_{19} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k=0 & k=1 & k=2 & k=3 & k=4 & k=5 & k=6 & k=7 & k=8 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

Les résultats des simulations apparaissent sur les figures (4.10) et (4.11) représentent les modes réels et les modes estimés des places observables ($P_1, P_3, P_6, P_8, P_9, P_{11}, P_{13}, P_{15}, P_{16}, P_{18}, P_{23}$ et P_{25}) et les figures (4.12), (4.13) et (4.14) représente les modes réels et les modes estimés des places non observables ($P_2, P_4, P_5, P_7, P_{10}, P_{12}, P_{14}, P_{17}, P_{19}, P_{20}, P_{21}, P_{22}, P_{24}$ et P_{26}). Nous remarquons que, les modes es-



FIGURE 4.10 – Le mode réel et estimé des places P_1 , P_3 , P_6 , P_8 , P_9 et P_{11} respectivement en fonction de k .

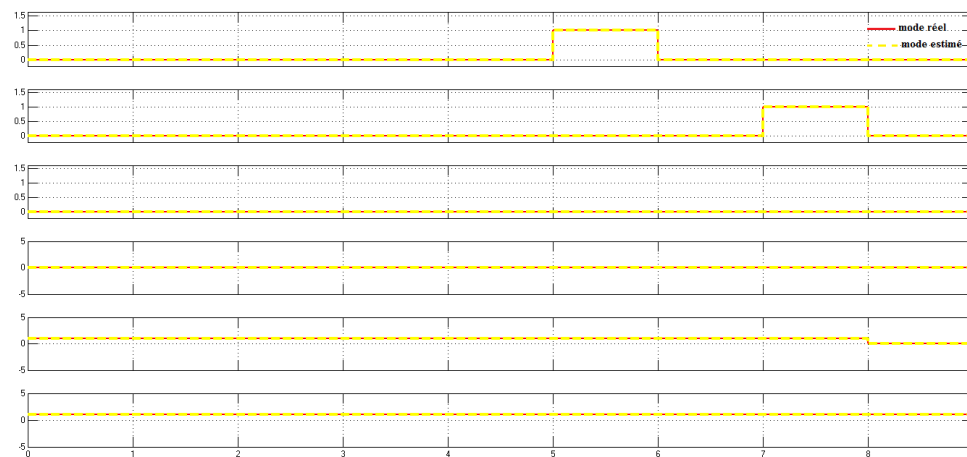


FIGURE 4.11 – Le mode réel et estimé des places P_{13} , P_{15} , P_{16} , P_{18} , P_{23} et P_{25} respectivement en fonction de k .

timés sont correctement identifiés, ce qui montre l'efficacité de l'observateur proposé.



FIGURE 4.12 – Le mode réel et estimé des $P_2, P_4, P_5, P_7, P_{10}$ et P_{12} respectivement en fonction de k .

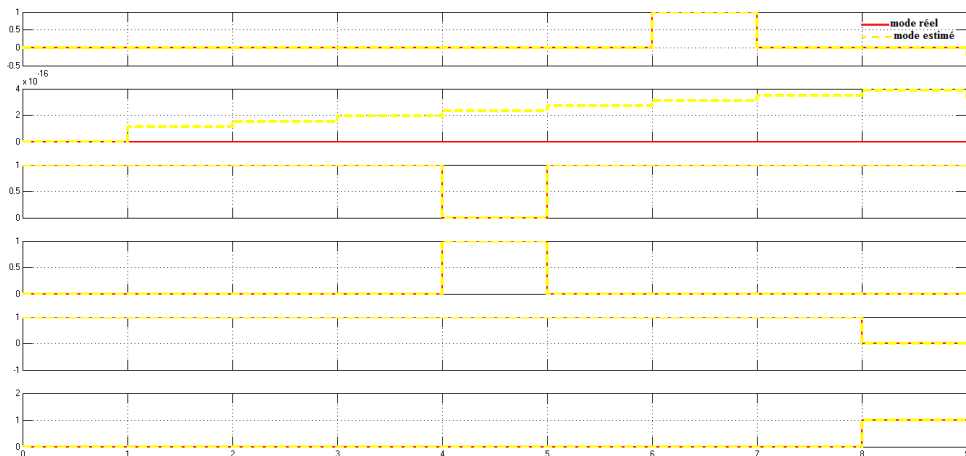


FIGURE 4.13 – Le mode réel et estimé des places $P_{14}, P_{17}, P_{19}, P_{20}, P_{21}$ et P_{22} respectivement en fonction de k .

Enfin, à partir de l'équation (4.13), nous pouvons obtenir les entrées inconnues (les transitions non observables), comme indiqué dans le vecteur des transitions complet :

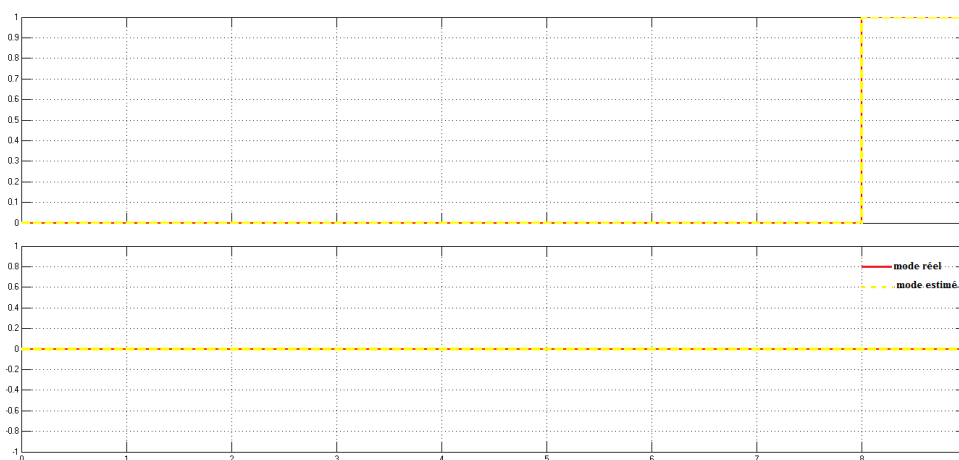


FIGURE 4.14 – **Haut** Le mode réel et estimé du P_{24} en fonction de k . **Bas** Le mode réel et estimé du P_{26} en fonction de k .

$$\hat{\sigma}_k = \begin{bmatrix} \hat{t}_1 \\ \hat{t}_2 \\ \hat{t}_3 \\ \hat{t}_4 \\ \hat{t}_5 \\ \hat{t}_6 \\ \hat{t}_7 \\ \hat{t}_8 \\ \hat{t}_9 \\ \hat{t}_{10} \\ \hat{t}_{11} \\ \hat{t}_{12} \\ \hat{t}_{13} \\ \hat{t}_{14} \\ \hat{t}_{15} \\ \hat{t}_{16} \\ \hat{t}_{17} \\ \hat{t}_{18} \\ \hat{t}_{19} \\ \hat{t}_{20} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k=0 & k=1 & k=2 & k=3 & k=4 & k=5 & k=6 & k=7 & k=8 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

4.3 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons proposé un observateur qui permet de résoudre à la fois le problème d'estimation du marquage des places et le problème de la reconstitution de la séquence de franchissement de transitions. Une condition nécessaire de l'observateur proposé est la connaissance du marquage initial. Le traitement que nous avons présenté est purement algébrique et donc facile à comprendre. Nous avons présenté par la suite deux exemples afin de montrer l'efficacité de l'observateur proposé. Le premier exemple est un exemple académique simple pour faciliter la compréhension de fonctionnement de notre observateur et le deuxième est un système de production tiré de [64] où nous avons donnée une modélisation fonctionnelle pour ce système. Finalement, les résultats de simulation montrent le bien-fondé de la méthode proposée.

Conclusion générale et Perspectives

Dans ce travail nous nous sommes intéressés à l'analyse d'observabilité et la synthèse d'observateurs pour les systèmes à événement discret décrits par les réseaux de Petri. L'objectif visé dans ce travail est d'apporter une solution au problème d'observation pour ce système.

Dans le premier chapitre, nous avons présenté le contexte général des SED. Nous avons introduit deux classes de modèles habituellement utilisées pour représenter ces systèmes : les automates à états finis et les RdP. En mettant l'accent sur les réseaux de Petri dont lequel est basé le modèle développé dans nos travaux.

Dans le deuxième chapitre, nous rappellerons dans un premier temps quelques concepts d'observabilité des systèmes continus linéaires. Par la suite nous avons mené une étude théorique et bibliographique sur l'observabilité pour les classes des SED modélisés par les automates à état finis et les RdPs. Cette étude, nous a permis d'approfondir nos connaissances en automatique et d'aborder des thématiques récentes. Ensuite, nous nous sommes intéressés dans la deuxième partie à l'analyse d'observabilité pour les SED modélisés par des réseaux de Petri partiellement observables c'est à dire, le RdP équipé de capteurs de places qui indiquent le nombre des jetons contenus dans certaines places (places observables ou connues) et des capteurs des transitions qui détectent les franchissements de certaines transitions (transitions observables ou connues). L'idée principale est basée sur l'utilisation des méthodes traditionnelles d'observabilité des systèmes descripteurs pour caractériser l'observabilité des RdPPO.

Le troisième chapitre est centré sur deux parties principales. La première partie nous avons présenté un état de l'art concernant l'estimation d'état des SED, et plus particulièrement pour les SED modélisés par des RdP partiellement observables (RdPPO). La deuxième partie est consacrée à la synthèse d'observateurs pour les SED modélisés par RdPPO. Nous avons présentée deux méthodes de synthèse d'observateurs, une méthode développée dans [33] qui traite du problème de l'estimation du marquage d'un réseau, et autre développée dans [40] pour la synthèse d'un observateur de Luenberger d'ordre réduit pour les RdPPO.

Dans le quatrième chapitre, nous avons proposé un observateur à entrée inconnue synthétisé afin d'estimer à la fois le vecteur des marquages des places et le vecteur

des transitions. Une condition nécessaire de l'existence de l'observateur proposé est la connaissance du marquage initial.

Annexe

Les matrices de l'observateur pour l'exemple (4.2.3)

En utilisant (4.8), on obtient U et H comme :

$$U = \begin{bmatrix} 0.125 & 0.125 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.125 & 0.125 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.75 & -0.25 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0.25 & 0.25 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0.25 & 0.25 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0.125 & 0.125 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.125 & 0.125 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.125 & -0.125 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.125 & -0.125 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$H = \begin{bmatrix} 0.875 & -0.125 & 0 & -0.125 & -0.125 & 0.125 & 0.125 \\ -0.125 & 0.875 & 0 & -0.125 & -0.125 & 0.125 & 0.125 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.75 & 0.25 & -1 & 0.25 & 0.25 & -0.25 & -0.25 \\ -0.25 & -0.25 & 0 & 0.75 & -0.25 & -0.75 & 0.25 \\ -0.25 & -0.25 & 0 & -0.25 & 0.75 & 0.25 & -0.75 \\ -0.125 & -0.125 & 0 & 0.875 & -0.125 & 0.125 & 0.125 \\ -0.125 & -0.125 & 0 & 0.125 & 0.875 & 0.125 & 0.125 \\ 0.125 & 0.125 & 0 & 0.125 & 0.125 & 0.875 & -0.125 \\ 0.125 & 0.125 & 0 & 0.125 & 0.125 & -0.125 & 0.875 \end{bmatrix}$$

La matrice K est choisie de telle sorte que les valeurs propres de l'observateur sont à l'intérieur du cercle unité, frontière comprise.

$$K = \begin{bmatrix} 1.3103 & 0.7196 & 0.5719 & 0.5093 & 1.3079 & 1.3079 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.6722 & 1.3474 & -0.6668 & -0.6336 & 1.8722 & 1.8722 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.3919 & -0.5119 & 0.8698 & 0.7506 & -0.5078 & -0.5078 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.1250 & 0.1250 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.9000 & 0 & 0 & 0 \\ 0.1250 & 0.1250 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0010 & 0 & 0 \\ -0.1250 & -0.1250 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.8000 & 0 \\ -0.1250 & -0.1250 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0010 \end{bmatrix}$$

Les valeurs propres de l'observateur sont -0.001, -0.0001, -0.001, 0, 0.2, 1, 0, 0.2718, 1, and 1.

Finalemment, N et L sont calculées respectivement à partir des équations (4.10) et (4.11) et sont données comme :

$$N = \begin{bmatrix} -1.1853 & -0.5472 & -0.3919 & 0 & 0 & 0 & -0.125 & -0.125 & 0.125 & 0.125 \\ -0.5946 & -1.2224 & 0.5119 & 0 & 0 & 0 & -0.125 & -0.125 & 0.125 & 0.125 \\ -0.5719 & 0.6668 & -0.8698 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.2407 & 0.3836 & 0.2494 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1.0579 & -1.6222 & 0.5078 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1.0579 & -1.6222 & 0.5078 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.125 & 0.125 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.9 & 0 & 0 & 0 \\ 0.125 & 0.125 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.001 & 0 & 0 \\ -0.125 & -0.125 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.8 & 0 \\ -0.125 & -0.125 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.001 \end{bmatrix}$$

$$L = \begin{bmatrix} 0.4041 & 0.4041 & 0 & 0.2791 & 0.2791 & -0.2791 & -0.2791 \\ 0.4146 & 0.4146 & 0 & 0.2896 & 0.2896 & -0.2896 & -0.2896 \\ -0.0119 & -0.0119 & 0 & -0.0119 & -0.0119 & 0.0119 & 0.0119 \\ -0.0780 & -0.0780 & 0 & 0.1720 & 0.1720 & -0.1720 & -0.1720 \\ 0.3350 & 0.3350 & 0 & 1.0850 & 0.0850 & -1.0850 & -0.0850 \\ 0.3350 & 0.3350 & 0 & 0.0850 & 1.0850 & -0.0850 & -1.0850 \\ -0.0188 & -0.0188 & 0 & -0.1438 & -0.1437 & 0.1438 & 0.1438 \\ 0.0939 & 0.0939 & 0 & -0.0311 & -0.0311 & 0.0311 & 0.0311 \\ -0.1937 & -0.1938 & 0 & -0.0688 & -0.0688 & 0.0687 & 0.0687 \\ -0.0939 & -0.0939 & 0 & 0.0311 & 0.0311 & -0.0311 & -0.0311 \end{bmatrix}$$

Bibliographie

- [1] Ajmone Marsan M., Balbo G., Conte G., Donatelli, S., and Franceschinis G., "Modelling with Generalized Stochastic Petri Nets" John Wiley and Sons, 1995.
- [2] L. Aguirre-Salas, O. Begovich and A. Ramirez-Trevino, Observability in interpreted petri nets using sequence invariants, In Proc. 41st IEEE Conference on Decision and Control, Las Vegas, Nevada USA, 2002.
- [3] Ammour, R., Leclercq, E., Sanlaville, E. Lefebvre, D., 2015. Estimation of the fault occurrence dates in DESs with partially observed stochastic Petri nets. 5th IFAC Conference on Analysis and Design of Hybrid Systems (ADHS). Atlanta, USA. pp. 254– 259
- [4] Andra - Ioana VASILIU, Synthèse de contrôleurs des systèmes à événements discrets basée sur les réseaux de Petri, thèse doctorat, 'université de grenoble, 2012.
- [5] F. Arichi, B. Cherki and M. Djemai, Discrete states estimation in hybrid photovoltaic systems, 2nd International symposium on environment friendly energies and applications, EFEA 2012, Newcastle upon Tyne, UK, 25-27 June 2012.
- [6] F. Arichi, B. Cherki and M. Djemai, State and sequence firing estimation of Petri net application to : Manufacturing systems, IEEE conference on control, decision and information technologies, Tunisia, 2013.
- [7] F. Arichi, H. kebabi, B. Cherki and M. Djemai, Failure components detection in discrete event systems modeled by Petri net, IEEE 3rd International Conference on Systems and Control (ICSC13), Algiers, Algeria, 2013.
- [8] Fayssal Arichi, Estimation d'état pour des systèmes décrits par les réseaux de Petri : des systèmes à événements discrets aux systèmes dynamiques hybrides, thèse doctorat, Université Aboubekr Belkaid Faculté de Technologie, Tlemcen, 2015.
- [9] P. Borne, G. Dauphin-Tanguy, J. P. Richard, F. Rotella et I. Zambettakis, Modélisation et identification des processus, tome 1. Editions Technip, Paris, 1992.
- [10] Bourjij, A. and D. Koenig (1999). An original petri net state estimation by a luenberger observer. Proceedings of the IEEE American Control Conference, ACC'99 San-Diego- Californie, USA, 2-4 Jun.
- [11] Brams, G., " Réseau de Petri, Théorie et pratique " Tome 1 : théorie et analyse - Tome 2 : modélisation et applications, Masson, 1983.
- [12] Cabasino, M. P., Giua, A., Pocci, M., Seatzu, C., 2011. Discrete event diagnosis using labeled Petri nets. An application to manufacturing systems. Control Engineering Practice, 19(9), pp.989–1001.

- [13] Cabasino, Hadjicostis, et al. 2014] Cabasino, M.P., Hadjicostis, C.N. Seatzu, C., 2014. Initial marking estimation in labeled Petri nets in a probabilistic setting. In Decision and Control (CDC), 2014 IEEE 53rd Annual Conference on. IEEE, pp. California, USA. 6725–6730.
- [14] Cabasino, M.P., Hadjicostis, C.N. Seatzu, C., 2015. Probabilistic marking estimation in labeled Petri nets. IEEE Transactions on Automatic Control, 60(2), pp.528–533.
- [15] P.E. Caines, R. Greiner and S. Wang, Dynamical logic observers for finite automata, In Proc. 27th IEEE Conference on Decision and Control, pp. 226-233, Austin, TX, USA, December 1988.
- [16] C.G. Cassandras and Stéphane Lafortune, Introduction to Discrete Event Systems Second Edition, book, spring, 2008.
- [17] Chincholbar K., and Krishnaiah Chetty O., “Stochastic coloured Petri nets for modelling and evaluation, and heuristic rule base for scheduling of fms” International Journal Advanced Manufacturing Technology, 12, pp. 339-348, 1996.
- [18] L. Dai, Singular Control Systems. Springer, Berlin, Germany, 1989.
- [19] David R., and Alla H., “Autonomous and Timed Continuous Petri Nets”, 11th International Conference on Application and Theory of Petri Nets Paris, France pp. 367-386, June, 1990.
- [20] David R. and Alla H., “Du Grafcet aux réseaux de Petri”, Editions Hermès, Paris, 1992.
- [21] David R., Alla H., “Réseaux de Petri Hybrides”, Chapitre 6 de [ZAY, 01], pp. 119-154, 2001.
- [22] Demongodin I., “Les réseaux de Petri Lots : modélisation des systèmes de production à haute cadence en régime transitoire”, Thèse de Doctorat, Université de Montpellier, France, 1994.
- [23] Demongodin I., “Generalized Batches Petri Net : Hybrid Model for High Speed Systems with Variable Delays”, Discrete Event Dynamic Systems : Theory and Applications, 11(1), pp.137-162, 2001.
- [24] Hedi Dhouibi, , utilisation des reseaux de petri a intervalles pour la regulation d’une qualite :application a une manufacture de tabac,these doctorat, universite Des sciences et technologies de lille ecole centrale de lille ,2005.
- [25] Diaz M., “Les réseaux de Petri : Modèles fondamentaux”, Editions Hermès, Paris, 2001.
- [26] Dutheillet C., Et Haddad S., “Aggregation of states in colored stochastic Petri nets : Application to a multiprocessor architecture”, Proceeding 3rd International Workshop on Petri nets and performance models, Los Alamos - CA, IEEE Computer society Press, 1989.
- [27] G. Florin and S. Natkin, Les Réseaux de Petri Stochastiques, Technique et Science Informatiques, Vol. A, No. 1, pp. 143-160, 1985.
- [28] O. Follinger, Regelungstechnik - Einführung in die methoden und ihre anwendungen, Dr. Alfred Huthig Verlag, Heidelberg, 1985.

- [29] Haas P. J., “Stochastic Petri Nets : Modeling, Stability, Simulation”, Springer-Verlag, New York, 2002.
- [30] Haddad S., “Une catégorie régulière de réseaux de Petri de haut niveau : définition, propriétés et réduction”, Thèse de Doctorat, Université Paris VI, 1987.
- [31] HAOUES MOHAMMED, l’utilisation conjointe des réseaux de petri stochastiques et des processus de markov pour la modélisation, l’analyse et l’évaluation des performances d’un système de production : ligne d’emboutissage de l’entreprise b.a.g batna,thèse magister , université el-hadj lakhdar BATNA,2006.
- [32] M. Hou and P. C. Muller, Causal observability of descriptor systems, IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 44, pp. 158-163, Jan. 1999.
- [33] A. Giua and C. Seatzu, Observability of Place/Transition Nets, IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 47, No. 9, pp. 1424-1437, 2002.
- [34] A. Giua, J. JIvez and C. Seatzu, Marking estimation of Petri nets with pairs of nondeterministic transitions, Asian Journal of Control, Special Issue on the Control of Discrete Event Systems, Vol. 6, No. 2, pp. 270-280, 2004.
- [35] GONZA Mohaman, Développement d’une méthode structurelle de commande par supervision des systèmes à événements discrets modélisés par les réseaux de Petri,these doctorat, UNIVERSITE DE NGAOUNDERE,2019.
- [36] Jensen K., “Coloured Petri nets. In : High-Level Petri Nets : Theory and Application”, Berlin : Springer-Verlag, 1991.
- [37] Kailath, T. (1980). Linear Systems. Prentice Hall information and system sciences series.
- [38] R. E. Kalman, Mathematical description of linear dynamical systems, SIAM Journal of Control and Optimization, Vol. 1, pp. 152–192, 1963.
- [39] Bassam Kattan, Synthèse structurelle d’un contrôleur basée sur le Grafcet,thèse doctorat, université joseph fourier – grenoble 1, 2004.
- [40] D. Koenig and A. Bourjij, An original petri net state estimation by a reduced luenberger observer, in Proc of the American Control Conference, San Diego, California, 1999.
- [41] D. Koenig and S. Mammar, Design of proportional-integral observer for unknown input descriptor systems, IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 47, No. 12, 2002.
- [42] R. Kumar, V. Garg, S.I. Markus, “Predicates and Predicate Transformers for Supervisory Control of Discrete Event Dynamical Systems,” IEEE Trans. on Automatic Control , Vol. 38, No. 2, pp. 232–247, 1993.
- [43] Lefebvre,D.andElMoudni,A.(2001).FiringandenablingsequencesestimationfortimedPetrinets.ItemsandHumans,31(3),153–162.
- [44] Lefebvre, D., 2013. State estimation and fault prediction with partially observed Petri nets. In Emerging Technologies Factory Automation (ETFA), 2013 IEEE 18th Conference on. Cagliari, Italy, pp. 1–8.

- [45] Lefebvre, D., 2014a. Fault diagnosis and prognosis with partially observed petri nets. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics : Systems*, 44(10), pp.1413– 1424.
- [46] Lindemann C., “Performance Modelling with Deterministic and Stochastic Petri Nets”, John Wiley and Sons, 1998.
- [47] Li,L.andHadjicostis,C.(2011).Least-costtransitionfiringsequenceestimationinlabeledPetrinetswithun
- [48] L. Li and C. N. Hadjicostis. Least-cost planning sequence estimation in labeled Petri nets.. To appear in *Transactions of the Institute of Measurement and Control*, Special Issue on .Planning and Scheduling in Complex Systems 2013.
- [49] I. Lrivera-rangel, A. Ramirez-trevino, L. Aguirre-salas and J. Ruiz-leo, Geometric characterization of observability in Interpreted Petri nets, *Kybernetika*, Vol. 41, No. 5, pp. 553-574, 2005.
- [50] Luenberger, D. (1971). An introduction to observers. *IEEE Trans. Automatic Control*, 16 : 596–602.
- [51] Maen ATLI, Contributions à la synthèse de commande des systèmes à événements discrets : nouvelle modélisation des états interdits et application à un atelier flexible, thèse doctorat, l’Université de Lorraine,2012.
- [52] M.E. Meda, A. Ramirez, A. Malo, “Identification in Discrete Event Systems,” *Proc. IEEE Int. Conf. on Systems, Man and Cybernetics*, San Diego, CA, pp. 740–5, Oct. 1998.
- [53] Merlin P. M., “A study of the recoverability of computing systems”, PhD thesis, Department of Information and Computer Science, University of California, Irvine, CA, 1974.
- [54] Molloy M.K., “Performance analysis using Stochastic Petri Nets” *IEEE Transactions on Computers*, C-31(9), pp. 913-917, September 1982.
- [55] T. Murata, Petri nets : Properties, analysis and applications, in *Proceedings IEEE*, Vol. 77, No. 4, pp. 541-580, 1989.
- [56] Natkin S., “Les réseaux de Petri stochastiques”, Thèse de Doctorat, CNAM, Paris 1980.
- [57] M. Oishi, I. Hwang, and C. Tomlin, Immediate observability of discrete event systems with application to user-interface design, *Proceeding of the 42nd Conference on Decision and Control*, Vol. 3, pp. 2665-2672, 2003.
- [58] J. O’Reilly, Observer for linear system, Richard Bellman, *Mathematics in Science and Engineering*, Vol. 140, Academic Press, New York, 1983.
- [59] C. C. M. Ozveren and A. S. Willsky, Observability of discrete event dynamic systems, *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 35, No. 7, pp. 797-806, July 1990.
- [60] P. J. Ramadge, Observability of discrete-event systems, In *Proc. 25th IEEE Conference on Decision and Control*, pp. 1108-1112, Athens, Greece, 1986.
- [61] Ramchandani C., “Analysis of asynchronous concurrent systems by timed Petri nets”, PhD thesis, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, MA, Project MAC Report MAC-TR-120. 1974.

- [62] A. Ramirez – Treviño, I. Rivera–Rangel, E. L´opez–Mellado, “Observer Design for Discrete Event Systems modeled by Intrerpreted Petri Nets,” 2000 IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation, pp. 2871–2876, April 2000.
- [63] A. Ramirez-Trevino, I. Rivera-Rangel and L. Lopez-Mellado, Observability of discrete event systems modeled by interpreted Petri nets, IEEE Transaction on Robotics and Automation, Vol. 19, No. 4, pp. 557-565, 2003.
- [64] Antonio Ramirez-Treviño, Elvia Ruiz-Beltrán, Jesús Arámburo-Lizárraga, and Ernesto López-Mellado, Structural Diagnosability of DES and Design of Reduced Petri Net Diagnosers, IEEE Transactions on Systems Man and Cybernetics - Part A Systems and Humans · March 2012.
- [65] Y. Ru and C. N. Hadjicostis, Sensor selection for structural observability in discrete event systems modeled by Petri nets, IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 55, No., pp. 1751-1764, 2010.
- [66] Saadi Djallel, Synthèse des Superviseurs : Approche basée sur la Théorie des Réseaux de petri ,these MAGISTER, Faculté des Sciences ,Oran 2011.
- [67] Salas,”State Estimation in DES modeled by a class of Interpreted Petri Nets”. Proceeding of the IEEE International Symposium On Inteligent Control. 2002.
- [68] Terchi Roqiya et Mezahi Bochra, Le Développement d’un Outil de Transformation des Modèles Orientés Aspect vers les Réseaux de Pétri, Basé sur la Transformation De Graphes, Master, Centre Universitaire Abd Elhafid Bous-souf Mila, 2018.
- [69] S. Tripakis, Undecidable problems of decentralized observation and control on regular languages, Information Processing Letters, Vol. 90, No. 1, pp. 21-28, 2004.
- [70] Wang Jiacun, “Timed Petri Nets : Theory and Application”, Kluwer Academic Publishers, 1998.
- [71] Wonham, W. (1985). Linear Multivariable Control : a Geometric Approach. Applications of Mathematics.
- [72] W. M. Wonham, Notes on Control of Discrete-Event Systems, Technical Report, ECE 1636F/1637S, 1994.
- [73] L. Zhang, L. E. Holloway, Forbidden State Avoidance in Controlled Petri Nets Under Partial Observation, Proc. 33rd Allerton Conference, Monticello, Illinois, pp. 146-155, 1995.
- [74] Zhou MengChu, and DiCesare Frank., “Petri Net Synthesis for Discrete Cotrol of Manufacturing Systems”, Kluwer Academic Publishers, 1993.