REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

ECOLE SUPERIEURE EN SCIENCES APPLIQUEES
-TLEMCEN-

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

المدرسة العليا في العلوم التطبيقية
-تلمسان-

Département second cycle

Polycopie de cours

Systèmes linéaires multivariables continus et discrets

présenté par :

ARICHI FAYSSAL

Table des matières

1 Généralités sur les systèmes multivariables 5

1.1 Algèbre linéaire . . . 5

1.1.1 Sous espaces vectoriels . . . 5

1.1.2 Applications linéaires . . . 6

1.1.3 Calcul matriciel . . . 6

1.2 Introduction aux systèmes multivariables . . . 8

1.2.1 Système monovariable et système multivariable . . . 8

1.2.2 Système linéaire et système nonlinéaire . . . 9

1.2.3 Différentes formes de modélisation d'un système linéaire . . . 9

1.2.4 Linéarisation d'un système nonlinéaire . . . 11

1.2.5 Passage d'une représentation interne à la représentation externe . . . 13

2 Représentation d'état des systèmes multivariables en temps continu 15

2.1 Introduction à la représentation d'état . . . 15

2.2 Représentations d'état équivalentes . . . 16

2.3 Résolution de l'équation d'état . . . 17

2.4 Calcul de la matrice de transition d'état . . . 17

2.4.1 Méthode de transformation de Laplace . . . 17

2.4.2 Méthode de diagonalisation de la matrice de transition . . . 18

2.4.3 Méthode de Cayley-Hamilton . . . 18

2.5 Stabilité des systèmes linéaires : . . . 20

2.5.1 Stabilité des systèmes autonome (non forcé) : . . . 20

2.5.2 Stabilité des systèmes commandés . . . 21

2.5.3 Stabilité au sens de Lyapunov . . . 22

2.6 Commandabilité et observabilité d'un système linéaire . . . 22

2.6.1 Commandabilité d'un système . . . 22

2.6.2 Stabilisabilité d'un système . . . 23

2.6.3 Observabilité d'un système . . . 23

2.6.4 Détectabilité d'un système . . . 24

2.6.5 Mode d'un système . . . 24

2.6.6 Décomposition canonique de Kalman . . . 25

3 Réalisation d'une fonction de transfert 29

3.1 Introduction . . . 29

3.2 Cas monovariable . . . 29

3.2.1 Forme modale (Cas des pôles distincts) . . . 29

3.2.2 Forme canonique de Jordan (cas des pôles multiples) . . . 30

3.2.3 Forme compagne de commandabilité . . . 31

3.2.4 Forme compagne d'observabilité . . . 32

3.3 Cas multivariable 33
3.3.1 Réalisation de chaque élément 33
3.3.2 Forme modale : méthode de Gilbert 33
3.4 Passage à la forme canonique de commandabilité et d'observabilité 35
3.4.1 Obtention de la forme canonique de commandabilité : cas monovariable 35
3.4.2 Obtention de la forme canonique d'observabilité : cas mono variable . 36
3.4.3 Obtention de la forme canonique de commandabilité : cas multivariable 37

4 Représentation d'état des systèmes Multivariables à temps discret 41
4.1 Introduction 41
4.2 Discrétisation des équations d'état : 42
4.3 Résolution de l'équation d'état 43
4.4 Commandabilité et observabilité 44
4.4.1 Commandabilité d'un système 44
4.4.2 Observabilité d'un système 44
4.5 Lien entre fonction de transfert et représentation d'état 45
4.5.1 Passage d'une représentation d'état à une fonction de transfert 45
4.5.2 Passage d'une fonction de transfert à une représentation d'état 45

5 Commande par retour d'état et synthèse d'observateurs 49
5.1 Principe de la commande par retour d'état : 49
5.2 Commande par retour d'état : placement de pôles 50
5.2.1 Calcul de la matrice F : 51
5.2.2 Calcul de la matrice de pré-filtre 51
5.2.3 Placement des pôles d'un système non commandable (stabilisable) . . 52
5.3 Placement des pôles d'un système monovariable 53
5.3.1 Placement des pôles d'une réalisation canonique 53
5.3.2 Placement des pôles d'une réalisation quelconque 54
5.4 Placement des pôles d'un système multivariables 55
5.5 Choix des pôles 57
5.6 Synthèse d'observateur d'état 57
5.6.1 Principe d'observation 57
5.6.2 Observateur d'état 58
5.6.3 Observateur d'ordre réduit 59
5.7 Commande par retour d'état à base d'observateur 61

Chapitre 1

Généralités sur les systèmes multivariables

Sommaire

1.1 Algèbre linéaire 5
1.1.1 Sous espaces vectoriels 5
1.1.2 Applications linéaires 6
1.1.3 Calcul matriciel 6
1.2 Introduction aux systèmes multivariables 8
1.2.1 Système monovariable et système multivariable 8
1.2.2 Système linéaire et système nonlinéaire 9
1.2.3 Différentes formes de modélisation d'un système linéaire 9
1.2.4 Linéarisation d'un système nonlinéaire 11
1.2.5 Passage d'une représentation interne à la représentation externe . 13

1.1 Algèbre linéaire

Soit $\mathbb{R}$ le corps des nombres réel, et $\mathbb{C}$ le corps des nombres complexes.

1.1.1 Sous espaces vectoriels

1. On appelle combinaison linéaire de $x_1, x_2, \cdots, x_k \in \mathbb{C}^n$, un élément de la forme $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_k x_k \in \mathbb{C}^n$

2. L'ensemble de toutes les combinaisons linéaires sur $\mathbb{C}$ est un sous espace appelé Span $\{x_1, x_2, \cdots, x_k\} = \{x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_k x_k\}, \alpha_i \in \mathbb{C}$.

3. Un ensemble de vecteurs $x_1, x_2, \cdots, x_k \in \mathbb{C}^n$ est dit linéairement dépendant sur $\mathbb{C}$ s'il existe $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k \in \mathbb{C}$ non tous nuls tels que $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_k x_k = 0$, autrement ils sont dits linéairement indépendants.

4. Soit $\mathbb{S}$ un sous espace de $\mathbb{C}^n$, alors l'ensemble des vecteurs $\{x_1, x_2, \cdots, x_k\} \in \mathbb{S}$ est appelé base de $\mathbb{S}$ si $x_1, x_2, \cdots, x_k$ sont linéairement indépendants et $\mathbb{S} =$ Span $\{x_1, x_2, \cdots, x_k\}$. Une telle base de $\mathbb{S}$ n'est pas unique, mais toutes les bases de $\mathbb{S}$ ont le même nombre d'éléments, ce nombre est appelé dimension de $\mathbb{S}$ et noté dim($\mathbb{S}$).

1.1.2 Applications linéaires

Soient U et V deux espaces vectoriels sur le même corps $\mathbb{K}$. Une Application $F : V \to U$ est appelée application linéaire (Transformation linéaire, ou hommorphisme d'espace vectoriel) si elle satisfait les deux conditions suivantes :

1. $\forall u, v \in V, F(u+v) = F(u) + F(v)$
2. $\forall k \in K, \forall u \in V, F(ku) = kF(u)$

En remplaçant k par 0 dans (2) on obtient $F(0) = 0$. En conséquence, chaque application linéaire donne du vecteur nul une image qui est le vecteur nul.
Toute matrice $A \in F^{m\times n}$ détermine une application linéaire de F^n vers F^m par la correspondance $v \to Av$.

1. On appelle noyau de A l'ensemble noté $ker(A) = N(A) = \{x \in F^n / Ax = 0\}$.
2. On appelle image de A l'ensemble noté $Im(A) = R(A) = \{y \in F^m / y = Ax, x \in F^n\}$.
3. $ker(A)$ est un sous espace de F^n, $Im(A)$ est sous espace de F^m.
4. Le rang d'une matrice est égal au nombre maximal de colonnes ou de lignes linéairement indépendantes.
5. Une matrice est dite de rang complet par les lignes si $m \leq n$ et $rang(A) = m$ et elle est dite de rang complet par les colonnes si $n \leq m$ et $rang(A) = n$.
6. Le déterminant d'une matrice carrée de rang complet est non nul.
7. Une matrice carrée de rang complet est dite non singulière.

1.1.3 Calcul matriciel

Calcul de l'inverse d'une matrice

Théorème 1. *Soit* $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, *tel que* $det\ A \neq 0$

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{det\ A}\,{}^{t}Com\ A}$$

Avec $Com\ A = (C_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$, $C_{ij} = (-1)^{i+j}\det A_{ij}$ *et* A_{ij} *est la matrice extraite de* A *en supprimant la ligne* i *et la colonne* j.

Exemple 1.

$$A = \begin{pmatrix} + & - & + \\ 3 & 2 & -1 \\ & & \\ - & + & - \\ 1 & 2 & -1 \\ & & \\ + & - & + \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow Com\ A = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -2 & 4 \\ -8 & 8 & -8 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{det\ A}\,{}^{t}Com\ A = \frac{1}{16}\begin{pmatrix} 8 & -8 & 0 \\ -2 & 8 & 2 \\ 4 & -8 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & 0 \\ -1/8 & 1/2 & 1/8 \\ 1/4 & -1/2 & 1/4 \end{pmatrix}$$

Propriétés :

1. $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
2. $({}^tA)^{-1} ={}^t (A^{-1})$
3. $(A^{-1})^{-1} = A$

Valeurs propres, vecteurs propres et polynôme caractéristique

Soit $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$,

— $\lambda \in \mathbb{R}$ est une valeur propre de A si pour tout vecteur non nul $v \in \mathbb{R}^n$

$$Av = \lambda v$$

dans ce cas v est un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ.

— Le sous espace vectoriel $E_\lambda = \{V \in E/AV = \lambda V\}$ est appelé sous espace propre associé à la valeur propre λ. Le sous espace vectoriel E_λ peut s'écrire par $E_\lambda = \{V \in E/(\lambda I_n - A)V = 0\}$.

— On appelle le polynôme caractéristique $P_A(\lambda)$ de la matrice A le polynôme défini par

$$P_A(\lambda) = det(\lambda I_n - A)$$

où $I_n \in \mathbb{R}^{n\times n}$, est la matrice identité et λ une inconnue. On appelle aussi $P_A(\lambda) = det(\lambda I_n - A) = 0$ équation caractéristique de A.

— Les valeurs propres de A sont les racines de son polynôme caractéristique $P_A(\lambda)$. L'ensemble de toutes les valeurs propres de A est dit spectre de$A$, il est noté $Sp(A)$.

Diagonalisation d'une matrice carrée

Soit $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, on peut représenter A par une matrice diagonale

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Si et seulement si il existe $v_1, v_2, \cdots, v_n \in \mathbb{R}^n$ pour laquelle nous avons :

$$Av_1 = \lambda_1 v_1$$

$$Av_2 = \lambda_2 v_2$$

$$\vdots$$

$$Av_n = \lambda_n v_n$$

Ce qui veut dire que les vecteurs $v_1, v_2, \cdots, v_n$ sont des vecteurs propres de A correspondant aux valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$. Ceci nous permet d'énoncer le théorème suivant :

Théorème 2. *Une matrice carrée A de dimension $n \times n$ est semblable à une matrice diagonale B si et seulement si A a n vecteurs propres linéairement indépendants. Dans ce cas les éléments diagonaux de B sont les valeurs propres correspondantes.*

Dans le théorème (2) si P est la matrice dont les colonnes sont les n vecteurs propres indépendants de A, alors $B = P^{-1}AP$.

Exemple 2. $A = \begin{pmatrix} -4 & 3 & 6 \\ 6 & -1 & -6 \\ -6 & 3 & 8 \end{pmatrix}$

On calcule le polynôme caractéristique de A

$$P_A(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda+4 & -3 & -6 \\ -6 & \lambda+1 & 6 \\ 6 & -3 & \lambda-8 \end{vmatrix} = -(1+\lambda)(2-\lambda)^2$$

Les valeurs propres de A sont les racines de $P_A(\lambda)$, donc :

$Sp(A) = \{-1, 2\}$ *Les vecteurs propres sont calculés comme suit :*

$E_{-1} = \{V \in E/(-I-A)V = 0\}$

$$\begin{pmatrix} 3 & -3 & -6 \\ -6 & 0 & 6 \\ 6 & -3 & -9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 3x - 3y - 6z &= 0 \\ 6x - 6z &= 0 \\ -6x + 3y - 9z &= 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x &= z \\ y &= -x \\ x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$V \in E_{-1} \Rightarrow V = \begin{pmatrix} x \\ -x \\ x \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow E_{-1} = Vect \ < V_1 > \ \ avec\ V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$E_2 = \{V \in E/(2I-A)V = 0\}$

$$\begin{pmatrix} 6 & -3 & -6 \\ -6 & 3 & 6 \\ 6 & -3 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \ 6x - 3y - 6z \ = \ 0 \ \Rightarrow \begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ y = 2x - 2z \\ z \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$V \in E_2 \Rightarrow V = \begin{pmatrix} x \\ 2x - 2z \\ z \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow E_2 = Vect \ < V_2, V_3 >$$

$$avec\ V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad V_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

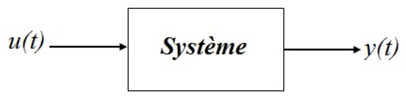
Conclusion :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

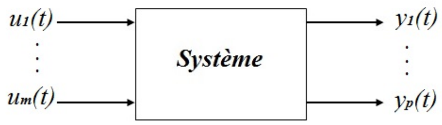
1.2 Introduction aux systèmes multivariables

1.2.1 Système monovariable et système multivariable

Un système est dit monovariable ou de type **SISO** (Single Input – Single Output, ou mono-entrée – mono-sortie) s'il possède d'une seule entrée et dispose une seule sortie. Autrement, il est dit multivariable ou de type **MIMO** (Multi Input – Multi Output).



Système SISO



Système MIMO

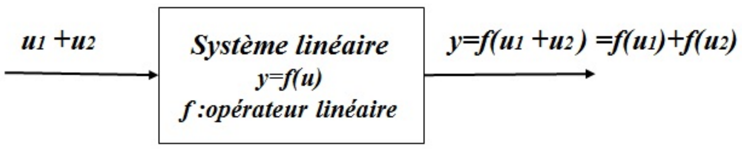
Les signaux d'entrée et de sortie sont alors représentés par des vecteurs notés respectivement $u(t)$ et $y(t)$ en temps continu et u_k et y_k en temps discret.

1.2.2 Système linéaire et système nonlinéaire

Un système linéaire donné par l'équation (1.1) est un système pour lequel les entrées et les sorties sont liées par une équation différentielle linéaire à coefficients constants.

$$a_0 y + a_1 \dot{y} + \cdots + a_n y^{(n)} = b_0 u + \cdots + b_m u^{(m)} \tag{1.1}$$

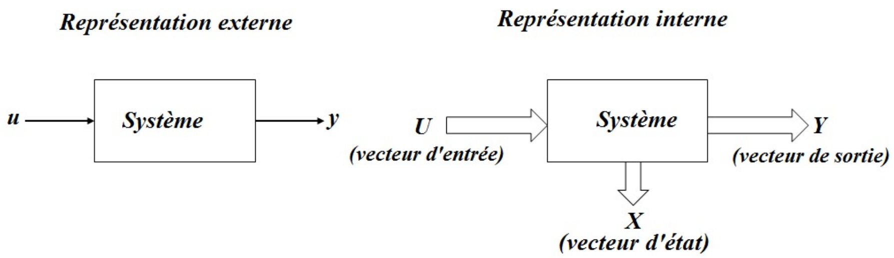
Dans le cas d'un système linéaire, le principe de superposition exprime que l'on peut décomposer les signaux d'entrée et sommer les signaux de sortie correspondants :



Si le système n'est pas linéaire, nous sommes, alors, en présence d'un système dit non-linéaire.

1.2.3 Différentes formes de modélisation d'un système linéaire

Un système linéaire peut être représenté par deux représentations :



Représentation externe

Cette représentation peut être obtenu à partir de la relation entée-sortie. Ce type de représentation est régi soit par des equations différentielles linéaires de la forme :

$$a_0 y + a_1 \dot{y} + \cdots + a_n y^{(n)} = b_0 u + \cdots + b_m u^{(m)}$$

soit par une fonction de transfert qui représente le rapport $\dfrac{Y(s)}{U(s)}$ quand toutes les conditions initiales sont nulles.

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_m s^m + \cdots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + \cdots + a_1 s + a_0}$$

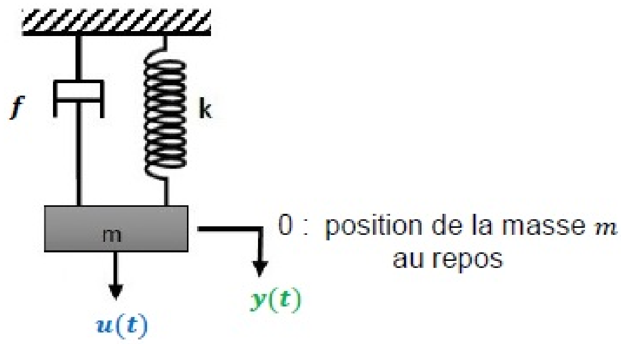
Représentation interne

Dans le cas d'un système linéaire continu, la représentation d'état (interne) est donnée :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) & \textbf{Equation d'état} \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) & \textbf{Equation de sortie} \end{cases} \tag{1.2}$$

avec $x \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur d'état, $u \in \mathbb{R}^m$ est le vecteur d'entrée et $y \in \mathbb{R}^p$ est le vecteur de sortie.
A : Matrice d'état
B : Matrice d'entrée
C : Matrice de sortie
D :Matrice de transfert direct (ou couplage) entrée/sortie.

Exemple 3. *Considérons le système masse-ressort de la figure suivante :*



$u(t)$: entrée du système (force de traction).
$y(t)$: sortie du système (déplacement de la masse m).
k : coefficient de raideur du ressort.
f : frottement visqueux (amortissement).

Le système est régi par l'équation différentielle linéaire :

$$u = m\ddot{y} + f\dot{y} + ky \tag{1.3}$$

Afin de déterminer la fonction de transfert du système, on doit passer par la transformée de Laplace de l'équation (1.3) en supposant que les conditions initiales sont nulles. L'équation (1.3) devient :

$$U(s) = ms^2Y(s) + fsY(s) + kY(s) \tag{1.4}$$

D'où :

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{ms^2 + fs + k} \tag{1.5}$$

Maintenant, afin de déterminer la représentation d'état du système, on pose :
$x_1 = y$, *on obtient :*
$\dot{x_1} = \dot{y} = x_2$
$\dot{x_2} = \ddot{y} = -\frac{f}{m}\dot{y} - \frac{k}{m}y + \frac{1}{m}u = -\frac{f}{m}x_2 - \frac{k}{m}x_1 + \frac{1}{m}u$

La représentation d'état est alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{-k}{m} & \frac{-f}{m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{pmatrix} u \\ y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \end{array} \right. \tag{1.6}$$

1.2.4 Linéarisation d'un système nonlinéaire

En général, un système non linéaire est décrit par le système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = f(x,u) \\ y = g(x,u) \end{array} \right. \tag{1.7}$$

avec $x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^m$ et $y \in \mathbb{R}^p$. Les champs de vecteur f et g sont non-linéaires.
Contrairement aux systèmes linéaires qui possèdent un point d'équilibre (point stationnaire) unique, les systèmes non linéaires peuvent posséder plusieurs points d'équilibres.
Un point d'équilibre (x_{eq}, u_{eq}) est la solution de l'équation :

$$f(x_{eq}, u_{eq}) = g(x_{eq}, u_{eq}) = 0$$

Le développement de Taylor de f et g à l'ordre 1 au voisinage de (x_{eq}, u_{eq}), nous donne le système linéarisé du système (1.7) sous la forme suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{array} \right. \tag{1.8}$$

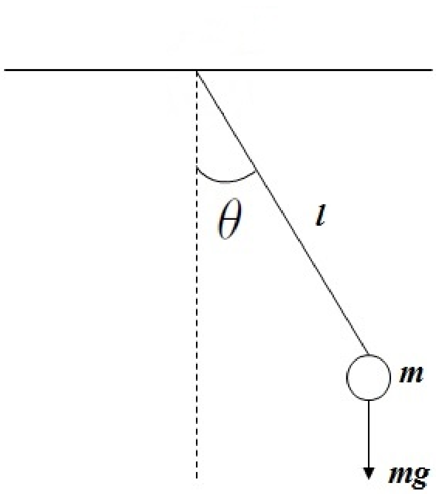
avec :

$$A = \frac{\partial f}{\partial x}|_{x_{eq},u_{eq}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}_{x_{eq},u_{eq}}, \; B = \frac{\partial f}{\partial u}|_{x_{eq},u_{eq}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial u_m} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial u_m} \end{pmatrix}_{x_{eq},u_{eq}}$$

$$C = \frac{\partial g}{\partial x}|_{x_{eq},u_{eq}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial g_p}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_p}{\partial x_n} \end{pmatrix}_{x_{eq},u_{eq}} \quad \text{et } D = \frac{\partial g}{\partial u}|_{x_{eq},u_{eq}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial u_m} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial g_p}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial g_p}{\partial u_m} \end{pmatrix}_{x_{eq},u_{eq}}$$

sont les matrices jacobiennes f et g respectivement par rapport à x et u et évaluées au point (x_{eq}, u_{eq}).

Exemple 4. *On considère un exemple pendule (sans frottement) composé d'un point de masse m suspendu à un fil sans poids de longueur l.*



L'écart angulaire θ est régi par l'équation différentielle suivante :

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} sin\theta = 0 \tag{1.9}$$

C'est une equation différentielle d'ordre 2 non linéaire (à cause du sinus).

On pose $\theta = x_1, \dot{\theta} = x_2$, on obtient le système d'équations non linéaire suivant :

$$\begin{cases} \dot{x_1} = x_2 = f_1(x,u) \\ \dot{x_2} = \dfrac{-g}{l} sin(x_1) = f_2(x,u) \end{cases} \tag{1.10}$$

Les points de fonctionnement (c-à-d pour $\dot{x} = 0$) sont :

$x_{eq1} = [0,0], x_{eq2} = [\pi, 0]$
La matrice jacobienne est donnée par :

$$A = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} = 0 & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} = 1 \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} = -\dfrac{g}{l} cos(x_1) & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2} = 0 \end{pmatrix}_{x_{eq},u_{eq}}, B = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial u} = 0 \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial u} = 0 \end{pmatrix}_{x_{eq},u_{eq}}$$

Le système linéarisé autour de $(\pi, 0)$ est donné par :

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{g}{l} & 0 \end{pmatrix} x$$

1.2.5 Passage d'une représentation interne à la représentation externe

La représentation interne ou la représentation d'état d'un système linéaire multivariable est donnée par :

$$\left\{\begin{array}{l}\dot{x}(t)=Ax(t)+Bu(t)\\ y(t)=Cx(t)+Du(t)\end{array}\right. \tag{1.11}$$

avec $x\in\mathbb{R}^n$ est le vecteur d'état, $u\in\mathbb{R}^m$ est le vecteur d'entrée et $y\in\mathbb{R}^p$ est le vecteur de sortie.
En appliquant la transformée de Laplace aux équations du système (1.11), on obtient :

$$\left\{\begin{array}{l}\dot{x}(t)=Ax(t)+Bu(t)\\ y(t)=Cx(t)+Du(t)\end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l}sx(s)=Ax(s)+Bu(s)\\ y(s)=Cx(s)+Du(s)\end{array}\right.$$

$$\Longrightarrow \left\{\begin{array}{l}x(s)=(sI-A)^{-1}Bu(s)\\ y(s)=Cx(s)+Du(s)\end{array}\right.$$

$$\Longrightarrow y(s)=[C(sI-A)^{-1}B+D]u(s)$$

La matrice de transfert est donnée par :

$$G(s)=C(sI-A)^{-1}B+D$$

Exemple 5. *Reprenons l'exemple précédent, et essayons de trouver la matrice de transfert à partir de la représentation d'état du système.*

$$A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ \frac{-k}{m} & \frac{-f}{m}\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}0\\ \frac{1}{m}\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix} \textit{ et } D=0$$

$$G(s)=C(sI-A)^{-1}B+D \Longrightarrow G(s)=\begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix}\left(\begin{pmatrix}s & 0\\ 0 & s\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0 & 1\\ \frac{-k}{m} & \frac{-f}{m}\end{pmatrix}\right)^{-1}\begin{pmatrix}0\\ \frac{1}{m}\end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow G(s)=\begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}s & -1\\ \frac{k}{m} & s+\frac{f}{m}\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}0\\ \frac{1}{m}\end{pmatrix}$$

Or :

$$\begin{pmatrix}s & -1\\ \frac{k}{m} & s+\frac{f}{m}\end{pmatrix}^{-1}=\frac{1}{s^2+\frac{f}{m}s+\frac{k}{m}}\begin{pmatrix}s+\frac{f}{m} & 1\\ \frac{-k}{m} & s\end{pmatrix}$$

Donc :

$$G(s) = \frac{1}{ms^2 + fs + k}$$

On retrouve, ainsi, la même fonction de transfert du système que celle trouvée précédemment (1.5).
Dans ce cas mono-entrée mono-sortie, Il s'agit, plutôt d'une fonction de transfert que d'une matrice de transfert.

Chapitre 2

Représentation d'état des systèmes multivariables en temps continu

Sommaire

2.1 Introduction à la représentation d'état **15**
2.2 Représentations d'état équivalentes **16**
2.3 Résolution de l'équation d'état **17**
2.4 Calcul de la matrice de transition d'état **17**
2.4.1 Méthode de transformation de Laplace 17
2.4.2 Méthode de diagonalisation de la matrice de transition 18
2.4.3 Méthode de Cayley-Hamilton 18
2.5 Stabilité des systèmes linéaires : **20**
2.5.1 Stabilité des systèmes autonome (non forcé) : 20
2.5.2 Stabilité des systèmes commandés 21
2.5.3 Stabilité au sens de Lyapunov 22
2.6 Commandabilité et observabilité d'un système linéaire **22**
2.6.1 Commandabilité d'un système 22
2.6.2 Stabilisabilité d'un système 23
2.6.3 Observabilité d'un système 23
2.6.4 Détectabilité d'un système 24
2.6.5 Mode d'un système 24
2.6.6 Décomposition canonique de Kalman 25

2.1 Introduction à la représentation d'état

La représentation d'état (interne) d'un système linéaire repose sur la notion d'état. L'état d'un système est défini par un ensemble minimal de grandeurs (variables d'état) qu'il faut connaître à un instant $t = t_o$ afin de déterminer complètement l'évolution du système pour tout instant $t > t_0$ où l'entrée est connue à l'instant $t \geq t_0$. Cet état est représenté par une concaténation de l'ensemble des variables d'état en un vecteur dit vecteur d'état, que l'on note :

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

D'une manière générale, l'évolution d'un système linéaire dans l'espace d'état est donnée :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) & \textbf{Equation d'état} \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) & \textbf{Equation de sortie} \end{cases} \tag{2.1}$$

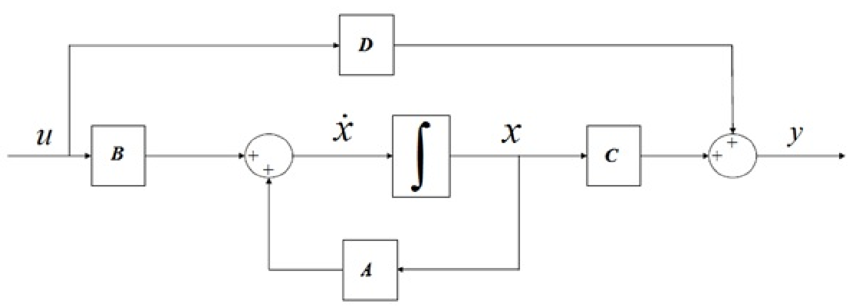
avec $x \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur d'état, $u \in \mathbb{R}^m$ est le vecteur d'entrée et $y \in \mathbb{R}^p$ est le vecteur de sortie.
$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$: Matrice d'état
$B \in \mathbb{R}^{n\times m}$: Matrice d'entrée
$C \in \mathbb{R}^{n\times p}$: Matrice de sortie
$D \in \mathbb{R}^{n\times m}$:Matrice de transfert direct (ou couplage) entrée/sortie. Il est rare que la sortie du système soit directement reliée à son entrée. On a donc très souvent $D = 0$.

— La représentation d'état est parfaitement adaptée à l'étude d'un système multivariables.
— La représentation d'état permet d'accéder à la connaissance des variables internes.

Les équations (2.1) peuvent se réécrire sous la forme compacte suivante :

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix}$$

Le schéma fonctionnel du système (2.1) est représenté comme suit :



2.2 Représentations d'état équivalentes

Contrairement à la représentation par une fonction de transfert, la représentation d'état n'est pas unique c-à-d on peut représenter le même système par une infinité de représentations d'état.
Le passage d'une représentation à l'autre peut se faire avec un simple changement de base. On considère la représentation d'état suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases}$$

Soit T la matrice de changement de base et soit $\tilde{x}$ les coordonnées du vecteur d'état dans la nouvelle base tel que $x = T\tilde{x}$. Le système précédent devient :

$$\begin{cases} T\dot{\tilde{x}}(t) = AT\tilde{x}(t) + Bu(t) \\ y(t) = CT\tilde{x}(t) + Du(t) \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \dot{\tilde{x}}(t) = T^{-1}AT\tilde{x}(t) + T^{-1}Bu(t) \\ y(t) = CT\tilde{x}(t) + Du(t) \end{cases}$$

On obtient une représentation appelée représentation équivalente où les matrices A, B, C, D sont remplacées respectivement par les matrices $\tilde{A} = T^{-1}AT, \tilde{B} = T^{-1}B, \tilde{C} = CT, \tilde{D} = D$.

Les deux représentation représentent le même système physique, il est facile de montrer que la matrice de transfert ne change pas par changement de base. En effet :

$$\begin{aligned} G(s) &= \tilde{C}(sI - \tilde{A})^{-1}\tilde{B} + \tilde{D} \\ &= CT(sI - T^{-1}AT)^{-1}T^{-1}B + D \\ &= CT(T^{-1}(sI - A)T)^{-1}T^{-1}B + D, \quad (xyz)^{-1} = z^{-1}y^{-1}x^{-1} \\ &= CTT^{-1}(sI - A)^{-1}TT^{-1}B + D \\ &= C(sI - A)^{-1}B + D \end{aligned}$$

2.3 Résolution de l'équation d'état

La recherche d'une solution pour l'équation d'état d'un système linéaire consiste à trouver l'expression du vecteur d'état $x(t)$. En générale, un système linéaire est donné par l'équation d'état suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases} \tag{2.2}$$

La solution de l'équation d'état (2.2) est donnée par :

$$\begin{array}{lcl} x(t) = e^{A(t-t_0)}x(t_0) & + & \int_{t_0}^{t} e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau \\ \textit{solution en régime libre} & & \textit{solution forcé ou commandé} \\ \textit{(ou de l'équation homogène)} & & \textit{(ou de l'équation complète)} \end{array}$$

si $u(t) = 0, \forall t \geq t_0$ (régime libre), alors $x(t) = e^{A(t-t_0)}x(t_0)$ et $x(t_1) = e^{A(t_1-t_0)}x(t_0)$ soit $x(t) = e^{A(t-t_1)}x(t_1), \forall t_1 \geq t_0$

La matrice $\phi(t, t_1) = e^{A(t-t_1)}$ s'appelle matrice de transition d'état, elle permet de passer d'un état à l'autre.

$$x(t_1) \xrightarrow{\phi(t, t_1)} x(t)$$

2.4 Calcul de la matrice de transition d'état

Il existe plusieurs méthodes pour calculer la matrice de transition, on présentera les plus classiques. On supposera pour la suite que $t_0 = 0$.

2.4.1 Méthode de transformation de Laplace

On applique la transformation de Laplace au système libre (autonome) $\dot{x} = Ax$, on obtient :

$$\begin{aligned} sX(s) - x_0 = AX(s) \quad &\Leftrightarrow \quad X(s) = (sI - A)^{-1}x_0 \\ &\Leftrightarrow \quad x(t) = \mathcal{L}^{-1}((sI - A)^{-1})x_0 \end{aligned}$$

donc :

$$e^{At} = \mathcal{L}^{-1}((sI - A)^{-1})$$

2.4.2 Méthode de diagonalisation de la matrice de transition

Il est bien connu que le calcul de l'exponentielle d'une matrice est facile si la matrice est diagonale c'est à dire :

$$B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} \Longrightarrow e^{Bt} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & 0 & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix}$$

Alors, pour un calcul facile de e^{At}, on doit diagonaliser la matrice A c'est à dire trouver une matrice B diagonale telle que : $A = TBT^{-1}$, avec T est une matrice non singulière.
Dans ce cas, on a :

$$A^n = (TBT^{-1})(TBT^{-1})\cdots(TBT^{-1}) = TB^nT^{-1}$$

Comme l'expression du développement de Taylor de e^{At} :

$$e^{At} = I + At + \frac{A^2}{2!}t^2 + \cdots + \frac{A^n}{n!}t^n + \cdots$$

il est donc facile de vérifier que :

$$e^{At} = T(I + Bt + \frac{B^2}{2!}t^2 + \cdots + \frac{B^n}{n!}t^n + \cdots)T^{-1} = Te^{Bt}T^{-1}$$

donc :

$$e^{At} = Te^{Bt}T^{-1}$$

2.4.3 Méthode de Cayley-Hamilton

Cette méthode est basée sur le théorème de Cayley-Hamilton. Ce théorème affirme qu'une matrice A est un zéro (solution) de son polynôme caractéristique.
soit :

$$det(\lambda I - A) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0$$

alors :

$$A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \cdots + a_1A + a_0I = 0$$

Cette équation permet d'affirmer que pour toute matrice carrée d'ordre n possédant n valeurs propres distinctes, toute puissance de A supérieure ou égale à n peut s'exprimer en fonction d'une combinaison des puissances de A strictement inférieures à n.

$$A^n = -a_{n-1}A^{n-1} - \cdots - a_1A - a_0I$$

On peut donc écrire :

$$e^{At} = f_{n-1}(t)A^{n-1} + \cdots + f_1(t)A + f_0(t)$$

La recherche des fonctions $f_i(t)$ ne pose aucune difficulté : les valeurs propres de la matrice A vérifiant obligatoirement cette équation, on construit un système de n équations où les n fonctions $f_i(t)$ sont les inconnues et la résolution de ce système permet de déterminer e^{At}. Soit :

$$\begin{cases} e^{\lambda_1 t} = f_{n-1}(t)\lambda_1^{n-1} + \cdots + f_1(t)\lambda_1 + f_0(t) \\ e^{\lambda_2 t} = f_{n-1}(t)\lambda_2^{n-1} + \cdots + f_1(t)\lambda_2 + f_0(t) \\ \vdots \\ e^{\lambda_n t} = f_{n-1}(t)\lambda_n^{n-1} + \cdots + f_1(t)\lambda_n + f_0(t) \end{cases}$$

Exemple 6. *Soit :*

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Méthode de transformation de Laplace :

$$sI-A = \begin{pmatrix} s+1 & -1 \\ 0 & s+2 \end{pmatrix} \Longrightarrow (sI-A)^{-1} = \frac{1}{(s+1)(s+2)} \begin{pmatrix} s+2 & 1 \\ 0 & s+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{(s+1)} & \dfrac{1}{(s+1)(s+2)} \\ 0 & \dfrac{1}{(s+2)} \end{pmatrix}$$

La transformée de laplace inverse donne :

$$e^{At} = \begin{pmatrix} e^{-t} & e^{-t} - e^{-2t} \\ 0 & e^{-2t} \end{pmatrix}$$

Méthode de diagonalisation

$$det(\lambda I - A) = (\lambda + 1)(\lambda + 2) \Longrightarrow Sp(A) = \{-2, -1\}$$

alors :

$$B = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \; et \quad T^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

On a donc :

$$e^{At} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-2t} & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

d'où :

$$e^{At} = \begin{pmatrix} e^{-t} & e^{-t} - e^{-2t} \\ 0 & e^{-2t} \end{pmatrix}$$

Méthode de Cayley-Hamilton

On a :

$$e^{At} = f_1(t)A + f_0(t)I = f_1(t) \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} + f_0(t) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

avec :

$$\begin{cases} e^{-2t} = -2f_1(t) + f_0(t) \\ e^{-t} = -f_1(t) + f_0(t) \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} f_0(t) = 2e^{-t} - e^{-2t} \\ f_1(t) = e^{-t} - e^{-2t} \end{cases}$$

On a donc :

$$e^{At} = (e^{-t} - e^{-2t}) \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} + (2e^{-t} - e^{-2t}) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

d'où :

$$e^{At} = \begin{pmatrix} e^{-t} & e^{-t} - e^{-2t} \\ 0 & e^{-2t} \end{pmatrix}$$

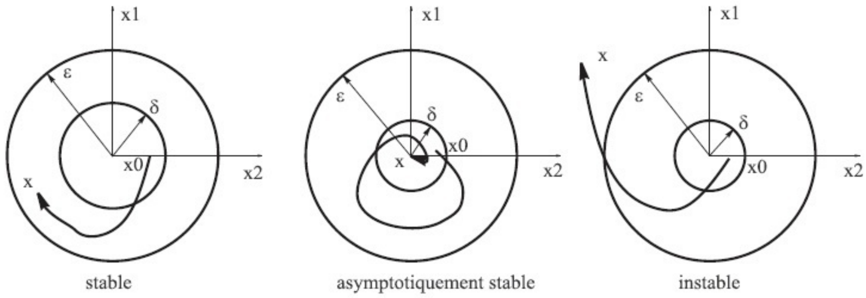
2.5 Stabilité des systèmes linéaires :

Soit le système linéaire suivant :

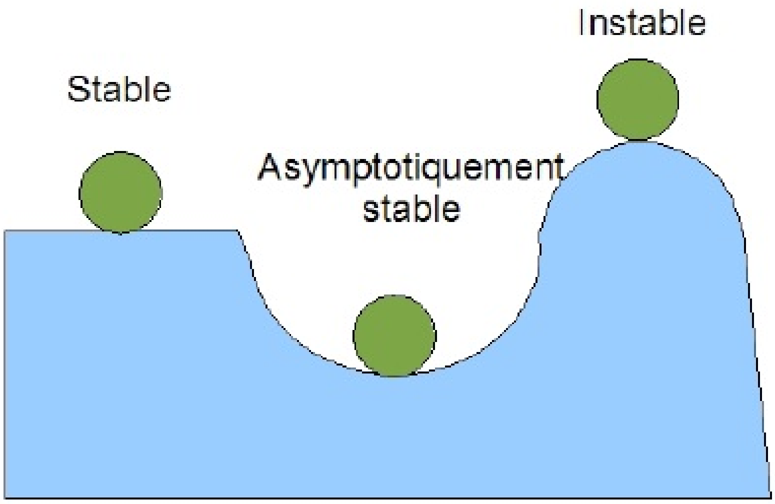
$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \tag{2.3}$$

avec $x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^m$ et $y \in \mathbb{R}^p$. Il existe plusieurs définitions de stabilité d'un système linéaire et ces différentes définitions sont équivalentes.

En générale un état est stable si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un nombre $\delta > 0$ tel que $\|x(t_0)\| < \delta$ entraîne $\|x(t)\| < \varepsilon, \forall t > t_0$. Cet état est asymptotiquement stable si, pour $\|x(t_0)\| < \delta$, $lim_{t \longrightarrow \infty} \|x(t)\| = 0$.



On peut illustrer les trois cas de stabilité par la figure suivante qui représente une bille dans trois positions différentes.



2.5.1 Stabilité des systèmes autonome (non forcé) :

Définition 1. *Un système linéaire non forcé $\dot{x} = Ax$ est*

1. *stable si pour toute condition initiale $x(0)$, l'état du système $x(t)$ est borné lorsque $t \longrightarrow \infty$.*

2. *asymptotiquement stable, s'il est stable et si de plus* $lim_{t\longrightarrow\infty}x(t) = 0$.
3. *instable si pour toute condition initiale* $x(0)$, *l'état du système* $x(t) \longrightarrow \infty$ *lorsque* $t \longrightarrow \infty$.

Théorème 3.

1. *Si les valeurs propres de* A *sont à parties réelles strictement négatives* ($Re(\lambda_i) < 0$), *alors le système linéaire* $\dot{x} = Ax$ *est asymptotiquement stable.*
2. *Si les valeurs propres de* A *sont à parties réelles non-positives* ($Re(\lambda_i) \leq 0$)*et toutes les valeurs propres ayant une partie réelle nulles sont simples, alors le système linéaire* $\dot{x} = Ax$ *est simplement stable.*
3. *Si les valeurs propres de* A *sont à parties réelles non-positives* (($Re(\lambda_i) \leq 0$) *et toutes les valeurs propres ayant une partie réelle nulles sont multiples, alors le système linéaire* $\dot{x} = Ax$ *est instable.*
4. *S'il existe une valeur propre de* A *à partie réelle positive* ($Re(\lambda_i) > 0$ *pour un certain* i), *alors le système linéaire* $\dot{x} = Ax$ *est instable.*

Remarque : Un système à temps discret est stable si, les valeurs propres ont tous un module inférieur à 1, c-à-d se trouvent tous à l'intérieur du cercle unité.

2.5.2 Stabilité des systèmes commandés

Définition 2. *Le système (2.3) est stable au sens BIBO (Bounded input bounded output) si et seulement si pour toute condition initiale* $x(0) \in \mathbb{R}^n$ *et toute entrée* $u(t)$ *uniformément bornée, la sortie du système est bornée.*

Théorème 4.

1. *Le système linéaire (2.3) est dit asymptotiquement stable si et seulement si le système autonome associe* $\dot{x} = Ax$ *est asymptotiquement stable, c'est-à-dire si et seulement si toutes les valeurs propres de* A *sont à partie réelle strictement négative.*
2. *Le système linéaire (2.3) est dit BIBO-stable s'il est asymptotiquement stable.*

Exemple 7.

1. *le système* $\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} u(t)$ *est stable car* $Sp(A) = \{0, -2, -3\}$ *et le pôle* 0 *est simple.*
2. *le système* $\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u(t)$ *est instable car* $Sp(A) = \{-1, -1, 2\}$.
3. *le système* $\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} i & -1 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} u(t)$ *est instable car* $Sp(A) = \{i, i, -1\}$ *et le pôle* i *a une partie réelle nulle est double.*
4. *le système* $\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} i & 1 & 0 \\ 0 & -i & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} u(t)$ *est stable car* $Sp(A) = \{-i, i, -1\}$ *et les pôles* $i, -i$ *ayant une partie réelle nulles sont sont simples.*

5. *le système* $\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & -2-i & 0 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} u(t)$ *est asymptotiquement stable car* $Sp(A) = \{-2-i, -2, -1\}$.

2.5.3 Stabilité au sens de Lyapunov

La méthode de Lyapunov résulte du théorème suivant :

Théorème 5. *Si deux matrices symétriques définies positives P et Q vérifient l'équation de Lyapunov :*

$$A^t P + PA = -Q$$

alors le système est asymptotiquement stable au sens de Lyapunov. Inversement, si le système est asymptotiquement stable au sens de Lyapunov, alors pour toute matrice P symétrique et définie-positive, l'équation de Lyapunov a une solution unique symétrique-positive.

Les étapes pour tester la stabilité sont :

1. Prendre une matrice quelconque symétrique et définie-positive.(on prend $Q = I$ pour simplifier les calculs).
2. Résoudre l'équation de Lyaponov : $A^t P + PA = -Q$, puis déduire P.
3. Tester si la matrice obtenue est symétrique définie-positive et conclure sur la stabilité.

Remarques :

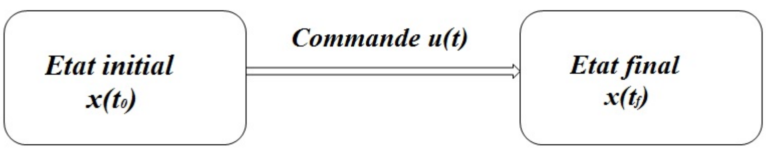
1. Dans le cas discret l'équation de Lyaponov s'écrit : $A^t PA - P = -Q$
2. $$\begin{array}{lcl} M \textit{est définit positive} & \Longleftrightarrow & x^t M x > 0 \qquad \forall x \neq 0 \\ & \Longleftrightarrow & \textit{les valeurs propres de } M \textit{ sont positives} \\ & \Longleftrightarrow & \textit{la matrice } M \textit{ est inversible} \end{array}$$

Cette méthode peut sembler lourde au regard de celle présentées précédemment, mais c'est la seule qui reste valable dans le cas des systèmes non linéaires et/ou variants dans le temps.

2.6 Commandabilité et observabilité d'un système linéaire

2.6.1 Commandabilité d'un système

Définition 3. *Un système linéaire $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$ est complètement commandable, ssi pour tout état initial $x(t_0) = x_0$ et tout état x_f, il existe une commande $u(t)$ sur $[t_0, t_f]$ et un temps fini $t_f > t_0$, qui permet au système de passer de l'état x_0 à l'état $x(t_f) = x_f$.*



Le théorème ci-après donne les propriétés d'un système commandable.

Théorème 6. *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

i) (A, B) *est commandable.*

ii) La matrice de commandabilité $\mathcal{C} = \begin{pmatrix} B & AB & A^2B & \cdots & A^{n-1}B \end{pmatrix}$ *est de rang complet.*

iii) La matrice $\begin{pmatrix} A - \lambda I & B \end{pmatrix}$ *est de rang complet* $\forall \lambda \in \mathbb{C}$.

iv) Les valeurs propres de $(A + BF)$ *peuvent être arbitrairement choisies par un choix judicieux de* F.

2.6.2 Stabilisabilité d'un système

Définition 4.

1. *Un système linéaire non forcé* $\dot{x} = Ax$ *est dit stable si toutes les valeurs propres de* A *appartiennent à* $\mathbb{C}^-$. *Une matrice* A *qui possède cette propriété est dite stable ou de Hurwitz.*
2. *Un système linéaire* $\dot{x} = Ax + Bu, x(0) = x_0$ *est dit stabilisable s'il existe* $u = Fx$ *tel que le système soit stable i.e* $(A + BF)$ *stable.*

Théorème 7. *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

i) (A, B) *est stabilisable.*

ii) La matrice $\begin{pmatrix} A - \lambda I & B \end{pmatrix}$ *est de rang complet* $\forall \lambda$ *avec* $\mathcal{R}(\lambda) \geq 0$.

iii) $\exists F$ *tel que la matrice* $(A + BF)$ *est stable (les valeurs propres de* $(A + BF)$ *appartiennent à* $\mathbb{C}^-$*).*

Remarque 1. *Commandabilité* $\Longrightarrow$ *stabilisabilité.*

2.6.3 Observabilité d'un système

Définition 5. *Le système linéaire*

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases}$$

est dit observable à l'instant t_0 *si* $\forall t_1 > 0$, *l'état* $x(t_0) = x_0$ *peut être déterminé à partir de* $u(t), t \in [t_0, t_1]$ *et* $y(t), t \in [t_0, t_1]$. *Autrement le système est dit inobservable.*

Le théorème ci-après donne les propriétés d'un système observable.

Théorème 8. *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

i) (C, A) *est observable.*

ii) La matrice de d'observabilité $\mathcal{O} = \begin{pmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \cdots \\ CA^{n*1} \end{pmatrix}$ *est de rang complet.*

iii) La matrice $\begin{pmatrix} A - \lambda I \\ C \end{pmatrix}$ *est de rang complet* $\forall \lambda \in \mathbb{C}$.

iv) Les valeurs propres de $(A + LC)$ *peuvent être arbitrairement choisies par un choix judicieux de* L.

v (A^t, C^t) *est commandable.*

2.6.4 Détectabilité d'un système

Définition 6. *Un système linéaire $\dot{x} = Ax + Bu$ est dit détectable s'il existe une matrice L tel que $(A + BF)$ est stable (les valeurs propres de $(A + BF)$ appartiennent à $\mathbb{C}^-$)*

Théorème 9. *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

i) (C, A) est détectable.

ii) La matrice $\begin{pmatrix} A - \lambda I \\ C \end{pmatrix}$ est de rang complet $\forall \lambda$ avec $\mathcal{R}(\lambda) \geq 0$.

iii) $\exists L$ tel que la matrice $(A + LC)$ est stable.

iv) (A^t, C^t) est stabilisable.

Remarque 2. *Observabilité $\Longrightarrow$ détectabilité*

2.6.5 Mode d'un système

Définition 7. *Un mode λ du système (Valeur propre de A) est dit commandable (Observable) si $v^t B \neq 0$ ($Cv \neq 0$) pour tout vecteur propre de A associé à λ i.e. $v^t A = \lambda v^t$ ($Av = \lambda v$) et $v \neq 0 \in \mathbb{C}^n$.*

Donc Un système est commandable (observable) si et seulement si chaque mode est commandable (observable). De même un système est stabilisable (détectable) si et seulement si chaque mode instable est commandable (observable).

Exemple 8. *Soit le système linéaire :*

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} u(t) \\ y(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} x(t) \end{cases}$$

La matrice de commandabilité est :

$$\mathcal{C} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 4 & -8 & 16 \\ 5 & -15 & 45 \end{pmatrix} \Longrightarrow det(\mathcal{C}) = -40 \quad \Longrightarrow \quad \text{le système est commandable.}$$

$$\Longrightarrow \quad \text{le système est stabilisable.}$$

$$\Longrightarrow \quad \text{les trois modes sont commandables.}$$

La matrice d'observabilité est :

$$\mathcal{O} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 0 & -2 & -9 \\ 0 & 4 & 27 \end{pmatrix} \Longrightarrow det(\mathcal{O}) = 0 \Longrightarrow \text{le système n'est pas observable.}$$

Un mode λ est observable $\Longrightarrow Cv \neq 0$ avec v est vecteur propre de A associé à λ.

— *Pour $\lambda = -1, v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow Cv = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \Longrightarrow$ le mode -1 n'est pas n'est observable mais il est stable (car $-1 \in \mathbb{C}^-$).*

— *Pour $\lambda = -2, v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow Cv = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \Longrightarrow$ le mode -2 est observable.*

— *Pour $\lambda = -3, v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow Cv = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 3 \Longrightarrow$ le mode -3 est observable.*

Donc, le système n'est pas observable mais il est détectable.

2.6.6 Décomposition canonique de Kalman

On s'intéresse à la décomposition du système dans le cas où il n'est pas complètement commandable et/ou complètement observable.

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} \tilde{A} & \tilde{B} \\ \tilde{C} & \tilde{D} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T^{-1}AT & T^{-1}B \\ CT & \tilde{D} \end{pmatrix}$$

Les matrices de commandabilité et d'observabilité sont données respectivement $\tilde{\mathcal{C}} = T^{-1}\mathcal{C}$ et $\tilde{\mathcal{O}} = \mathcal{O}T$

Théorème 10. *La commandabilité (stabilisabilté) et l'observabilité (détectabilité) sont invariantes par des changements de base.*

Décomposition d'un système non commandable :

Théorème 11. *Si le système linéaire*

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases} \tag{2.4}$$

n'est pas complètement commandable c-à-d la matrice de commandabilité $\mathcal{C}$ est de rang égale $k < n$, alors il existe une transformation de similitude $\tilde{x} = Tx$ telle que :

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}} = \begin{pmatrix} \tilde{A}_c & \tilde{A}_{12} \\ 0 & \tilde{A}_{\bar{c}} \end{pmatrix} \tilde{x} + \begin{pmatrix} \tilde{B}_c \\ 0 \end{pmatrix} u \\ y(t) = \tilde{C}\tilde{x}(t) + \tilde{D}u(t) \end{cases}$$

avec $(\tilde{A}_c, \tilde{B}_c)$ est commandable et :

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D = \tilde{C}_c(sI - \tilde{A}_c)^{-1}\tilde{B}_c + \tilde{D}$$

La matrice $\tilde{A}_c \in \mathbb{C}^{k\times k}$, est une matrice de rang k, donc les k valeurs propres de $\tilde{A}_c$ qui sont également les valeurs propres de A représentent les modes commandables et les autres valeurs propres sont les modes non commandables.

La transformation T permettant d'obtenir cette décomposition n'est pas unique. Une solution possible consiste à procéder comme suit :(i) On relève toutes les colonnes indépendantes de $\mathcal{C}$. (ii) On complète pour obtenir une matrice inversible. (iii) On inverse pour obtenir la matrice T.

Corollaire 1. *Si le système linéaire (2.4) est stabilisable et la matrice de commandabilité $\mathcal{C}$ est de rang égale $k < n$, alors il existe une transformation de similitude telle que :*

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}} = \begin{pmatrix} \tilde{A}_c & \tilde{A}_{12} \\ 0 & \tilde{A}_{\bar{c}} \end{pmatrix} \tilde{x} + \begin{pmatrix} \tilde{B}_c \\ 0 \end{pmatrix} u \\ y(t) = \tilde{C}\tilde{x}(t) + \tilde{D}u(t) \end{cases}$$

avec $(\tilde{A}_c, \tilde{B}_c)$ commandable et $\tilde{A}_{\bar{c}}$ stable.

Décomposition d'un système non observable :

Théorème 12. *Si le système linéaire*

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases} \tag{2.5}$$

n'est pas observable c-à-d la matrice d'observabilité $\mathcal{O}$ est de rang égale $r < n$, alors il existe une transformation de similitude telle que :

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}} = \begin{pmatrix} \tilde{A}_o & 0 \\ \tilde{A}_{21} & \tilde{A}_{\bar{o}} \end{pmatrix} \tilde{x} + \tilde{B}u \\ y(t) = \begin{pmatrix} \tilde{C}_o & 0 \end{pmatrix} \tilde{x}(t) + \tilde{D}u(t) \end{cases}$$

avec $\tilde{A}_o \in \mathbb{C}^{r\times r}$ et $(\tilde{C}_o, \tilde{A}_o)$ observable.

$\tilde{A}_o \in \mathbb{C}^{r\times r}$ est une matrice de rang r, donc les r valeurs propres de $\tilde{A}_o$ représentent les modes observables et les autres valeurs propres représentent les modes non observables.

Corollaire 2. *Si le système linéaire (2.5) est détectable et la matrice d'observabilité $\mathcal{O}$ est de rang $r < n$, alors il existe une transformation de similitude telle que :*

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}} = \begin{pmatrix} \tilde{A}_o & 0 \\ \tilde{A}_{21} & \tilde{A}_{\bar{o}} \end{pmatrix} \tilde{x} + \tilde{B}u \\ y(t) = \begin{pmatrix} \tilde{C}_o & 0 \end{pmatrix} \tilde{x}(t) + \tilde{D}u(t) \end{cases}$$

avec $(\tilde{C}_o, \tilde{A}_o)$ observable et $\tilde{A}_{\bar{o}}$ stable.

Décomposition d'un système non commandable et non observable :
Maintenant, on utilise les deux théorèmes précédents, on obtient la décomposition de Kalman suivante :

Théorème 13. *Soit le système linéaire*

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases} \tag{2.6}$$

Alors il existe une transformation de similitude telle que :

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \dot{\tilde{x}}_{co} \\ \dot{\tilde{x}}_{c\bar{o}} \\ \dot{\tilde{x}}_{\bar{c}o} \\ \dot{\tilde{x}}_{\bar{c}\bar{o}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{A}_{co} & 0 & \tilde{A}_{13} & 0 \\ \tilde{A}_{21} & \tilde{A}_{c\bar{o}} & \tilde{A}_{23} & \tilde{A}_{24} \\ 0 & 0 & \tilde{A}_{\bar{c}o} & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{A}_{43} & \tilde{A}_{\bar{c}\bar{o}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x}_{co} \\ \tilde{x}_{c\bar{o}} \\ \tilde{x}_{\bar{c}o} \\ \tilde{x}_{\bar{c}\bar{o}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \tilde{B}_{co} \\ \tilde{B}_{c\bar{o}} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} u \\ y(t) = \begin{pmatrix} \tilde{C}_{co} & 0 & \tilde{C}_{\bar{c}o} & 0 \end{pmatrix} \tilde{x}(t) + \tilde{D}u(t) \end{cases}$$

avec :
$\tilde{x}_{co}$ *est commandable et observable*
$\tilde{x}_{c\bar{o}}$ *est commandable et non observable*
$\tilde{x}_{\bar{c}o}$ *est non commandable et observable*
$\tilde{x}_{\bar{c}\bar{o}}$ *est non commandable et non observable.*
de plus la matrice de transfert est donnée par :

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D = \tilde{C}_{co}(sI - \tilde{A}_{co})^{-1}\tilde{B}_{co} + \tilde{D}$$

Exemple 9. *Soit le système linéaire donné par les matrices suivantes :*

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

On calcule la matrice de commandabilité :

$\mathcal{C} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow rg(\mathcal{C}) = 2$, *donc le système n'est pas commandable, mais il est stabilisable (car les modes sont stables).*
Alors il existe une transformation de similitude $\tilde{x} = Tx$, et pour obtenir la matrice de passage T, on relève les colonnes indépendantes de $\mathcal{C}$ et on complète pour obtenir une matrice inversible $\bar{\mathcal{C}}$, puis on inverse la matrice $\bar{\mathcal{C}}$.

$$\bar{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

donc, $\tilde{A} = TAT^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \vdots & 0 \\ 1 & -2 & \vdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \vdots & -1 \end{pmatrix}, \tilde{B} = TB = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \end{pmatrix}, \tilde{C} = CT^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & \vdots & 1 \end{pmatrix}$

Chapitre 3

Réalisation d'une fonction de transfert

Sommaire

3.1 Introduction **29**
3.2 Cas monovariable **29**
3.2.1 Forme modale (Cas des pôles distincts) 29
3.2.2 Forme canonique de Jordan (cas des pôles multiples) 30
3.2.3 Forme compagne de commandabilité 31
3.2.4 Forme compagne d'observabilité 32
3.3 Cas multivariable **33**
3.3.1 Réalisation de chaque élément 33
3.3.2 Forme modale : méthode de Gilbert 33
3.4 Passage à la forme canonique de commandabilité et d'observabilité **35**
3.4.1 Obtention de la forme canonique de commandabilité : cas monovariable 35
3.4.2 Obtention de la forme canonique d'observabilité : cas mono variable 36
3.4.3 Obtention de la forme canonique de commandabilité : cas multivariable 37

3.1 Introduction

Il est bien connu qu'un système linéaire est représenté par une seule et unique fonction de transfert, mais il peut être représenté par plusieurs représentations d'état dites "réalisations".

On verra par la suite, comment trouver les représentations d'état (réalisations) à partir d'une fonction de transfert dans le cas mono-variable et multivariable.

3.2 Cas monovariable

3.2.1 Forme modale (Cas des pôles distincts)

La fonction de transfert dans ce cas est donnée :

$$G(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{(s+p_1)(s+p_2)\cdots(s+p_n)} = \alpha_0 + \frac{\alpha_1}{s+p_1} + \cdots + \frac{\alpha_n}{s+p_n}$$

On peut réécrire $G(s)$ comme :

$$y(s) = \alpha_0 u(s) + \frac{\alpha_1}{s+p_1}u(s) + \cdots + \frac{\alpha_n}{s+p_n}u(s)$$

on pose :

$$\begin{cases} x_1(s) = \dfrac{1}{s+p_1}u(s) \\ x_2(s) = \dfrac{1}{s+p_2}u(s) \\ \vdots \\ x_n(s) = \dfrac{1}{s+p_n}u(s) \end{cases}$$

on obtient :

$$\begin{cases} sx_1(s) = -p_1 x_1(s) + u(s) \\ sx_2(s) = -p_2 x_2(s) + u(s) \\ \vdots \\ sx_n(s) = -p_n x_n(s) + u(s) \\ y(s) = \alpha_1 x_1(s) + \alpha_2 x_2(s) + \cdots + \alpha_n x_n(s) + \alpha_0 u(s) \end{cases}$$

on utilise la transformée inverse de Laplace, on obtient :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -p_1 x_1 + u \\ \dot{x}_2 = -p_2 x_2 + u \\ \vdots \\ \dot{x}_n = -p_n x_n + u \\ y(s) = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n + \alpha_0 u \end{cases}$$

donc, la représentation d'état de la fonction de transfert est :

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{pmatrix} -p_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -p_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & -p_n \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} u \\ y = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n \end{pmatrix} x + \alpha_0 u \end{cases}$$

3.2.2 Forme canonique de Jordan (cas des pôles multiples)

Dans ce cas :

$$G(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{(s+p_1)^r (s+p_{r+1}) \cdots (s+p_n)}$$

$$G(s) = \alpha_0 + \frac{\alpha_1}{(s+p_1)^r} + \frac{\alpha_2}{(s+p_1)^{r-1}} + \cdots + \frac{\alpha_r}{s+p_1} + \cdots + \frac{\alpha_n}{s+p_n}$$

Alors, la représentation d'état dans ce cas est donnée par :

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{pmatrix} -p_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & -p_1 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 & \vdots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & -p_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & -p_{r+1} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & -p_n \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} (r-1)fois \begin{cases} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{cases} \\ 1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} u \\ y = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n \end{pmatrix} x + \alpha_0 u \end{cases}$$

3.2.3 Forme compagne de commandabilité

Soit

$$G(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0} \quad (m < n)$$

Dans le cas où $m < n$, il n'existe pas un couplage entre l'entrée et la sortie ($D = 0$) et la fonction de transfert est dite strictement propre.

Exemple 10. *Soit*

$$G(s) = \frac{s^2 + 3s - 2}{s^3 + 2s^2 - s + 1}$$

on décompose la fonction de transfert comme suite :

$$G(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = \frac{y(s)}{x(s)} \frac{x(s)}{u(s)} = \frac{N(s)}{D(s)}$$

on pose :

$$\begin{cases} N(s) = \dfrac{y(s)}{x(s)} = s^2 + 3s - 2 \\ \dfrac{1}{D(s)} = \dfrac{x(s)}{u(s)} = \dfrac{1}{s^3 + 2s^2 - s + 1} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} u(s) = (s^3 + 2s^2 - s + 1)x(s) \\ y(s) = (s^2 + 3s - 2)x(s) \end{cases}$$

$$\overset{\mathcal{L}^{-1}}{\Longrightarrow} \begin{cases} u = x^{(3)} + 2\ddot{x} - \dot{x} + x \\ y = \ddot{x} + 3\dot{x} - 2x \end{cases}$$

on pose :

$$\begin{cases} x_1 = x \\ x_2 = \dot{x} \\ x_3 = \ddot{x} \end{cases}$$

on obtient :

$$\begin{cases} \dot{x_1} = x_2 \\ \dot{x_2} = x_3 \\ \dot{x_3} = -x_1 + x_2 - 2x_3 \\ y = -2x_1 + 3x_2 + x_3 \end{cases}$$

alors, la représentation d'état est :

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u \\ y = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \end{pmatrix} x \end{cases}$$

D'une manière générale :
si la fonction de transfert est donnée par :

$$G(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0} \quad (m < n)$$

alors, la représentation d'état de cette fonction est :

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & \cdots & -a_{n-1} \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u \\ y = \begin{pmatrix} b_0 & \cdots & b_m & 0^* & \cdots & 0^* \end{pmatrix} x \end{cases}$$

avec 0^* sont les zéros supplémentaire dans le cas $m \leq n-2$.

Cette représentation est dite **"Forme compagne (canonique) de commandabilité"**.

3.2.4 Forme compagne d'observabilité

Soit la fonction de transfert suivante :

$$G(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0} \quad (m < n)$$

alors, la forme compagne d'observabilité est :

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} b_0 \\ \vdots \\ b_m \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} u \\ y = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} x \end{cases}$$

Exemple 11. *Reprenons l'exemple précédant :*

$$G(s) = \frac{s^2 + 3s - 2}{s^3 + 2s^2 - s + 1}$$

La forme canonique de cette fonction de transfert est :

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} u \\ y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} x \end{cases}$$

3.3 Cas multivariable

Supposons $G(s)$ une matrice de transfert rationnelle propre :

$$G(s) = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

Définition 8. *Une réalisation (A, B, C, D) est dite minimale si A est de la plus faible dimension possible.*

Théorème 14. *Une réalisation (A, B, C, D) de $G(s)$ est minimale si et seulement si (A, B) est commandable, et (C, A) est observable.*

Théorème 15. *Soient (A_1, B_1, C_1, D) et (A_2, B_2, C_2, D) deux réalisations minimales d'une matrice de transfert rationnelle $G(s)$. Soient $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2$, les matrices de commandabilité et d'observabilité respectives, alors il existe une matrice non singulière T telle que $A_2 = TA_1T^{-1}, B_2 = TB_1, C_2 = C_1T^{-1}$ de plus Test donnée par*

$$T = (\mathcal{O}_2^t\mathcal{O}_2)^{-1}\mathcal{O}_2^t\mathcal{O}_1 \quad ou \quad T^{-1} = \mathcal{C}_1\mathcal{C}_2^t(\mathcal{C}_2\mathcal{C}_2^t)^{-1}$$

3.3.1 Réalisation de chaque élément

On considère par exemple $G(s)$ est donnée par :

$$G(s) = \begin{pmatrix} G_1(s) & G_2(s) \\ G_3(s) & G_4(s) \end{pmatrix}$$

On suppose que chaque fonction de transfert possède une réalisation

$$G_i(s) = \begin{pmatrix} A_i & B_i \\ C_i & D_i \end{pmatrix}$$

avec $i = 1, \cdots, 4$, alors la réalisation de $G(s)$ peut être donnée par :

$$G(s) = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 & \vdots & B_1 & 0 \\ 0 & A_2 & \ddots & \vdots & \vdots & 0 & B_2 \\ \vdots & \ddots & A_3 & 0 & \vdots & B_3 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & A_4 & \vdots & 0 & B_4 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ C_1 & C_2 & 0 & 0 & \vdots & D_1 & D_2 \\ 0 & 0 & C_3 & C_4 & \vdots & D_3 & D_4 \end{pmatrix}$$

Le problème avec cette réalisation est la minimalité.

3.3.2 Forme modale : méthode de Gilbert

On considère $G(s)$ une matrice de transfert de la forme suivante :

$$G(s) = \frac{M(s)}{\Psi(s)}$$

où $M(s)$ une matrice polynomiale de taille $(p \times m)$ et $\Psi(s)$ dénominateur commun.
On suppose que les racines du $\Psi(s)$ sont réelles et distinctes i.e.

$$\Psi(s) = (s-\lambda_1)(s-\lambda_2)\cdots(s-\lambda_r)$$

Par décomposition en éléments simples, on obtient :

$$G(s) = D + \sum_{i=1}^{r} \frac{M_i}{s-\lambda_i}$$

Supposons que $rg(M_i) = k_i$, $\exists C_i \in \mathbb{R}^{p\times k_i}$ et $B_i \in \mathbb{R}^{k_i \times m}$ telle que :

$$M_i = C_i B_i$$

Alors une réalisation de G(s) est donnée par :

$$G(s) = \begin{pmatrix} \lambda_1 I_{k_1} & 0 & 0 & \vdots & B_1 \\ 0 & \ddots & 0 & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \lambda_r I_{k_r} & \vdots & B_r \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ C_1 & \cdots & C_r & \vdots & D \end{pmatrix}$$

Cette réalisation est commandable et observable. L'ordre n du système $G(s)$ est donné par :

$$n = \sum_{i=1}^{r} k_i = \sum_{i=1}^{r} rg(M_i)$$

Une matrice de transfert avec un polynôme d'ordre r au dénominateur n'a pas nécessairement une réalisation d'ordre r à moins que chaque M_i soit de rang égal à 1.

Exemple 12. *Soit :*

$$G(s) = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{s^2-1} & \dfrac{1}{s-1} \\ \dfrac{1}{s+1} & \dfrac{2s+1}{s^2-1} \end{pmatrix}$$

On peut écrire :

$$G(s) = \frac{\begin{pmatrix} 1 & s+1 \\ s-1 & 2s+1 \end{pmatrix}}{(s-1)(s+1)}$$

par décomposition en éléments simples, on obtient :

$$G(s) = \frac{M_1}{s-1} + \frac{M_2}{s+1} = \frac{\begin{pmatrix} 1/2 & 1 \\ 0 & 3/2 \end{pmatrix}}{s-1} + \frac{\begin{pmatrix} -1/2 & 0 \\ 1 & 1/2 \end{pmatrix}}{s+1}$$

l'ordre du système :

$$n = rg(M_1) + rg(M_2) = 2 + 2 = 4$$

on peut réécrire :

$$G(s) = \begin{cases} y_1(s) = \dfrac{\begin{pmatrix} 1/2 & 1 \end{pmatrix}}{s-1} u(s) + \dfrac{\begin{pmatrix} -1/2 & 0 \end{pmatrix}}{s+1} u(s) \\ y_2(s) = \dfrac{\begin{pmatrix} 0 & 3/2 \end{pmatrix}}{s-1} u(s) + \dfrac{\begin{pmatrix} 1 & 1/2 \end{pmatrix}}{s+1} u(s) \end{cases}$$

on pose :

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{\begin{pmatrix}1/2 & 1\end{pmatrix}}{s-1}u(s) \\ x_2 = \dfrac{\begin{pmatrix}0 & 3/2\end{pmatrix}}{s-1}u(s) \\ x_3 = \dfrac{\begin{pmatrix}-1/2 & 0\end{pmatrix}}{s+1}u(s) \\ x_4 = \dfrac{\begin{pmatrix}1 & 1/2\end{pmatrix}}{s+1}u(s) \end{cases}$$

finalement, la réalisation de $G(s)$ est :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1/2 & 1 \\ 0 & 3/2 \\ -1/2 & 0 \\ 1 & 1/2 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3.4 Passage à la forme canonique de commandabilité et d'observabilité

3.4.1 Obtention de la forme canonique de commandabilité : cas monovariable

Soit le système linéaire :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases} \tag{3.1}$$

où $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$ et $y \in \mathbb{R}^p$, avec la paire (A, B) est commandable.
La fonction de transfert associée à la représentation d'état (3.1) s'écrit :

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B = \frac{b_m s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0} \quad (m < n)$$

La matrice de commandabilité est :

$$\mathcal{C} = \begin{pmatrix} B & AB & A^2B & \cdots & A^{n-1}B \end{pmatrix}$$

Son inverse est $\mathcal{C}^{-1} = \begin{pmatrix} \times \\ q \end{pmatrix}$ où q est la dernière ligne de $\mathcal{C}^{-1}$.
On définie une première transformation de similarité, en posant la matrice de passage T_1 telle que :

$$T_1 = \begin{pmatrix} q \\ qA \\ \vdots \\ qA^{n-1} \end{pmatrix}$$

Alors, on peut réécrire la représentation d'état (3.1) sous la forme compagne de commandabilité suivante :

$$\tilde{A}_{c1} = T_1 A T_1^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & \cdots & -a_{n-1} \end{pmatrix}, \tilde{B}_{c1} = T_1 B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{C}_{c1} = C T_1^{-1} = \begin{pmatrix} b_0 & \cdots & b_m & 0^* & \cdots & 0^* \end{pmatrix}$$

Une forme équivalente peut être obtenue en inversant les lignes de la matrice de passage T_1 i.e. on pose la matrice de passage T_2 telle que :

$$T_2 = \begin{pmatrix} qA^{n-1} \\ \vdots \\ qA \\ q \end{pmatrix}$$

On obtient alors :

$$\tilde{A}_{c2} = T_2 A T_2^{-1} = \begin{pmatrix} -a_0 & -a_1 & \cdots & \cdots & -a_{n-1} \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \tilde{B}_{c2} = T_2 B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{C}_{c2} = C T_2^{-1} = \begin{pmatrix} 0^* & \cdots & 0^* & b_m & \cdots & b_0 \end{pmatrix}$$

3.4.2 Obtention de la forme canonique d'observabilité : cas mono variable

On considère un système donné par la représentation d'état (3.1) avec la paire (C, A) est observable.

La matrice d'observabilité est :

$$\mathcal{O} = \begin{pmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix}$$

Son inverse est $\mathcal{O}^{-1} = \begin{pmatrix} \times & p \end{pmatrix}$ où p est la dernière colonne de $\mathcal{O}^{-1}$.
Des transformations de similarité peuvent être faites afin d'obtenir des formes compagnes d'observabilité.
On définie la matrice de passage P_1 telle que :

$$P_1 = \begin{pmatrix} p & Ap & \cdots & A^{n-1}p \end{pmatrix}$$

Alors, la forme compagne d'observabilité :

$$\tilde{A}_{o1} = P_1^{-1}AP_1 = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}, \tilde{B}_{o1} = P_1^{-1}B = \begin{pmatrix} b_0 \\ \vdots \\ b_m \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{C}_{o1} = CP_1 = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On peut définir une autre transformation de similarité, en inversant les colonnes de la matrice de passage P_1 i.e. on définie une matrice de passage P_2 telle que :

$$P_2 = \begin{pmatrix} A^{n-1}p & \cdots & Ap & p \end{pmatrix}$$

la forme compagne d'observabilité est donnée :

$$\tilde{A}_{o2} = P_2^{-1}AP_2 = \begin{pmatrix} -a_{n-1} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -a_{n-2} & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ -a_1 & \vdots & & \ddots & 1 \\ -a_0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \tilde{B}_{o2} = P_2^{-1}B = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b_m \\ \vdots \\ b_0 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{C}_{o2} = CP_2 = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3.4.3 Obtention de la forme canonique de commandabilité : cas multivariable

soit

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases} \tag{3.2}$$

avec $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$ est de rang égale m (toutes les entrées sont indépendantes).
La paire (A, B) est commandable et la matrice de commandabilité est :

$$\mathcal{C} = \begin{pmatrix} B & AB & A^2B & \cdots & A^{n-1}B \end{pmatrix}$$

On construit la matrice $\bar{\mathcal{C}} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ par les premières n colonnes linéairement indépendantes de $\mathcal{C}$.
Maintenant, on définit la matrice $\mathcal{L} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ composée par les d_1 premières colonnes de $\bar{\mathcal{C}}$ en relation avec b_1, puis par les d_2 premières colonnes de $\bar{\mathcal{C}}$ en relation avec b_2 et ainsi de suite.
en effet :

$$\mathcal{L} = \begin{pmatrix} b_1 & Ab_1 & \cdots & A^{d_1-1}b_1 & b_2 & \cdots & A^{d_2-1}b_2 & \cdots & A^{d_m-1}b_m \end{pmatrix}$$

Les entiers d_i sont dits les indices de commandabilité du système et on appelle $\mu = Max(d_i)$ l'indice globale de commandabilité.
On pose :

$$\sigma_k = \sum_{i=1}^{k} d_i \quad pour \quad k = 1, \cdots, m$$

donc, $\sigma_1 = d_1, \sigma_2 = d_1 + d_2, \cdots, \sigma_k = d_1 + d_2 + \cdots + d_m$. On définit la matrice de passage T comme suite :

$$T = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_1 A \\ \vdots \\ q_1 A^{d_1 - 1} \\ q_2 \\ \vdots \\ q_2 A^{d_2 - 1} \\ \vdots \\ q_m A^{d_m - 1} \end{pmatrix}$$

avec q_k est la σ_k ème ligne de $\mathcal{L}^{-1}$ pour $k = 1, \cdots, m$.
Finalement, la forme canonique de commandabilité obtenu est :

$$\tilde{A} = TAT^{-1} = \begin{pmatrix} \tilde{A}_{11} & \tilde{A}_{12} & \cdots & \tilde{A}_{1m} \\ \tilde{A}_{21} & \tilde{A}_{22} & \cdots & \tilde{A}_{2m} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \tilde{A}_{m1} & \cdots & \cdots & \tilde{A}_{mm} \end{pmatrix}$$

avec :

$$\tilde{A}_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ \times & \times & \times & \times & \times \end{pmatrix} \text{ pour } i = j$$

$$\tilde{A}_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \times & \times & \times & \times & \times \end{pmatrix} \text{ pour } i \neq j$$

$$\tilde{B} = TB = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & \times & \cdots & \times \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \times & \times \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exemple 13. *Soit le système linéaire $\dot{x} = Ax + Bu$ avec :*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -3 & 1 \\ -1 & 1 & 4 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La matrice $\bar{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & -3 & -10 \\ 0 & 1 & 4 & 13 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & Ab_2 & A^2b_2 \end{pmatrix}$
Donc, $d_1 = 1, d_2 = 3, \sigma_1 = d_1 = 1, \sigma_2 = d_1 + d_2 = n = 4$
Dans cet exemple on a $\mathcal{L} = \bar{\mathcal{C}}$

$$\mathcal{L} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & -3 & -10 \\ 0 & 1 & 4 & 13 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathcal{L}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & 1 & 3 \\ -3 & 0 & 0 & -4 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On définit q_1, q_2 *par la première et la quatrième ligne de* $\mathcal{L}^{-1}$ *respectivement i.e.* $q_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ *et* $q_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
La matrice T de passage et donnée par :

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow T^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Alors :

$$\tilde{A} = TAT^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \vdots & 1 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \vdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \vdots & 0 & 0 & 1 \\ 1 & \vdots & 1 & -3 & 4 \end{pmatrix}, \tilde{B} = TB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \cdots & \cdots \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exemple 14. *Soit le système linéaire $\dot{x} = Ax + Bu$ avec :*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

La matrice $\bar{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & Ab_1 & A^2b_1 \end{pmatrix}$
Donc, $d_1 = 3, d_2 = 1, \sigma_1 = d_1 = 3, \sigma_2 = d_1 + d_2 = n = 4$

La matrice $\mathcal{L}$ est donnée par

$$\mathcal{L} = \begin{pmatrix} b_1 & Ab_1 & A^2b_1 & b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathcal{L}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

On définit q_1, q_2 par la troisième et la quatrième ligne de $\mathcal{L}^{-1}$ respectivement i.e. $q_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $q_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
La matrice T de passage et donnée par :

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Alors :

$$\tilde{A} = TAT^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \vdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{pmatrix}, \tilde{B} = TB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ \cdots & \cdots \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Chapitre 4

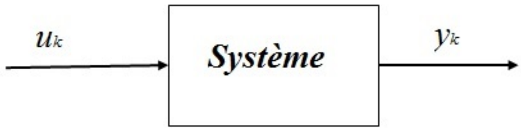
Représentation d'état des systèmes Multivariables à temps discret

Sommaire

4.1 Introduction 41
4.2 Discrétisation des équations d'état : 42
4.3 Résolution de l'équation d'état 43
4.4 Commandabilité et observabilité 44
4.4.1 Commandabilité d'un système 44
4.4.2 Observabilité d'un système 44
4.5 Lien entre fonction de transfert et représentation d'état . . . 45
4.5.1 Passage d'une représentation d'état à une fonction de transfert . . 45
4.5.2 Passage d'une fonction de transfert à une représentation d'état . . 45

4.1 Introduction

On s'intéresse dans ce chapitre à la représentation d'état des systèmes linéaires à temps discret. Un système à temps discret se définit comme opérateur entre deux signaux à temps discret.



Ce type de systèmes peut être donné sous forme d'état comme les systèmes à temps continu et la plupart des résultats présentés dans le chapitre précédant restent applicable aux systèmes à temps discret.

4.2 Discrétisation des équations d'état :

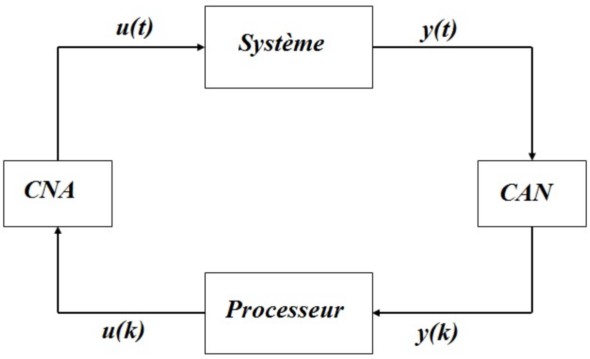
Soit le système linéaire à temps continu :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A_c x(t) + B_c u(t) \\ y(t) = C_c x(t) + D_c u(t) \end{cases}$$

la solution s'écrit :

$$x(t) = e^{A_c t}x(0) + \int_0^t e^{A_c(t-\tau)}B_c u(\tau)d\tau$$

Afin de discrétiser le système, on doit disposer deux convertisseurs, un CNA pour transformer le vecteur des entrées numériques $u(k)$ en vecteur des entrées analogiques $u(t)$ et un CAN pour transformer le vecteur des sorties analogiques $y(t)$ en vecteur des sorties numériques $y(k)$.



Soit T_e la periode d'échantillonnage et soit $u(t) = u(k), \forall t \in [kT_e, (k+1)T_e]$, alors la solution de l'équation d'état aux instant d'échantillonnage :

$$\begin{array}{rcl} x[(k+1)T_e] & = & e^{A_c T_e}x(kT_e) + \int_0^{T_e} e^{A_c(T_e-\tau)}B_c u(\tau)d\tau \\ x[(k+1)T_e] & = & e^{A_c T_e}x(kT_e) + \int_0^{T_e} e^{A_c(T_e-\tau)}d\tau B_c u(kT_e) \\ x[(k+1)T_e] & = & e^{A_c T_e}x(kT_e) + A_c^{-1}[e^{A_c T_e} - I]B_c u(kT_e) \end{array}$$

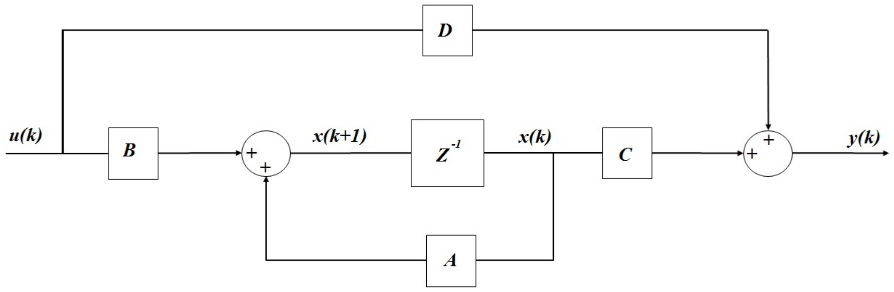
On pose :

$$A_d = e^{A_c T_e}, B_d = A_c^{-1}[e^{A_c T_e} - I]B_c$$

on a donc :

$$\begin{cases} x(k+1) = A_d x(k) + B_d u(k) \\ y(k) = C_d x(k) + D_d u(k) \end{cases} \tag{4.1}$$

Le schéma fonctionnel du système (4.1) est représenté par des gains et blocs dits de décalage de fonction de transfert z^{-1}.



4.3 Résolution de l'équation d'état

Soit le système :

$$\begin{cases} x_{k+1} = Ax_k + Bu_k \\ y_k = Cx_k + Du_k \end{cases} \tag{4.2}$$

On suppose que :
— L'état à l'instant 0 est connu
— Les échantillons de l'entrée u_k entre l'instant 0 et $k-1$ sont connus
Alors, on peut calculer l'état du système aux instants d'échantillonnage :

$$\begin{cases} x_1 = Ax_0 + Bu_0 \\ \vdots \\ x_{k-1} = Ax_{k-2} + Bu_{k-2} \\ x_k = Ax_{k-1} + Bu_{k-1} \end{cases}$$

on a :

$$\begin{aligned} x_k &= A(Ax_{k-2} + Bu_{k-2}) + Bu_{k-1} \\ x_k &= A^2 x_{k-2} + ABu_{k-2} + Bu_{k-1} \end{aligned}$$

donc, on peut écrire x_k en fonction de x_0 :

$$x_k = A^k x_0 + \sum_{i=0}^{k-1} A^{k-1-i} Bu(i)$$

La matrice A^k est la matrice de transition et son calcul ne pose aucune difficulté. On peut utiliser les méthodes classiques présentées pour les systèmes à temps continu.

Exemple 15. *Soit le système linéaire à temps discret :*

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k$$

avec :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, x_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

On cherche à calculer la valeur du vecteur d'état x_k à l'instant $k = 5T_e$ sachant que le système est soumis à une entrée en échelon unité.

En utilisant une méthode d'itérations successives, on a :

$$\begin{cases} x(1) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ x(2) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \\ x(3) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \\ x(4) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} \\ x(5) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix} \end{cases}$$

On peut déterminer x_k par le calcul direct :

$$x_k = A^k x_0 + \sum_{i=0}^{k-1} A^{k-1-i} B u(i)$$

donc :

$$x(5T_e) = (A^4 + A^3 + A^2 + A + I)B = \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix}$$

4.4 Commandabilité et observabilité

L'étude de la commandabilité et de l'observabilité des systèmes linéaires à temps discret se fait de la même manière que celles des systèmes linéaires à temps continu.

4.4.1 Commandabilité d'un système

Définition 9. *Un système linéaire $x_{k+1} = Ax_k + Bu_k$ est dit commandable, ssi pour tout état initial x_0 et tout état x_k, il existe une commande u_k sur $[0, k]$ et un temps fini $k > 0$, qui permet au système de passer de l'état x_0 à l'état x_k.*

Critère de commandabilité
Un système est commandable si et seulement si la matrice de commandabilité, défini par $\mathcal{C} = \begin{pmatrix} B & AB & A^2B & \cdots & A^{n-1}B \end{pmatrix}$ est de rang complet.

4.4.2 Observabilité d'un système

Définition 10. *Le système linéaire*

$$\begin{cases} x_{k+1} = Ax_k + Bu_k \\ y_k = Cx_k + Du_k \end{cases}$$

est dit observable à l'instant k_1 si $\forall k_2 > k_1$, l'état x_{k_1} peut être déterminé à partir de $u_k, k \in [k_1, k_2]$ et $y_k, k \in [k_1, k_2]$. Autrement le système est dit inobservable.

Critère d'observabilité
Un système est observable si et seulement si la matrice d'observabilité, défini par $\mathcal{C} = \begin{pmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix}$ est de rang complet.

4.5 Lien entre fonction de transfert et représentation d'état

4.5.1 Passage d'une représentation d'état à une fonction de transfert

Soit le système :

$$\begin{cases} x_{k+1} = Ax_k + Bu_k \\ y_k = Cx_k + Du_k \end{cases} \tag{4.3}$$

Le passage d'une représentation d'état de la forme (4.3) à une fonction de transfert se fait par la transformée en z du système :

$$G(z) = \frac{y(z)}{u(z)} = C(zI - A)^{-1}B + D$$

4.5.2 Passage d'une fonction de transfert à une représentation d'état

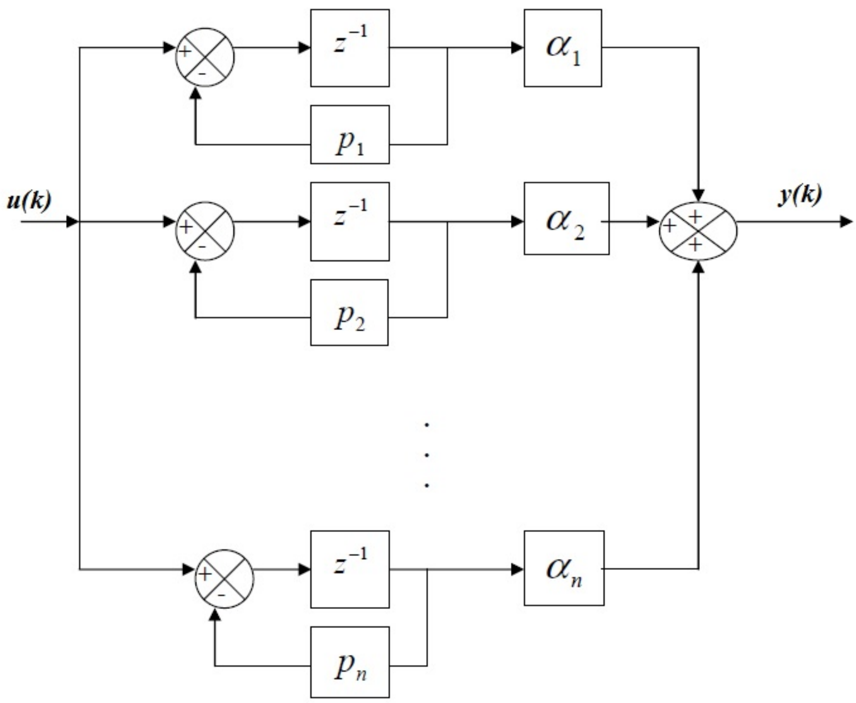
Comme en temps continu, la représentation d'état d'un système en temps discret n'est pas unique. On verra par la suite, quelques représentations d'état d'une fonction de transfert dans le cas mono-variable.

a- Forme modale

Cette forme de représentation permet d'avoir la matrice d'état A sous forme diagonale (cas des pôles distincts) ou de Jordan (cas des pôles multiples).
Cette représentation modale dite aussi représentation parallèle car le système est vu comme une mise en parallèle de systèmes d'ordre 1, et $G(z)$ peut être donnée comme :

$$G(z) = \frac{y(z)}{u(z)} = \frac{\alpha_1}{z + p_1} + \cdots + \frac{\alpha_n}{z + p_n}$$

Par la figure suivante, en faisant apparaître n blocs élémentaires placés en parallèle.



donc, la représentation d'état de la fonction de transfert est :

$$\begin{cases} x_{k+1} = \begin{pmatrix} -p_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -p_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & -p_n \end{pmatrix} x_k + \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} u_k \\ y = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n \end{pmatrix} x_k \end{cases}$$

b- Forme compagne de commandabilité et d'observabilité

Soit

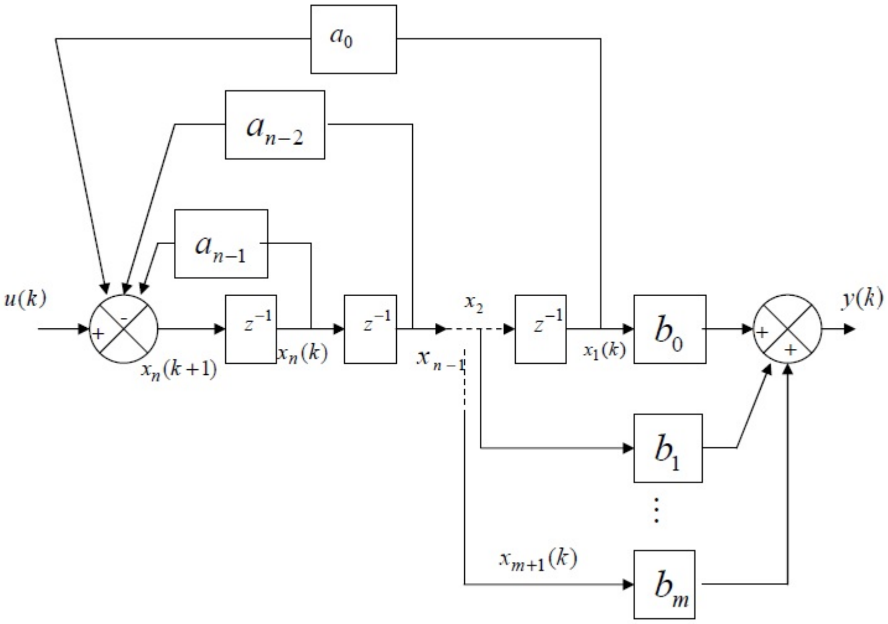
$$G(z) = \frac{b_m z^{m-n} + b_{m-1} z^{m-n-1} + \cdots + b_1 z^{-n+1} + b_0 z^{-n}}{1 + a_{n-1} z^{-1} + \cdots + a_1 z^{-n+1} + a_0 z^{-n}} \quad (m < n)$$

alors, la forme compagne de commandabilité est donnée par :

$$\begin{cases} x_{k+1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & \cdots & -a_{n-1} \end{pmatrix} x_k + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u_k \\ y = \begin{pmatrix} b_0 & \cdots & b_m & 0^* & \cdots & 0^* \end{pmatrix} x_k \end{cases}$$

avec 0^* sont les zéros supplémentaire dans le cas $m \leq n-2$.

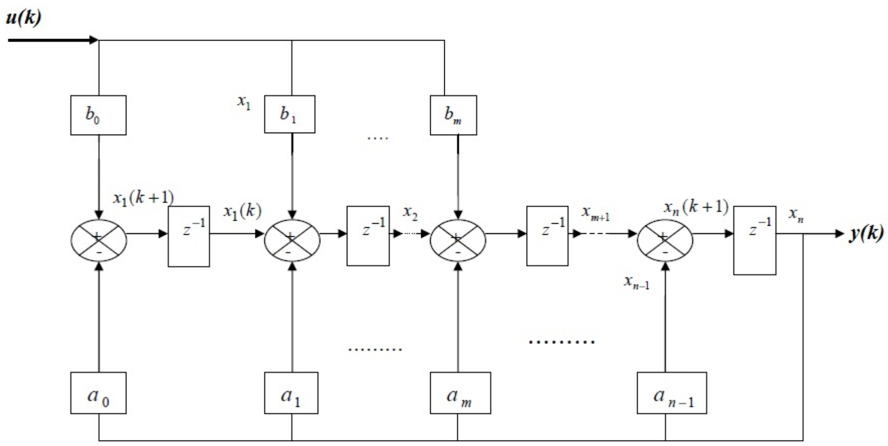
Le schéma fonctionnel est donné comme suit :



La forme compagne d'observabilité est donnée par :

$$\begin{cases} x_{k+1} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix} x_k + \begin{pmatrix} b_0 \\ \vdots \\ b_m \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} u_k \\ y = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} x_k \end{cases}$$

Le schéma fonctionnel est donné comme suit :



Exemple 16. *soit*

$$G(s) = \frac{1 + 3z^{-1} - 2z^{-2}}{1 + 2z^{-1} - z^{-2} + z^{-3}}$$

La forme canonique de commandabilité de cette fonction de transfert est :

$$\begin{cases} x_{k+1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} x_k + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u_k \\ y = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \end{pmatrix} x_k \end{cases}$$

La forme canonique d'observabilité de cette fonction de transfert est :

$$\begin{cases} x_{k+1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} x_k + \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} u_k \\ y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} x_k \end{cases}$$

Chapitre 5

Commande par retour d'état et synthèse d'observateurs

Sommaire

5.1 Principe de la commande par retour d'état : 49
5.2 Commande par retour d'état : placement de pôles 50
5.2.1 Calcul de la matrice F : 51
5.2.2 Calcul de la matrice de pré-filtre 51
5.2.3 Placement des pôles d'un système non commandable (stabilisable) 52
5.3 Placement des pôles d'un système monovariable 53
5.3.1 Placement des pôles d'une réalisation canonique 53
5.3.2 Placement des pôles d'une réalisation quelconque 54
5.4 Placement des pôles d'un système multivariables 55
5.5 Choix des pôles 57
5.6 Synthèse d'observateur d'état 57
5.6.1 Principe d'observation 57
5.6.2 Observateur d'état 58
5.6.3 Observateur d'ordre réduit 59
5.7 Commande par retour d'état à base d'observateur 61

5.1 Principe de la commande par retour d'état :

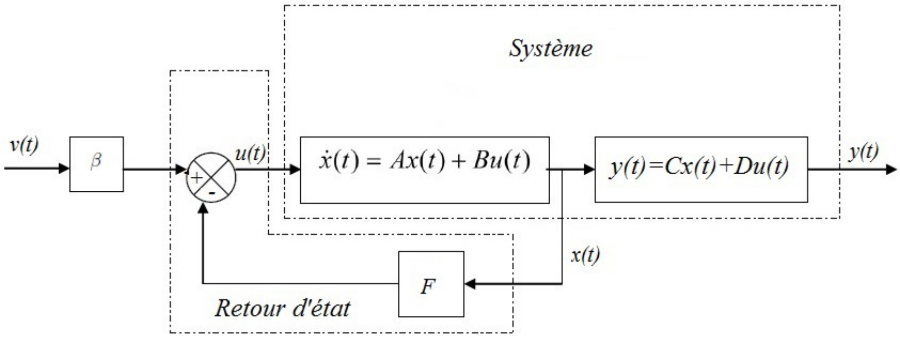
La commande par retour d'état consiste à utiliser les variables l'état en contre réaction dans le but d'améliorer les performances du processus ou d'assurer au moins la stabilisation de n'importe quel système linéaire invariant.
La commande par retour d'état nécessite la connaissance de toutes les variables d'état.
On considère le système linéaire décrit par l'équation :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases} \tag{5.1}$$

avec $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$, $y \in \mathbb{R}^p$ et pour lequel on suppose que les composantes du vecteur d'état $x(t)$ sont accessibles (directement ou par reconstruction). Une commande par retour d'état est une commande de la forme :

$$u(t) = \beta v - Fx$$

où $v \in \mathbb{R}^m$ est la consigne, $F \in \mathbb{R}^{m\times n}$ et $\beta \in \mathbb{R}^{m\times m}$ sont des matrices constantes. La figure suivante présente une représentation schématique de ce concept.



La commande par retour d'état consiste à déterminer une commande telle que les pôles du système en boucle fermée soient correctement placés dans le plan complexe.
En effet, pour un gain F stabilisant le système en boucle fermée, le bouclage conduit au système :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = (A - BF)x(t) + B\beta v(t) \\ y(t) = (C + DF)x(t) + D\beta v(t) \end{cases}$$

La fonction de transfert en boucle fermée est donnée :

$$H(s) = (C + DF)(sI - A + BF)^{-1}B\beta + D\beta$$

Lemme 1. *La paire (A, B) est commandable (stabilisable) si et seulement si la paire $(A - BF, B)$ est commandable (stabilisable), F est une matrice constante de dimension appropriée.*

Le lemme précédant montre que la commandabilité est invariante par le retour d'état. Cependant l'observabilité peut changer sous l'effet d'un retour d'état.

Exemple 17. *Le système :*

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} u(t) \\ y(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} x(t) \end{cases}$$

est commandable et observable. Si on choisit $u = -Fx = \begin{pmatrix} -1 & -1 \end{pmatrix} x$ alors le système en boucle fermée décrit par :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} u(t) \\ y(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} x(t) \end{cases}$$

reste commandable mais n'est pas observable.

5.2 Commande par retour d'état : placement de pôles

Le but de la synthèse de la commande par retour d'état consiste à déterminer les matrices β, F de façon à satisfaire des spécifications qui reposent sur un placement de pôles.

5.2.1 Calcul de la matrice F :

Les pôles de la fonction de transfert étant les valeurs propres de la matrice d'état, le but est donc de réaliser un asservissement modifiant convenablement la matrice d'évolution du système.
Soit le système décrit par l'équation d'état :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases}$$

On désire imposer au système les pôles $(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$, dont le polynôme caractéristique est :

$$P_d(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)\cdots(\lambda - \lambda_n)$$

Donc, on applique au système une loi de commande par retour d'état :

$$u(t) = \beta v - Fx$$

Alors, le système devient :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = (A - BF)x(t) + B\beta v(t) \\ y(t) = (C + DF)x(t) + D\beta v(t) \end{cases}$$

Alors, on calcule le polynôme caractéristique $P_{A-BF}(\lambda)$ en fonction de F et en l'identifie avec $P_d(\lambda)$ i.e. $P_{A-BF}(\lambda) = P_d(\lambda)$
Cette équation peut se résoudre facilement si l'ordre du système est petit $(n = 2)$.

5.2.2 Calcul de la matrice de pré-filtre

Le système en boucle fermée (dans le cas où $D = 0$) est donné par :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = (A - BF)x(t) + B\beta v(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases}$$

Si le système est stable $\Longrightarrow lim_{t\to\infty}\dot{x}(t) = 0$, donc

$$lim_{t\to\infty}y(t) = -C(A - BF)^{-1}B\beta v$$

or, on désire que $lim_{t\to\infty}y(t) = v$, donc :

$$\beta = -(C(A - BF)^{-1}B)^{-1}$$

Exemple 18. *Soit le système :*

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} u(t) \\ y(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} x(t) \end{cases}$$

On désire imposer au système les pôles $(-1, -2)$ *dont le polynôme caractéristique est* $P_d(\lambda) = \lambda^2 + 3\lambda + 2$ *par la commande* $u = \beta v - Fx$.

$$(A - BF) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1 & f_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - f_1 & 1 - f_2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Le polynôme caractéristique de $(A - BF)$ *est :*

$$det(\lambda I - A + BF) = P_{(A-BF)}(\lambda) = \lambda^2 + (f_1 - 1)\lambda + f_2 - 1$$

Par identification :

$$P_{(A-BF)}(\lambda) = P_d(\lambda) \Rightarrow \begin{cases} f_1 - 1 = 3 \\ f_2 - 1 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f_1 = 4 \\ f_2 = 3 \end{cases}$$

La matrice de pré-filtre est :

$$\beta = -(C(A - BF)^{-1}B)^{-1} = 2.$$

5.2.3 Placement des pôles d'un système non commandable (stabilisable)

Si le système linéaire

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases} \tag{5.2}$$

est stabilisable et la matrice de commandabilité $\mathcal{C}$ est de rang égale $k < n$, alors il existe une transformation de similitude $\tilde{x} = Tx$ telle que :

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}} = \begin{pmatrix} \tilde{A}_c & \tilde{A}_{12} \\ 0 & \tilde{A}_{\bar{c}} \end{pmatrix} \tilde{x} + \begin{pmatrix} \tilde{B}_c \\ 0 \end{pmatrix} u \\ y(t) = \tilde{C}\tilde{x}(t) + \tilde{D}u(t) \end{cases}$$

avec $(\tilde{A}_c, \tilde{B}_c)$ commandable et $\tilde{A}_{\bar{c}}$ stable.

On applique la commande par retour d'état $u(t) = \beta v - \tilde{F}\tilde{x}$ et on calcule la matrice $(\tilde{A} - \tilde{B}\tilde{F})$:

$$\begin{aligned} (\tilde{A} - \tilde{B}\tilde{F}) &= \begin{pmatrix} \tilde{A}_c & \tilde{A}_{12} \\ 0 & \tilde{A}_{\bar{c}} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \tilde{B}_c \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{F}_1 & \tilde{F}_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \tilde{A}_c - \tilde{B}_c\tilde{F}_1 & \tilde{A}_{12} - \tilde{B}_c\tilde{F}_2 \\ 0 & \tilde{A}_{\bar{c}} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

On remarque que seulement la matrice $\tilde{F}_1$ qui peut influencer sur le placement de pôles du système car la matrice $(\tilde{A} - \tilde{B}\tilde{F})$ est triangulaire et les pôles (valeurs propres) se trouvent en diagonale. Aussi, la matrice $\tilde{F}_1$ ne peut agir que sur la partie commandable du système. Donc, on calcule $\tilde{F}_1$ et on remplace $\tilde{F}_2$ par la matrice nulle puisque elle influence pas sur le placement de pôles i.e. :

$$\tilde{F} = \begin{pmatrix} \tilde{F}_1 & 0 \end{pmatrix}$$

Finalement, l'expression de la commande du système (5.2) :
$u(t) = \beta v - Fx$ avec

$$F = \tilde{F}T$$

Exemple 19. *Soit le système linéaire donné par les matrices suivantes :*

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La matrice de commandabilité est :

$\mathcal{C} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 6 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow rg(\mathcal{C}) = 2$, *donc le système n'est pas commandable, mais il est stabilisable (car les modes sont stables).*

Alors il existe une transformation de similitude $\tilde{x} = Tx$, *et pour obtenir la matrice de passage* T, *on relève les colonnes indépendantes de* $\mathcal{C}$ *et on complète pour obtenir une matrice inversible* $\bar{\mathcal{C}}$, *puis on inverse la matrice* $\bar{\mathcal{C}}$.

$$\bar{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1/3 & 0 & 1/3 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

donc, $\tilde{A} = TAT^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \vdots & 1 \\ 1 & -2 & \vdots & 2/3 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \vdots & -1 \end{pmatrix}, \tilde{B} = TB = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \end{pmatrix}$

On peut maintenant appliquer une commande $u = \tilde{F}x$ *seulement pour la partie commandable pour placer par exemple les pôles* $(-3, -4)$, *avec :*

$$\tilde{F} = \begin{pmatrix} \tilde{F}_1 & 0 \end{pmatrix}$$

On calcule $\tilde{F}_1$, *on trouve :*

$\tilde{F}_1 = \begin{pmatrix} 5 & 2 \end{pmatrix} \Longrightarrow \tilde{F} = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow F = \tilde{F}T = \begin{pmatrix} -2/3 & 5 & 2/3 \end{pmatrix}$

5.3 Placement des pôles d'un système monovariable

5.3.1 Placement des pôles d'une réalisation canonique

Soit le système décrit sous la forme canonique de commandabilité :

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & \cdots & a_{n-1} \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u$$

Son polynôme caractéristique est :

$$P_A(\lambda) = a_0 + a_1\lambda + \cdots + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \lambda^n$$

On applique au système une loi de commande par retour d'état :

$$u(t) = \beta v - Fx$$

Alors, la matrice d'état du système devient :

$$A - BF = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -f_1 - a_0 & -f_2 - a_1 & \cdots & \cdots & -f_n a_{n-1} \end{pmatrix}$$

Si on se fixe a priori les pôles du système corrigé (coefficients α_i), il vient :

$$\begin{aligned} P_{A-BF}(\lambda) = P_d(\lambda) &= \alpha_0 + \alpha_1\lambda + \cdots + \alpha_{n-1}\lambda^{n-1} + \lambda^n \\ &= (a_0 + f_1) + (a_1 + f_2)\lambda + \cdots + (a_{n-1} + f_n)\lambda^{n-1} + \lambda^n \end{aligned}$$

Par identification, on obtient :

$$\left\{ \begin{array}{c} f_1 = \alpha_0 - a_0 \\ f_2 = \alpha_1 - a_1 \\ \vdots \\ f_n = \alpha_{n-1} - a_{n-1} \end{array} \right.$$

5.3.2 Placement des pôles d'une réalisation quelconque

Pour un système décrit sous forme quelconque, il suffit de trouver une matrice de passage T qui conduit à la forme commandable. Soit :

$$\left\{ \begin{array}{c} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{array} \right. \longrightarrow \tilde{x} = Tx \longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \dot{\tilde{x}}(t) = TAT^{-1}\tilde{x}(t) + TBu(t) \\ y(t) = CT^{-1}x(t) \end{array} \right.$$

On applique sur la forme commandable une loi de commande par retour d'état :

$$u(t) = \beta v - F_c\tilde{x}$$

puis on en déduit l'expression de la commande du système original :

$$u(t) = \beta v - Fx$$

avec $F = F_cT$

Exemple 20. *Soit le système :*

$$\left\{ \begin{array}{c} \dot{x}(t) = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} u(t) \\ y(t) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} x(t) \end{array} \right.$$

On désire imposer au système les pôles $(-1, -2)$ dont le polynôme caractéristique est $P_d(\lambda) = \lambda^2 + 3\lambda + 2 = \lambda^2 + \alpha_1\lambda + \alpha_0$ par la commande $u = \beta v - Fx$.
La première étape est de vérifier que le système est commandable. La matrice de commandablité s'écrit :

$$\mathcal{C} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

et est de rang 2 et la forme canonique du système est donnée par :

$$\left\{ \begin{array}{c} \dot{\tilde{x}}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \tilde{x}(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u(t) \\ y(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \tilde{x}(t) \end{array} \right.$$

avec la matrice de passage $T = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 \\ 2/3 & 5/3 \end{pmatrix}$
La commande implantée est donc de la forme :

$$u(t) = \beta v - F_c\tilde{x}$$

Alors, la matrice d'état du système devient :

$$\tilde{A}-\tilde{B}F=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -a_0-f_1 & -a_1-f_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1-f_1 & 3-f_2\end{pmatrix}$$

il est donc inutile de calculer le polynôme caractéristique. Par identification, nous obtenons :

$$\begin{cases} f_1=\alpha_0-a_0=3\\ f_2=\alpha_1-a_1=6\end{cases}$$

puis on en déduit l'expression de la commande du système original :
$u(t)=\beta v-Fx$ *avec*

$$F=F_cT=\begin{pmatrix}3 & 6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1/3 & 1/3\\ 2/3 & 5/3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & 11\end{pmatrix}$$

La matrice de pré-filtre est :

$$\beta=-(C(A-BF)^{-1}B)^{-1}=2.$$

5.4 Placement des pôles d'un système multivariables

Soit le système linéaire suivant :

$$\begin{cases}\dot{x}(t)=Ax(t)+Bu(t)\\ y(t)=Cx(t)\end{cases}$$

Si le système est commandable, on peut trouver une matrice de passage T qui conduit à la forme commandable. Soit :

$$\begin{cases}\dot{\tilde{x}}(t)=TAT^{-1}\tilde{x}(t)+TBu(t)\\ y(t)=CT^{-1}x(t)\end{cases}\longrightarrow\begin{cases}\dot{\tilde{x}}(t)=\tilde{A}\tilde{x}(t)+\tilde{B}u(t)\\ y(t)=\tilde{C}x(t)\end{cases}$$

On applique sur la forme commandable une loi de commande par retour d'état :

$$u(t)=\beta v-\tilde{F}\tilde{x}$$

Si on se fixe a priori les pôles du système corrigé (coefficients α_i), il vient :

$$P_{\tilde{A}-\tilde{B}\tilde{F}}(\lambda)=\alpha_0+\alpha_1\lambda+\cdots+\alpha_{n-1}\lambda^{n-1}+\lambda^n$$

Alors, la matrice d'état du système devient :

$$(\tilde{A}-\tilde{B}\tilde{F})=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & 1 & \ddots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1\\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & \cdots & \cdots & -\alpha_{n-1}\end{pmatrix}$$

on définit les matrices $\tilde{A}_\sigma,\tilde{B}_\sigma,A_\sigma$ comme des matrices composées par toutes les σ_k lignes de $\tilde{A},\tilde{B},(\tilde{A}-\tilde{B}\tilde{F})$ respectivement avec :

$$A_\sigma=\tilde{A}_\sigma-\tilde{B}_\sigma\tilde{F}$$

et la matrice $\tilde{F}$ est donnée par :

$$\tilde{F} = \tilde{B}_\sigma^{-1}(\tilde{A}_\sigma - A_\sigma)$$

avec :

$$\sigma_k = \sum_{i=1}^{k} d_i \quad pour \quad k = 1, \cdots, m$$

Les entiers d_i sont dits les indices de commandabilité du système.

Finalement, on en déduit l'expression de la commande du système original :

$$u(t) = \beta v - Fx$$

avec

$$F = \tilde{F}T$$

Exemple 21. *Soit le système linéaire multivariable donné sous la forme canonique de commande :*

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 4 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} u(t) \\ y(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} x(t) \end{cases}$$

avec $d_1 = 1, d_2 = 3$ (les indices de commandabilité). On désire imposer au système les pôles $(-1, -2, -3, -4)$ dont le polynôme caractéristique est :

$$P_d(\lambda) = \lambda^4 + 10\lambda^3 + 35\lambda^2 + 50\lambda + 24$$

On applique sur la commande par retour d'état :

$$u(t) = -Fx(t)$$

Alors, la matrice d'état du système devient :

$$A - BF = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -24 & -50 & -35 & -10 \end{bmatrix}$$

On a $\sigma_1 = 1$ et $\sigma_2 = 4$, donc on définit les matrices $\tilde{A}_\sigma, \tilde{B}_\sigma, A_\sigma$ comme suite :

$$\tilde{A}_\sigma = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -3 & 4 \end{bmatrix}, \tilde{B}_\sigma = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, A_\sigma = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -24 & -50 & -35 & -10 \end{bmatrix}$$

et la matrice F est donnée par :

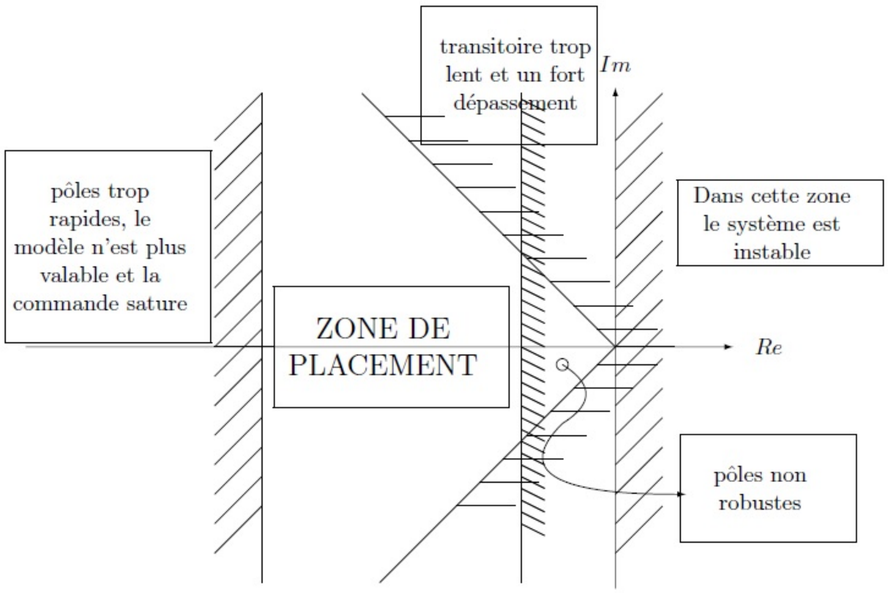
$$F = \tilde{B}_\sigma^{-1}(\tilde{A}_\sigma - A_\sigma) \Rightarrow F = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 25 & 51 & 32 & 14 \end{bmatrix}$$

5.5 Choix des pôles

Le choix de pôles en boucle fermée dépend toujours du système considéré et des performances désirées. On donne quelques règles fondamentales à respecter :

- Les pôles choisis doivent être stables,
- Les pôles ne doivent pas être trop proches de l'axe imaginaire, une petite variation de modèle peut provoquer une instabilité,
- Les pôles complexes conjugués seront choisis pour présenter un dépassement convenable (inférieur à 20 °/∘) sinon le régime transitoire sera long.
- Les pôles ne doivent pas être trop rapides (4 à 10 fois plus rapides que les pôles en B0).

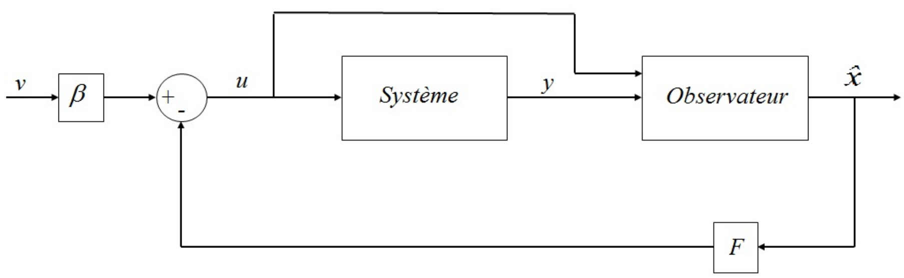
La figure suivantes résume ces règles :



5.6 Synthèse d'observateur d'état

5.6.1 Principe d'observation

Dans la plupart des systèmes industrielles, les variables d'état ne sont pas accessibles à la mesure, seules l'entrée u et la sortie y sont accessibles. Le principe d'observation est d'exploiter u et y dans le but de reconstruire un vecteur $\hat{x}$ qui soit aussi proche que possible de x afin d'élaborer une commande par retour d'état comme le montre la figure suivante :



La synthèse d'un observateur (estimateur d'état ou capteur virtuelle) consiste à trouver un modèle d'état pour l'observateur en se basant sur le modèle d'état du système.

5.6.2 Observateur d'état

Soit le système linéaire suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \tag{5.3}$$

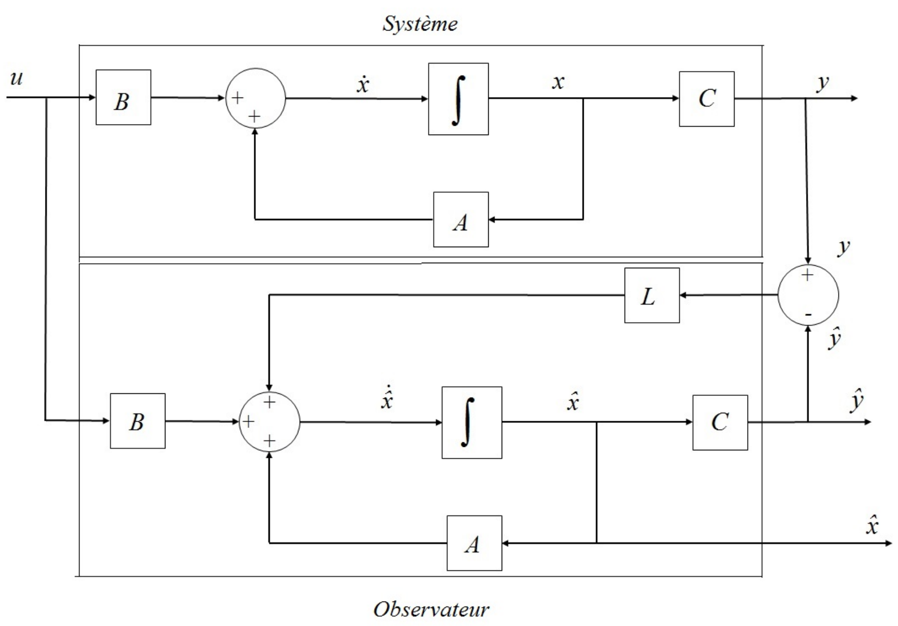
Un observateur est un système dynamique permettant de reconstruire les variables d'état à partir de la connaissance des sorties et des entrées.

Théorème 16. *Un observateur linéaire existe pour le système(5.3) si et seulement si la paire (C, A) est détectable. Si (C, A) est détectable un observateur complet de Luemberger est donné par :*

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + Bu(t) + L(y - \hat{y}) \\ \hat{y}(t) = C\hat{x}(t) \end{cases}$$

où L est n'importe quelle matrice telle que $A - LC$ est stable.

Le schéma fonctionnel de système avec l'observateur est donné :



On définit l'erreur d'observation $e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$, on obtien :

$$\begin{aligned} e(t) = x(t) - \hat{x}(t) \implies & \quad \dot{e}(t) = \dot{x}(t) - \dot{\hat{x}}(t) \\ \implies & \quad \dot{e}(t) = A(x - \hat{x}) - LC(x - \hat{x}) \\ \implies & \quad \dot{e}(t) = (A - LC)(x - \hat{x}) \end{aligned}$$

D'où :

$$\dot{e}(t) = (A - LC)e(t)$$

L'objectif est de faire converger le vecteur $e(t)$ vers zéro avec $e(0) = x_0 - \hat{x}_0$. Donc si $e(0) \neq 0, e(t) \longrightarrow 0$ lorsque $t \longrightarrow \infty$ ssi $(A - LC)$ est stable (i.e. toutes ses valeurs propres sont négatives).

Fixer les pôles de $(A-LC)$ revient à fixer ceux de $(A^t - C^t L^t)$ et donc on peut déterminer F qui fixe les pôles de la paire (A^t, C^t) , puis on en déduit

$$L = F^t$$

Toutes les méthodes de calcul de F sont valables pour le calcul de la matrice L^t.

5.6.3 Observateur d'ordre réduit

Soit le système linéaire suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases}$$

Uu observateur d'ordre réduit permet de reconstruire uniquement une partie de l'état qui n'est pas accessible i.e. dans le cas où C est donnée par :

$$C = \begin{pmatrix} \underbrace{\begin{matrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{matrix}}_{p} & \underbrace{\begin{matrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{matrix}}_{n-p} \end{pmatrix}$$

Alors, on peut partitionner l'état du système en deux sous-ensemble $x_1(t) = y$ et $x_2(t)$ et donc le système devient :

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix} u(t) \\ y(t) = x_1(t) \end{cases}$$

avec $x_1 \in \mathbb{R}^p, x_2 \in \mathbb{R}^{n-p}$, on a donc,

$$\dot{x}_2(t) = A_{22}x_2(t) + A_{21}x_1(t) + B_2u(t)$$

on pose :

$$\begin{cases} \tilde{u}(t) = A_{21}x_1(t) + B_2u(t) \\ \tilde{y}(t) = A_{12}x_2(t) = \dot{x}_1(t) - A_{11}x_1(t) - B_1u(t) \end{cases}$$

on obtient un système d'état d'ordre $n - p$:

$$\begin{cases} \dot{x}_2(t) = A_{22}x_2(t) + \tilde{u}(t) \\ \tilde{y}(t) = A_{12}x_2(t) \end{cases}$$

Un observateur complet pour le système réduit est donné par :

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}_2(t) &= A_{22}\hat{x}_2(t) + \tilde{u}(t) + L(\tilde{y}(t) - \hat{\tilde{y}})(t) \\ &= (A_{22} - LA_{12})\hat{x}_2(t) + L\tilde{y}(t) + \tilde{u}(t) \\ &= (A_{22} - LA_{12})\hat{x}_2(t) + L(\dot{x}_1(t) - A_{11}x_1(t) - B_1u(t)) + A_{21}x_1(t) + B_2u(t) \end{aligned}$$

Afin d'éliminer le terme $\dot{x}_1(t)$, on pose

$$z(t) = \hat{x}_2 - Lx_1(t)$$

on obtient alors :

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = (A_{22} - LA_{12})z(t) + ((A_{22} - LA_{12})L - LA_{11} + A_{21})y(t) + (B_2 - LB_1)u(t) \\ \hat{x}(t) = z(t) + Ly(t) \end{cases}$$

Exemple 22. *Soit le système linéaire donné par les matrices suivantes :*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Un observateur d'ordre plein est donné par :

$$\dot{\hat{x}}(t) = (A - LC)\hat{x}(t) + Bu(t) + Ly$$

Calcul de L

On remarque que le système est donné sous la forme canonique d'observabilité.

$$(A^t - C^tL^t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 - l_1 & -3 - l_2 & -2 - l_3 \end{pmatrix}$$

On désire de placer les poles $(-1, -2, -3)$ *i.e. :* $P_d(\lambda) = \lambda^3 + 6\lambda^2 + 11\lambda + 6 = \lambda^3 + \alpha_2\lambda^2 + \alpha_1\lambda + \alpha_0$

donc :

$$\begin{cases} l_1 = \alpha_0 - 1 = 5 \\ l_2 = \alpha_1 - 3 = 8 \\ l_1 = \alpha_2 - 2 = 4 \end{cases}$$

finalement :

$$L = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Maintenant, puisque $y(t) = x_3(t)$*, on peut proposer un observateur d'ordre réduit uniquement pour les états* $x_1(t)$ *et* $x_2(t)$*. Soit :*

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \vdots & -1 \\ 1 & 0 & \vdots & -3 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 1 & \vdots & -2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \cdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

Un observateur d'ordre réduit

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = (A_{11} - LA_{21})z(t) + ((A_{11} - LA_{21})L - LA_{22} + A_{12})y(t) + (B_1 - LB_2)u(t) \\ \hat{x}(t) = z(t) + Ly(t) \end{cases}$$

Calcul de L *:*

$$(A_{11}^t - A_{21}^tL^t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -l_1 & -l_2 \end{pmatrix}$$

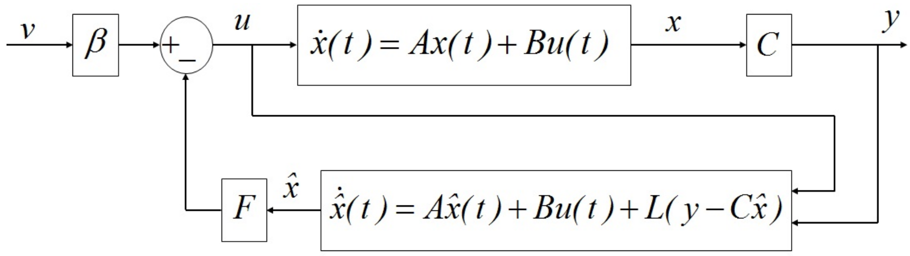
On désire de placer les poles $(-1, -2)$ *i.e.* $P_d(\lambda) = \lambda^2 + 3\lambda + 2$

on trouve :

$$L = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

5.7 Commande par retour d'état à base d'observateur

Dans cette patrie, on désire de commander un système dans le cas où les variables ne sont pas accessibles à la mesure. Donc, il faut synthétiser un observateur afin de reconstruire le vecteur d'état comme indiquer dans la figure suivante :



La commande par retour d'état estimé est donnée par :

$$u(t) = \beta v(t) – F\hat{x}(t)$$

Avec $\hat{x}$ est la sortie de l'observateur. Le système devient :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + B(\beta v(t) – F\hat{x}(t)) \\ \dot{e}(t) = (A - LC)e(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases}$$

On remplace $\hat{x} = x - e$:

$$\begin{cases} \dot{x} = (A - BF)x(t) + BFe(t) + B\beta v(t) \\ \dot{e} = (A - LC)e \\ y(t) = Cx(t) \end{cases}$$

On obtient ainsi :

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{e}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A - BF & BF \\ 0 & A - LC \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ e(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B\beta \\ 0 \end{pmatrix} v(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases}$$

On remarque que les valeurs propres de la matrice sont construites de la réunion de celles désirées en boucle fermée et celles de l'observateur et les pôles du système et ceux de l'observateur peuvent être fixés indépendamment. C'est le principe de séparation. Pour cela, les dynamiques de l'observateur sont choisies en générale beaucoup plus rapides que les dynamiques du système bouclé par le retour d'état.