E S S A TLEMCEN

Cours et Exercices d'analyse de première année

Zineb Achouri

Année universitaire 2019-2020

Table des matières

Première partie

Cours

Chapitre 1

Nombres réels

1.1 Définitions

Définition 1.1.1 *Les intervalles de* $\mathbb{R}$ *autre que* $\mathbb{R}$ *sont les parties de* $\mathbb{R}$ *de la forme :*

$$\begin{array}{rl} [a,b] = \{x \in \mathbb{R} \,:\, a \leq x \leq b\} &]a,b[= \{x \in \mathbb{R} \,:\, a < x < b\} \\ [a,b[= \{x \in \mathbb{R} \,:\, a \leq x < b\} &]a,b] = \{x \in \mathbb{R} \,:\, a < x \leq b\} \\ [a,+\infty[= \{x \in \mathbb{R} \,:\, a \leq x\} &]a,+\infty[= \{x \in \mathbb{R} \,:\, a < x\} \\ ]-\infty,b] = \{x \in \mathbb{R} \,:\, x \leq b\} &]-\infty,b[= \{x \in \mathbb{R} \,:\, x < b\}, \end{array}$$

avec a *et* b *sont deux réels.*

Remarque 1.1.1
- *L'ensemble vide est un intervalle.*
- *Si* $a \leq b$*, l'intervalle* $[a,b]$ *est appelé segment.*
- *Pour* $a < b$*, l'intervalle* $]a,b[$ *est appelé l'intervalle ouvert d'extrémités* a *et* b*.*
- *Les intervalles* $]a,+\infty[$ *et* $]-\infty,b[$ *sont appelés demi-droites ouvertes.*
- *Les intervalles* $[a,+\infty[$ *et* $]-\infty,b]$ *sont appelés demi-droites fermées.*
- *Pour* $a < b$*, les intervalles* $[a,b[$ *et* $]a,b]$ *sont appelés intervalles semi-ouverts ou semi-fermés.*

1.2 Propriété de la borne supérieure

Définition 1.2.1 *Soit* X *un sous ensemble non vide de* $\mathbb{R}$*, on dit que* X *est :*
- *majorée s'il existe un nombre réel* M *tel que* $x \leq M, \quad \forall x \in X$ *; un tel nombre* M *s'appelle un majorant de* X*.*
- *minorée s'il existe un nombre réel* m *tel que* $m \leq x, \quad \forall x \in X$ *; un tel nombre* m *s'appelle un minorant de* X*.*
- *bornée si* X *est majorée et minorée.*

`Exemples:`

1. Un intervalle $[a,+\infty[$ est minoré (par exemple a et $a-1$ sont des minorants).
2. Les intervalles $[a,b]$, $]a,b]$, $[a,b[$ and $]a,b[$ sont bornés ; ils sont en effet minorés par a et majorés par b.
3. L'ensemble $A = \{x \in \mathbb{R} \,:\, \exists\, n \in \mathbb{N}\ x = \frac{n}{n+1}\}$, en effet nous avons $0 \leq \frac{n}{n+1} \leq 1$ pour tout entier n, donc 0 est un minorant de A et 1 est un majorant de A.

Définition 1.2.2 *Soit* X *un sous ensemble non vide de* $\mathbb{R}$*.*

- *La borne supérieure de la partie X est, lorsqu'il existe, le plus petit des majorants de X et on le note par* $\sup(X)$.
- *La borne inférieure de la partie X est, lorsqu'il existe, le plus grand des minorants de X et on le note par* $\inf(X)$.

Définition 1.2.3 *Soient X un sous ensemble non vide de $\mathbb{R}$ et a un élément de X. On dit que a est :*
- *Le plus grand élément de X si $\forall\, x \in X, \quad x \leq a$, et lorsqu'il existe on le note par* $\max(X)$.
- *Le plus petit élément de X si $\forall\, x \in X, \quad a \leq x$, et lorsqu'il existe on le note par* $\min(X)$.

`Exemples:`

1. L'élément 0 est le plus grand élément de $\mathbb{R}_-$; il en est donc aussi la borne supérieure.
2. L'ensemble $\mathbb{R}_-^*$ possède une borne supérieure qui est égal à 0 qui n'est pas élément de $\mathbb{R}_-^*$. En effet, 0 est un majorant de $\mathbb{R}_-^*$ et tout élément $a < 0$ est non majorant de $\mathbb{R}_-^*$ puisque $a < \frac{a}{2} < 0$.

Proposition 1.2.1 (Axiome de la borne supérieure) *Toute partie non vide majorée de $\mathbb{R}$ possède une borne supérieure.*

Proposition 1.2.2 (Caractérisation de la borne supérieure) *La borne supérieure d'une partie X de $\mathbb{R}$ est carctérisée par :*

$$M = \sup(X) \iff \begin{cases} i)\, \forall\, x \in X,\ x \leq M \\ ii)\, \forall\, \epsilon > 0, \exists\, x \in X,\ M - \epsilon < x. \end{cases}$$

Preuve :
" $\Rightarrow$ " Si $M = \sup(X)$ donc M est un majorant de X et par suite $\forall\, x \in X,\ x \leq M$.
Supposons la deuxième propriété est fausse alors $\exists\, \epsilon > 0\ \forall x \in X\ x \leq M - \epsilon$ donc $M - \epsilon$ est un majorant infèrieur à M ce qui est absurde.
" $\Leftarrow$ " Soit M vérifiant ii) et $M \neq \sup(X)$ alors d'après i) on a $M > \sup(X)$ car M est un majorant de X.

$$0 < \frac{M - \sup(X)}{2} = \epsilon \quad \exists\, x \in X,\, x > M - \epsilon$$

alors $\exists\, x \in X,\, x > \sup(X)$ donc $\sup(X)$ n'est pas un majorant ce qui est absurde.

Proposition 1.2.3 *Toute partie non vide minorée de $\mathbb{R}$ possède une borne inférieure.*

Preuve :
On pose

$$X' = \{x \in \mathbb{R},\ -x \in X\}.$$

Et on remarque que les minorants de X sont les opposés des majorants de X', donc X' admet une borne supérieure qui n'est autre que la borne inférieur de X.

Proposition 1.2.4 (Caractérisation de la borne inférieure) *La borne supérieure d'une partie X de $\mathbb{R}$ est carctérisée par :*

$$m = \sup(X) \iff \begin{cases} i)\, \forall\, x \in X,\ m \leq x \\ ii)\, \forall\, \epsilon > 0, \exists\, x \in X,\ m + \epsilon > x. \end{cases}$$

`Exemples:`

1. L'ensemble $A = [0, 1[$ est non vide et majorée donc admet une borne supérieure qui n'est autre que 1. En effet :
   i) $\forall\, x \in [0, 1[$ on a $x < 1$.

ii) Soit $\epsilon > 0$ $\exists ? x \in A$ tel que $1 - \epsilon \leq x \leq 1$. On peut prendre par exemple $x = 1 - \frac{\epsilon}{2}$.

2. Si A est une partie non vide et majorée de $\mathbb{Z}$ alors $\sup(A) \in A$. Autrement dit le plus grand élément existe.
3. Si A est une partie non vide de $\mathbb{N}$ alors $\inf(A) \in A$.

`Attention:` L'axiome de la borne supérieure n'est pas vraie dans $\mathbb{Q}$. C'est à dire $\exists\, A \subset \mathbb{Q}$, $A \neq \emptyset$ majorée mais $\sup(A) \notin \mathbb{Q}$, en effet, on peut considérer l'ensemble suivant :

$$A = \{x \in \mathbb{Q} \,:\, x^2 < 2\}$$

qui est majorée dans $\mathbb{Q}$ mais qui n'admet pas de borne supérieure dans $\mathbb{Q}$.

1.3 Propriété d'Archimède

Proposition 1.3.1 *Le corps $\mathbb{R}$ est archimédien, ce qui signifie :*

$$\forall\, x \in \mathbb{R}_+^*,\ \forall\, y \in \mathbb{R},\ \exists\, n \in \mathbb{N} \,:\, nx \geq y.$$

Preuve : Faisons une démonstration par l'absurde en supposant, pour $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $y \in \mathbb{R}$: $\forall\, n \in \mathbb{N},\ nx < y$.
L'ensemble $A = \{nx \,|\, n \in \mathbb{N}\}$ est alors une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ qui possède une borne supérieure a.
On a $\forall\, n \in \mathbb{N},\ (n+1)x \leq a$ et donc $\forall\, n \in \mathbb{N},\ nx \leq a - x$ ce qui signifie que $a - x$ est un majorant de A strictement inférieur à a et contredit le fait que a est le plus petit des majorants de A.
`Exercice:` Montrer que le cops $\mathbb{Q}$ possède la propriété d'archimède, c'est á dire si $x, y \in \mathbb{Q}$ tels que $x > 0$, on peut trouver un entier n tel que $nx \geq y$.

Proposition 1.3.2 *Étant donnés $x \in \mathbb{R}$ and $a \in \mathbb{R}_+^*$, il existe un unique entier relatif n tel que $na \leq x < (n+1)a$, c'est à dire tel que :*

$$x = na + y \quad \textit{avec} \quad 0 \leq y < a$$

Preuve :
<u>*Unicité :*</u> Si n et n' sont deux entiers répondant à la question, on a :
– $n \leq \frac{x}{a} < n' + 1$ donc $n - n' < 1$, c'est à dire $n - n' \leq 0$,
– $n' \leq \frac{x}{a} < n + 1$ donc $n' - n < 1$, c'est à dire $n' - n \leq 0$.
On en deduit donc que $n = n'$.
<u>*Existence :*</u> $\mathbb{R}$ étant archimidien, on peut trouver :
– un entier n_1 tel que $x \leq an_1$,
– un entier n_2 tel que $-x \leq an_2$.
L'ensemble $\{k \in \mathbb{Z} \,:\, ka \leq x\}$ étant une partie non vide de $\mathbb{Z}$ (elle contient $-n_2$) et majorée par n_1 elle contient donc un plus grand élément n vérifiant $na \leq x$.
Puisque l'entier $(n+1)$ n'appartient pas à cet ensemble, on a $x < (n+1)a$ ce qui prouve que n convient.

Définition 1.3.1 *Si x est un réel, l'unique entier relatif n vérifiant $n \leq x < n+1$ s'appelle la partie entière de x et se note $E(x)$*

`Exemple:`

$$A = \{\frac{1}{n},\, n \in \mathbb{N}\} = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots\right\}$$

0 est un minorant : $A \neq \emptyset$ de plus A est minorée dans $\mathbb{R}$ alors $\inf(A)$ existe.
i) $\forall\, x \in A$ on a $x > 0$ car $\frac{1}{n} > 0\, \forall\, n \in \mathbb{N}$.

ii) Soit $\epsilon > 0$, $\exists ?\, x \in A$ tel que $0 \leq x < 0 + \epsilon = \epsilon$, c'est à dire $\exists ?\, n \in \mathbb{N}$ tel que $0 \leq \frac{1}{n} < \epsilon$, ou aussi $n > \frac{1}{\epsilon}$. Donc il suffit de prendre $n = \mathrm{E}(\frac{1}{\epsilon}) + 1$.

Proposition 1.3.3 *L'ensemble* $\mathbb{Q}$ *est dense dans* $\mathbb{R}$ *ce qui signifie :*

$$\forall\, x,\, y \in \mathbb{R},\ x < y,\ \ \exists\, r \in \mathbb{Q} : \quad a < r < b.$$

Preuve : Posons $q = E\left(\frac{1}{y-x}\right) + 1 \geq 1$ puis $p = \mathrm{E}(qx)$ on a alors

$$\frac{1}{q} < y - x \quad \text{et} \quad \frac{p}{q} \leq x < \frac{p+1}{q}$$

et donc

$$x < \frac{p+1}{q} \leq x + \frac{1}{q} < x + (y - x) = x$$

ce qui prouve que le rationnel $r = \frac{p+1}{q}$ vérifie $x < r < y$.

Chapitre 2

Suites réelles

2.1 Définitions

Définition 2.1.1 *On appelle suite numérique une application u de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$.*
On dit que la suite u est déterminée, si on connait l'image u_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
u_n est applellée le terme général de la suite u, et n est l'indice.
On note par la suite u de terme général u_n par (u_n).

2.2 Limite d'une suite

Définition 2.2.1 *Soient (u_n) une suite et l un réel. On dit que (u_n) a pour limite l ou que u_n tend vers l, si*

$$\forall\, \epsilon > 0,\ \exists\, N \in \mathbb{N},\ \forall\, n \geq N \implies |u_n - l| < \epsilon.$$

S'il existe un réel l tel que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = l$ on dit que la suite est convergente, ou simplement que la suite (u_n) converge vers l.
La suite (u_n) ne converge pas vers l (on dit qu'elle diverge) si

$$\exists\, \epsilon > 0,\ \forall\, N \in \mathbb{N},\ \exists\, n \geq N \implies |u_n - l| \geq \epsilon.$$

`Exemples:`

1. La suite definie par $u_n = \frac{1}{n+1}$ converge vers 0. En effet, si $\epsilon > 0$ par l'axiome d'Archimède on peut trouver un entier N tel que $N\epsilon \geq 1$. Pour $n \geq N$ on a alors : $0 \leq u_n \leq \frac{1}{N+1} \leq \epsilon$.
2. La suite definie par $u_n = \frac{n}{n+1}$ converge vers 1. Soit $\epsilon > 0$ fixé

$$\exists ?\, N \in \mathbb{N},\ \forall\, n \geq N \implies 1 - \epsilon < \frac{n}{n+1} < 1 + \epsilon$$

ssi

$$\exists ?\, N \in \mathbb{N},\ \forall\, n \geq N \implies 1 - \epsilon < 1 - \frac{1}{n+1} < 1 + \epsilon$$

ssi

$$\exists ?\, N \in \mathbb{N},\ \forall\, n \geq N \implies n + 1 > \frac{1}{\epsilon}$$

ssi

$$\exists ?\, N \in \mathbb{N},\ \forall\, n \geq N \implies n > \frac{1}{\epsilon} - 1.$$

Il suffit de prendre $N = \mathrm{E}(\frac{1}{\epsilon})$.

3. La suite
$$u_n = \begin{cases} n & \text{si } n = 2k \\ \frac{1}{n} & \text{si } n = 2k+1. \end{cases}$$
ne converge pas vers 0 en effet : Pour $\epsilon = 1$, $\forall\, p > 1$, $\exists\, n = 2p$, $|u_n| = 2p \geq 1$.

Proposition 2.2.1 *Si la suite* (u_n) *converge vers* l*, alors* l *est unique.* l *s'appelle la limite de* u_n *et on note* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$.

On a immédiatement les équivalences suivantes :
$$\lim_{n\to+\infty} u_n = l \iff \lim_{n\to+\infty}(u_n - l) = 0 \iff \lim_{n\to+\infty} |u_n - l| = 0.$$

Preuve :
Supposons que la suite (u_n) converge vers l et l' et que $l \neq l'$. Soit $\epsilon = \frac{|l-l'|}{4} > 0$. D'après la définition de la limite $\exists\, n_1,\, n_2 \in \mathbb{N}$ tels que :
$$\forall\, n \geq n_1,\ |u_n - l| < \epsilon \quad \text{et} \quad \forall\, n \geq n_2,\ |u_n - l'| < \epsilon.$$
Pour $N = \max\{n_1, n_2\}$, donc pour $n \geq N$ on peut écrire :
$$|l - l'| = |l - u_n + u_n - l'| \leq |u_n - l| + |u_n - l'| < 2\epsilon = \frac{|l - l'|}{2}.$$
Ce qui est absurde d'où $l = l'$.

Remarque 2.2.1 *Pour démontrer qu'une suite* (u_n) *est divergente il faut donc prouver que*
$$\forall\, l \in \mathbb{R},\ \ \exists\, \epsilon > 0,\ \forall\, N \in \mathbb{N},\ \exists\, n \geq N \implies |u_n - l| \geq \epsilon.$$

`Exemples:`

1. Si (u_n) est une suite constante, elle converge vers u_0.
2. Il est evident que d'après la définition que si une suite (u_n) converge vers l, alors la suite $(-u_n)$ converge vers $-l$ et que la suite (u_{n+1}) converge vers l. Donc si la suite $u_n = (-1)^n$ converge vers l, on doit avoir $l = l'$, ce qui prouve que $l = 0$. Or, comme on a $|u_n| = 1$, la suite ne peut pas converger vers 0. Et par conséquent elle est divergente.

Proposition 2.2.2 *Toute suite convergente est bornée.*

Preuve :
Supposons que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$. D'après la définition, il existe un entier $N \in \mathbb{N}$ tel que $|u_n - l| < 1$ si $n \geq N$. Donc on obtient
$$|u_n| = |u_n - l + l| \leq |u_n - l| + |l| \leq 1 + |l|,\ \forall\, n \geq N.$$
Soit $M = \max\{u_0, u_1, \ldots, u_{N-1}, 1 + |l|\}$ et on a donc $|u_n| \leq M$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. D'où la suite (u_n) est bornée.
`Exemples:`

1. La suite $u_n = n$ n'est pas convergente, car elle n'est pas bornée.
2. La réciproque de la proposition précédente est fausse car il suffit de reprendre l'exemple de la suite $u_n = (-1)^n$ qui est bornée mais qui n'est pas convergente.

Propriétés 2.2.1 *Soient* (u_n) *et* (v_n) *deux suites convergentes vers* l *et* l' *respectivement et* λ *un réel alors on a*

1. *La suite* $(u_n + v_n)$ *est une suite convergente et elle converge vers* $l + l'$.
2. *La suite* $(\lambda.u_n)$ *est une suite convergente et elle converge vers* $\lambda.l$.
3. *La suite* $(u_n.v_n)$ *est une suite convergente et elle converge vers* $l.l'$.
4. *La suite* $(|u_n|)$ *est une suite convergente et elle converge vers* $|l|$.
5. *Si* $l \neq 0$ *et* $u_n \neq 0\, \forall n$ *alors la suite* $(\frac{1}{u_n})$ *est une suite convergente et elle converge vers* $\frac{1}{l}$.
6. *Si* $(u_n) \leq (v_n)$ *alors* $l \leq l'$.

Preuve :
On sait que (u_n) converge vers l et (v_n) converge vers l alors

$$\forall \epsilon' > 0\, \exists N_1 \in \mathbb{N},\, \forall n \geq N_1 \implies |u_n - l| < \epsilon'$$

et

$$\forall \epsilon'' > 0\, \exists N_2 \in \mathbb{N},\, \forall n \geq N_2 \implies |v_n - l'| < \epsilon''.$$

1) Soit

$$\epsilon > 0,\ \exists ?\, N \in \mathbb{N},\, \forall n \geq N \implies |u_n + v_n - l - l'| < \epsilon.$$

En particulier pour $\epsilon' = \epsilon'' = \frac{\epsilon}{2}$ on a

$$\exists N_1 \in \mathbb{N},\, \forall n \geq N_1 \implies |u_n - l| < \frac{\epsilon}{2}$$

et

$$\exists N_2 \in \mathbb{N},\, \forall n \geq N_2 \implies |v_n - l'| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Si on pose $N = \max\{N_1, N_2\}$ alors $\forall n \geq N$ on a $|u_n - l| < \frac{\epsilon}{2}$ et $|v_n - l'| < \frac{\epsilon}{2}$.
D'où $\forall n \geq N$ on a

$$|u_n + v_n - l - l'| \leq |u_n - l| + |v_n - l'| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

2) Pour $\lambda = 0$ la propriété est evidente. Supposons maintenant que $\lambda \neq 0$. Soit

$$\epsilon > 0,\ \exists ?\, N \in \mathbb{N},\, \forall n \geq N \implies |\lambda.u_n - \lambda.l| < \epsilon.$$

En particulier pour $\epsilon' = \frac{\epsilon}{|\lambda|}$ on a

$$\exists N_1 \in \mathbb{N},\, \forall n \geq N_1 \implies |u_n - l| < \frac{\epsilon}{\lambda}.$$

Si on pose $N = N_1$ alors $\forall n \geq N$ on a $|\lambda.u_n - \lambda.l| < \epsilon$.

3) Soit

$$\epsilon > 0,\ \exists ?\, N \in \mathbb{N},\, \forall n \geq N \implies |u_n.v_n - l.l'| < \epsilon.$$

Puisque (u_n) est convergente alors (u_n) est bornée donc il existe $M \in \mathbb{R}^+,\ \sup(|u_n|, |l'|) \leq M$.
En particulier pour $\epsilon' = \epsilon'' = \frac{\epsilon}{2M}$ on a

$$\exists N_1 \in \mathbb{N},\, \forall n \geq N_1 \implies |u_n - l| < \frac{\epsilon}{2M}$$

et

$$\exists N_2 \in \mathbb{N},\, \forall n \geq N_2 \implies |v_n - l'| < \frac{\epsilon}{2M}.$$

Si on pose $N = \max\{N_1, N_2\}$ alors $\forall\, n \geq N$ on a $|u_n - l| < \frac{\epsilon}{2M}$ et$|v_n - l'| < \frac{\epsilon}{2M}$.
D'où $\forall\, n \geq N$ on a

$$|u_n.v_n - l.l'| = |u_n.v_n - u_n.l' + u_n.l' - l.l'| \leq |l'|.|u_n - l| + |u_n|.|v_n - l'| < M.\frac{\epsilon}{2M} + M\frac{\epsilon}{2M} = \epsilon.$$

4) Soit

$$\epsilon > 0,\ \exists ?\, N \in \mathbb{N},\ \forall\, n \geq N \implies ||u_n| - |l|| < \epsilon.$$

En particulier pour $\epsilon' = \epsilon$ on a

$$\exists\, N_1 \in \mathbb{N},\ \forall\, n \geq N_1 \implies |u_n - l| < \epsilon.$$

Si on pose $N = N_1$ alors $\forall\, n \geq N$ on a $||u_n| - |l|| \leq |u_n - l| < \epsilon$.

5) Soit

$$\epsilon > 0,\ \exists ?\, N \in \mathbb{N},\ \forall\, n \geq N \implies \Big|\frac{1}{u_n} - \frac{1}{l}\Big| < \epsilon.$$

On a $|u_n|$ converge vers $|l|$ alors

$$\forall \epsilon''' > 0,\ \exists\, N_3 \in \mathbb{N},\ \forall\, n \geq N_3 \implies ||u_n| - |l|| < \epsilon'''.$$

Pour

$$\epsilon''' = \frac{l}{2}, \exists\, N_3 \in \mathbb{N},\ \forall\, n \geq N_3 \implies ||u_n| - |l|| < \frac{l}{2}$$

C'est à dire

$$\exists\, N_3 \in \mathbb{N},\ \forall\, n \geq N_3 \implies \frac{|l|}{2} < |u_n| < \frac{3|l|}{2}.$$

Ce qui donne que

$$\exists\, N_3 \in \mathbb{N},\ \forall\, n \geq N_3 \implies \frac{2}{3|l|} < \frac{1}{|u_n|} < \frac{2}{|l|}.$$

Et pour $\epsilon' = \frac{\epsilon}{2}|l|^2$ on a

$$\exists\, N_1 \in \mathbb{N},\ \forall\, n \geq N_1 \implies |u_n - l| < \frac{\epsilon}{2}|l|^2.$$

Si on pose $N = \max\{N_1, N_3\}$ alors $\forall\, n \geq N$ on a

$$|\frac{1}{u_n} - \frac{1}{l}| = \frac{|u_n - l|}{|u_n|.|l|} \leq \frac{2|u_n - l|}{|l|^2} < \frac{2\epsilon'}{|l|^2} = \epsilon.$$

6) On suppose par l'absurde que $l' < l$ c'est à dire $l' - l < 0$. On note $l'' = l' - l$. La suite $(v_n - u_n)$ converge vers l''. Donc

$$\forall\, \epsilon > 0,\ \exists\, N \in \mathbb{N},\ \forall\, n \geq N \implies l'' - \epsilon < v_n - u_n < l'' + \epsilon.$$

Don pour $\epsilon = -\frac{l''}{2}$ on obtient que

$$\exists\, N \in \mathbb{N},\ \forall\, n \geq N \implies v_n - u_n < \frac{l''}{2} < 0.$$

Ce qui est absurde. D'où $l \leq l'$.

`Exercice:`

Soit (u_n) une suite positive. Montrer que si (u_n) converge vers l alors la suite (v_n) définie par $v_n = \sqrt{u_n}$ converge vers $\sqrt{l}$.

Proposition 2.2.3 *Soit (u_n) une suite positive. S'il existe une suite (v_n) qui converge vers 0 telle que*

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq u_n \leq v_n,$$

alors la suite (u_n) converge vers 0.

Preuve :
Soit

$$\epsilon > 0,\ \exists ?\, N \in \mathbb{N}\ : \forall\, n \geq N,\ u_n < \epsilon.$$

Puisque la suite (v_n) tend vers 0 alors

$$\exists\, n_0 \in \mathbb{N}\ : \forall\, n \geq N,\ v_n < \epsilon.$$

Or $u_n \leq v_n$ alors il suffit de prendre $N = n_0$.

Proposition 2.2.4 *Soient (u_n) et (w_n) deux suites convergeant vers la même limite l. Si (v_n) est une suite vérifiant :*

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leq v_n \leq w_n,$$

alors la suite (v_n) converge vers l.

Preuve :
D'après les hypothèses on peut écrire :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ 0 \leq v_n - u_n \leq w_n - u_n$$

et comme $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n - w_n = 0$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n - u_n = 0$. Or $v_n = u_n + (v_n - u_n)$ donc (v_n) converge vers l.

Définition 2.2.2 *On dit que la suite (u_n)*
- *tend vers $+\infty$ ou bien diverge vers $+\infty$ si :*

$$\forall A > 0,\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N}\ : \forall\, n \geq n_0 \implies u_n > A,$$

- *tend vers $-\infty$ ou bien diverge vers $-\infty$ si :*

$$\forall A < 0,\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N}\ : \forall\, n \geq n_0 \implies u_n < A.$$

`Exemples:`

1. La suite $u_n = n$ tend vers $+\infty$ en effet : Soit $A > 0$, $\exists ?\, n_0 \in \mathbb{N}\ : n \geq n_0 \implies n > A$. Il suffit de prendre $n_0 = \mathrm{E}(A) + 1$.
2. Si une suite (u_n) tend vers $+\infty$ alors elle n'est pas majorée mais elle est minorée. En effet, on peut trouver un entier N tel que $\forall\, n \geq N,\ u_n > 1$. Alors (u_n) est minorée par $\min\{1, u_0, \ldots, u_{N-1}\}$.
3. Une suite u tend vers $+\infty$ ssi la suite $-u$ tend vers $-\infty$.

Proposition 2.2.5 *Soit (u_n) et (v_n) deux suites vérifiant :*

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leq v_n$$

1. *Si $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = +\infty$.*
2. *Si $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = -\infty$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$.*

Preuve : Évidente en reprenant les définitions.

2.2.1 Operations sur les limites

On résume les opérations dans les tableaux suivants dont les démonstrations sont essentiellement des conséquences des dérniers résultats. Notons que la F.I veut dire forme indéterminée.
`Exemples:`

1. $\lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)\ln(\frac{1}{n})=-\infty$ puisque : $\lim_{n\to+\infty}1-\frac{1}{n}=1$ et $\lim_{n\to+\infty}\ln(\frac{1}{n})=-\infty$.
2. $\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{n\sqrt{1+\frac{1}{n}}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}}=1.$

Somme :

$+$	l_1	$+\infty$	$-\infty$
l_2	l_1+l_2	$+\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	F.I
$-\infty$	$-\infty$	F.I	$-\infty$

Produit :

$\times$	$l_1\neq 0$	0	$+\infty$	$-\infty$
$l_2\neq 0$	$l_1.l_2$	0	$+\infty$	$-\infty$
0	0	0	F.I	F.I
$+\infty$	$+\infty$	F.I	$+\infty$	$-\infty$
$-\infty$	$-\infty$	F.I	$-\infty$	$+\infty$

Inverse :

x	$l\neq 0$	0^+	0^-	$+\infty$	$-\infty$
$\frac{1}{x}$	$\frac{1}{l}$	$+\infty$	$-\infty$	0	0

2.3 Suite monotone

Définition 2.3.1 *Soit (u_n) une suite réelles. On dit que (u_n) est*

- *constante si $u_n=u_{n+1}$ pour tout $n\in\mathbb{N}$,*
- *stationnaire si elle est constante à partir d'un certain rang, c'est à dire s'il existe $p\in\mathbb{N}$: $\forall n>p$, $u_{n+1}=u_n$.*
- *majorée s'il existe un nombre réel M tel que $u_n\leq M$ pour tout $n\in\mathbb{N}$,*
- *minorée s'il existe un nombre réel m tel que $u_n\geq m$ pour tout $n\in\mathbb{N}$,*
- *bornée si elle est à la fois majorée et minorée c'est à dire il existe deux nombres réels m et M tels que $m\leq u_n\leq M$ pour tout $n\in\mathbb{N}$,*
- *croissante (resp. strictement croissante) si l'on a $u_n\leq u_{n+1}$ (resp. $u_n<u_{n+1}$) pour tout $n\in\mathbb{N}$,*
- *décroissante (resp. strictement décroissante) si l'on a $u_n\geq u_{n+1}$ (resp. $u_n>u_{n+1}$) pour tout $n\in\mathbb{N}$,*
- *monotone (resp. strictemement monotone) si elle est croissante ou décroissante (resp. strictement croissante ou strictement décroissante).*

`Exemples:`

1. La suite u définie par $u_n=\frac{n}{n+1}$ est bornée et strictement décroissante.

2. Les suites constantes sont les seules suites qui soient simultanément croissantes et décroissantes.
3. Si $a \in \mathbb{R}_+$, la suite a^n est monotone.
4. la suite $u_n = \mathrm{E}(\frac{n}{2})$ minorée mais pas majorée est croissante mais par strictement croissante.
5. la suite $u_n = (-1)^n$ est bornée mais ni croissante ni décroissante.
6. $u_n = \frac{1}{n}$ est une suite strictement décroissante en effet : on a $n+1 > n$ alors $\frac{1}{n} > \frac{1}{n+1}$ donc $u_n > u_{n+1}$.
7. $u_n = \frac{n}{n+1}$ est une suite strictement croissante en effet : d'abord on a $u_0 = 0 < u_1 = \frac{1}{2}$ puis pour $n \in \mathbb{N}^*$ on a $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)^2}{n(n+2)} = \frac{n^2+2n+1}{n^2+2n} > 1$ donc $u_n < u_{n+1}$.

Théorème 2.3.1 *Toute suite croissante et majorée (resp. décroissante et minorée et minorée) est convergente.*

Preuve :
Soit (u_n) une suite croissante et majorée. On pose $U = \{u_n,\ n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}$ qui est un ensemble non vide et majoré, donc admet une borne supérieure qu'on la note par l. Montrons que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$. Soit

$$\epsilon > 0\ \exists ?\, N \in \mathbb{N},\ \forall\, n \geq N :\ |u_n - l| < \epsilon.$$

Comme $l = \sup(U)$ alors $\exists\, u_p\ : l - \epsilon < u_p \leq l$, or (u_n) est une suite croissante alors on peut écrire

$$l - \epsilon < u_p \leq u_{p+1} \leq \cdots \leq u_n \leq \cdots \leq l.$$

Donc $\forall\, n \geq p,\ l - \epsilon < u_n \leq l < l + \epsilon$ d'où il suffit de prendre $N = p$.

Si (u_n) est une suite décroissante et minorée alors (v_n) définie par $v_n = u_n$ est une suite croissante et majorée donc converge vers un réel l et par suite (u_n) converge vers $-l$.

`Exemples:`

$$u_n = \frac{n+1}{n} = 1 + \frac{1}{n} > 1,\ \forall\, n \in \mathbb{N}^*$$

de plus (u_n) est décroissante en effet

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n^2+2n}{n^2+2n+1} < 1$$

alors elle est covergente et on a $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$.

Définition 2.3.2 *Soit (u_n) et (v_n) deux suites réelles. On dit que les deux suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes si*
i) (u_n) est croissante et (v_n) est décroissante,
ii) $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n - v_n = 0$.

Remarque 2.3.1 *Si les deux suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes telles qu'elles sont décrites dans la définition précédente alors on a $u_n \leq v_n,\ \forall\, n \in \mathbb{N}$ en effet sinon $\exists\, n_0 \in \mathbb{N},\ u_{n_0} > v_{n_0}$ en par particulier on obtient*

$$v_n \leq \cdots \leq v_{n_0+1} \leq v_{n_0} < u_{n_0} \leq u_{n_0+1} \leq \cdots \leq v_n,$$

donc $\forall\, n \geq n_0,\quad |u_n - v_n| \geq u_{n_0} - v_{n_0} = \epsilon$, ce qui donne que la suite $(u_n - v_n)$ ne converge pas vers 0, ce qui est absurde.

`Exemples:`

Les suites définies par $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{n!}$ sont adjacentes en effet :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)!} > 0, \ \forall\, n \in \mathbb{N}$$

ce qui donne que (u_n) est croissante.

$$v_{n+1} - v_n = u_{n+1} - u_n + \frac{1}{(n+1)!} - \frac{1}{n!} = \frac{1-n}{(n+1)!} > 0, \ \forall\, n \in \mathbb{N}^*$$

ce qui donne que (v_n) est décroissante à partir du rang 1.

$$\lim_{n\to+\infty} u_n - v_n = \lim_{n\to+\infty} -\frac{1}{n!} = 0.$$

Théorème 2.3.2 *Deux suites adjacentes convergent vers la même limite.*

Preuve :
On a $u_0 \leq u_1 \leq \cdots \leq u_n \leq v_n \leq \cdots \leq v_1 \leq v_0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ alors la suite (u_n) est croissante et majorée donc converge vers l et (u_n) est décroissante et minorée donc converge vers l'. Or $\lim_{n\to+\infty} (u_n - v_n) = l - l' = 0$ d'où $l = l'$.

2.4 Suite de Cauchy

Définition 2.4.1 *Une suite (u_n) est dite de Cauchy si*

$$\forall\, \epsilon > 0, \ \exists\, N \in \mathbb{N}, \ \forall\, n, \, m \geq N \implies |u_n - u_m| < \epsilon.$$

Une suite (u_n) n'est pas de Cauchy si

$$\exists\, \epsilon > 0, \ \forall\, N \in \mathbb{N}, \ \exists\, n, \, m \geq N \implies |u_n - u_m| \geq \epsilon.$$

`Exemples:`

1. $u_n = \frac{1}{n}$ est une suite de Cauchy, en effet :
   Soit
   $$\epsilon > 0, \ \exists ?\, N \in \mathbb{N}, \ \forall\, n, \, m \geq N \implies |\frac{1}{n} - \frac{1}{m}| < \epsilon.$$
   Comme $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$ alors $\exists\, p \in \mathbb{N}\, \forall\, n \geq p$ on a $0 < u_n < \epsilon$
   ou aussi
   $$\exists\, p \in \mathbb{N}\, \forall\, m \geq p \ \text{ on a } \ -\epsilon < -u_m < 0.$$
   Donc pour $N = p$ on a $\forall\, n, \, m \geq N, \ -\epsilon < u_n - u_m < \epsilon$.
2. La suite $u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k}$ n'est pas une suite de Cauchy en effet :
   Montrons qu'il existe
   $$\epsilon > 0, \ \forall\, N \in \mathbb{N}, \ \exists\, n, \, m \geq N, \ \text{ on a } \ |u_n - u_m| \geq \epsilon.$$
   $$u_{2n} - u_n = \sum_{k=0}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k} + \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k} = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}.$$

Or pour tout $n+1 \leq k \leq 2n$ on a $\frac{1}{k} \geq \frac{1}{2n}$ donc

$$\sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k} \geq \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{2n} = \frac{1}{2},$$

donc il suffit de choisir $\epsilon = \frac{1}{2}$ et $m = 2n$.

`Exercice:`
Montrer que la suite (u_n) définie par $u_n = (-1)^n$ n'est pas de Cauchy.

Lemme 2.4.1 *Toute suite de Cauchy est bornée.*

Preuve :
(u_n) est une suite de Cauchy alors

$$\exists\, N \in \mathbb{N},\ \forall\, n,\ m \geq N \implies |u_n - u_m| < 1,$$

(en prenant $\epsilon = 1$). Donc $\forall\, n \geq N$ on a $u_N - 1 \leq u_n \leq u_N + 1$, (en prenant $m = N$).
D'où

$$\inf\{u_N - 1, u_0, u_1, \ldots, u_{N-1}\} \leq u_n \leq \sup\{u_N + 1, u_0, u_1, \ldots, u_{N-1}\}$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$, et ceci montre bien que la suite (u_n) est bornée.

`Exercice:`
Montrer que la suite (u_n) définie par $u_n = n + 1$ n'est pas de Cauchy.

Théorème 2.4.1 *Une suite (u_n) est de Cauchy ssi elle est convergente.*

Démonstration :
" $\Longleftarrow$ " Soit

$$\epsilon > 0,\ \exists ?\, N \in \mathbb{N},\ \forall\, n,\ m \geq N \implies |u_n - u_m| < \epsilon.$$

Or (u_n) est convergente alors

$$\forall\, \epsilon' > 0,\ \exists\, p \in \mathbb{N},\ \forall\, n \geq N \implies |u_n - l| < \epsilon'.$$

En particulier pour $\epsilon' = \frac{\epsilon}{2}$ on a $\forall\, n \geq p \implies |u_n - l| < \frac{\epsilon}{2}$.
D'où pour $N = p$ on a

$$\forall\, n,\ m \geq N \implies |u_n - u_m| \leq |u_n - l| + |u_m - l| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

" $\Longrightarrow$ " On pose $v_n = \inf\{u_p\ : p \geq n\}$ et $w_n = \sup\{u_p\ : p \geq n\}$ et montrons que ces deux suites sont adjacentes. Il est clair que (v_n) est croissante et (w_n) est décroissante.
Soit

$$\epsilon > 0,\ \exists ?\, N \in \mathbb{N},\ \forall\, n \geq N \implies |v_n - w_n| < \epsilon.$$

Comme (u_n) est de Cauchy alors

$$\exists\, M \in \mathbb{N},\ \forall\, p,\ q \geq M \implies |u_p - u_q| < \epsilon.$$

Ce qui donne en particulier en fixant $p > M$ que

$$\exists\, M \in \mathbb{N},\ \forall\, q \geq M \implies u_q - \epsilon \leq u_p < u_q + \epsilon.$$

Donc pour $n > M$ on a

$$\exists\, M \in \mathbb{N},\ \forall\, q \geq M \implies \sup\{u_q\ : q \geq n\} - \epsilon \leq u_p \leq \sup\{u_q\ : q \geq n\} + \epsilon.$$

Ce qui donne

$$\exists\, M \in \mathbb{N},\ \forall\, p \geq M \implies -\epsilon + u_p \leq v_n \leq \epsilon + u_p.$$

Donc on a

$$\inf\{u_p\ : p \geq n\} - \epsilon \leq v_n \leq \inf\{u_p\ : p \geq n\} + \epsilon.$$

D'où pour $N = M$ on a

$$\forall\, n \geq N \implies |v_n - w_n| < \epsilon.$$

Ce qui montre que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes et donc convergent vers la même limite l, de plus comme on a $v_n \leq u_n \leq w_n$ d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$.

2.5 Suites extraites

Définition 2.5.1 *Soit φ une application $\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante (si $n_1 < n_2 \Rightarrow \varphi(n_1) < \varphi(n_2)$). On appelle suite extraite d'une suite (u_n) toute suite définie par $v_n = u_{\varphi(n)}$*

`Exemples:`

1. La suite (u_{n+1}) est une suite extraite de la suite (u_n).
2. Les deux suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont deux suites extraites de la suite (u_n).

Remarque 2.5.1 *Si $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante alors $\varphi(p) > p,\ \forall\, p \in \mathbb{N}$ en effet :*
Pour $p = 0$ on a $\varphi(0) \geq 0$.
Supposons que pour $p \in \mathbb{N}$ on a $\varphi(p) > p$ et montrons que $\varphi(p+1) \geq p+1$.
$\varphi(p+1) > \varphi(p) \geq p$ ce qui donne $\varphi(p+1) \geq p+1$.

Proposition 2.5.1 *Si $(u_{\varphi(n)})$ est une suite extraite de la suite (u_n), alors si (u_n) tend vers $l \in \overline{\mathbb{R}}$, alors $(u_{\varphi(n)})$ tend aussi vers l.*

Preuve :
On traite le cas $l \in \mathbb{R}$ les autres cas sont pareils. Soit

$$\epsilon > 0,\ \exists?\, N \in \mathbb{N},\ \forall\, n \geq N\ : |u_{\varphi(n)} - l| < \epsilon.$$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$ alors $\exists\, M \in \mathbb{N},\ \forall\, n \geq M\ : |u_n - l| < \epsilon$, et comme $\varphi(n) \geq n$ alors $\forall\, n \geq M\ : |u_{\varphi(n)} - l| < \epsilon$ et donc il suffit de prendre $N = M$.
`Exemples:`

1. La suite $u_n = (-1)^n$ diverge car la suite (u_{2n}) converge vers 1 et la suite (u_{2n+1}) converge vers -1.
2. La suite définie par $u_n = \cos(\frac{n\pi}{4})$ diverge puisque $u_{4n} = (-1)^n$ en est une suite divergente.

Proposition 2.5.2 *Si (u_n) une suite telle que les deux sous-suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers la même limite l, alors la suite (u_n) converge vers l aussi.*

Preuve :
Soit

$$\epsilon > 0,\ \exists?\, N \in \mathbb{N},\ \forall\, n \geq N\ : |u_n - l| < \epsilon.$$

Or comme (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers l, alors on peut trouver deux entiers n_1 et n_2 tels que :

$$\forall\, n \geq n_1\ : |u_{2n} - l| < \epsilon \quad \text{et} \quad \forall\, n \geq n_2\ : |u_{2n+1} - l| < \epsilon.$$

Si on pose $N = \max\{2n_1, 2n_2 + 1\}$, on a évidemment, $\forall\, n \geq N\ : |u_n - l| < \epsilon$.

Théorème 2.5.1 (Bolzano-Weierstrass) *Toute suite bornée possède au moins une sous-suite convergente.*

Démonstration :
Soit (u_n) une suite bornée alors il existe $a,\, b \in \mathbb{R}$ tels que $u_n \in [a, b],\ \forall\, n \in \mathbb{N}$.
1^{er} **cas :** La suite (u_n) est stationnaire.
Donc (u_n) converge et dans ce cas on prend $\varphi(n) = n$ autrement dit $u_{\varphi(n)} = u_n$.
2^{eme} **cas :** La suite (u_n) n'est est pas stationnaire.
Soit il existe une infinitée de terme de la suite dans $[a, \frac{a+b}{2}]$ ou dans $[\frac{a+b}{2}, b]$ et on pose $[a_1, b_1]$ cette intervalle là. On pose $\varphi(1) = \inf\{n \in \mathbb{N}\ : u_n \in [a_1, b_1]\}$.
Soit il existe une infinitée de terme de la suite dans $[a_1, \frac{a_1+b_1}{2}]$ ou dans $[\frac{a_1+b_1}{2}, b_1]$ et on pose $[a_2, b_2]$ cette intervalle là. On pose $\varphi(2) = \inf\{n \in \mathbb{N}\ : u_n \in [a_2, b_2],\ n \neq \varphi(1)\}$.
Donc de proche en proche on construit les suites (a_n), (b_n) et $(u_{\varphi(n)})$ vérifiant pour $\varphi(0) = 0$: $\varphi(n) = \inf\{n \in \mathbb{N}\ : u_n \in [a_n, b_n],\ n \neq \varphi(n-1)\}$ qui est évidemment une fonction strictement croissante, (a_n) est croissante, (b_n) est décroissante et que $a_n \leq u_{\varphi(n)} \leq b_n,\ \forall\, n \in \mathbb{N}$.
De plus on peut montrer par récurence que $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n - a_n = 0$. Ce qui montre que les deux suites (a_n) et (b_n) sont adjacentes donc converge vers une même limite l et comme $a_n \leq u_{\varphi(n)} \leq b_n,\ \forall\, n \in \mathbb{N}$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{\varphi(n)} = l$.

2.6 Suite arithmétique

Définition 2.6.1 *On dit que (u_n) est une suite arithmétique*

$$\exists R \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - u_n = R.$$

R est appelée le raison.

Remarque 2.6.1
- *Si $R = 0$, alors (u_n) sera constante.*
- *Si $R > 0$, alors (u_n) est strictement croissante.*
- *Si $R < 0$, alors (u_n) est strictement décroissante.*

Propriétés 2.6.1 *Soit (u_n) une suite arithmétique de raison R et u_0 le premier terme, alors*

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = u_0 + nR$$

et de façon plus général

$$u_n = u_k + (n-k)R,\ \ n - k \geq 0.$$

Propriétés 2.6.2 *Soit (u_n) suite arithmétique de raison R et u_0 le premier terme, alors :*

$$S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots\ldots.. + u_n = \frac{(n+1)}{2}(u_0 + u_n).$$

$$\textit{La somme} = \frac{\textit{le nombre des termes}}{2}\Big[\textit{le premier terme de } S_n\ +\ \textit{le dernier terme de } S_n\Big].$$

$$\textit{le nombre des termes} =\ \textit{le dernier indice - le premier indice} + 1.$$

2.7 Suite géométrique

Définition 2.7.1 *On dit que (u_n) est une suite géométrique*

$$\exists q \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = qu_n.$$

q est appelée le raison.

Propriétés 2.7.1 *Soit* (u_n) *une suite géométrique de raison* q *et* u_0 *le premier terme, alors*

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = q^n u_0$$

et de façon plus général

$$u_n = q^{(n-k)} u_k,\ \ n - k \geq 0.$$

Propriétés 2.7.2 *Soit* (u_n) *suite géométrique de raison* q *et* u_0 *le premier terme, alors :*

$$S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots\dots + u_n = u_0 \frac{q^{(n+1)} - 1}{q - 1}.$$

$$\textit{La somme} = [\textit{le premier terme de } S_n] \frac{q^{\textit{le nombre des termes}} - 1}{q - 1}.$$

$$\textit{le nombre des termes} = \textit{ le dernier indice - le premier indice} + 1.$$

Chapitre 3

Continuité

I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide ni réduit à un point. $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

3.1 Définitions

Définition 3.1.1 *Soit E une partie de $\mathbb{R}$. On appelle une fonction réelle d'une variable réelle toute application de E dans $\mathbb{R}$ et on note*

$$\begin{aligned} f : E &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x) \end{aligned}$$

.

Définition 3.1.2 ***(Fonction paire ou impaire)***
Une fonction f définie sur E est dite :
- *Paire si, pour tout $x \in E$, on a $-x \in E$ et $f(-x) = f(x)$.*
- *Impaire si, pour tout $x \in E$, on a $-x \in E$ et $f(-x) = -f(x)$.*

Définition 3.1.3 ***(Fonction Périodique)***
Une fonction f définie sur E est dite périodique s'il existe un nombre réel non nul T tel que, pour tout $x \in E$:

$$x + T \in E \;\text{ et }\; f(x + T) = f(x).$$

Ce nombre T est la période de f s'il est le plus petit réel positif qui satisfait cette condition.

Exercice 3.1.1 *$f(x) = \cos x$ est une fonction périodique de période 2π.*

Définition 3.1.4 ***(Fonction Bornée)***
Une fonction f définie sur E est dite bornée s'il existe un nombre positif M tel que, pour tout $x \in E$, on a $|f(x)| \leq M$.

Définition 3.1.5 ***(Fonction Monotone)***
Une fonction f définie sur E est dite :
- *Croissante sur E si pour tous x, $x' \in E$ tel que $x < x'$, on a $f(x) \leq f(x')$.*
- *Décroissante sur E si pour tous x, $x' \in E$ tel que $x < x'$, on a $f(x) \geq f(x')$.*
- *Monotone sur E si elle est croissante ou décroissante sur E.*

Définition 3.1.6 ***(Composition d'applications)***
Si f est une fonction définie sur E et g une fonction définie sur F, avec $f(E) \subset F$, on peut définir la fonction composée de f par g notée $g \circ f$, et qui associe à tout $x \in E$ le nombre réel $g[f(x)]$.

Définition 3.1.7 ***(Limite d'une fonction)***

1. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l \Leftrightarrow \forall\epsilon > 0,\ \exists\eta > 0,\ |x - x_0| \leq \eta \Rightarrow |f(x) - l| \leq \epsilon$,
   on dit que f admet en x_0 une limite l,
2. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ *(resp.* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = -\infty$*)*
   $\Leftrightarrow \forall A > 0,\ \exists\eta > 0,\ |x - x_0| \leq \eta \Rightarrow f(x) \geq A$ *(resp.* $f(x) \leq -A$*),*
   on dit que f admet en x_0 une limite $+\infty$ (resp. $-\infty$),
3. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = l$ *(resp.* $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = l$*)*
   $\Leftrightarrow \forall\epsilon > 0,\ \exists A > 0,\ x \geq A$ *(resp.* $x \leq -A$*)* $\Rightarrow |f(x) - l| \leq \epsilon$*,)*
   on dit que f admet en $+\infty$ (resp. en $-\infty$) une limite l,
4. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ *(resp.* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$*)*
   $\Leftrightarrow \forall A > 0,\ \exists B > 0,\ x \geq B \Rightarrow f(x) \geq A$*, (resp.* $f(x) \leq -A$*)*
   on dit que f admet en $+\infty$ une limite $+\infty$ (resp. $-\infty$).
5. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ *(resp.* $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$*)*
   $\Leftrightarrow \forall A > 0,\ \exists B > 0,\ x \leq -B \Rightarrow f(x) \leq -A$*, (resp.* $f(x) \geq A$*)*
   on dit que f admet en $-\infty$ une limite $-\infty$ (resp. $+\infty$).

Théorème 3.1.1 ***(Unicité de la limite)***
Si f a une limite au point x_0, cette limite est unique.

Définition 3.1.8 ***(Limite à droite et à gauche)***
Soient $f : I \to \mathbb{R}$, $l \in \overline{\mathbb{R}}$ et $x_0 \in \bar{I}$. On dit que f admet l limite à gauche (resp. à droite) au point x_0 et on note $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = l$ (resp. $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = l$), si la restriction de f à $I\cap]-\infty, x_0[$ (resp. $I\cap]x_0, +\infty[$) admet l comme limite en x_0.

Définition 3.1.9 ***(Forme Indéterminées)***
Les formes indéterminées sont :

$$\frac{0}{0},\quad \frac{\infty}{\infty},\quad 0\times\infty,\quad -\infty+\infty.$$

3.2 Continuité

Définition 3.2.1 *Soient $f : I \to \mathbb{R}$, $l \in \mathbb{R}$ et $x_0 \in I$. On dit que f est :*

1. *continue en x_0 si $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$, i.e,*

$$\forall\epsilon > 0,\ \exists\eta > 0,\ |x - x_0| \leq \eta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| \leq \epsilon.$$

2. *continue à gauche (resp. à droite) en x_0 si $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = f(x_0)$*
   (resp. $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = f(x_0)$).

Propriétés 3.2.1 *Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $x_0 \in I$. On a :*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0^-} f(x) = \lim_{x\to x_0^+} f(x) = f(x_0).$$

Autrement dit, f est continue en x_0 si et seulement si f est continue à gauche et à droite en x_0.

Théorème 3.2.1 *Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $x_0 \in I$. On a : f est continue en x_0 si et seulement si pour tout suite réelle (u_n) verifiant; Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = x_0$ alors :*

$$\lim_{n\to+\infty} f(u_n) = f(x_0).$$

Exercice 3.2.1 *Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & si\ x \neq 0 \\ x & si\ x = 0 \end{cases}$$

alors puisque

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 = f(0), \quad alors\ f\ \ est\ continue\ en\ 0$$

et elle est continue dans $\mathbb{R}$.

Définition 3.2.2 ***(Prolongement par continuité)***
Si f est une fonction définie sur $I - \{x_0\}$ et si $\lim_{x\to x_0} f(x) = l$, on dit que g est un prolongement par continuité de f en x_0 si et seulement si

$$g(x) = \begin{cases} l & si\ x = x_0 \\ f(x) & sinon \end{cases}$$

Exercice 3.2.2 *Soit $f : \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{\sin x}{x}$*

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1,$$

le prolongement par continuété de la fonction f existe et il est de la forme $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$F(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & si\ x \neq 0 \\ 1 & si\ x = 0 \end{cases}$$

Proposition 3.2.1 *Soient $x_0 \in I$, $\lambda \in \mathbb{K}$, $f, g : I \longrightarrow \mathbb{K}$ deux fonctions continues en x_0*

1. *$f + g$ est continue en x_0*
2. *λf est continue en x_0*
3. *$\mid f \mid$est continue en x_0*
4. *fg est continue en x_0*
5. *si $g(a) \neq 0$, alors $\frac{1}{g}$ est continue en x_0*
6. *si $g(a) \neq 0$, alors $\frac{f}{g}$ est continue en x_0*
7. *$\sup(f, g)$est continue en x_0*
8. *$\inf(f, g)$est continue en x_0*

Ces résultats sont immédiates grace au propriétés de la limite, ainsi qu'au fait que

$$\sup(f, g) = \frac{1}{2}(f + g + \mid f - g \mid) \text{ et } \inf(f, g) = \frac{1}{2}(f + g - \mid f - g \mid)$$

Proposition 3.2.2 *Soient I, J deux intervalles de $\mathbb{R}$, $x_0 \in I$, $f :\longrightarrow \mathbb{R}$, $g : J \longrightarrow \mathbb{K}$, telles que $f(I) \subset J$.*
Si f est continue en x_0 et g est continue en $f(x_0)$ alors $g \circ f : I \longrightarrow \mathbb{K}$ est continue en x_0.

Proposition 3.2.3 *Soient $x_0 \in I$, $f : I \longrightarrow \mathbb{C}$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) *f est continue en x_0*

(ii) *$\overline{f}$ est continue en x_0*

(iii) *$Re(f)$ et $Im(f)$ sont continues en x_0.*

3.3 Les théorème fondamantaux

Ici on prend $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

3.3.1 Théorème des valeurs intermédiaires

Théorème 3.3.1 *Soit f une application continue sur un intervalle I. Si a et b sont deux points de I tels que $f(a)f(b) \leq 0$, alors :*

$$\boxed{\exists c \in [a, b] \ : \ f(c) = 0}$$

Démenstration
Supposons par exemple $a \leq b$. Quitte à changer f en $-f$, on peut supposer $f(a) \leq 0 \leq f(b)$.
Construisons deux suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
En posant $a_0 = a$ et $b_0 = b$, on a $a_0 \leq b_0$ et $f(a_0) \leq 0 \leq f(b_0)$.
Supposons que a_n et b_n construits tels que $a_n \leq b_n$ et$f(a_n) \leq 0 \leq f(b_n)$ et prenons $c_n = \frac{a_n+b_n}{2}$
- Si $f(c_n) \leq 0$ on pose $a_{n+1} = c_n$ et $b_{n+1} = b_n$
- Si $f(c_n) > 0$ on pose $a_{n+1} = a_n$ et $b_{n+1} = c_n$

Dans les deux cas on a $a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n$ et$f(a_{n+1}) \leq 0 \leq f(b_{n+1})$.
La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n \leq b_n$.
Enfin

$$\lim_{n\to+\infty} b_n - a_n = 0$$

puisque par construction on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}$$

Par conséquent les deux suites sont adjacentes et vérifient :

$$f(a_n) \leq 0 \leq f(b_n)$$

En appelant alors c leur limite commune, on a $c \in [a, b]$. En passant à la limite, la continuité de f en c nous donne $f(c) = 0$, d'où le résultat.
`Remarque:`
On peut énoncer le résultat précédent en disant que, sur un intervalle, une fonction continue qui ne s'annule pas garde un signe constant.

Théorème 3.3.2 (Théorème des valeurs intermédiaires) *Soit f une application continue sur un intervalle $[a, b]$. Toute valeur comprise entre $f(a)$ et $f(b)$ est atteinte par la fonction f sur $[a, b]$.*

Démonstration :
Si $d \in [f(a), f(b)]$, il suffit d'appliquer le théorème 3.3.1 à la fonction $f - d$.

Corollaire 3.3.1 *L'image d'un intervalle par une application continue est un intervalle.*

preuve Si f est continue sur un intervalle I, il faut montrer que $f(I)$ est un intervalle, c'est-à-dire :

$$\forall (y_1, y_2) \in f(I)^2 \qquad , \qquad [y_1, y_2] \subset f(I)$$

Soient $(y_1, y_2) \in f(I)^2$ et $y \in [y_1, y_2]$. Prenons $(x_1, x_2) \in I$ tels que $y_1 = f(x_1)$ et $y_2 = f(x_2)$. Le théorème des valeurs intermédiaires nous donne l'existance d'un élément $c \in I$ compris entre x_1 et x_2 tel que $y = f(c)$. Donc $y \in f(I)$.

Proposition 3.3.1 *Si f est continue et strictement monotone sur I, le tableau suivant donne l'intervalle $f(I)$ en fonction de I :*

Monotonie	I	$[a,b]$	$[a,b[$	$]a,b]$	$]a,b[$
$f \nearrow$	$f(I)$	$[f(a),f(b)]$	$[f(a),\lim_b f[$	$]\lim_a f, f(b)]$	$]\lim_a f, \lim_b f[$
$f \searrow$	$f(I)$	$[f(b),f(a)]$	$]\lim_b f, f(a)]$	$[f(b), \lim_a f[$	$]\lim_b f, \lim_a f[$

Preuve Traitons par exemple le cas où f est croissante et où $I = [a,b[$.
La fonction f étant croissante, on a :

$$\forall x \in I\ ,\ f(x) \geq f(a)$$

et donc $f(a)$ est le plus petit élément de $f(I)$.

* Si f n'est pas majorée, alors :

$$f(I) = [f(a), +\infty[$$

Ce qui donne le résultat puisque $\lim_b f = +\infty$

* Si f est majorée, sa limite en b est $\sup_I f$ et $f(I)$ est alors un intervalle de borne $f(a)$ et $M = \lim_b f = \sup_I f$ d'aprés le théorème sur les limites des fonctions monotones.
Comme l'intervalle I n'a pas de plus grand élément, pour tout $x \in I$ on peut trouver $y \in I$ tel que $y > x$. Comme f strictement croissante, on a alors $f(x) < f(y) \leq M$, ce qui montre que $M \notin f(I)$
Donc $f(I) = [f(a), M[$.

`Exemple:` La fonction $f : x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$. Son tableau de variations :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f			1		
		$\nearrow$		$\searrow$	
	0				0

nous donne $f(\mathbb{R}) =]0,1]$

3.3.2 Réciproque d'une fonction continue

Lemme 3.3.1 *Soit f une fonction monotone sur un intervalle I. Si $f(I)$ est un intervalle, alors f est continue.*

Preuve : Supposons par exemple que f est croissante.
Soit $a \in I$ qui n'est pas sa borne supèrieure. La fonction f étant croissante, elle admet en a une limite à droite $l \geq f(a)$.
Supposons que $l > f(a)$. On a pour tout $x \in I$:

$$x > a \Rightarrow f(x) \geq l$$

et

$$x \leq a \Rightarrow f(x) \leq l$$

La fonction f ne prend donc aucune valeur strictement comprise entre $f(a)$ et l. Or, puisque a n'est pas le plus grand élément de I, on peut trouver $b \in I$ strictement plus grand que a, ce qui donne $f(a) \leq l \leq f(b)$.
Comme $J = f(I)$ est un intervalle, on a $[f(a), f(b)] \subset J$ et en particulier toutes les valeurs de $]f(a), l[$ sont atteintes.
C'est contradictoire, donc $l = f(a)$. Parsuite, f est continue à droite en a.
De même, on montre que f est continue à gauche en tout point de I qui n'est pas sa borne infèrieure.
Donc f est continue.

Théorème 3.3.3 *Si f une application continue strictement monotone sur un intervalle I, alors f induit une bijection de I sur l'intervalle $J = f(I)$, et sa réciproque est continue de J dans I.*

Démonstration : La fonction f est injective puisqu'elle est srictement monotone. Elle est donc bijective de I sur $J = f(I)$ qui est un intervalle d'aprés le corollaire 3.3.1. Sa réciproque est une bijection strictement monotone de l'intervalle J sur l'intervalle I, donc est continue sur J d'aprés le lemme 3.3.1.
`Exemple:`

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. L'application $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto & x^n \end{array}$ est continue, strictement croissante prend la valeur 0 en 0 et tend vers $+\infty$ en $+\infty$.
   C'est donc une bijection de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$ dont la réciproque est continue.

   Cette réciproque est la fonction $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto & \sqrt[n]{x} \end{array}$
2. La fonction sin est continue et strictement croissante sur $[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Elle induit donc une bijection de $[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ sur $[-1, 1]$. Sa réciproque, la fonction arcsin est continue sur $[-1, 1]$.

3.3.3 Image continue d'un segment

Théorème 3.3.4 *Toute application continue sur un segment possède un maximum et un minimum.*

Démonstration : Soit f une fonction continue sur un segment $[a, b]$.
Montrons que f admet une borne supérieure M et qu'il existe $x \in [a, b]$ tel que $M = f(x)$.

* En raisonnant par l'absurde, supposons f non majorée sur $[a, b]$ c'est-à-dire :

$$\forall A \in \mathbb{R},\ \exists x \in [a, b] \quad : \quad f(x) > A$$

On peut alors construire une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $[a, b]$ telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ f(x_n) \geq n \tag{3.1}$$

Cette suite étant bornée, on peut en extraire une sous-suite convergente $(x_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ dont la limite $\alpha \in [a, b]$.
Comme f est continue en α, on en déduit que $\big(f(x_{\varphi(n)})\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite convergente donc bornée, ce qui est en contradiction avec la relation (3.1).
Donc f est majorée sur $[a, b]$.

* Faisons à nouveau un raisonnement par l'absurde, en supposant que $M = \sup_I f$ ne soit pas attient, c'est-à-dire :

$$\forall x \in [a, b]\ ,\ f(x) \neq M$$

La fonction

$$g : x \mapsto \frac{1}{M - f(x)}$$

est alors définie et continue sur $[a, b]$ comme inverse d'une fonction continue qui ne s'annule pas. Or, on vu dans la première partie de la démenstration que toute application continue sur $[a, b]$ est majorée.
Soit donc A un majorant (strictement positif) de g. On a :

$$\forall x \in [a, b]\ ,\ g(x) \leq A$$

On en déduit :

$$\forall x \in [a,b]\ ,\ f(x) \leq m - \frac{1}{A}$$

Le réel $M - \frac{1}{A}$ un majorant de f strictement plus petit que M, ce qui contredit le fait que M est la borne supèrieure de f sur $[a,b]$.

En appliquant ce qui précède à $-f$, on en déduit que f possède aussi une borne inférieure et que celle-ci est atteinte.

`Attention:` Les deux hypothèses « continue sur un segment »sont indisponsables pour disposer du résultat, Comme le montre l'exemple des fonctions suivantes dont la borne inférieure 0 n'est pas atteinte :

1. la fonction définie sur le segment $[a,b]$ par :

$$f(0) = 1 \qquad \text{et} \qquad \forall x \in]0,1]\ ,\ f(x) = x$$

2. La fonction exp qui est continue sur $\mathbb{R}$.

Théorème 3.3.5 *Si f est continue sur le segment $[a,b]$ alors :*

$$\boxed{f([a,b]) = [m,M]}$$

où $m = \min_{[a,b]} f$ et $M = \max_{[a,b]} f$

Démonstration : L'image d'un segment est un intervalle (corollaire 3.3.1) qui contient ses bornes (théorème 3.3.4). C'est donc un segment.

3.4 Continuité uniforme

Ici on prend $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

Définition 3.4.1 *Soit f une application définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.*
On dit que f est uniformément continue *sur I si :*

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x, y \in I, \quad (\mid x - y \mid \leq \eta \Longrightarrow \mid f(x) - f(y) \mid \leq \epsilon)$$

Définition 3.4.2 *Soit f une application définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.*
*On dit que f est $k-$*lipschitizienne *sur I si :*

$$\forall\ (x,y) \in I^2,\ |f(x) - f(y)| \leq k\,|x - y|\,.$$

`Remarques:`

– Si f est uniformément continue sur I, alors f est continue sur I.
– Une fonction lipschitzienne sur I est uniformément continue sur I.
– Aucune de ces deux implications n'est une équivalence.

`Exemple:`

1. La fonction $x \mapsto x^2$ est uniformément continue sur $[0,1]$ puisqu'elle est lipschitzienne sur $[0,1]$. En effet, on a :

$$\forall x, y \in [0,1]\ ,\ |x^2 - y^2| = |x - y||x + y| \leq 2|x - y|$$

2. La fonction n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{R}$. Pour le prouver montrons :

$$\exists \epsilon > 0\ :\ \forall \eta > 0,\ \exists (x,y) \in \mathbb{R}^2\ :\ |x - y| \leq \eta \text{ et } |f(x) - f(y)| > \epsilon$$

Posons $\epsilon = 2$ et $\eta > 0$ quelconque. Les réels $x = 1/\eta$ et $y = x + \eta$ vérifient $|x - y| \leq \eta$, alors que $y^2 - x^2 = 2 + \eta^2 > \epsilon$

3. La fonction sin est uniformément continue sur $\mathbb{R}$ car elle est lipschitzienne :

$$\forall x, y \in \mathbb{R},\ |\sin x - \sin y| = 2\left|\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\right| \leq | x - y |$$

puisque $\forall t \in \mathbb{R},\ |\cos t| \leq 1$ et $|\sin t| \leq |x|$.

4. L'application $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sqrt{x} \end{array}$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}_+$, mais pas lipschitzienne sur $\mathbb{R}_+$:
   - L'égalité
   $$|\ f(x) - f(0)\ | = \sqrt{x} = \frac{1}{\sqrt{x}}|x - 0|$$
   prouve que l'on peut pas trouver de réel k tel que $\forall x, y \in \mathbb{R}_+, |f(x) - f(y)| \leq |x - y|$.
   - Pour l'uniforme continuité de f sur $\mathbb{R}_+$, on commence par remarquer que :
   $$\forall a, b \in \mathbb{R}_+,\ \sqrt{a+b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b}$$
   (Il suffit de comparer les carrés de ces deux nombres positifs.)
   On en déduit que $\forall x, y \in \mathbb{R}_+,\ x \geq y \Rightarrow \sqrt{y} - \sqrt{x} \leq \sqrt{y-x}$ et ça en posant $a = y - x$ et $b = x$.
   Soit ϵ quelconque ; en Posant $\eta = \epsilon^2$, on a :
   $$\forall (x, y) \in \mathbb{R}_+^2,\ |x - y| \leq \eta \Rightarrow |\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leq \sqrt{|x-y|} \leq \epsilon$$

Théorème 3.4.1 (Théorème de Heine) *Soit I un segment de $\mathbb{R}$. Toute application continue sur I est uniformément continue sur I.*

Démenstration : Soit f une application continue sur le segment I. Supposons que f n'est pas uniformément continue sur I, c'est-á-dire :

$$\exists \epsilon > 0, \exists (x, y) \in I^2\ :\ |x - y| \leq \eta \text{ et } |f(x) - f(y)| > \epsilon$$

Prenons un tel $\epsilon > 0$; pour $\eta = 1/2^n$, on peut donc choisir $(x_n, y_n) \in I^2$ tel que :

$$|x_n - y_n| \leq \eta \qquad \text{et} \qquad |f(x_n) - f(y_n)| > \epsilon$$

Les suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ainsi construites vérifient :

$$\lim_{n\to+\infty}(x_n - y_n) = 0 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ |f(x_n) - f(y_n)| \geq \epsilon \tag{3.2}$$

L'intervalle I étant borné, la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée et on peut donc en extraire une sous suite $(x_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ convergeant vers un élément α, et ce dernier appartient à I puisque I est un intervalle fermé.
Et Comme

$$y_{\varphi(n)} = x_{\varphi(n)} + (y_{\varphi(n)} - x_{\varphi(n)})$$

on a

$$\lim_{n\to+\infty} y_{\varphi(n)} = \alpha$$

L'application f étant continue en α, on en déduit :

$$\lim_{n\to\infty}\left(f(x_{\varphi(n)}) - f(y_{\varphi(n)})\right) = \lim_{n\to\infty} f(x_{\varphi(n)}) - \lim_{n\to\infty} f(y_{\varphi(n)}) = f(\alpha) - f(\alpha) = 0$$

ce qui contredit (3.2).

Chapitre 4

Dérivabilité

4.1 Définitions

Dans toute cette section a est un point de I.

Définition 4.1.1 *On dit que f est* dérivable *en a si la fonction τ_a, appelée* taux d'accroissement *de f en a, définie sur $I\backslash\{a\}$ par :*

$$\tau_a(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

possède une limite finie en a.
Cette limite s'appelle alors nombre dérivé *de f en a et se note $f'(a)$, $Df(a)$ ou $\frac{df}{dx}(a)$.*

`Exemples:`

1. Si α et β sont deux réels, la fonction $f : x \mapsto \alpha x + \beta$ est dérivable en tout point $a \in \mathbb{R}$ et $f'(a) = \alpha$.
2. La fonction $f : x \mapsto \sqrt{x}$ est définie sur $[0, +\infty[$.
   – Si $a > 0$, elle est dérivable en a et on a :

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{x - a} = \frac{1}{2\sqrt{a}}$$

   – En 0, elle n'est pas dérivable car $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x}}{x} = +\infty$.
3. La fonction f défine par :

$$f : x \longmapsto \begin{cases} x \sin(\frac{1}{x}) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

   est continue sur $\mathbb{R}$ mais elle n'est pas dérivable en 0, car la fonction :

$$\tau_0 = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

   n'a pas de limite en 0, comme on peut le prouver à l'aide des suites :

$$u = \left(\frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2n\pi}\right)_{n\in\mathbb{N}} \qquad \text{et} \qquad v = \left(\frac{1}{-\frac{\pi}{2} + 2n\pi}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

qui tendent toutes deux vers 0, mais pour lesquelles on a :

$$\lim_{n\to+\infty} \tau_0(u_n) = 1 \qquad \text{et} \qquad \lim_{n\to+\infty} \tau_0(u_n) = -1$$

Définition 4.1.2 *Si a n'est pas une borne de I, on dit que f est :*
- dérivable à droite *en a si $\varphi = f_{|I\cap[a,+\infty[}$ est dérivable en a ; la quantité $\varphi'(a)$ s'appelle alors* dérivé à droite *de f en a et se note $f'_d(a)$.*
- dérivable à gauche *en a si $\psi = f_{|I\cap]-\infty,a]}$ est dérivable en a ; la quantité $\psi'(a)$ s'appelle alors* dérivé à gauche *de f en a et se note $f'_g(a)$.*

Proposition 4.1.1 *L'orsque a n'est pas une borne de I, la fonction f est dérivable en a si, et seulement si, elle est dérivable à droite et à gauche en a et on a :*

$$\boxed{f'(a) = f'_d(a) = f'_g(a)}$$

Preuve : La fonction τ possède une limite en a si, et seullement si, elle possède des limites à droite et à gauche qui sont égales.

`Exemples:`
1. La fonction $f : x \longmapsto |x|$ n'est pas dérivable en 0 car on a $f'_d(0) = 1$ et $f'_g(0) = -1$.
2. La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \exp(-1/x) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

– Possède en 0 une dérivé à droite qui vaut

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\exp(-1/x)}{x} = 0$$

– Possède en 0 une dérivé à gauche égal à 0.
Elle est donc dérivable en 0 et $f'(0) = 0$.

Proposition 4.1.2 *Si f coïncide au voisinage de a avec une fonction g dérivable en a, alors f est dérivable en a et $f'(a) = g'(a)$*

Preuve : Comme f et g coïncide au voisinage de a, alors leurs taux d'accroissements en a coïncide aussi, ce qui prouve le résultat.

Proposition 4.1.3 *Si f est dérivable en a, alors elle est continue en a.*
Lorsque a est dérivable en a n'est pas une borne de I :
- *si f est dérivable à droite en a, alors elle est continue à droite en a*
- *si f est dérivable à gauche en a, alors elle est continue à gauche en a.*

Preuve : Il suffit de remarquer la relation suivante :

$$\forall x \in , \; f(x) = f(a) + \tau_a(x)(x-a)$$

Donc par passage à la limite en a on conclut le résultat.

Définition 4.1.3 *Lorsque la fonction f est dérivable en tout point de I, on dit que f est* dérivable *sur I et la fonction défine sur I par $x \longmapsto f'(x)$ est appelée* fonction dérivée *de f, et se note f', Df ou $\frac{df}{dx}$.*

Proposition 4.1.4 *Si f est dérivable sur I, alors elle est continue sur I.*

`Notation:` On note par $\mathcal{D}(I, \mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions dérivables à valeur dans $\mathbb{K}$.

4.2 Opérations sur les fonctions dérivables

Proposition 4.2.1 *Soient f et g deux fonctions définies sur I ainsi que λ et μ deux réels. Si f et g sont dérivables en a, alors les fonctions $\lambda f + \mu g$ et fg sont dérivables en a et l'on a :*

$$(\lambda f + \mu g)'(a) = \lambda f'(a) + \mu g'(a) \qquad \text{et} \qquad (fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$$

Preuve :

1. Pour $x \neq a$ on a :

$$\frac{(\lambda f + \mu g)(x) - (\lambda f + \mu g)(a)}{x-a} = \lambda \frac{f(x) - f(a)}{x-a} + \mu \frac{g(x) - g(a)}{x-a}$$

D'où le résultat en utilisant les opérations sur les limites.

2. On a :

$$\frac{(fg)(x) - (fg)(a)}{x-a} = f(x)\frac{g(x) - g(a)}{x-a} + g(a)\frac{f(x) - f(a)}{x-a}$$

Sachant que f est dérivable, donc continue en a, on en déduit le résultat en utilisant les opérations sur les limites.

Corollaire 4.2.1 *Si f et g sont deux fonctions dérivables sur I, alors fg et $f+g$ sont dérivables sur I et on a :*

$$(\lambda f + \mu g)' = \lambda f' + \mu g' \qquad \text{et} \qquad (fg)' = f'g + fg'$$

En particulier $\mathcal{D}(I)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Proposition 4.2.2 *Soient $a \in I$, $f : I \longrightarrow \mathbb{C}$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) *f est dérivable en a (respectivement sur I)*

(ii) *$\overline{f}$ est dérivable en a (respectivement sur I)*

(iii) *$Re(f)$ et $Im(f)$ sont dérivables en a (respectivement sur I).*

Et on a :

$$\boxed{\left(\overline{f}\right)' = \overline{f'}, \qquad (Re(f))' = Re(f'), \qquad (Im(f))' = Im(f')}$$

Preuve : Il suffit de remarquer que

$$\tau_a \overline{f} = \overline{\tau_a f}\ , Re(f) = \frac{(f + \overline{f})}{2},\ Im(f) = \frac{(f - \overline{f})}{2} \text{ et } f = Re(f) + iIm(f)$$

et de déduire le résulat grace aux opérations sur les limites.

`Exemple:` Étude de la dérivabilité de f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} x^2(x-1)^2 & \text{si } x \in [0,1] \\ 0 & \text{si } x \in]-\infty, 0[\bigcup]1, +\infty[\end{cases}$$

– Si $a \in]-\infty, 0[\bigcup]0,1[\bigcup]1, +\infty[$ la fonction f est dérivable et on a :

$$f'(a) = \begin{cases} 2a(a-1)(2a-1) & \text{si } a \in]0,1[\\ 0 & \text{si } a \in]-\infty, 0[\bigcup]1, +\infty[\end{cases}$$

– En 0 on a :
  * $f'_g(0) = 0$ car la restriction de f à $]-\infty, 0]$ coïncide avec la fonction nulle.

* $f'_d(0) = 0$ car f coïncide avec la fonction polynomiale :

$$g : x \mapsto x^2(x-1)^2$$

et par suite on a $f'_d(0) = g'(0) = 0$

Donc f est dérivable en 0 et l'on a $f'(0) = 0$

– De même on montre que f est dérivable en 1 et que $f'(1) = 0$

Alors f est dérivable sur toute $\mathbb{R}$.

Proposition 4.2.3 *Si f est une fonction dérivable en a et ne s'annulant pas sur I, alors la fonction $1/f$ est dérivable en a et :*

$$\boxed{\left(\frac{1}{f}\right)'(a) = -\frac{f'(a)}{f(a)^2}}$$

Preuve : Pour $x \in I$ et $x \neq a$, on peut écrire :

$$\frac{\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{f(a)}}{x-a} = -\frac{1}{f(x)f(a)} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

Sachant que f est dérivable en a, donc continue en a, on en déduit le résultat grâce au proriétés des limites.

Corollaire 4.2.2 *Soit f et g deux fonctions dérivables en a. Si g ne s'annule pas sur I alors la fonction f/g est dérivable en a et :*

$$\boxed{\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a)-f(a)g'(a)}{g(a)^2}}$$

Preuve : Appliquant le résultat de la dérivabilité d'un produit ainsi que la proposition 4.2.3

$$\begin{aligned} \left(\frac{f}{g}\right)'(a) &= \left(f.\frac{1}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)}{g(a)} + f(a)\left(-\frac{g'(a)}{g(a)^2}\right) \\ &= \frac{f'(a)g(a)-f(a)g'(a)}{g(a)^2} \end{aligned}$$

Corollaire 4.2.3 *Soit f et g deux fonctions dérivables sur I. Si g ne s'annule pas sur I alors la fonction f/g est dérivable sur I et :*

$$\boxed{\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g-fg'}{g^2}}$$

Proposition 4.2.4 *Soient I et J deux intervalles, f une application de I dans J et g une application définie sur J. Si f est dérivable en $a \in I$ et g dérivable en $b = f(a)$, alors $f \circ g$ est dérivable en a et :*

$$\boxed{(f \circ g)'(a) = g'(b)f'(a)}$$

Preuve : Soit τ_b la fonction définie sur J par :

$$\tau_b = \begin{cases} \frac{g(y)-g(b)}{y-b} & \text{si } \; y \neq b \\ g'(b) & \textit{sinon} \end{cases}$$

Cette fonction est continue en b et on a alors :

$$\begin{aligned} (f \circ g)'(a) &= \lim_{x \to a} \frac{(g \circ f)(x) - (g \circ f)(a)}{x - a} \\ &= \lim_{x \to a} \tau_b\left(f(x)\right) \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \\ &= \tau_b(b) f'(a) = g'(b) f'(a) \end{aligned}$$

Corollaire 4.2.4 *Soient I et J deux intervalles. Si f une application dérivable de I dans J et g une application dérivable sur J, alors $f \circ g$ est dérivable sur I et :*

$$\boxed{(f \circ g)' = (g' \circ f) f'}$$

`Exemple:` Montrons la dérivabilité de la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

- Sur $\mathbb{R}^*$, f est dérivable car au voisinage de $a \in \mathbb{R}^*$ elle coïncide avec la fonction $x \mapsto x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ qui est dérivable en a comme produit d'une fonction polynôme et de la composée de la fonction sin avec une fonction rationnelle définie au voisinage de a, et donc dérivable en a. On a ainsi :

$$\forall x \in \mathbb{R} \; , \; f'(x) = 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)$$

- En 0 on a :

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

car on a

$$|x \sin\left(\frac{1}{x}\right)| \leq |x|$$

Ce qui donne que f est dérivable en 0 et que $f'(0) = 0$

D'où f est dérivable sur toute $\mathbb{R}$.

Proposition 4.2.5 *Soit f une fonction continue et srictement monotone de l'intervalle I sur l'intervalle $J = f(I)$, dérivable en $a \in I$. La fonction f^{-1} est dérivable en $b = f(a)$ si, et seulement si, $f'(a) \neq 0$, et l'on a alors :*

$$\boxed{(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)}}$$

Preuve :

1. Supposons que f^{-1} est dérivable en $b = f(a)$. Comme $f^{-1} \circ f = Id_I$ la proposition 4.2.4 permet d'écrire :
$$\left(f^{-1}(b)\right)' f'(a) = Id'_I = 1$$
ce qui entraîne :
$$f'(a) \neq 0 \qquad \text{et} \qquad \left(f^{-1}(b)\right)' = \frac{1}{f'(a)}$$
2. En supposant $f'(a) \neq 0$, montrons $\lim_{y\to b} \frac{f^{-1}(y)-f^{-1}(b)}{y-b} = \frac{1}{f'(a)}$.
La fonction f étant dérivable en a, on a :
$$f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$
Comme f^{-1} est continue en b, le théorème de composition des limites donne :
$$f'(a) = \lim_{y\to b} \frac{f\left(f^{-1}(y)\right) - f(a)}{f^{-1}(y) - a} = \frac{y-b}{f^{-1}(y) - f^{-1}(b)}$$
Cette limite étant non nulle, d'après le théormème sur l'inverse d'une limite, on a :
$$\lim_{y\to b} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(b)}{y - b}$$

Corollaire 4.2.5 *Soit f une fonction dérivable et srictement monotone de l'intervalle I sur l'intervalle $J = f(I)$ et si f' ne s'annule pas sur I, alors la fonction f^{-1} est dérivable sur J et :*

$$\boxed{(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}}$$

`Exemples:`

1. Si n est un entier naturel strictement positif, la fonction :
$$f_n : x \mapsto x^n$$
définie une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}_+^*$ sur lui-même dont la dérivée ne s'annule pas. Sa fonction réciproque :
$$g_n : y \mapsto \sqrt[n]{y}$$
est donc dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et
$$g'(y) = \frac{1}{(\sqrt[n]{y})^{n-1}}$$
2. La restriction à $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ de la fonction sin définit une bijection de $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ sur]-1,1[qui est strictement croissante et dont la dérivée ne s'annule pas. Sa fonction réciproque arcsin est donc dérivable sur]-1,1[et :
$$\arcsin' y = \frac{1}{cos(\arcsin y)} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 \arcsin y}} = \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}$$

4.3 Théorème de Rolle et théorème des accroissements finis

On prend $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

4.3.1 Extremum d'une fonction dérivable

Définition 4.3.1 *Soient $a \in I$ et $f : I \to \mathbb{R}$, On dit que f*

1. admet un maximum local *en a si, au voisinage de a :*

$$f(x) \leq f(a)$$

2. admet un minimum local *en a si, au voisinage de a :*

$$f(x) \geq f(a)$$

3. admet un maximum local strict *en a si, au voisinage de a sauf en a :*

$$f(x) < f(a)$$

4. admet un minimum local strict *en a si, au voisinage de a sauf en a :*

$$f(x) > f(a)$$

5. admet un extremum local *en a si f admet un maximum local en a ou un minimum local en a.*
6. admet un extremum local strict *en a si f admet un maximum local strict en a ou un minimum local strict en a.*

Proposition 4.3.1 *Soient f une fonction définie sur un intervalle I et a un point de I qui n'en n'est pas de borne. Si la fonction f présente un extrémum local en a et si elle est dérivable en a alors $f'(a) = 0$.*

Preuve : Comme a n'est pas une extrémité de l'intervalle I, on peut trouver $h_1 > 0$ tel que :

$$[a - h_1, a + h_1] \subset I$$

Quitte à changer f en $-f$, on peut supposer que f présente un maximum local en a, c'est-à-dire qu'il existe $h_2 > 0$ tel que :

$$\forall x \in I, \; |x - a| \leq h_2 \Longrightarrow f(x) \leq f(a)$$

Posons $h = \min(h_1, h_2)$; pour $0 < x - a \leq h$ on a alors :

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq 0$$

et donc :

$$f'_d(a) = \lim_{x \to a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq 0$$

De même pour $-h \leq x - a < 0$, on a :

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \geq 0$$

et donc

$$f'_g(a) = \lim_{x \to a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \geq 0$$

Comme f est dérivable en a, on en déduit $f'(a) = f'_d(a) = f'_g(a) = 0$.

`Attention:`

– Une fonction peut avoir un extremum local en a et ne pas être dérivable en a, comme le prouve l'exemple de la fonction $x \mapsto |x|$ en 0.
– Si a est une extrémité de l'intervalle, une fonction peut présenter un extrémum local en a et être dérivable en a sans que sa dérivée soit nulle, comme le prouve l'exemple de la restriction à $[0, 1]$ de la fonction $x \mapsto x$ qui présente un minimum en 0 et un maximum en 1.
– L'annulation de la dérivée de f en a n'est qu'une condition nécessaire pour que f possède un extremum local en a, comme le pouve l'exemple de la fonction srtictement croissante $x \mapsto x^3$ dont la dérivée s'annule en 0 mais qui ne possède pas d'extremum en 0.

4.3.2 Théorème de Rolle

Théorème 4.3.1 (Théorème de Rolle) *Étant donnés deux réels a et b tels que $a < b$ ainsi qu'une fonction f continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$ et vérifiant $f(a) = f(b)$, alors il existe un réel $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.*

Démenstration : La fonction f étant continue sur $[a, b]$, l'image pas f du segment $[a, b]$ est un segment $[m, M]$, avec $m \leq M$.

- ▶ Si $m = M$, la fonction f est une constante sur $[a, b]$ donc de dérivée nulle sur $]a, b[$.
- ▶ Si $m < M$, l'un des réels m ou M est différent de la valeur commune prise par f en a et b. Supposons par exemple que $m \neq f(a)$; la fonction f atteint alors la valeur m en un point c différent de a et de b ; elle admet donc un minimum en ce point de l'intervalle ouvert $]a, b[$, ce qui implique $f'(c) = 0$ d'aprés la proposition 4.3.1.

4.3.3 Égalité des accroissements finis

Théorème 4.3.2 (Formule des accroissements finis) *Étant donnés deux réels a et b tels que $a < b$ ainsi qu'une fonction f continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$, il existe un réel $c \in]a, b[$ tel que :*

$$\boxed{f(b) - f(a) = (b - a)f'(c)}$$

Démenstration : Étant donné un réel k, on considère la fonction φ définie sur $[a, b]$ par :

$$\varphi(x) = f(x) - k(x - a)$$

Et on choisie k pour que $\varphi(a) = \varphi(b)$, ce qui donne :

$$k = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Comme la fonction φ est continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$ et vérifie $\varphi(a) = \varphi(b)$, donc d'aprés le théorème de Rolle : il existe donc un réel $c \in]a, b[$ tel que $\varphi'(c) = 0$, ce qui équivaut à :

$$f'(c) = k = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

et donne le résultat.

4.4 Dérivées successives et fonction de classe $\mathcal{C}^n$

On considère un entier naturel n.

Définition 4.4.1 *La fonction f est* deux fois dérivable *sur I si la fonction f' est dérivable en tout point de I. Sa dérivée est appelée* fonction dérivée seconde *de f ; elle est notée f'', D^2f ou $\frac{d^2f}{dx^2}$.*

`Exemple:`

1. La dérivée d'une fonction polynomiale étant une fonction polynomiale, toute fonction polynomiale est deux fois dérivale.
2. On a vu à la page 29 que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} x^2(x-1)^2 & \text{si } x \in [0,1] \\ 0 & \text{si } x \in]-\infty, 0[\bigcup]1, +\infty[\end{cases}$$

est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est :

$$f'(x) = \begin{cases} 2x(x-1)(2x-1) & \text{si } x \in [0,1] \\ 0 & \text{si } x \in]-\infty, 0[\bigcup]1, +\infty[\end{cases}$$

Au voisinage de $a \in]-\infty, 0[\bigcup]0,1[\bigcup]1, +\infty[$, la fonction f' coïncide avec une fonction polynomiale, elle est donc dérivable en a et :

$$f''(a) = \begin{cases} 12a^2 - 12a + 2 & \text{si } x \in]0,1[\\ 0 & \text{si } x \in]-\infty, 0[\bigcup]1, +\infty[\end{cases}$$

▷ La restriction de f' à $[1, +\infty[$ est la fonction constante nulle. La fonction f' est donc dérivable à droite en 1 et $(f')'_d(1) = 0$.
La restriction de f' à $[0,1]$ est la fonction polynomiale :

$$x \mapsto 2x(x-1)(2x-1)$$

La fonction f' est donc dérivable á gauche en 1 et $(f')'_g(1) = 2$.
La fonction f' n'est pas donc dérivable en 1 et f n'est pas deux fois dérivable.

▷ On prouve de la même façon que f' n'est pas dérivable en 0.

Définition 4.4.2 *Étant donnée une fonction f de I dans $\mathbb{K}$, On pose $f^{(0)} = f$ et l'on définit par récurrence la fonction* dérivée n^{ieme} *de f sur I, notée $f^{(n)}$, comme la dérivée de $f^{(n-1)}$, si elle existe.*
On la note aussi $D^n f$ ou $\frac{d^n f}{dx^n}$.

`Remarque:`

- L'existance de $f^{(n)}$ sur I entraîne l'existance et la continuité sur toutes les dérivées d'ordre strictement inférieur.
- Si elle existe, la dérivée n^{ieme} de f et aussi la dérivée $(n-1)^{ieme}$ de f' plus généralement la dérivée p^{ieme} de $f^{(n-p)}$ (pour $0 \leq p \leq n$).

Proposition 4.4.1 *Étant données deux fonctions f et g définies et n fois dérivables sur I ainsi que deux éléments λ et μ de $\mathbb{K}$ alors la fonction $\lambda f + \mu g$ est n fois dérivables sur I.*

Preuve : Récurence sur n en utilisant le fait que si f et g sont dérivables, alors $\lambda f + \mu g$ l'est aussi et $(\lambda f + \mu g)' = \lambda f' + \mu g'$.

Proposition 4.4.2 ***(Formule de Leibnitz)*** *Si f et g sont deux fonctions n fois dérivables sur I, alors fg est n fois dérivables sur I et :*

$$\boxed{(fg)^{(n)} = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} f^{(p)} g^{(n-p)}}$$

Preuve : Démentrons ce résultat par récurrence sur n.
La propriété est évidente pour $n = 0$.
Supposons le résultat vrai pour un entier naturel n et considérons deux fonctions f et g supposées $n+1$ fois dérivables sur I. Elle sont donc n fois dérivables et l'hypothèse de récurrence permet d'écrire :

$$(fg)^{(n)} = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} f^{(p)} g^{(n-p)}$$

La fonction $(f.g)^{(n)}$est combinaison linéaire de produit de fonctions dérivables ; elle est donc dérivable et par suite $f.g$ est $n+1$ fois dérivables. De plus, on a :

$$\begin{aligned}
(fg)^{(n+1)} &= \left(\sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} f^{(p)} g^{(n-p)} \right)' = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} f^{(p)} g^{(n-p+1)} + f^{(p+1)} g^{(n-p)} \\
&= \binom{n}{0} f g^{n+1} + \sum_{p=1}^{n} \binom{n}{p} f^{(p)} g^{(n-p+1)} + \sum_{p=0}^{n-1} \binom{n}{p} f^{(p+1)} g^{(n-p)} + \binom{n}{n} f^{(n+1)} g \\
&= \binom{n+1}{0} f g^{(n+1)} + \binom{n+1}{n+1} f^{(n+1)} g + \sum_{p=1}^{n} \left(\binom{n}{p} + \binom{n}{p-1} \right) f^{(p)} g^{(n-p+1)} \\
&= \sum_{p=0}^{n+1} \binom{n+1}{p} f^{(p)} g^{(n+1-p)}
\end{aligned}$$

Ce qui prouve le résultat pour $n+1$.

Définition 4.4.3 *Une fonction f est* de classe $\mathcal{C}^n$ *sur I si elle est n fois dérivables sur I et si $f^{(n)}$ est continue sur I.*
Si f est de classe $\mathcal{C}^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on dit qu'elle est indéfiniment dérivable *ou* de classe $\mathcal{C}^\infty$ *sur I.*

`Notation:`

- $\mathcal{C}^n(I)$ est l'ensemble de classe $\mathcal{C}^n(I)$ sur I.
- $\mathcal{C}^\infty(I)$ est l'ensemble indéfiniment dérivables sur I.

`Exemples:`

1. la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$ la dérivée d'ordre n de f étant donnée par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}$$

2. La fonction $f : x \mapsto |x|$ appartient à $\mathcal{C}^0(\mathbb{R})$, mais elle n'est pas dérivable.
3. La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est :

$$f'(x) = \begin{cases} 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Cette dérivée n'est pas continue en 0, car $\lim_{n\to+\infty} f'\left(\frac{1}{2n\pi}\right) = -1 \neq f'(0)$.
La fonction f est donc dérivable sur $\mathbb{R}$, mais elle n'est pas de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Proposition 4.4.3 *Si f une fonction continue sur un intervalle I, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $I \setminus \{a\}$ et si $f'_{|I\setminus\{a\}}$ a une limite finie en a, alors f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I.*

`Exemple:` La fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(x) = \cos\sqrt{x}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$, avec :

$$\forall x,\ \ f'(x) = -\frac{\sin\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$$

Or, on a :

$$\lim_{x\to 0} -\frac{\sin\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} = -\frac{1}{2}$$

Ce qui prouve que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ et que l'on a $f'(0) = -\frac{1}{2}$.

Proposition 4.4.4 *Le produit de fonctions de classe $\mathcal{C}^n$ sur I est une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ sur I.*

Preuve : Si f et g sont de classe $\mathcal{C}^n$, on sait que fg est n fois dérivables et la formule de Leibniz prouve la continuté de sa dérivée n^{ieme}.

Proposition 4.4.5 *Étant donnés deux intervalles I et J ainsi que deux fonctions $f \in \mathcal{C}^n(I)$ et $g \in \mathcal{C}^n(J)$ telles que $f(I) \subset J$, la fonction $g \circ f$ est un élément de $\mathcal{C}^n(I)$.*

Peuve : On démontre par récurrence sur n, la propriété H_n :

$$\forall f \in \mathcal{C}^n(I), \forall g \in \mathcal{C}^n(J),\ f(I) \subset J \Longrightarrow g \circ f \in \mathcal{C}^n(I)$$

H_0 est vraie d'aprés les résultats sur les fonctions continues.
Supposons H_n et montrons H_{n+1}.
Soient $f \in \mathcal{C}^{n+1}(I)$ et $g \in \mathcal{C}^{n+1}(J)$ telles que $f(I) \subset J$. La fonction $g \circ f$ composée de fonctions dérivables, est dérivable et :

$$(g \circ f)' = (g' \circ f)f'$$

Puisque $f \in \mathcal{C}^n(I)$, $g' \in \mathcal{C}^n(I)$ et $f(I) \subset J$, l'hypothèse de recurrence montre que $g' \circ f$ est de classe $\mathcal{C}^n(I)$, et comme f' est de classe $\mathcal{C}^n(I)$, le produit $(g' \circ f)f'$ l'est aussi.
L'application $(g \circ f)'$ éttant de classe $\mathcal{C}^n$, on en déduit que $g \circ f \in \mathcal{C}^{n+1}(I)$ et donc H_{n+1}.

Proposition 4.4.6 *Si $f \in \mathcal{C}^n(I)$ ne s'annule pas sur I, alors $1/f$ est élément de $\mathcal{C}^n(I)$.*

Preuve : Montrons le résultat par récurrence sur n exactement comme précédement

Proposition 4.4.7 *Étant donné un entier $n \geq 1$, une fonction $f \in \mathcal{C}^n(I)$ dont la dérivée ne s'annule pas sur I est une bijection de I sur $J = f(I)$ et la fonction réciproque de f est de classe $\mathcal{C}^n(I)$ sur l'intervalle J.*

Preuve : Comme la dérivée de f est continue et ne s'annule pas sur l'intervalle I, elle garde un signe constant et donc f est strictement monotone sur I, ce qui montre que f est une bijection de I sur $J = f(I)$ et assure l'existance de la fonction réciproque ainsi sa continuité.
Démentrons par récurence sur $n \geq 1$ la propriété H_n :
Si $f \in \mathcal{C}^n(I)$ admet une dérivée ne s'annulant pas sur I, alors f^{-1} est de classe $\mathcal{C}^n$ sur J.
H_1 est vraie, car si $f \in \mathcal{C}^1(I)$ admet une dérivée ne s'annulant pas I, alors f^{-1} est dérivable sur I et $(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}$ est $\mathcal{C}^0$ sur J, donc f^{-1} est de classe $\mathcal{C}^1$ sur J.
Supposons H_n et démentrons H_{n+1}.
Soit $f \in \mathcal{C}^{n+1}(I)$ dont la dérivée ne s'annule pas sur I. La fonction f est de classe $\mathcal{C}^n$, donc d'aprés l'hypotèse de récurence, il en est de même pour f^{-1}.
L'application $f' \circ f^{-1}$, composée de fonction de classe $\mathcal{C}^n(I)$; comme elle ne s'annule pas sur J, son inverse est de classe $\mathcal{C}^n$ et donc :

$$(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}$$

est de classe $\mathcal{C}^n(I)$, ce qui montre que f^{-1} est de classe $\mathcal{C}^n$ et prouve H_{n+1}.

Théorème 4.4.1 ***(Formule de Taylor-Lagrang)***
Soit f de classe C^n sur $[a, b]$, $(n + 1)$ fois dérivable sur $]a, b[$, alors il existe $c \in]a, b[$, telle que

$$\boxed{f(b) = \sum_{p=0}^{n} \frac{(b-a)^p}{p!} f^{(p)}(a) + \frac{(b-a)^{(n+1)}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)}$$

$$f(b) = f(a) + (b-a)f'(a) + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \frac{(b-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c),$$

le terme $\frac{(b-a)^{(n+1)}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)$ est appelé reste de Lagrang.

Théorème 4.4.2 ***(Formule de Taylor-Young)***
Si f est une fonction continue sur $[a, b]$, admettant n dérivées successives continues sur cet $[a, b]$, telle que $f^{(n+1)}(a)$ existe, alors il existe une fonction ε définies pour tout point x de l'ouvert $]a, b[$ telle que

$$\boxed{f(x) = \sum_{p=0}^{n} \frac{(x-a)^p}{p!} f^{(p)}(a) + \frac{(x-a)^{(n+1)}}{(n+1)!} \varepsilon(x)}$$

$$f(x) = f(a) + (b-a)f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2!} f''(a) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \frac{(x-a)^n}{(n+1)!} f^{(n+1)}(a) + \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} \varepsilon(x),$$

le terme $\frac{(x-a)^{(n+1)}}{(n+1)!} \varepsilon(x)$ est appelé reste de Young et $\lim_{x \to a} \varepsilon(x) = 0$.

4.5 Fonction convexe

4.5.1 Définitions

Définition 4.5.1 *Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est dite convexe si :*

$$\forall\ x, y\ \in\ I, \forall\ \lambda\ \in\ [0,1], f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y).$$

Théorème 4.5.1 *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction convexe si et seulement si pour tout $a \in I$, l'application $\varphi_a : x \mapsto \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ est croissante sur $I \backslash \{a\}$.*

Proposition 4.5.1 *Soit f une fonction définie de I dans $\mathbb{R}$ convexe alors :*

1. *f est dérivable si et seulement si f' est croissante sur I.*
2. *f est deux dérivable si et sulement si $f'' \geq 0$.*

4.6 Inégalité de Jensen

4.6.1 Définitions

Théorème 4.6.1 *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction convexe.*
Si $\forall\ n \in \mathbb{N}, \forall\ x_1, x_2, ..., x_n \in I$ et $\forall\ \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n \in [0,1]$ tels que $\lambda_1 + \lambda_2 + ... + \lambda_n = 1$, alors :

$$\boxed{f\Big(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k\Big) \leq \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f(x_k).}$$

Chapitre 5

Fonctions usuelles

5.1 Définitions

Définition 5.1.1 *On appelle :*

1. *Sinus hyperbolique l'application notée sh définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par :*
$$shx = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$
2. *Cosinus hyperbolique l'application notée ch définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par :*
$$chx = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

Propriétés 5.1.1 1. *Les applications sh et ch sont de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et on a :*
$$sh' = ch \quad et \quad ch' = sh.$$
2. *sh est impaire et ch paire.*
3. *Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :*
   (a) $chx + shx = e^x$,
   (b) $chx - shx = e^{-x}$,
   (c) $ch^2x - sh^2x = 1$.

Définition 5.1.2 *On appelle :*

1. *Tangente hyperbolique l'application notée th définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par :*
$$thx = \frac{shx}{chx} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}.$$
2. *Cotangente hyperbolique l'application notée coth définie de $\mathbb{R}^*$ dans $\mathbb{R}$ par :*
$$cothx = \frac{1}{thx} = \frac{chx}{shx} = \frac{e^{2x} + 1}{e^{2x} - 1}.$$

Propriétés 5.1.2 1. *Les applications th et coth sont de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^*$ respectivement, et*
$$th'x = \frac{1}{ch^2x} = 1 - th^2x,$$
$$coth'x = -\frac{1}{sh^2x} = 1 - coth^2x.$$

2. *th et coth sont impaires.*

Définition 5.1.3 1. *l'application sh admet une application réciproque, notée par argsh définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par la relation suivante :*

$$\forall\ (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ (y = argshx \Leftrightarrow x = shy).$$

2. *La restriction de l'application ch admet une application réciproque, notée par argch définie de $[1,+\infty[$ dans $[0,+\infty[$ par la relation suivante :*

$$\forall\ (x,y) \in [1,+\infty[\times[0,+\infty[,\ (y = argchx \Leftrightarrow x = chy).$$

Propriétés 5.1.3 1. *argsh est impaire et argch est paire.*

2. *Les applications argsh et argch sont de classe C^∞ resp. sur $\mathbb{R}$ et sur $]1,+\infty[$ et on a :*

$$\forall\ x \in \mathbb{R},\ argsh'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \quad et \quad \forall\ x \in]1,+\infty[,\ argch'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}.$$

Définition 5.1.4 1. *l'application th admet une application réciproque, notée par argth définie de $]-1,1[$ dans $\mathbb{R}$ par la relation suivante :*

$$\forall\ (x,y) \in]-1,1[\times\mathbb{R},\ (y = argthx \Leftrightarrow x = thy).$$

2. *l'application coth admet une application réciproque, notée par argcoth définie de $]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$ dans $]-\infty,0[\cup]0,+\infty[$ par la relation suivante :*

$$\forall\ (x,y) \in]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[\times\mathbb{R}^*,\ (y = argcothx \Leftrightarrow x = cothy).$$

Propriétés 5.1.4 1. *argth et argcoth sont impaires.*

2. *Les applications argth et argcoth sont de classe C^∞ resp. sur $]-1,1[$ et sur $]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$ et on a :*

$$\forall\ x \in]-1,1[,\ argth'(x) = \frac{1}{1-x^2}$$

et

$$\forall\ x \in]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[,\ argcoth'(x) = \frac{1}{1-x^2}.$$

Définition 5.1.5 1. *La restriction de l'application* sin *à l'intervalle $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ admet une application réciproque, notée par* arcsin *définie de $[-1,1]$ dans $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ par la relation suivante :*

$$\forall\ (x,y) \in [-1,1]\times[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}],\ (y = \arcsin x \Leftrightarrow x = \sin y).$$

2. *La restriction de l'application* cos *à l'intervalle $[0,\pi]$ admet une application réciproque, notée par* arccos *définie de $[-1,1]$ dans $[0,\pi]$ par la relation suivante :*

$$\forall\ (x,y) \in [-1,1]\times[0,\pi],\ (y = \arccos x \Leftrightarrow x = \cos y).$$

3. *La restriction de l'application* tan *à l'intervalle $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ admet une application réciproque, notée par* arctan *définie de $\mathbb{R}$ dans $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ par la relation suivante :*

$$\forall\ (x,y) \in \mathbb{R}\times[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}],\ (y = \arctan x \Leftrightarrow x = \tan y).$$

Propriétés 5.1.5 1. arcsin *et* arctan *sont impaires mais* arccos *n'est ni paire ni impaire.*

2. *Les applications* arcsin, arccos *et* arctan *sont de classe* C^∞ *sur* $]-1,1[$ *et on a :* $\forall\ x \in]-1,1[, \quad \arcsin' x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \arccos' x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
et
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \arctan' x = \frac{1}{1+x^2}.$$
3. *Pour* $x \in [-1,1]$*, on a* $\sin(\arcsin x) = x$ *et* $\cos(\arccos x) = x$*.*
4. *Pour* $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$*, on a* $\arcsin(\sin x) = x$*.*
5. *Pour* $x \in [0,\pi]$*, on a* $\arccos(\cos x) = x$*.*
6. *On a* $\forall\ x \in [-1,1]$*,* $\arccos x + \arcsin x = \frac{\pi}{2}$*.*
7. *Pour* $x \neq 0$*, on a* $\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = sgn(x)\frac{\pi}{2}$*.*

Chapitre 6

Développement limité

6.1 Définitions

Définition 6.1.1 *Une fonction f définie au voisinage de x_0 admet un développement limité d'ordre n au voisinage de x_0 s'il existe un polynôme P_n de degré inférieur ou égal à n et une fonction ε tels que pour tout élément*

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 .... + a_n(x - x_0)^n + (x - x_0)^n\varepsilon(x - x_0),$$

avec $\lim_{x\to x_0} \varepsilon(x - x_0) = 0$.

6.2 Développement limité au voisinage de 0 des fonctions usuelles :

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + ... + \frac{x^n}{n!} + x^n\varepsilon(x)$$

$$(1 + x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha - 1)}{2!}x^2 + ... + \frac{\alpha(\alpha - 1)(\alpha - n + 1)}{n!}x^n + x^n\varepsilon(x)$$

$$\frac{1}{x + 1} = 1 - x + x^2 - x^3 + ... + (-1)^n x^n + x^n\varepsilon(x)$$

$$\frac{1}{1 - x} = 1 + x + x^2 + ... + x^n + +x^n\varepsilon(x).$$

$$\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + ... + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + x^n\varepsilon(x)$$

$$\ln(1 - x) = -x - \frac{x}{2} - \frac{x^3}{3} - ... - \frac{x^n}{n} + x^n\varepsilon(x).$$

$$\cos(x) = x - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + ... + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + x^{2n}\varepsilon(x)$$

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + ... + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + x^{2n+1}\varepsilon(x).$$

$$shx = x + \frac{x^3}{3!} + ... + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + x^{2n+1}\varepsilon(x).$$

$$chx = 1 + \frac{x^2}{2!} + ... + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + x^{2n}\varepsilon(x)$$

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + ... + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + x^{2n+1}\varepsilon(x).$$

$$\arcsin x = x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1}{2}\frac{3}{4}\frac{x^5}{5} + ... + x^{2n+2}\varepsilon(x).$$

$$\arccos x = \frac{\pi}{2} - x - \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} - \frac{1}{2}\frac{3}{4}\frac{x^5}{5} + ... + x^{2n+2}\varepsilon(x).$$

où, pour chaque développement, ε est une fonction définie sur un voisinage de 0 et qui tend vers 0 avec x.

6.3 Propriétés des développements limités

6.3.1 Continuité

Si f admet un D.L d'ordre n de partie régulière $a_0 + a_1 x + ... a_n x^n$ alors $\lim_{x\to 0} f(x) = a_0$ d'où f est continue en 0 ou est prolongeable par continuité en 0.

6.3.2 Dérivabilité

Si f admet un D.L d'ordre n de partie régulière $a_0 + a_1 x + ... a_n x^n$ $(n \geq 1)$ alors f est dérivable en 0 et $f'(0) = a_1$.

6.4 Opérations sur les developpements limités

Soit f une fonction qui admet un D.L à l'ordre n de partie régulière P_n et g une autre fonction qui admet un D.L à l'ordre m de partie régulière Q_m avec $c = \min(n, m)$, alors

1. **Somme :**
   $f + g$ admet un D.L à l'ordre c de partie régulière $P_c + Q_c$.
2. **Produit :**
   $f \times g$ admet un D.L à l'ordre c de partie régulière R_c, obtenue en ne conservant dans $P_n \times Q_m$ que les monômes de degré p avec $p \leq c$.
3. **Produit par un scalaire :**
   λf admet un D.L à l'ordre n de partie régulière λP_n.
4. **Quotient :**
   $\frac{f}{g}$ admet un D.L à l'ordre s de partie régulière R_s qui est la division suivant les puissances croissantes de f et g.
5. **Composée :**
   $f \circ g$ admet un D.L à l'ordre c de partie régulière R_c, obtenue en ne conservant dans $P_n \circ Q_m$ que les monômes de degré p avec $p \leq c$.

Chapitre 7

Calcul intégral

7.1 Définitions

Définition 7.1.1 *On appelle subdivision de $[a,b]$ une famille finie strictement croissante $\sigma = (a_k)_{k\in[0,n]}$, avec $n \in \mathbb{N}^*$ et $a = a_0 < ... < a_n = b$.*

Définition 7.1.2 *Une fonction $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est dite en escalier s'il existe une subdivision $\sigma = (a_k)_{k\in[0,n]}$ de $[a,b]$ telle que, pour tout $k \in [0, n-1]$, f est constante sur $]a_k, a_{k+1}[$.*

Définition 7.1.3 *Une fonction $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est continue par morceaux sur $[a,b]$ s'il existe une subdivision $\sigma = (a_k)_{k\in[0,n]}$ de $[a,b]$ telle que, pour tout $k \in [0, n-1]$, f est continue sur $]a_k, a_{k+1}[$ et f admet une limite à droite en a_k et à gauche en a_k.*
Une telle subdivision σ est dite adaptée à f.

Théorème 7.1.1 *Soit f une fonction réelle continue par morceaux sur $[a,b]$. Pour tout $\epsilon > 0$, il existe des fonctions φ et ψ en escalier sur $[a,b]$ telles que :*

$$\varphi \leq f \leq \psi \quad et \quad \varphi - \psi \leq \epsilon.$$

7.2 Intégral simple de Riemann

Définition 7.2.1 *La fonction f est dite inégrable sue $[a,b]$ au sens de Riemann, si les sommes*

$$s_n = \sum_{k=1}^{n}(a_k - a_{k-1})m_k \quad et \quad S_n = \sum_{k=1}^{n}(a_k - a_{k-1})M_k$$

avec $(m_k \leq f(z_k) \leq M_k)$, $z_k \in]a_k, a_{k+1}[$),
tendent vers une limite commun I quand $n \to \infty$. Cette limite est alors appelée intégral de la fonction f sur $[a,b]$ et notée

$$I = \int_a^b f(x)\,dx,$$

la valeur de I représente l'aire située sous le graphe de f et délimitée par des abscisses et les verticales $x = a$ et $x = b$.

Théorème 7.2.1 ***(Somme de Riemann)***
Soit f une fonction continue de I dans $\mathbb{R}$, alors

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(a + k\frac{b-a}{n}) = \lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f(a + k\frac{b-a}{n}) = \int_a^b f(t)dt.$$

Théorème 7.2.2 *Toute fonction continue par morceaux sur $[a, b]$ est intégrable au sens de Riemann sur $[a, b]$*

7.3 Propriétés de l'intégrale

Les fonctions f et g étant intégrables sur $[a, b]$, les principales propriétés de l'intégrale sont les suivantes :

– Pour tout point c de $[a, b]$,

$$\int_c^c f(x)\, dx = 0.$$

– Pour tout point c de $[a, b]$,

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^c f(x)\, dx + \int_c^b f(x)\, dx.$$

– Pour tous points c et d de $[a, b]$,

$$\int_c^d f(x)\, dx = -\int_d^c f(x)\, dx.$$

– Pour tous réels λ et μ, la fontion $\lambda f + \mu g$ est intégrable sur $[a, b]$,

$$\int_a^b (\lambda f + \mu g)(x)\, dx = \lambda \int_a^b f(x)\, dx + \mu \int_a^b g(x)\, dx.$$

– Si f est une fonction paire, pour tout intervalle $[-c, c] \subset [a, b]$, on a

$$\int_{-c}^c f(x)\, dx = 2 \int_0^c f(x)\, dx.$$

– Si f est une fonction impaire, pour tout intervalle $[-c, c] \subset [a, b]$, on a

$$\int_{-c}^c f(x)\, dx = 0.$$

– L'intégrale conserve les inégalités, c'est-à- dire qui si $f \geq 0$ sur $[a, b]$, alors $\int_a^b f(x)\, dx \geq 0$ ou si $f \geq g$ sur $[a, b]$, alors

$$\int_a^b f(x)\, dx \geq \int_a^b g(x)\, dx.$$

Théorème 7.3.1 ***(de la moyenne)***
Si f est une fonction continue sur l'intervalle $[a, b]$, alors il existe un point c de cet intervalle tel que

$$\frac{1}{b-c} \int_a^b f(x)\, dx$$

le second menbre étant nommé valeur moyenne de f sur l'intervalle $[a, b]$.

7.4 Primitive

Définition 7.4.1 *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction, on appelle primitive d'une f toute fonction F dérivable sur I, telle que $F' = f$ pour $x \in I$. Une primitive est notée $F(x) = \int f(x)\,dx$. Toute autre primitive de f est de la forme $F + C$, où C est une constante réelle quelconque.*

Théorème 7.4.1 *Soient f une fonction de I dans $\mathbb{R}$ continue et $a \in I$ alors on a :*

1. *L'application $x \longmapsto \int_a^x f(t)dt$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et sa dérivée est $f(x)$, elle est unique primitive de f sur I qui s'annule en a.*
2. *Pour tout primitive F de f sur I on a :*

$$\forall\, x \in I,\ \int_a^x f(t)dt = F(x) - F(a).$$

Corollaire 7.4.1 *Toute fonction continue sur I admet au moins une primitive sur I.*

7.5 Calcul d'une intégrale définie

$$\int \frac{d}{dx}[f(x)]\,dx = f(x) + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

$$\int x^\alpha\,dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C,\ \ \alpha \neq 1, \qquad \int \frac{dx}{x+a}\,dx = \ln|x+a| + C$$

$$\int \frac{dx}{x^2+1}\,dx = \arctan x + C, \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin x + C,$$

$$\int e^x\,dx = e^x + C, \qquad \int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C\ \ (a > 0\ \text{ et }\ a \neq 1),$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + C, \qquad \int \cos x\,dx = \sin x + C,$$

$$\int \frac{dx}{1-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + C, \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}}\,dx = \ln\left|x + \sqrt{x^2+a}\right| + C,$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x}\,dx = \tan x + C.$$

7.6 Méthodes d'intégration

7.6.1 Intégration par changement de variable

Pour calculer l'intégrale d'une fonction f continue sur $[a, b]$, on peut faire le changement de varible $x = u(t)$ au moyen d'une fonction u de dérivée continue sur $[\alpha, \beta]$, avec $a = u(\alpha)$ et $b = u(\beta)$. La variable t est la nouvelle variable d'intégration et les bornes sont changées.

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f[u(t)]u'(t)\,dt.$$

7.6.2 Intégration par parties

Si u et v sont deux fonctions intégrables sur $[a, b]$, on obtient la formule d'intégration par parties

$$\int_a^b u(x)v'(x)\,dx = \Big[u(x)v'(x)\Big]_a^b - \int_a^b v(x)u'(x)\,dx$$

Deuxième partie

Series d'exercices

7.7 Suites réelles

Exercice 1: Etudier la nature de chacune des suites (u_n) définie par

1. $u_n = \sqrt{n^2+2n} - n, \ \forall n \in \mathbb{N}$.
2. $u_n = \left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}\right)^n, \ \forall n \in \mathbb{N}^*$.
3. $u_n = \begin{cases} \frac{n}{n^2+1} & \text{si } n \text{ est pair} \\ \frac{\sin n}{n} & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}, \ \forall n \in \mathbb{N}$.
4. $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}, \ \forall n \in \mathbb{N}^*$.
5. $u_n = \frac{n\sin(n!)}{n^2+1}, \ \forall n \in \mathbb{N}$.
6. $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k}, \ \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 2: On considère les suites $(u_n)_n$ et (v_n) définies par

$$\begin{cases} u_0, v_0 \in \mathbb{R} \ ; \ 0 < v_0 < u_0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \ v_{n+1} = \frac{u_n+v_n}{2} \ \text{ et } \ u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n}. \end{cases}$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < u_n \leq v_n$.
2. Etudier la monotonie des suites (u_n) et (v_n).
3. Montrer que les suites (u_n) et (v_n) convergent vers une même limite l. Exprimer l à l'aide de u_0 et v_0.

Exercice 3: La suite (u_n) est définie par

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+3}} + \ldots\ldots\ldots\ldots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}.$$

1. Montrer qu'il existe deux suite (v_n) et (w_n) convergents, de même limite et telles que, $v_n \leq u_n \leq w_n$.
2. En déduire que la suite (u_n) est convergente et préciser sa limite.

Exercice 4: On considère la suite (u_n) définie par

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}, \ \forall n \geq 1.$$

1. Montrer que la sous suite $(u_{2n})_{n\geq 1}$ est croissante majorée par 1.
2. Montrer que la sous suite $(u_{2n+1})_{n\geq 0}$ est décroissante minorée par $\frac{1}{2}$.
3. Montrer que pour tout $n \geq 1$, $u_{2n} \leq u_{2n+1}$, et les deux sous suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers la même limite. Conclure.

Exercice 5: Soit $(v_n)_{n\geq 0}$ une suite décroissante qui converge vers 0. On pose

$$U_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k v_k.$$

1. Montrer que les suites (U_{2n}) et (U_{2n+1}) sont adjacentes.
2. En déduire que la suite (U_n) converge.

Exercice 6:

1. pour $n \geq 1$, on pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k!}{(n+1)!}$. Montrer par récurrence que
$$\forall\ n \geq 2, \quad S_n \geq \frac{1}{n}.$$
2. On considère la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par : $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k!}{n!}$.
   (a) Montrer que pour tout $n \geq 2$, $u_{n+1} \geq \frac{n+1}{n}$.
   (b) Montrer que pour tout $n \geq 1$,
   $$\frac{u_n}{u_{n+1}} = (n+1)\left(1 - \frac{1}{u_{n+1}}\right).$$
   (c) En déduire que la suite (u_n) est monotone.
   (d) Quelle est la nature de la suite (u_n).

Exercice 7: On considère la suite définie par

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + \frac{1}{u_n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

1. Montrer que $u_n > \sqrt{2}$ pour tout $n \geq 0$ et que (u_n) est strictement décroissante.
2. Calculer $\lim_{n\to+\infty} u_n$.
3. On pose $v_n = u_n - \sqrt{2}$. Montrer que $v_{n+1} = \frac{(v_n)^2}{2u_n}$ et en déduire que $v_{n+1} < \frac{(v_n)^2}{2}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$.
4. Montrer que $0 < v_n < \frac{1}{2^{2^n-1}}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Exercice 8: Soient (X_n) et (Y_n) les suites de nombres réels définies par

$$X_n = 1 + \frac{\cos 1}{1!} + \frac{\cos 2}{2!} + ... + \frac{\cos n}{n!}, n \in \mathbb{N} \ \text{ et } \ Y_n = 1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*$$

1. Montrer que la suite (X_n) est de Cauchy. En déduire qu'elle converge.
2. En considérant la différence $Y_{2n} - Y_n$,démontrer que (Y_n) n'est pas de Cauchy.
3. Montrer que la suite (Y_n) diverge vers $+\infty$.

Exercice 9: Soit $k \in]0,1[$ et $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels telle que $|X_n - X_{n-1}| \leq k|X_{n-1} - X_{n-2}|$, pour tout $n \geq 2$.

1. Montrer que la suite (X_n) est de Cauchy.
2. Soit (U_n) la suite définie par $U_{n+1} = 1 + \frac{1}{U_n}; U_0 = 1$.
3. Montrer que
   (a) $\frac{3}{2} \leq U_n \leq 2$ pour tout $n \geq 1$.
   (b) $|U_n - U_{n-1}| \leq \frac{4}{9}|U_{n-1} - U_{n-2}|$.

4. En déduire que la suite (U_n) converge et calculer sa limite.

Exercice 10: Soit (u_n) une suite réelle telles que les suites $(u_{2n}), (u_{2n+1})$ et (u_{3n}) convergent.

1. Rappeler la définition d'une suite extraite de (u_n).
2. Montrer que (u_{2n}) et (u_{3n}) convergent vers la même limite.
3. Montrer que (u_{2n+1}) et (u_{3n}) convergent vers la même limite.
4. En déduire que la suite (u_n) converge.

Exercice 11: On se donne deux réels a et b et on considère la suite $(u_n)_n$ définie par

$$\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R} \\ u_{n+1} = au_n + b, \ \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

1. On suppose que $a = 1$. Exprimer u_n en fonction de u_0, a et b.
2. $a \neq 1$. Montrer qu'il existe $l \in \mathbb{R}$ tel que la suite $(v_n)_n$ définie par

$$v_n = u_n - l, \ \forall n \in \mathbb{N}$$

   soit une suite géométrique.
3. Etudier la nature de la suite $(u_n)_n$.

7.8 Continuité

Exercice 1: Soit I un intervalle ouvert contenant x_0. Soit f une fonction définie sur I telle que $\lim_{x \to x_0} f(x) = l > 0$.
Montrer qu'il existe $\beta > 0$ telle que pour tout $x \in]x_0 - \beta, x_0 + \beta[\cap I$ on a $f(x) \geq \frac{l}{2}$.

Exercice 2: Soient f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}_+$ telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad g(x) > 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L > 0.$$

1. Montrer que
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0 \Longleftrightarrow \lim_{x \to +\infty} g(x) = 0.$$
2. Montrer que
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \Longleftrightarrow \lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty.$$

Exercice 3: Calculer les limites suivantes.

1. $\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x}$.
2. $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{\sqrt{x}}$.
3. $\lim_{x \to +\infty} (\sqrt{x^2 - x + 1} + x - 2)$.
4. $\lim_{x \to +\infty} (ax + b) \sin(\frac{x^2}{1+x^3}), \quad a, b \in \mathbb{R}$.

5. $\lim_{x\to+\infty}(1+\frac{1}{x})^x$.
6. $\lim_{x\to1}\frac{x^{\frac{1}{2}}-1}{x^{\frac{1}{3}}-1}$.

Exercice 4: Soit f une fonction périodique sur $\mathbb{R}$ non constante de période $T>0$.

1. Vérifier que $\forall a\in\mathbb{R},\forall n\in\mathbb{N}$, on a $f(a+nT)=f(a)$.
2. Montrer que f n'admet pas de limite en $+\infty$.

Exercice 5: Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ vérifiant $f(x+y)=f(x)+f(y)\ \ \forall\ x,y\in\mathbb{R}$.

1. Vérifier que $f(0)=0$.
2. Déterminer $f(n)$ pour tout $n\in\mathbb{Z}$, puis déduire $f(r)$ pour tout rationnel r.
3. En déduire $f(x)$ pour tout $x\in\mathbb{R}$;

Exercice 6: Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 tels que $f\circ f(x)=\frac{x}{2}+3$ pour tout $x\in\mathbb{R}$.

1. Montrer que $\forall x\in\mathbb{R}, f(\frac{x}{2}+3)=\frac{f(x)}{2}+3$.
2. Pour $x\in\mathbb{R}$ fixé, on définit la suite (u_n) par :

$$\begin{cases} u_0 &= x\\ u_{n+1} &= \frac{1}{2}u_n+3\end{cases}$$

(a) Montrer que

$$\forall n\in\mathbb{N}, u_n-6=\frac{1}{2^n}(u_0-6),$$

et en déduire que la suite $(f'(u_n))$ converge.
(b) En déduire que f' est constante, déterminer alors f.

Exercice 7: Edutier la continuité des fonctions suivantes :

1. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x)=\begin{cases} x\cos(\frac{1}{x}) & \text{si } x\neq0,\\ 0 & \text{si } x=0.\end{cases}$$

2. $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie par :

$$h(x)=\begin{cases} \cos(x)\cos(\frac{1}{x}) & \text{si } x\neq0,\\ 0 & \text{si } x=0.\end{cases}$$

Exercice 8: Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $g(x)=\frac{x\log x}{x-1}$.

1. Montrer que g est prolongeanle par continuité en 0 et en 1.
2. Soit f la fonction définie usr $]-1,1[$ par $f(x)=(1-x^2)\log\frac{1+x}{1-x}$.

   a) Montrer que f est continue sur $]-1,1[$.
   b) Etudier la pariété de f.
   c) Montrer que f se prolonge par continuité en une fonction continue sur $[-1,1]$.

Exercice 9: On considére la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{x}{1+|x|}.$$

1. Etudier la continuité de f.
2. Montrer que f posséde une fonction réciproque f^{-1}.
3. Determiner $f^{-1}(x)$.

Exercice 10: Soit $f : [a,b] \longrightarrow [a,b]$.

1. Montrer que si f est continue sur $[a,b]$ alors elle admet un point fixe.
2. Montrer que si f est contractante (i.e., il existe $k \in]0,1[$ tel que pour tout $x, y \in [a,b]$; $|f(x) - f(y)| \leq k|x-y|$) alors f admet un unique point fixe.

Exercice 11: Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} a\sin x + \cos x & \text{si } x < \frac{\pi}{2} \\ \pi - x\sin x & \text{si } \frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi \\ \frac{x^2}{2} + b & \text{si } x > \pi \end{cases}$$

Déterminer a et b pour que f soit continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 12:soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ telque

$$f(0) = 1, \ \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0, \ \lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$$

1. Montrer qu'il existe $a > 0$ tel que si $|x| > a$ alors $|f(x)| \leq \frac{1}{2}$.
2. Montrer que f est bornée et posséde un maximuim.

Exercice 13: Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction décroissante telle que :

$$f(x) + f(x+1) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{x}.$$

1. Etudier la limite de f en $+\infty$.
2. Donner un équivalent de f en $+\infty$.

7.9 Dérivabilité

Exercice 1: La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{x}{1+|x|}$$

est-elle dérivable en 0 ?

Exercice 2: Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x < 0 \\ ax^2 + bx + c & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Determiner a, b, c pour que f soit de classe $\mathcal{C}^1$.

Exercice 3: Soit f une fonction dérivable en x_0.

Montrer que :

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{2h} = f'(x_0)$$

La réciproque est-elle vraie ?

Exercice 4: Soit f une fonction dérivable en un point x_0, déterminer la limite éventuelle en x_0 de :

$$\frac{xf(x_0) - x_0 f(x)}{x - x_0}$$

Exercice 5: Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$, calculer la limite lorsque h tend vers 0 de :

$$\frac{f^2(x + 3h) - f^2(x - h)}{h}$$

Exercice 6: On considère une fonction f dérivable sur le segment $[0, 1]$ avec $f(0) = f(1)$.

La fonction g définie par :

$$g(x) = \begin{cases} f(2x) & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ f(2x - 1) & \text{si } \frac{1}{2} < x \leq 1 \end{cases}$$

est-elle continue ? dérivable ?
Si non, quelles hypothèses faut-il ajouter pour que g soit dérivable sur $[0, 1]$?

Exercice 7: On considère la fonction définie par :

$$g(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

f est-elle de classe $\mathcal{C}^1$?

Exercice 8: Soit f et g deux fonctions continues sur $[a, b]$, dérivables sur $]a, b[$.

Montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que :

$$(f(b) - f(a))g'(c) = (g(b) - g(a))f'(c)$$

Exercice 9: Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0, 1]$ tel que

$$\forall\, x \in [0, 1];\ |f'(x)| \leq 1.$$

Montrer à l'aide d'une formule de Taylor la relation

$$|f(0) - 2f(\frac{1}{2}) + f(1)| \leq \frac{1}{4}.$$

Exercice 10: Soit f une fonction dérivable de $[a, b]$ dans $[a, b]$ tel que

$$\exists k < 1,\ \forall\, x \in [a, b];\ |f'(x)| \leq k.$$

1. Démontrer que f est k-Lipschitzienne sur $[a, b]$, i.e.,
$$\forall\, x, y \in [a, b],\ x \leq y;\ |f(x) - f(y)| \leq k|x - y|.$$
2. Démontrer que l'équation $f(x) = x$ admet une solution et une seule dans $[a, b]$ que l'on note par α.
3. Soit $(u_n)_n$ une suite définie par
$$\begin{cases} u_0 \in [a, b] \\ u_{n+1} = f(u_n),\ \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$
Démontrer que la suite $(u_n)_n$ converge vers α.
4. Applications.
   (a) $U_{n+1} = 2 + \frac{1}{2} \sin u_n$.
   (b) $U_{n+1} = \cos u_n$.

Exercice 11: Soient a et$b$ deux réels tel que $a < b$ et $f \in \mathcal{C}^3([a, b], \mathbb{R})$.

Montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que

$$f(b) = f(a) + (b - a)f'(\frac{a + b}{2}) + \frac{(b - a)^3}{24} f'''(c)$$

(Ind. On pourra utiliser la formule de Taylor-Lagrange)

Exercice 12: Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I contenant 0, continue sur I. On suppose de plus que

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(2x) - f(x)}{x} = 0.$$

Montrer que f est dérivable en 0.

7.10 Développements limités

Exercice 1: Donner le développement limité en 0 à l'ordre 3 des fonctions suivantes :

a) $\dfrac{\sin(x) - 1}{\cos(x) + 1}$ b) $\sqrt{1 + \sin(x)}$ c) $\dfrac{1}{1 + \ln(1 + x)}$ d) $\dfrac{\exp(\arctan(x))}{1 + x^2}$

e) $\ln(2 + \sin(x))$ f) $\dfrac{x - \sin(x)}{1 - \cos(x)}$ g) $\dfrac{x\text{ch}(x) - \text{sh}(x)}{\text{ch}(x) - 1}$ h) $\exp(\cos(2x))$

Exercice 2: Donner le développement limité en a à l'ordre 3 des fonctions suivantes :

$$\text{a) } \exp(x) \quad , a=1 \quad \text{b) } \frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x}} \quad , a=+\infty \quad \text{c) } \frac{\ln(x)}{x} \quad , a=3$$

Exercice 3: Calculer les limites suivantes à l'aide des DL :

$$\text{a) } \lim_{x\to 0} \frac{\exp(x)-x-1}{x^2} \quad \text{b) } \lim_{x\to 0} \frac{x-\sin(x)}{\tan(x)-2x} \quad \text{c) } \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\cos(x)+\sin(x)-\sqrt{2}}{(x-\frac{\pi}{4})^2}$$

Exercice 4: Utiliser les DL pour étudier au point d'abscisse 0 la position de la courbe C_f de la fonction f par rapport à sa tangente T en ce point en précisant l' équation de la tangente T dans chacun des cas suivants :

a)$f(x) = \exp(x) - \dfrac{x^2}{2}$ b)$f(x) = (\arcsin(x))^2 - x^2$

Exercice 5: Soit la fonction f définie par :

$$f : x \in]-1,0[\cup]0,+\infty[\longmapsto \frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x}.$$

1. Vérifier que f admet au voisinage de 0 un développement limité à l'ordre 2 que l'on précisera.
2. Montrer que f admet un prolongement par contiuité en 0 noté g que l'on précisera.
3. Est ce que g est dérivable en 0 ?
4. Déterminer la position de la courbe C_g par rapport à sa tangente au point d'abscisse 0.

Exercice 6:

Utiliser les DL à l'infini pour étudier la position de la courbe C_f de la fonction f par rapport à ces éventuelles asymtotes au voisinage de $(-\infty)$ et $(+\infty)$ en précisant dans chaque cas les équations de ces éventuelles asymtotes.

a)$f(x) = \dfrac{\sqrt{1+x^2+x^4}}{1+x^2}$ b)$f(x) = x^2(1+\dfrac{1}{x})^{1+x}$

Exercice 7: Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2x^2}{e^x - e^{-x}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Déterminer le développement limité de f à l'ordre 3 en 0.
2. Montrer que f est continue et dérivable en 0, que vaut $f'(0)$.
3. Préciser la position de C_f par rapport à la tangente en 0.

Exercice 8: Soit f la fonction définie par

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longrightarrow f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{\sinh x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} .$$

1. Donner le développement limité de f en 0 à l'ordre 3.
2. Préciser la position dde la courbe représentative de f par rapport à la tangente au point $(0, 0)$.

7.11 Integrales et primitives

Exercice 1: Soient a et b deux nombres réels tels que $a < b$ et f une fonction définie et continue sur $[a, b]$ telle que

$$\left| \int_a^b f(x)dx \right| = \int_a^b \mid f(x) \mid \mathrm{d}x.$$

Monter que f garde un signe constant sur $[a, b]$.

Exercice 2:

1. Montrer que si f est impaire sur $[-a, a]$ avec $a > 0$ alors :
$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$$
2. Montrer que si f est paire sur $[-a, a]$, alors :
$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx.$$
3. Montrer que si f est continue sur $\mathbb{R}$, périodique de période T, alors :
$$\int_0^T f(x)\,dx = \int_\alpha^{\alpha+T} f(x)\,dx,\ \forall\,\alpha \in \mathbb{R}.$$
4. Déduire que : $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin(2x)\,dx}{1 + (\cos(2x))^7} = 0.$

Exercice 3: Calculer la limite de la somme U_n dans chacun des cas suivants.

$U_n = \frac{1}{n^4}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 \qquad U_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sin(\frac{k\pi}{n}) \qquad U_n = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k\cos(\frac{k\pi}{n})$

$U_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{\sqrt{n^2+k^2}} \qquad U_n = n\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{n^2+k^2} \qquad U_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{ch(\frac{k}{n})}{n}$

Exercice 4: Calculer les primitives suivantes.

$\displaystyle\int \cos t \sin^3 t dt \qquad \int \sin(2t)e^{\sin^2 t}dt \qquad \int \frac{\ln t}{t}dt$

$\displaystyle\int \frac{e^{\sqrt{\sin t}}\cos t}{\sqrt{\sin t}}dt \qquad \int t^2 \ln t dt \qquad \int e^{2t}\cos(t - \frac{\pi}{4})dt$

Exercice 5: Calculer les primitives suivantes.

$\displaystyle\int \frac{t}{t^2+4}dt \qquad \int \frac{2t+3}{t^2+t+1}dt \qquad \int \frac{7t+1}{t^3+1}dt \qquad \int \frac{2t+3}{(t^2+3t+5)^2}dt$

Exercice 6: Calculer les primitives suivantes.

$$\int \frac{dt}{\sin t + \cos t} \qquad \int \frac{\sin t + \cos t}{\sin t \cos^2 t} dt \qquad \int \frac{\cos t}{\sin 2t + \cos 3t} dt$$

$$\int \cos^3 t + 2\cos t dt \qquad \int \frac{dt}{\cos t \sin^3 t} \qquad \int \frac{dt}{\sin t(1 + 3\cos t)}$$

Exercice 7: Calculer les primitives suivantes.

$$\int \frac{ch(t)}{sh(t) + ch(t)} dt \qquad \int \frac{dt}{sh(t)ch(t)} \qquad \int \frac{dt}{th(t) + 1} \qquad \int e^t \, \frac{ch(t) - 1}{ch(t) + 1} dt$$

Exercice 8: Calculer les primitives suivantes.

$$\int \frac{dt}{t + \sqrt{t - 1}} dt \qquad \int t \, \sqrt{\frac{t - 2}{t + 1}} dt \qquad \int t \, \frac{dt}{\sqrt{t^2 + 2t + 2}}$$

Exercice 9: Soit $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t dt$

1. Montrer que $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t dt$
   (Utilisez le fait que $\cos(\frac{\pi}{2} - x) = \sin(x)$.
2. calculer I_0 et I_1.
3. Monter que $I_{n+1} = \frac{n}{n+1} I_{n-1}, \forall n \geq 1$.
4. Montrer que $I_{2p+1} = \frac{(2^p p!)^2}{(2p+1)!} I_1$ et $I_{2p} = \frac{(2p)!}{(2^p p!)^2} I_0$.

Troisième partie

Correction des series d'exercices

7.12 Suites réelles

Exercice 1:

1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a :
$$\begin{aligned} u_n &= \frac{\left(\sqrt{n^2+2n}-n\right)\left(\sqrt{n^2+2n}+n\right)}{\sqrt{n^2+2n}+n} \\ &= \frac{2n}{n\left(\sqrt{1+\frac{2}{n}}+1\right)} = \frac{2}{\sqrt{1+\frac{2}{n}}+1}, \end{aligned}$$
ce qui montre que, $\lim_{n\to\infty} u_n = 1$.
2. Pour $n \geq 1$, on a
$$u_n = e^{\frac{n}{2}\log\left(1+\frac{1}{n}\right)} = e^{\frac{1}{2}\frac{\log\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}}}.$$
Comme $\lim_{t\to 0^+} \frac{\log(1+t)}{t} = 1$, on en déduit que, $\lim_{n\to\infty} u_n = e^{\frac{1}{2}}$.
3. $u_n = \begin{cases} \frac{n}{n^2+1} & \text{si } n \text{ est pair} \\ \frac{\sin n}{n} & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}, \ \forall n \in \mathbb{N}.$
On a : $u_{2n} = \frac{2n}{4n^2+1}$ et $u_{2n+1} = \frac{\sin(2n+1)}{2n+1}$.
$$\forall n \geq 1,\ |u_{2n}| \leq \frac{1}{2n} \implies \lim_{n\to\infty} u_{2n} = 0.$$
$$\forall n \geq 0,\ |u_{2n+1}| \leq \frac{1}{2n+1} \implies \lim_{n\to\infty} u_{2n+1} = 0.$$
Les deux sous suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) recouvrent la suite (u_n) et convergent vers la même limite $l = 0$, par suite (u_n) converge aussi vers $l = 0$.

Exercice 2:

1. On a
$$u_n > 0, \quad v_n > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$
Pour $n = 0$, $\quad u_0 < v_0 \quad$ par hypothése.
Pour $n \geq 1$, on a
$$(\sqrt{u_{n-1}} - \sqrt{v_{n-1}})^2 \geq 0$$
et donc
$$\begin{aligned} u_{n-1} + v_{n-1} - 2\sqrt{u_{n-1}}\sqrt{v_{n-1}} &\geq 0 \\ \implies \sqrt{u_{n-1}v_{n-1}} &\leq \frac{u_{n-1}+v_{n-1}}{2} \\ \implies u_n \leq v_n \quad \forall n. \end{aligned}$$
2. On a $u_n \leq v_n \implies u_n^2 \leq u_n v_n \implies u_n \leq \sqrt{u_n v_n}$ et donc
$$u_n \leq u_{n+1}.$$
D'autres part
$$\begin{aligned} u_n \leq v_n &\implies u_n + v_n \leq 2v_n \\ &\implies \frac{u_n+v_n}{2} \leq v_n \end{aligned}$$
et par suite
$$v_{n+1} \leq v_n \quad \forall\, n$$

3. On a
$$u_0 \leq \ldots \leq u_{n-1} \leq u_n \leq v_n \leq v_{n-1} \leq \ldots \leq v_0,$$
et par suite $(u_n)_n$ est croissante, majorée par v_0 donc elle est convergente. Soit $l = \lim u_n$.
De même $(v_n)_n$ est décroissante, minorée par u_0, donc elle est convergente. Soit $l' = \lim v_n$.
l et l' vérifient
$$l' = \frac{l + l'}{2} \Longrightarrow l = l'.$$

<u>Exercice 3:</u> Les termes sous radicaux sont de la forme $n^2 + k$ où k est un entier qui varie de 1 à n. Par conséquent, on a l'encadrement
$$\frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n^2+k}} \leq \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}.$$
Ce qui conduit à
$$\frac{n}{\sqrt{n^2+n}} \leq u_n \leq \frac{n}{\sqrt{n^2+1}},$$
avec $v_n = \frac{n}{\sqrt{n^2+n}}$ et $w_n = \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$ $\lim_{n\to+\infty} v_n = \lim_{n\to+\infty} w_n = 1$ donc $\lim_{n\to+\infty} u_n = 1$.

<u>Exercice 4:</u>

1. On a
$$u_{2n+2} - u_{2n} = \sum_{k=1}^{2n+2} \frac{(-1)^{k-1}}{k} - \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} > 0,$$
et donc (u_{2n}) est croissante. On a aussi
$$u_{2n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} \leq 1,$$
et donc (u_{2n}) est majorée par 1.

2. On a
$$u_{2n+3} - u_{2n+1} = \sum_{k=1}^{2n+3} \frac{(-1)^{k-1}}{k} - \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = -\frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n+3} < 0,$$
et donc (u_{2n}) est croissante. On a aussi
$$u_{2n+1} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1} \geq \frac{1}{2},$$
ainsi, (u_{2n+1}) est minorée par $\frac{1}{2}$.

3. $u_{2n+1} = u_{2n} + \frac{1}{2n+1} > u_{2n} \Longrightarrow u_{2n+1} - u_{2n} = \frac{1}{2n+1} \longrightarrow 0$ et donc (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers la même limite, et par suite (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont adjacentes.

Exercice 5:

1) $u_{2n+2} - u_{2n} = \sum_{k=0}^{2n+2} (-1)^k v_k - \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k v_k = v_{2n+2} - v_{2n+1} < 0$. D'où (u_{2n}) est décroissante.

$u_{2n+3} - u_{2n+1} = \sum_{k=0}^{2n+3} (-1)^k v_k - \sum_{k=0}^{2n+1} (-1)^k v_k = v_{2n+2} - v_{2n+3} > 0$. D'où (u_{2n}) est croissante.

2) $\lim_{n \to +\infty} (u_{2n+1} - u_{2n}) = \lim_{n \to +\infty} \left(\sum_{k=0}^{2n+1} (-1)^k v_k - \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k v_k \right) = - \lim_{n \to +\infty} v_{2n+1} = 0.$

Exercice 6:

1. $n \geq 1$ et $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k!}{(n+1)!}$. On note pour $n \geq 2$

$$\mathcal{P}_n \ : \ S_n \geq \frac{1}{n}.$$

$\mathcal{P}_2$ est vraie, en effet

$$S_2 = \sum_{k=1}^{2} \frac{k!}{3!} = \frac{1}{3!} + \frac{2!}{3!} = \frac{1}{2}.$$

Supposons que $\mathcal{P}_n$ est vraie pour un certain $n \geq 2$ et montrons $\mathcal{P}_{n+1}$.

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= \textstyle\sum_{k=1}^{n+1} \frac{k!}{(n+2)!} \\ &= \frac{1}{n+2} \textstyle\sum_{k=1}^{n+1} \frac{k!}{(n+1)!} \\ &= \frac{1}{n+2} \left(\textstyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k!}{(n+1)!} + 1 \right) \\ &\geq \frac{1}{n+2} \left(\frac{1}{n+1} + 1 \right), \quad \text{d'après l'hypothèse de récurrence} \\ &\geq \frac{1}{n+1}. \end{aligned}$$

2. Pour $n \geq 1$, $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k!}{n!}$.
   (a) Soit $n \geq 2$, alors

$$u_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{k!}{(n+1)!} = \sum_{k=1}^{n} \frac{k!}{(n+1)!} + 1 = S_n + 1 \geq \frac{1}{n} + 1 = \frac{n+1}{n}.$$

   (b) Soit $n \geq 1$,

$$\begin{aligned} \frac{u_n}{u_{n+1}} &= \frac{1! + \cdots + n!}{n!} \ \frac{(n+1)!}{1! + \cdots + n! + (n+1)!} \\ &= (n+1) \ \frac{1! + \cdots + n!}{1! + \cdots + n! + (n+1)!} \\ &= (n+1) \left(1 - \frac{(n+1)!}{1! + \cdots + n! + (n+1)!} \right) \\ &= (n+1) \left(1 - \frac{1}{u_{n+1}} \right) \end{aligned}$$

   (c) Pour $n \geq 2$, on a

$$u_{n+1} \geq \frac{n+1}{n} > 0 \ \Rightarrow \ 0 < \frac{1}{u_{n+1}} \leq \frac{n}{n+1} \ \Rightarrow 1 - \frac{1}{u_{n+1}} \geq \frac{1}{n+1},$$

   d'où pour $n \geq 2$, $\frac{u_n}{u_{n+1}} \geq 1$ et comme $u_{n+1} > 0$, on obtient

$$\forall \ n \geq 2, \ u_n \geq u_{n+1},$$

   ce qui montre que la suite $(u_n)_{n \geq 2}$ est décoissante.

(d) La suite $(u_n)_{n\geq 2}$ est décoissante minorée par 0, donc elle est convergente.

Exercice 7:

1. Par récurrence pour $n=0$, $u_0 = 2 > \sqrt{2}$ est vraie. Supposons que $u_n > \sqrt{2}$ est vraie et montrons que $u_{n+1} > \sqrt{2}$.
   En effet : $u_{n+1} - \sqrt{2} = \frac{1}{2}u_n + \frac{1}{u_n} - \sqrt{2} = \frac{(u_n - \sqrt{2})^2}{2u_n} > 0$, donc $u_{n+1} > \sqrt{2}$.
   $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2}u_n + \frac{1}{u_n} - u_n = \frac{2-u_n^2}{2u_n} < 0$, car $u_n < \sqrt{2} \Rightarrow$ (u_n) est décroissante.
2. (u_n) est une suite décroissante minorée par $\sqrt{2}$ donc c'est une suite convergente.
   On a
   $$\begin{aligned} u_{n+1} = \tfrac{1}{2}u_n + \tfrac{1}{u_n} \quad & \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} u_{n+1} = \lim_{n\to+\infty}(\tfrac{1}{2}u_n + \tfrac{1}{u_n}) \\ & \Rightarrow l = \tfrac{1}{2}l + \tfrac{1}{l} \Rightarrow l = \sqrt{2} \end{aligned}$$
   car $u_n > \sqrt{2}$.
3. On pose $v_n = u_n - \sqrt{2}$
   $$\begin{aligned} v_{n+1} = u_{n+1} - \sqrt{2} \quad & = \tfrac{1}{2}u_n + \tfrac{1}{u_n} - \sqrt{2} \\ & = \tfrac{(u_n-\sqrt{2})^2}{2u_n} = \tfrac{(v_n)^2}{2u_n}. \end{aligned}$$
   et Puisque $u_n > \sqrt{2}$
   $$\begin{aligned} & \Rightarrow v_{n+1} = \tfrac{(v_n)^2}{2u_n} < \tfrac{(v_n)^2}{2\sqrt{2}} \\ & \Rightarrow v_{n+1} < \tfrac{(v_n)^2}{2}, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$
4. Puisque $u_n > \sqrt{2} \Rightarrow v_n > 0$ et parsuite $v_{n+1} < \frac{(v_n)^2}{2}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.
   $$v_n < \frac{(v_{n-1})^2}{2} < \frac{(\frac{(v_{n-2})^2}{2})^2}{2} = \frac{(v_{n-2})^4}{2^{2^2-1}} .... < \frac{(v_{n-n})^n}{2^{2^n-1}} < \frac{1}{2^{2^n-1}}$$
   car $v_0 < 1$.

Exercice 8:

1)Pour $N \in \mathbb{N}$ assez grand $n \geq N$ et $p \in \mathbb{N}$ on a
$$|X_{n+p} - X_n| = \left|\sum_{k=0}^{n+p} \frac{\cos(k)}{k!} - \sum_{k=0}^{n} \frac{\cos(k)}{k!}\right| = \left|\sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{\cos(k)}{k!}\right| \leq \sum_{k=n+1}^{n} \frac{1}{k!}.$$
et on a pour $n+1 \leq k \leq n+p$ on a $k! \geq 2^{k-1}$ c'est à dire $\dfrac{1}{k!} \leq \dfrac{1}{2^{k-1}}$, donc
$$\sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{k!} \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{2^{k-1}} = \frac{1}{2^n} \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^p}{1 - \frac{1}{2}} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{N-1}.$$
Or $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 0$ donc (X_n) est de Cauchy, d'où elle est convergente.

2) $\displaystyle Y_{2n} - Y_n = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}.$

Or pour $n+1 \leq k \leq 2n$ on a $\dfrac{1}{2n} \leq \dfrac{1}{k}$ alors $\displaystyle\frac{1}{2} = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{2n} \leq \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} = Y_{2n} - Y_n.$

Donc pour montrer que (Y_n) n'est pas de Cauchy, il suffit de montrer que $\exists\, \epsilon > 0$ tel que pour $\forall\, n,\, m > N$ on a $|Y_n - Y_m| > \epsilon$, donc il sufffit de prendre $\epsilon = \dfrac{1}{2}$ et $m = 2n$.

3) (Y_n) n'est pas de Cauchy alors (Y_n) n'est pas convergente, or (Y_n) est croissante de plus elle n'est pas bornée (car sinon elle sera convergente) d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} Y_n = +\infty$.

Exercice 9: 1) On a

$$\begin{array}{c}
|X_n - X_{n-1}| \leq k|X_{n-1} - X_{n-2}| \\
|X_{n-1} - X_{n-2}| \leq k|X_{n-2} - X_{n-3}| \\
|X_{n-2} - X_{n-3}| \leq k|X_{n-3} - X_{n-4}| \\
\vdots \qquad\qquad \vdots \\
|X_2 - X_1| \leq k|X_1 - X_0| \\
\hline \\
|X_n - X_{n-1}| \leq k^{n-1}|X_1 - X_0|
\end{array}$$

Soit $N \in \mathbb{N}$ assez grand, $n \geq N$ et $p \in \mathbb{N}$ alors on a

$$\begin{aligned}
|X_{n+p} - X_n| &= |X_{n+p} - X_{n+p-1} + X_{n+p-1} - X_{n+p-2} + X_{n+p-2} - \cdots + X_{n+1} - X_n| \\
&\leq |X_{n+p} - X_{n+p-1}| + |X_{n+p-1} - X_{n+p-2}| + \cdots + |X_{n+1} - X_n| \\
&\leq |X_1 - X_0| \sum_{l=0}^{p-1} k^{n+l} = k^n |X_1 - X_0| \sum_{l=0}^{p-1} k^l = k^n|X_1 - X_0| \frac{1-k^p}{1-k} \\
&\leq \frac{k^n|X_1 - X_0|}{1-k} \leq \frac{k^N|X_1 - X_0|}{1-k}.
\end{aligned}$$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{k^n|X_1 - X_0|}{1-k} = 0$, alors (X_n) est une suite de Cauchy.

2) a) Montrons par récurrence que $\dfrac{2}{3} \leq u_n \leq 2$ pour tout $n \geq 1$.

Pour $n = 0$ on a $\dfrac{3}{2} \leq u_1 = 1 + \dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{2} \leq 2$.

Supposons que pour $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{2}{3} \leq u_n \leq 2$ et montrons que $\dfrac{2}{3} \leq u_{n+1} \leq 2$.

On a $\dfrac{3}{2} \leq u_n \leq 2 \iff \dfrac{1}{2} \leq \dfrac{1}{u_n} \leq \dfrac{2}{3} \iff \dfrac{3}{2} \leq 1 + \dfrac{1}{u_n} \leq \dfrac{5}{3}$, donc $\dfrac{3}{2} \leq u_{n+1} \leq 2$.

D'où $\dfrac{2}{3} \leq u_n \leq 2$ pour tout $n \geq 1$.

b) On a $|u_n - u_{n-1}| = \left|\dfrac{1}{u_{n-1}} - \dfrac{1}{u_{n-2}}\right| = \dfrac{|u_{n-1} - u_{n-2}|}{|u_{n-1}.u_{n-2}|}$.

Or $\dfrac{2}{3} \leq u_{n-1}$ and $\dfrac{2}{3} \leq u_{n-2}$ alors on obtient

$$|u_n - u_{n-1}| \leq \frac{4}{9}|u_{n-1} - u_{n-2}|, \quad \forall\, n \geq 3.$$

3) D'apré 2)b) la suite (u_n) vérifie les hypothèses de 1) avec $0 < k = \frac{4}{9} < 1$, donc (u_n) est de Cauchy d'où (u_n) est convergente. Posons l cette limite.

On a $u_{n+1} = 1 + \frac{1}{u_n}$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} 1 + \dfrac{1}{u_n}$ donc on obtient $l = 1 + \dfrac{1}{l} \iff l^2 - l - 1 = 0$ donc $l' = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ et $l'' = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ or $l' < 0$ d'où $l = l''$.

Exercice 10:

On pose $v_n = u_{2n}$, $w_n = u_{3n}$ et $t_n = u_{2n+1}$.

1) Soient $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ une fonction strictement croissante, et (u_n) une suite réelle. La suite $(u_{\varphi(n)})$ est dite suite extrairt de la suite (u_n).

2) (v_{3n}) est une sous-suite de (v_n) donc on a $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{6n} = \lim\limits_{n\to+\infty} v_{3n} = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.
(w_{2n}) est une sous-suite de (w_n) donc on a $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{6n} = \lim\limits_{n\to+\infty} w_{2n} = \lim\limits_{n\to+\infty} w_n$.
D'où $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n} = \lim\limits_{n\to+\infty} u_{3n}$

3)(t_{3n+1}) est une sous-suite de (t_n) donc on a $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{6n+3} = \lim\limits_{n\to+\infty} t_{3n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} t_n$.
(w_{2n+1}) est une sous-suite de (w_n) donc on a $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{6n+3} = \lim\limits_{n\to+\infty} w_{2n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} w_n$.
D'où $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{3n} = \lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n+1}$

4) d'aprés 2) et 3) on a (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers la même limite alors (u_n) converge aussi.

Exercice 11:

1. Pour $a = 1$ on a
$$\begin{array}{ll} U_n & = U_{n-1} + b \\ U_{n-1} & = U_{n-2} + b \\ \vdots & \vdots \\ U_1 & = U_0 + b \\ \Longrightarrow U_n & = U_0 + nb. \end{array}$$
Et par suite $(U_n)_n$ est une suite arithmétique de raison b.
2. $a \neq 1, \quad U_n = aU_{n-1} + b$.
Montrons que
$$U_n = l + a^n(U_0 - l).$$
Par réccurence, pour $n = 0$,
$$U_0 = l + (U_0 - l).$$
Et donc la propriété est vrai.
Soit $n \geq 1$. Supposons que
$$U_n = l + a^n(U_0 - l),\ \forall n \in \mathbb{N},$$
montrons que
$$U_{n+1} = l + a^{n+1}(u_0 - l).$$
En effet, l vérifie $l = al + b$ et
$$u_{n+1} = aU_n + b = a(l + a^n(U_0 - l)) + b = a^{n+1}(U_0 - l) + l,$$
d'où
$$\forall n \in \mathbb{N},\ U_n = l + a^n(U_0 - l).$$
3. Si $a = 1, \quad U_n = U_0 + nb$, et par suite
$$\Longrightarrow \lim U_n = \begin{cases} u_0 & \text{si } b = 0 \\ +\infty & \text{si } b > 0 \\ -\infty & \text{si } b < 0 \end{cases}$$

7.13 Continuité

Exercice 1:

On a $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = l$ alors
$\forall\,\epsilon > 0,\ \exists\,\eta_\epsilon > 0,\ \forall\,x,\ |x - x_0| < \eta$ on a $l - \epsilon < f(x) < l + \epsilon$.
Donc pour $\epsilon = \dfrac{l}{2} > 0,\ \exists\,\beta = \eta_{\frac{l}{2}} > 0$ tel que $\forall\,x \in]x_0 - \beta, x_0 + \beta[$ on a $f(x) \geq \frac{l}{2}$.

Exercice 2:

On pose $h(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$.

1) "$\Leftarrow$" On a $f(x) = h(x).g(x)$ de plus $\lim\limits_{n\to+\infty} h(x) = L > 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} g(x) = 0$ d'où on a $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x) = 0$.

"$\Rightarrow$" On a $g(x) = \dfrac{f(x)}{h(x)}$ de plus $\lim\limits_{n\to+\infty} h(x) = L > 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x) = 0$ d'où on a $\lim\limits_{n\to+\infty} g(x) = 0$.

2) "$\Leftarrow$" On a $f(x) = h(x).g(x)$ de plus $\lim\limits_{n\to+\infty} h(x) = L > 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} g(x) = +\infty$ d'où on a $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x) = +\infty$.

"$\Rightarrow$" On a $g(x) = \dfrac{f(x)}{h(x)}$ de plus $\lim\limits_{n\to+\infty} h(x) = L > 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x) = +\infty$ d'où on a $\lim\limits_{n\to+\infty} g(x) = +\infty$.

Exercice 3:

1. $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+1}-1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{x+1-1}{x(\sqrt{x+1}+1)} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt{x+1}+1} = \frac{1}{2}$.

2. $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}\frac{x}{\sqrt{x}} = 0$.

3. $\lim_{x\to+\infty} (\sqrt{x^2 - x + 1} + x - 2) = \lim_{x\to+\infty} x(\sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} + 1 - \frac{2}{x} = +\infty$.

4. $\lim_{x\to+\infty} (ax + b)\sin\left(\frac{x^2}{1+x^3}\right) = a$.

5. $\lim_{x\to-\infty} (1 + \frac{1}{x})^x = e$.

6. $\lim_{x\to 1} \frac{x^{\frac{1}{2}}-1}{x^{\frac{1}{3}}-1} = \frac{3}{2}$.

Exercice 4:

1)Montrons par récurrence que $f(a + nT) = f(a),\ \forall\,a \in \mathbb{R},\ \forall\,n \in \mathbb{N}$.
Pour $n = 0$ on a $f(a + 0T) = f(a)$.
Supposons que pour $n \in \mathbb{N}$ on a $f(a + nT) = f(a)$ et montrons que $f(a + (n+1)T) = f(a)$.
$f(a + (n+1)T) = f(a + nT + T) = f(a + nT) = f(a)$.
D'où $f(a + nT) = f(a)\ \forall\,a \in \mathbb{R},\ \forall\,n \in \mathbb{N}$.

2) f est non constant donc $\exists\,a,\,b \in \mathbb{R}$ tel que $f(a) \neq f(b)$. On pose $u_n = a + nT$ et $v_n = b + nT$ et on a $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$, de plus

$$\lim_{n\to+\infty} f(u_n) = \lim_{n\to+\infty} f(a + nT) = f(a) \text{ et } \lim_{n\to+\infty} f(v_n) = \lim_{n\to+\infty} f(b + nT) = f(b),$$

donc $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) \neq \lim\limits_{n\to+\infty} f(v_n)$, d'où f n'admet pas de limite en $+\infty$.

Exercice 5: 1) On a $f(0) = f(0+0) = f(0) + f(0) = 2f(0)$ donc $f(0) = 0$.

2) Soit $n \in \mathbb{Z}$ pour $n \in \mathbb{N}$ on a $f(n) = f(\underbrace{1+1+\cdots+1}_{n \text{ fois}}) = n.f(1)$. Puis remarquons que $0 = f(x-x) = f(x) + f(-x)$ alors $f(-x) = -f(x)$ c'est à dire f est impaire.
Donc pour $n \in \mathbb{Z}\backslash\mathbb{N}$ on a $f(n) = f(-(-n)) = -f(-n) = -(-n)f(1) = nf(1)$.
D'où on a $f(n) = n.f(1), \forall\, n \in \mathbb{Z}$.
Soit $r \in \mathbb{Q}$ alors $\exists\, p \in \mathbb{Z}$ and $q \in \mathbb{N}^*$ telles que $r = \dfrac{p}{q}$.
On a $q.f(r) = q.f(\dfrac{p}{q}) = \underbrace{f(\dfrac{p}{q}) + \cdots + f(\dfrac{p}{q})}_{q \text{ fois}} = f(\underbrace{\dfrac{p}{q} + \cdots + \dfrac{p}{q}}_{q \text{ fois}}) = f(q.\dfrac{p}{q}) = f(p) = p.f(1)$.
D'où $f(r) = r.f(1), \forall\, r \in \mathbb{Q}$.

3) Soit $x \in \mathbb{R}^*$. Comme $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$ alors on peut trouver une suite qu'on la note par (x_n) dans $\mathbb{Q}$ telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} = x$. D'une part on a $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = f(x)$ car f est continue. D'autre part comme $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n \in \mathbb{Q}$ alors on a

$$\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = \lim_{n\to+\infty} x_n.f(1) = x.f(1).$$

D'où $f(x) = x.f(1),\ \forall\, x \in \mathbb{R}$.

Exercice 6:

1) $f(\dfrac{x}{2}+3) = f\circ(f\circ f)(x) = (f\circ f)\circ f(x) = \dfrac{f(x)}{2} + 3$.

2) a) Montrons par récurrence que $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n - 6 = \dfrac{1}{2^n}(u_0 - 6)$.
Pour $n = 0$ on a $u_0 - 6 = \dfrac{1}{2^0}(u_0 - 6)$.
Supposons que pour $n \in \mathbb{N}$ on a $u_n - 6 = \dfrac{1}{2^n}(u_0 - 6)$ et montrons que $u_{n+1} - 6 = \dfrac{1}{2^{n+1}}(u_0 - 6)$.
$u_{n+1} - 6 = \dfrac{1}{2}u_n + 3 - 6 = \dfrac{1}{2}u_n - 3 = \dfrac{1}{2}(u_n - 6) = \dfrac{1}{2^{n+1}}(u_0 - 6)$.
D'où $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n - 6 = \dfrac{1}{2^n}(u_0 - 6)$.

On a $f \in \mathcal{C}^1$ alors $f' \in \mathcal{C}^0$ et d'après ce qui précède on a $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 6$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} f'(u_n) = f'(6)$.

b) D'après 1) on a $f(\dfrac{x}{2}+3) = \dfrac{f(x)}{2} + 3$ alors $f(x) = 2f(\dfrac{x}{2}+3) - 6$ donc $f'(x) = f'(\dfrac{x}{2}+3)$.
Montrons par récurrence que $f'(u_n) = f'(x),\ \forall n \in \mathbb{N}$.
Pour $n = 0$ on a $f'(u_0) = f'(x)$.
Supposons que pour $n \in \mathbb{N}$ on a $f'(u_n) = f'(x)$ et montrons que $f'(u_{n+1}) = f(x)$.
$f'(u_{n+1}) = f'(\frac{1}{2}u_n + 3) = f'(u_n) = f(x)$.
D'où on a $f'(u_n) = f'(x),\ \forall n \in \mathbb{N}$. Donc d'après 1)a) on a $f'(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} f'(u_n) = f'(6)$, d'où f' est constante, donc f s'écrit de la forme $f(x) = ax + b$ alors $f\circ f(x) = a^2x + b(a+1)$ d'après 1) on obtient $a = \sqrt{\dfrac{2}{3}}$ et $b = \dfrac{3}{1+\sqrt{\frac{2}{3}}}$ ou bien $a = -\sqrt{\dfrac{2}{3}}$ et $b = \dfrac{3}{1-\sqrt{\frac{2}{3}}}$.

D'où $f(x) = \sqrt{\dfrac{2}{3}}\,x + \dfrac{3}{1+\sqrt{\frac{2}{3}}}$ ou bien $f(x) = -\sqrt{\dfrac{2}{3}}\,x + \dfrac{3}{1-\sqrt{\frac{2}{3}}}$.

Exercice 7:

1. On a f est continue sur $\mathbb{R}^*$ et $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} x\cos(\frac{1}{x}) = 0$, ainsi f est continue en 0 et par suite f est continue sur $\mathbb{R}$.
2. On a h est continue sur $\mathbb{R}^*$.
   La continuité en 0.
   On considère les deux suites $u_n = \frac{1}{2n\pi}$ et $v_n = \frac{1}{2n\pi+\frac{\pi}{2}}$. Alors les suites (u_n) et (v_n) convergent vers 0. Cependant, $g(u_n) = cos(u_n)cos(2n\pi) = cos(u_n)$ converge vers 1,tandis que $g(v_n) = cos(v_n)cos(2n\pi+\frac{\pi}{2})$ converge vers 0. Ainsi, $(g(u_n))$ converge vers 1 et $(g(v_n))$ converge vers 0. g n'admet pas de limite en 0 et elle n'est donc pas continue en ce point.

Exercice 8:

$$g(x) = \frac{x\log x}{x-1}.$$

1. prolongement par continuité en 0 et 1.
   $\lim_{x\to 0} g(x) = \lim_{x\to 0} \frac{x\log x}{x-1} = 0$
   g est prolongeable par continuité en 0.
   $\lim_{x\to 1} g(x) = \lim_{x\to 1} \frac{x\log x}{x-1} = 1$.
   g est prolongeable par continuité en 1.
2. $$f(x) = (1-x^2)\log(\frac{1+x}{1-x}).$$
   a) f est continue sur $]-1,1[$ comme produit et composée de fonctions continues.

   b) $f(-x) = (1-x^2)\log(\frac{1-x}{1+x}) = -(1-x^2)\log(\frac{1+x}{1-x}) = -f(x)$.
   Don f est impaire.

   c) $\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} (1-x^2)\log(\frac{1+x}{1-x}) = 0$
   Comme f est impaire donc $\lim_{x\to -1} f(x) = 0$, et par suite f est prolongeable par continuité en 1 et -1.

Exercice 9:

$$f(x) = \frac{x}{1+|x|}, \quad Df = \mathbb{R}.$$

$f(-x) = \frac{-x}{1+|-x|} = -f(x)$, donc f est impaire.
Pour $x \geq 0$, $f(x) = \frac{x}{1+x}$.

1. f est continue sur $[0,+\infty[$ comme quotient de deux fonctions continues, donc elle est continue sur tout $\mathbb{R}$.

2. Montrons que f est strictement croissante, en effet Soient $x, y \in [0,+\infty[$ tel que $x < y$
   $$f(x) - f(y) = \frac{x-y}{(1+x)(1+y)} < 0 \Longrightarrow f(x) < f(y),$$
   et par suite f est strictement croissante. Comme f est continue sur $[0,+\infty[$ et strictement croissante sur $[0,+\infty[$, donc elle est de même sur $\mathbb{R}$. Ainsi f est bijective de $\mathbb{R}$ sur $f(\mathbb{R}) =]-1,1[$.
   Soit $y \in]-1,1[$ telque $f(x) = y$,
   $$\Longrightarrow \frac{x}{1+|x|} = y$$

et donc x et y sont de même signe.

$$\begin{aligned} f^{-1} :]-1,1[&\longrightarrow \mathbb{R} \\ y &\longmapsto \frac{y}{1-|y|} \end{aligned}$$

.

Exercice 10:

1. $f : [a,b] \longrightarrow [a,b]$.
   Soit $g(x) = f(x) - x$. g est continue sur $[a,b]$.
   $g(a)g(b) \leq 0$, alors d'après T.V.I, il existe $c \in [a,b]$ tel que $g(c) = 0$ et donc $f(c) = c$.

2. f est contractante et donc elle est uniformément continue.
   Soit $\epsilon > 0$, pour $\eta = \frac{\epsilon}{k}$, on a $\forall x, y \in [a,b]$
   $$\text{si } |x-y| < \eta \Longrightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon$$
   et donc f est uniformément continue, et par conséquent elle admet un point fixe.
   Unicité du point fixe :
   Supposons qu'il existe deux points fixes x_1 et x_2 dans $[a,b]$ avec $x_1 \neq x_2$ ainsi on a
   $$\begin{aligned} |f(x_1) - f(x_2)| &\leq k|x_1 - x_2| < |x_1 - x_2| \\ &\Longrightarrow |x_1 - x_2| < |x_1 - x_2| \quad \text{absurde} \end{aligned}$$
   d'où l'unicité du point fixe.

Exercice 11:

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} f(x) = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} (a \sin x + \cos x) = a,$$

f est continue en $\frac{\pi}{2}$ si et seulement si $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} f(x) = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^+} f(x) = f(\frac{\pi}{2})$, ce qui donne $a = \frac{\pi}{2}$.

$$\lim_{x \to \pi^+} f(x) = \lim_{x \to \pi^+} (\frac{x^2}{2} + b) = \frac{\pi^2}{2} + b,$$

f est continue en π si et seulement si $\lim_{x \to \pi^-} f(x) = \lim_{x \to \pi^+} f(x) = f(\pi)$, ce qui donne $b = -\frac{\pi^2}{2}$, et par conséquent f est continue sur $\mathbb{R}$ si $a = \frac{\pi}{2}$ et $b = -\frac{\pi^2}{2}$.

Exercice 12:

1. Montrons qu'il existe $a > 0$ tel que si $|x| > a$, alors $|f(x)| \leq \frac{1}{2}$.
   On a
   $$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0 \Longleftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists a_1 > 0 / \ \forall x \geq a_1, \ |f(x)| \leq \epsilon,$$
   et
   $$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0 \Longleftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists a_2 < 0 / \ \forall x \leq a_2, \ |f(x)| \leq \epsilon,$$
   en particulier pour $\epsilon = \frac{1}{2}$ et $a = \sup(a_1, |a_2|)$, on a
   $$\forall |x| > a, \quad |f(x)| \leq \frac{1}{2}.$$

2. Pour $|x| > a, \quad |f(x)| \leq \frac{1}{2}$, et $f(0) = 1$, alors $\sup f$ sera atteint sur $[-a, a]$, et comme f est continue alors

$$\exists x_0 \in [-a, a]/ \quad f(x_0) = \sup f(x),\ x \in [-a, a].$$

Exercice 13:

1. f est décroissante donc possède une limite l en $+\infty$.
   Quand $x \to +\infty$, $f(x) \to l$ et $f(x+1) \to l$ alors $f(x) + f(x+1) \to 2l$.
   Or on a : $f(x) + f(x+1) \sim \frac{1}{x} \to 0$ alors $l = 0$.
2. Quand $x \to +\infty$, $f(x) + f(x+1) \leq 2f(x) \leq f(x) + f(x-1)$ donc $2f(x) \sim \frac{1}{x}$ puis $f(x) \sim \frac{1}{2x}$.

7.14 Dérivabilité

Exercice 1:

On a

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{x}{1+x}}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{1+x} = 1$$

et aussi

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{\frac{x}{1-x}}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{1-x} = 1$$

d'où f est dérivable en 0.

Exercice 2:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \begin{cases} e^x & \text{si } x < 0 \\ ax^2 + bx + c & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Continuité de f en 0 :

$$f \text{ est continue en } 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^-} f(x) \Longleftrightarrow c = 1.$$

D'autres part, f est continue sur$\mathbb{R}^*$.
Dérivabilité de f en 0 :

$$f \text{ est dérivable en } 0 \Longleftrightarrow \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} \Longleftrightarrow b = 1.$$

f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$.
Continuité de f' en 0 :
on a

$$f'(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \\ 2ax + 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

ainsi, f' est continue en 0(facile à voir).
Dérivabilité de f' en 0 :

$$f' \text{ est dérivable en } \ 0 \Longleftrightarrow \lim_{x\to 0^+} \frac{f'(x)-f'(0)}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{f'(x)-f'(0)}{x} \Longleftrightarrow a = \frac{1}{2}.$$

Ainsi, pour $a=\frac{1}{2}, \equiv c = 1$, f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

<u>Exercice 3:</u> On a

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{2h} + \frac{f(x_0)-f(x_0-h)}{2h}.$$

Or

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{2h} = \frac{1}{2} f'(x_0) \quad \text{et} \quad \begin{aligned} \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0)-f(x_0-h)}{2h} &= \lim_{h'\to 0} \frac{f(x_0+h')-f(x_0))}{2h'} \\ &= \frac{1}{2} f'(x_0). \end{aligned}$$

Donc $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h} = f'(x_0)$.

La réciproque est fausse en effet il suffit de prendre $f(x)=|x|$ et $x_0=0$ et dans ce cas on a

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h} = \lim_{h\to 0} \frac{|h|-|h|}{2h} = 0$$

alors que f n'est pas dérivable en 0.

<u>Exercice 4:</u> On a

$$\begin{aligned} \lim_{x\to x_0} \frac{xf(x_0)-x_0 f(x)}{x-x_0} &= \lim_{x\to x_0} \frac{xf(x_0)-xf(x)+xf(x)-x_0 f(x)}{x-x_0} \\ &= \lim_{x\to x_0} \frac{x(f(x_0)-f(x))}{x-x_0} + \frac{f(x)(x-x_0)}{x-x_0} = f(x_0)-x_0 f'(x_0). \end{aligned}$$

<u>Exercice 5:</u>

On a

$$\begin{aligned} \lim_{h\to 0} \frac{f^2(x+3h)-f^2(x-h)}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{f^2(x+3h)-f^2(x)+f^2(x)-f^2(x-h)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{f^2(x+3h)-f^2(x)}{h} + \frac{f^2(x)-f^2(x-h)}{h} \end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned} \lim_{h\to 0} \frac{f^2(x+3h)-f^2(x)}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{3(f^2(x+3h)-f^2(x))}{3h} = \lim_{h'\to 0} \frac{3(f^2(x+h')-f^2(x))}{h'} \\ &= 3(f^2)'(x) = 6f'(x)f(x), \end{aligned}$$

et

$$\lim_{h\to 0} \frac{f^2(x-h)-f^2(x)}{h} = \lim_{h'\to 0} \frac{-(f^2(x+h')-f^2(x))}{h'} = (f^2)'(x) = -2f'(x)f(x).$$

D'où on obtient

$$\lim_{h\to 0} \frac{f^2(x+3h)-f^2(x-h)}{h} = 4f'(x)f(x).$$

Exercice 6:

La fonction g est continue sur l'intervalle $[0,\dfrac{1}{2}[$ comme composée de deux fonctions continues qui sont f et $x\longmapsto 2x$ de même g est continue sur l'intervalle $]\dfrac{1}{2},1]$ comme composée de deux fonctions continues qui sont f et $x\longmapsto 2x-1$. De plus on a

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}^-} g(x)=\lim_{x\to\frac{1}{2}^-} f(2x)=f(1) \quad \text{et} \quad \lim_{x\to\frac{1}{2}^+} g(x)=\lim_{x\to\frac{1}{2}^+} f(2x-1)=f(0),$$

et comme $f(0)=f(1)$ alors f est continue en 1 d'où g est continue sur l'intervalle $[0,1]$.

La fonction g est dérivable sur l'intervalle $[0,\dfrac{1}{2}[$ comme composée de deux fonctions dérivabes qui sont f et $x\longmapsto 2x$ de même g est dérivable sur l'intervalle $]\dfrac{1}{2},1]$ comme composée de deux fonctions dérivables qui sont f et $x\longmapsto 2x-1$. On a

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}^-}\frac{g(x)-g(\frac{1}{2})}{x-\frac{1}{2}}=\lim_{x\to\frac{1}{2}^-}\frac{f(2x)-f(2.\frac{1}{2})}{x-\frac{1}{2}}=(f(2\,.\,))'(\frac{1}{2})=2f(1)$$

et aussi

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}^+}\frac{g(x)-g(\frac{1}{2})}{x-\frac{1}{2}}=\lim_{x\to\frac{1}{2}^+}\frac{f(2x-1)-f(2.\frac{1}{2}-1)}{x-\frac{1}{2}}=(f(2\,.\,-1))'(\frac{1}{2})=2f(0),$$

donc g est dérivable sur $[0,1]$ ssi $f'(0)=f'(1)$.

Exercice 7:

Il est clair que g est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et on a

$$g'(x)=2x\sin(\frac{1}{x})-\cos(\frac{1}{x}),\quad \forall\, x\in\mathbb{R}^*.$$

On a

$$\lim_{x\to 0}\frac{g(x)-g(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0} x\sin(\frac{1}{x})=0$$

D'où g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a

$$g'(x)=\begin{cases} 2x\sin(\frac{1}{x})-\cos(\frac{1}{x}) & \text{si } x\neq 0\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$$

Or $\lim\limits_{x\to 0} g'(x)$ n'existe pas en effet on pose les deux suites $u_n=\dfrac{1}{2n\pi}$ et $v_n=\dfrac{1}{\frac{\pi}{2}+2n\pi}$ qui tendent tous les deux vers 0 mais $\lim\limits_{n\to+\infty} g'(u_n)=-1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} g'(v_n)=0$. D'où g' n'est pas continue en 0 et par suite g n'est pas de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 8:

On pose la fonction

$$\varphi(x)=(f(b)-f(a)).g(x)-(g(b)-g(a)).f(x),$$

qui est dérivable sur $]a,b[$ et continue sur $[a,b]$, de plus on a

$$\varphi(a)=\varphi(b)=f(b).g(a)-f(a).g(b).$$

Donc d'après le théoreme de Rolle $\exists\, c \in]a,b[$ tel que $\varphi'(c) = 0$ c'est à dire $\exists\, c \in]a,b[$ tel que $(f(b)-f(a)).g'(c) - (g(b)-g(a)).f'(c) = 0$ donc $\exists\, c \in]a,b[$ tel que $(f(b)-f(a)).g'(c) = (g(b)-g(a)).f'(c)$.

Exercice 9: La formule de Taylor appliquée sur f donne

$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!}f''(c),$$

Pour $x = 0 \quad$ et $a = \frac{1}{2}$, on a

$$f(0) = f(\frac{1}{2}) - \frac{1}{2}f'(\frac{1}{2}) + \frac{1}{8}f''(c),$$

Pour $x = 1 \quad$ et $a = \frac{1}{2}$, on a

$$f(1) = f(\frac{1}{2}) + \frac{1}{2}f'(\frac{1}{2}) + \frac{1}{8}f''(\alpha),$$

et donc

$$f(0) + f(1) = 2f(\frac{1}{2}) + \frac{1}{8}(f''(c) + f''(\alpha)).$$

$$\Longrightarrow |f(0) + f(1) - 2f(\frac{1}{2})| = \frac{1}{8}|f''(c) + f''(\alpha)| \leq \frac{1}{4}.$$

Exercice 10:

1. Le théorème des accroissements finis appliqué à la fonction f sur $[x,y] \subset [a,b]$ donne l'existence de $c \in]x,y[$ tel que

$$\begin{aligned} f(y) - f(x) = (y-x)f'(c) &\Longrightarrow |f(y) - f(x)| = |y-x||f'(c)| \\ &\Longrightarrow |f(y) - f(x)| \leq k|y-x| \quad (\text{car } |f'(c)| \leq k) \end{aligned}$$

2. Soit $f : [a,b] \longrightarrow [a,b]$ une fonction continue et $g(x) = f(x) - x$.

$$g \text{ est continue sur } [a,b],\ g(a)g(b) \leq 0 \Longrightarrow \text{Par T.V.I } \exists\, \alpha \in]a,b[\quad \text{tel que } g(\alpha) = 0,$$

et par suite $f(\alpha) = \alpha$, ainsi f admet un point fixe.
Unicité : Supposons qu'il existe $\alpha_1, \alpha_2 \in]a,b[,\ \alpha_1 \neq \alpha_2$ tel que

$$f(\alpha_1) = \alpha_1 \quad \text{et} \quad f(\alpha_2) = \alpha_2$$

$$\Longrightarrow |f(\alpha_1) - f(\alpha_2)| \leq k|\alpha_1 - \alpha_2| < |\alpha_1 - \alpha_2|$$

$$\Longrightarrow |\alpha_1 - \alpha_2| < |\alpha_1 - \alpha_2| \quad \text{absurde}$$

d'où l'unicité du point fixe.

3. Soit $(u_n)_n$ la suite définit par

$$\left\{ \begin{array}{c} u_0 \in [a,b] \\ u_{n+1} = f(u_n), \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \end{array} \right. .$$

On démontre par récurrence que $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n \in [a,b]$.
Appliquons l'inégalité du 1) à $x = u_{n-1} \quad$ et $y = \alpha$ on obtient

$$|f(u_{n-1}) - f(\alpha)| \leq k|u_{n-1} - \alpha| \leq k^2|u_{n-2} - \alpha| \leq \ldots \leq k^n|u_0 - \alpha|,$$

et comme $k < 1$ alors $|u_n - \alpha| \longrightarrow 0, n \longrightarrow +\infty$ et donc

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = \alpha.$$

Exercice 11:

Comme f est de classe $\mathcal{C}^3$ sur $[a,b]$, alors la formule de Taylor donne l'existence d'un $c_1 \in]\frac{a+b}{2}, b[$ tel que :

$$f(b) = f(\frac{a+b}{2}) + \frac{b-a}{2} f'(\frac{a+b}{2}) + \frac{(b-a)^2}{8} f''(\frac{a+b}{2}) + \frac{(b-a)^3}{48} f'''(c_1),$$

de même $\exists\, c_2 \in]a, \frac{a+b}{2}[$ tel que

$$f(a) = f(\frac{a+b}{2}) - \frac{b-a}{2} f'(\frac{a+b}{2}) + \frac{(b-a)^2}{8} f''(\frac{a+b}{2}) + \frac{(b-a)^3}{48} f'''(c_2),$$

ce qui donne

$$f(b) = f(a) + (b-a) f'(\frac{a+b}{2}) + \frac{(b-a)^3}{48} \frac{f'''(c_1) + f'''(c_2)}{2}$$

et par le théorème des valeurs intermidiaires, il existe C entre c_1 et c_2 tel que $\frac{f'''(c_1)+f'''(c_2)}{2} = f'''(C)$ et par suite

$$f(b) = f(a) + (b-a) f'(\frac{a+b}{2}) + \frac{(b-a)^3}{48} f'''(C).$$

Exercice 12: $\lim_{x\to 0} \frac{f(2x)-f(x)}{x} = 0$ équivaut à

$$\begin{aligned}
\forall\, \epsilon > 0,\ \exists \alpha > 0 \text{ tel que} \forall\, x \in]-\alpha, \alpha[\ & |\frac{f(2x)-f(x)}{x}| \le \epsilon \\
& |f(2x) - f(x)| \le \epsilon |x| \\
& |f(x) - f(\frac{x}{2})| \le \epsilon |\frac{x}{2}| \\
& |f(\frac{x}{2}) - f(\frac{x}{4})| \le \epsilon |\frac{x}{4}| \\
& |f(\frac{x}{2^n}) - f(\frac{x}{2^{n+1}})| \le \epsilon |\frac{x}{2^{n+1}}|
\end{aligned}$$

et par l'inégalité triangulaire, on obtient

$$\begin{aligned}
|f(x) - f(\frac{x}{2^{n+1}})| & \le |f(x) - f(\frac{x}{2})| + f(\frac{x}{2}) - f(\frac{x}{4})| + \ldots + |f(\frac{x}{2^n}) - f(\frac{x}{2^{n+1}})| \\
& \le \epsilon |\frac{x}{2}| + \epsilon |\frac{x}{4}| + \ldots + \epsilon |\frac{x}{2^{n+1}}| \\
& \le \epsilon |x| (\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2^{n+1}}) \le \epsilon |x|
\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow |f(x) - f(\frac{x}{2^{n+1}})| \le \epsilon |x|,$$

on fait tendre $n \longrightarrow +\infty$ et on utilise la continuité de f en 0 on obtient

$$|f(x) - f(0)| \le \epsilon |x| \Longrightarrow |\frac{f(x)-f(0)}{x}| \le \epsilon$$

et par suite f est dérivable en 0.

7.15 Développements limités

Exercice 1:

a)

$$\begin{aligned}
\frac{\sin(x)-1}{\cos(x)+1} &= \frac{-1+x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)}{1+\underbrace{\frac{x^2}{2}+o(x^2)}_{u}} = (-1+x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)).(1-u+u^2-u^3+o(u^3)) \\
&= (-1+x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)).(1-\frac{x^2}{2}+o(x^3)) = -1+x+\frac{x^2}{2}-\frac{2}{3}x^3+o(x^3).
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
\sqrt{1+\sin(x)} &= \sqrt{1+\underbrace{x+\frac{x^3}{6}+o(x^3)}_{u}} = 1+\frac{1}{2}u-\frac{1}{8}u^2+\frac{1}{16}u^3+o(u^3) \\
&= 1+\frac{1}{2}(x+\frac{x^3}{6})-\frac{1}{8}(x+\frac{x^3}{6})^2+\frac{1}{16}(x+\frac{x^3}{6})^3+o(x^3) \\
&= 1+\frac{1}{2}x-\frac{x^2}{8}+\frac{7}{48}x^3+o(x^3).
\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1+\ln(1+x)} &= \frac{1}{1+\underbrace{x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+o(x^3)}_{u}} = 1-u+u^2-u^3+o(u^3) \\
&= 1-(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3})+(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3})^2-(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3})^3+o(x^3) \\
&= 1-x+\frac{3}{2}x^2-\frac{10}{3}x^3+o(x^3).
\end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned}
\frac{\exp(\arctan(x))}{1+x^2} &= \frac{\exp(\overbrace{x-\frac{x^3}{3}+o(x^3)}^{u})}{1+x^2} = \frac{1+u+\frac{u^2}{2}+\frac{u^3}{6}+o(u^3)}{1+x^2} \\
&= \frac{1+(x-\frac{x^3}{3})+\frac{(x-\frac{x^3}{3})^2}{2}+\frac{(x-\frac{x^3}{3})^3}{6}+o(x^3)}{1+x^2} \\
&= (1+x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6}+o(x^3)).(1-x^2+o(x^3)) \\
&= 1+x-\frac{x^2}{2}-\frac{7}{6}x^3+o(x^3).
\end{aligned}$$

e)

$$\begin{aligned}
\ln(2+\sin(x)) &= \ln(2+x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)) = \ln(2)+\ln(1+\underbrace{\frac{x}{2}-\frac{x^3}{12}+o(x^3)}_{u}) \\
&= \ln(2)+u-\frac{u^2}{2}+\frac{u^3}{3}+o(u^3) \\
&= \ln(2)+(\frac{x}{2}-\frac{x^3}{12})-\frac{(\frac{x}{2}-\frac{x^3}{12}))^2}{2}+\frac{(\frac{x}{2}-\frac{x^3}{12})^3}{3}+o(x^3) \\
&= \ln(2)+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}-\frac{x^3}{24}+o(x^3).
\end{aligned}$$

f)

$$\begin{aligned}
\frac{x-\sin(x)}{1-\cos(x)} &= \frac{x-(x-\frac{x^6}{6}+\frac{x^5}{120})+o(x^5)}{1-(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^5))} = \frac{\frac{x}{3}-\frac{x^3}{60}+o(x^3)}{1-\underbrace{\frac{x^2}{12}+o(x^3)}_{u}} \\
&= (\frac{x}{3}-\frac{x^3}{60}+o(x^3)).(1+u+u^2+u^3+o(u^3)) \\
&= (\frac{x}{3}-\frac{x^3}{60}+o(x^3)).(1+\frac{x^2}{12}+o(x^3)) = \frac{x}{3}+\frac{x^3}{90}+o(x^3)
\end{aligned}$$

g)

$$\begin{aligned}
\frac{x\mathrm{ch}(x)-\mathrm{sh}}{\mathrm{ch}(x)-1} &= \frac{x(1+\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^4))-(x+\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}+o(x^5))}{1+\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^4)-1} \\
&= \frac{\frac{2}{3}x+\frac{1}{15}x^3+o(x^3)}{1+\underbrace{\frac{x^2}{12}+o(x^3)}_{u}} = (\frac{2}{3}x+\frac{1}{15}x^3+o(x^3)).(1-u+u^2-u^3+o(u^3)) \\
&= (\frac{2}{3}x+\frac{1}{15}x^3+o(x^3)).(1-\frac{x^2}{12}+o(x^3)) = \frac{2}{3}x+\frac{x^3}{90}+o(x^3).
\end{aligned}$$

h)

$$\begin{aligned}
\exp(\cos(2x)) &= \exp(1\underbrace{-2x^2+o(x^3)}_{u}) = \mathrm{e}(1+u+\frac{u^2}{2}+\frac{u^2}{6}+o(u^3)) \\
&= \mathrm{e}(1-2x^2+o(x^3)) = \mathrm{e}-2\mathrm{e}x^2+o(x^3).
\end{aligned}$$

Exercice 2:

a)

$$\begin{aligned}
\exp(x) &= \exp((x-1)+1) = \mathrm{e}(\exp(\underbrace{x-1}_{u})) = \mathrm{e}(1+u+\frac{u^2}{2}+\frac{u^3}{6}+o(u^3)) \\
&= \mathrm{e}+\mathrm{e}(x-1)+\frac{\mathrm{e}}{2}(x-1)^2+\frac{\mathrm{e}}{6}(x-1)^3+o((x-1)^3))
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x}} &= \sqrt{1+\underbrace{\frac{2}{x}}_{u}} = 1+\frac{1}{2}u-\frac{1}{8}u^2+\frac{1}{16}u^3+o(u^3)\\ &= 1+\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}+\frac{1}{2x^3}+o(x^{-3}).\end{aligned}$$

c)

$$\frac{\ln(x)}{x}=\frac{\ln((x-3)+3)}{(x-3+3)}=\frac{\ln\left(3\left(1+\overbrace{\frac{x-3}{3}}^{u}\right)\right)}{3\left(1+\underbrace{\frac{x-3}{3}}_{u}\right)}=\frac{\ln(3)+\ln\left(1+\left(\overbrace{\frac{x-3}{3}}^{u}\right)\right)}{3\left(1+\underbrace{\frac{x-3}{3}}_{u}\right)}$$

$$\begin{aligned}&=(\ln(3)+u-\frac{u^2}{2}+\frac{u^3}{3}+o(u^3)).(1-u+u^2-u^3+o(u^3))\\ &=\ln(3)+(1-\ln(3))u+(\ln(3)-\frac{3}{2})u^2+(\frac{11}{6}-\ln(3))u^3+o(u^3)\\ &=\ln(3)+\frac{(1-\ln(3))}{3}(x-3)+(\frac{\ln(3)}{9}-\frac{1}{6})(x-3)^2+(\frac{11}{6}-\frac{\ln(3)}{162})(x-3)^3+o((x-3)^3)\end{aligned}$$

<u>Exercice 3:</u>

a)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\exp(x)-x-1}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1+x+\frac{x^2}{2}+o(x^2)-x-1}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2}+o(1)=\frac{1}{2}.$$

b)

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin(x)}{\tan(x)-2x}=\lim_{x\to 0}\frac{x-x+o(x^2)}{x+o(x^2)-2x}=\lim_{x\to 0}\frac{o(x)}{-1+o(x)}=0.$$

c)

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\cos(x)+\sin(x)-\sqrt{2}}{(x-\frac{\pi}{4})^2}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\cos((x-\frac{\pi}{4})+\frac{\pi}{4})+\sin((x-\frac{\pi}{4})+\frac{\pi}{4})-\sqrt{2}}{(x-\frac{\pi}{4})^2}=$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sqrt{2}\cos(x-\frac{\pi}{4})-\sqrt{2}}{(x-\frac{\pi}{4})^2}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sqrt{2}(1-(x-\frac{\pi}{4})^2+o((x-\frac{\pi}{4})^2))-\sqrt{2}}{(x-\frac{\pi}{4})^2}=\frac{-1}{2}$$

<u>Exercice 4:</u>

a) $f(x)=\exp(x)-\frac{x^2}{2}=1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+o(x^3)-\frac{x^2}{2}=1+x+\frac{x^3}{3}+o(x^3)$.
Donc l'équation de la tangente est $T: y=x+1$. La courbe $\mathcal{C}_f$ en dessus de la tangente T près de 0^+ et $\mathcal{C}_f$ en dessous de la tangente T près de 0^-.

b) $f(x)=(\arcsin(x))^2-x^2=(x-\frac{x^3}{6}+o(x^3))^2-x=-x+x^2+o(x^3)$
Donc l'équation de la tangente est $T: y=-x$. La courbe $\mathcal{C}_f$ en dessus de la tangente T au

voisinage de 0.

Exercice 5:

1)

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x} = \frac{x - \ln(x)}{x\ln(x)} = \frac{x - (x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o(x^4))}{x(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3))} \\ &= \frac{\frac{1}{2} - \frac{x}{3} + \frac{x^2}{4} + o(x^2)}{1 \underbrace{- \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + o(x^2)}_{u}} = (\frac{1}{2} - \frac{x}{3} + \frac{x^2}{4} + o(x^2)).(1 - u + u^2 + o(u^2)) \\ &= (\frac{1}{2} - \frac{x}{3} + \frac{x^2}{4} + o(x^2)).(1 - \frac{x}{2} + \frac{11}{12}x^2 + o(x^2)) = \frac{1}{2} - \frac{7}{12}x + \frac{7}{8}x^2 + o(x^2). \end{aligned}$$

2) On a $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{2} - \frac{7}{12}x + \frac{7}{8}x^2 + o(x^2) = \frac{1}{2}$. Donc f est prolongeable par continuité en 0 qui est donné par

$$g(x) = \begin{cases} f(x) = \frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x} & \text{si } x \in]-1,0[\cup]0,+\infty[\\ \frac{1}{2} & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

3) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{-\frac{7}{12}x + \frac{7}{8}x^2 + o(x^2)}{x} = \lim\limits_{x\to 0} -\dfrac{7}{12} + \dfrac{7}{8}x + o(x) = \dfrac{-7}{12}$.
Donc g est dérivable en 0.

4) La courbe $\mathcal{C}_g$ est au dessus de la tangente $\Delta : y = -\frac{7}{12}x + \frac{1}{2}$ de $\mathcal{C}_g$ au point 0

Exercice 6:

a)

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\sqrt{1 + x^2 + x^4}}{1 + x^2} = \frac{\sqrt{1 + \overbrace{\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^4}}^{u}}}{1 + \underbrace{\frac{1}{x^2}}_{v}} = (1 + \frac{1}{2}u - \frac{1}{8}u^2 + o(u^2)).(1 - v + v^2 + o(v^2)) \\ &= (1 + \frac{1}{2x^2} + o(x^{-2})).(1 - \frac{1}{x^2} + o(x^{-2})) = 1 - \frac{1}{2x^2} + o(x^{-2}) \end{aligned}$$

Alors la courbe $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote horizontale au voisinage de $+\infty$ et $-\infty$ d'équation $\Delta : y = 1$.

b)

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2(1 + \frac{1}{x})^{1+x} = x^2\exp((1+x)\ln(1 + \frac{1}{x})) = x^2\exp((1+x)(\frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{3x^3} + o(x^{-3}))) \\ &= x^2\exp(1 + \frac{1}{2x} - \frac{1}{6x^2} + o(x^{-2})) = \mathrm{e}x^2\exp(\overbrace{\frac{1}{2x} - \frac{1}{6x^2} + o(x^{-2})}^{u}) \\ &= \mathrm{e}x^2(1 + u + \frac{u^2}{2} + o(u^2)) = \mathrm{e}x^2(1 + \frac{1}{2x} - \frac{1}{6x^2} + \frac{1}{8x^2} + o(x^{-2})) = \mathrm{e}x^2 + \frac{\mathrm{e}}{2}x - \frac{1}{12} + o(1) \end{aligned}$$

Alors f n'admet pas d'asymptotes au voisinage de $+\infty$ et $-\infty$.

Exercice 7:

1. $f(x) = \frac{2x^2}{e^x - e^{-x}} = x - \frac{x^3}{6} + x^3\varepsilon(x), \quad f(0) = 0.$
2. f admet un développement limité à l'ordre 3 au voisinage de 0, alors $\lim_{x\to 0} f(x) = 0 = f(0)$, donc f est continue en 0, dérivable en 0 et $f'(0) = 1$.
3. Comme $f(x) - x = -\frac{x^3}{6} + x^3\varepsilon(x) \longrightarrow 0$ quad $x \longrightarrow 0$, alors $T : y = x$ est la tangente à la courbe de f au point 0, cituée au dessus d'elle à gauche de 0 et au dessous à droite de 0.

Exercice 8:

1. Le développement de f au voisinage de 0 est donné par
$$f(x) = x - \frac{x^3}{6} + x^3\varepsilon(x).$$
2. On a $f(x) - x = -\frac{x^3}{6} + x^3\varepsilon(x) \longrightarrow 0$, $x \longrightarrow 0$ et donc $T : y = x$ est la tangente à la courbe de f au point 0 cituée au dessus d'elle au voisinage de ce point.

7.16 Integrales et primitives

Exercice 1:

Si $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geq 0$, on pose $g(x) = |f(x)| - f(x)$, donc on a $\displaystyle\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x = 0$ et comme g est continue sur $[a,b]$ alors $g \equiv 0 \iff |f(x)| = f(x)\ \forall\, x \in [a,b]$, d'où f est positive sur $[a,b]$.

Si $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq 0$, on pose $g(x) = |f(x)| + f(x)$, donc on a $\displaystyle\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x = 0$ et comme g est continue sur $[a,b]$ alors $g \equiv 0 \iff |f(x)| = -f(x)\ \forall\, x \in [a,b]$, d'où f est negative sur $[a,b]$.

D'où f garde un signe constant sur $[a,b]$.

Exercice 2:

1) $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-a}^0 f(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x$

On pose $y = -x \Rightarrow \mathrm{d}x = -\mathrm{d}y$ alors on obtient

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_a^0 f(-y)\,\mathrm{d}y + \int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^0 f(y)\,\mathrm{d}y + \int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

2) $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-a}^0 f(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x$

On pose $y = -x \Rightarrow \mathrm{d}x = -\mathrm{d}y$ alors on obtient

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_a^0 f(-y)\,\mathrm{d}y + \int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^a f(y)\,\mathrm{d}y + \int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x.$$

3) $\displaystyle\int_\alpha^{\alpha+T} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_\alpha^0 f(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^T f(x)\,\mathrm{d}x + \int_T^{\alpha+T} f(x)\,\mathrm{d}x$

On pose $y = x - T \Rightarrow \mathrm{d}x = \mathrm{d}y$ comme f est T-periodique alors on obtient

$$\int_\alpha^{\alpha+T} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_\alpha^0 f(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^T f(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^\alpha f(y+T)\,\mathrm{d}y = \int_0^T f(x)\,\mathrm{d}x.$$

4) La fonction $x \longmapsto \dfrac{\sin(2x)}{1+\cos^7(2x)}$ est impaire alors $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin(2x)}{1+\cos^7(2x)}\,\mathrm{d}x = 0.$

Exercice 3:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n^4}\sum_{k=1}^{n}k^3=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^3=\int_0^1 x^3\,\mathrm{d}x=\frac{1}{4}.$$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sin(\frac{k\pi}{n})=\int_0^1\sin(\pi x)\,\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}.$$

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}k\cos(\frac{k\pi}{n}) &= \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}\cos(\frac{k\pi}{n})=\int_0^1 x\cos(\pi x)\,\mathrm{d}x\\ &= [\frac{x}{\pi}\sin(\pi x)]_0^1-\frac{1}{\pi}\int_0^1\sin(\pi x)\,\mathrm{d}x=\frac{-2}{\pi^2}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{\sqrt{n^2+k^2}} &= \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{k^2}{n^2}}}=\int_0^1\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x=\operatorname{arcsin}(1)\\ &= \ln(1+\sqrt{2}).\end{aligned}$$

$$\lim_{n\to+\infty}n\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{n^2+k^2}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{1+\frac{k^2}{n^2}}=\int_0^1\frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x=\arctan(1)=\frac{\pi}{4}.$$

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{\operatorname{ch}(\frac{k}{n})}{n}=\int_0^1\operatorname{ch}(x)\,\mathrm{d}x=\operatorname{sh}(1).$$

Exercice 5:

a) $\displaystyle\int\frac{t}{t^2+4}=\frac{1}{2}\int\frac{2t}{t^2+4}=\frac{1}{2}\ln(t^2+4)+c.$

b) $\displaystyle I=\int\frac{2t+3}{t^2+t+1}\,\mathrm{d}t=\int\frac{2t+1}{t^2+t+1}\,\mathrm{d}t+\int\frac{2\,\mathrm{d}t}{t^2+t+1}=\ln(t^2+t+1)+\int\frac{\frac{8}{3}\,\mathrm{d}t}{(\frac{2t}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}})^2+1}$

$x=\frac{2t}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}}\implies \mathrm{d}x=\frac{2\,\mathrm{d}t}{\sqrt{3}}.$

$\displaystyle I=\ln(t^2+t+1)+\frac{4\sqrt{3}}{3}\arctan(x)+c=\ln(t^2+t+1)+\frac{4\sqrt{3}}{3}\arctan(\frac{2t}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}})+c.$

c) On a $\displaystyle\frac{7t+1}{t^3+1}=\frac{2}{(t+1)}+\frac{4t-1}{t^2-t+1}$ alors on obtient

$\displaystyle I{=}\int\frac{7t+1}{t^3+1}\,\mathrm{d}t=\int\frac{2\,\mathrm{d}t}{(t+1)}+\int\frac{4t-1}{t^2-t+1}\,\mathrm{d}t=2\ln|t+1|+2\int\frac{2t-1}{t^2-t+1}\,\mathrm{d}t+\int\frac{\mathrm{d}t}{t^2-t+1}$

$\displaystyle =2\ln|t+1|+2\ln(t^2-t+1)+\frac{4}{3}\int\frac{\mathrm{d}t}{(\frac{2t}{\sqrt{3}}-1)^2+1}$

$\displaystyle x=\frac{2t}{\sqrt{3}}-1\ \Rightarrow\ \mathrm{d}t=\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{d}x$

$\displaystyle =2\ln(|t+1|(t^2-t+1))+\frac{4\sqrt{3}}{3}\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2+1}=2\ln(|t+1|(t^2-t+1))+\frac{4\sqrt{3}}{3}\arctan(x)+c$

$\displaystyle =2\ln(|t+1|(t^2-t+1))+\frac{4\sqrt{3}}{3}\arctan(\frac{2t}{\sqrt{3}}-1)+c.$

d) $\displaystyle\int \frac{2t+3}{(t^2+3t+5)^2}\,\mathrm{d}t = \frac{-1}{t^2+3t+5} + c.$

Exercice 6:

a)

$$\begin{aligned}
I &= \int \frac{\mathrm{d}t}{\sin(t)+\cos(t)}\\
&\quad u=\tan(\frac{t}{2}) \ \Rightarrow\ \mathrm{d}t = \frac{2\,\mathrm{d}u}{1+u^2},\\
&= \int \frac{2}{\frac{1-u^2}{1+u^2}+\frac{2u}{1+u^2}}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{1+u^2} = \int \frac{2\,\mathrm{d}u}{-u^2+2u+1} = \int \frac{-2\,\mathrm{d}u}{(u-(1+\sqrt{2}))(u-(1-\sqrt{2}))}\\
&= \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\int \frac{\mathrm{d}u}{(u-(1-\sqrt{2}))} - \int \frac{\mathrm{d}u}{(u-(1+\sqrt{2}))}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\ln\left(\frac{|u-(1-\sqrt{2})|}{|u-(1+\sqrt{2})|}\right)+c\\
&= \frac{\sqrt{2}}{2}\ln\left(\frac{|\tan(\frac{t}{2})-(1-\sqrt{2})|}{|\tan(\frac{t}{2})-(1+\sqrt{2})|}\right)+c.
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
I &= \int \frac{\sin(t)+\cos(t)}{\sin(t)\cos^2(t)}\,\mathrm{d}t = \int \frac{\mathrm{d}t}{\cos^2(t)} + \int \frac{\mathrm{d}t}{\sin(t)\cos(t)} = \tan(t) + \int \frac{\sin(t)}{\cos(t)(1-\cos^2(t))}\,\mathrm{d}t\\
&\quad x=\cos(t) \ \Rightarrow\ \mathrm{d}x = -\sin(t)\mathrm{d}t\\
&= \tan(t) + \int \frac{\mathrm{d}x}{x(x^2-1)} = \tan(t) + \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}x}{x+1} + \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}x}{x-1} - \int \frac{\mathrm{d}x}{x}\\
&= \tan(t) + \frac{1}{2}\ln|x+1| + \frac{1}{2}\ln|x-1| - \ln|x| + c = \tan(t) + \ln|\tan(t)| + c.
\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}
I &= \int \cos^3(t) + 2\cos(t)\,\mathrm{d}t = \int \cos(t)(1-\sin^2(t))\,\mathrm{d}t + 2\sin(t)\\
&\quad x=\sin(t) \ \Rightarrow\ \mathrm{d}x = \cos(t)\,\mathrm{d}t\\
&= \int (1-x^2)\,\mathrm{d}x + \sin(t) = x - \frac{1}{3}x^3 + 2\sin(t) + c = \cos(t) + 2\sin(t) - \frac{1}{3}\sin^3(t) + c.
\end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned}
I &= \int \frac{\mathrm{d}t}{\cos(t)\sin^3(t)} = \int \frac{\cos(t)}{\cos^2(t)\sin^3(t)}\,\mathrm{d}t = \int \frac{\cos(t)}{(1-\sin^2(t))\sin^3(t)}\,\mathrm{d}t =\\
&\quad x=\sin(t) \ \Rightarrow\ \mathrm{d}x = \cos(t)\,\mathrm{d}t\\
&= \int \frac{\mathrm{d}x}{(1-x)(1+x)x^3} = \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}x}{1-x} - \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}x}{1+x} + \int \frac{\mathrm{d}x}{x} + \int \frac{\mathrm{d}x}{x^3}\\
&= -\frac{1}{2}(\ln|1-x| + \ln|1+x|) + \ln|x| - \frac{1}{2x^2} + c = \ln|\tan(t)| - \frac{1}{2\sin^2(t)} + c.
\end{aligned}$$

e)

$$\begin{aligned}
I &= \int \frac{\mathrm{d}t}{\sin(t)(1+3\cos(t))} = \int \frac{\sin(t)}{\sin^2(t)(1+3\cos(t))}\,\mathrm{d}t = \int \frac{\sin(t)}{(1-\cos^2(t))(1+3\cos(t))}\,\mathrm{d}t \\
& \quad x=\cos(t) \ \Rightarrow\ \mathrm{d}t = -\sin(t)\,\mathrm{d}x \\
&= \int \frac{\mathrm{d}x}{(x-1)(x+1)(3x+1)} = \frac{1}{6}\int \frac{\mathrm{d}x}{x-1} + \frac{1}{4}\int \frac{\mathrm{d}x}{x+1} - \frac{9}{8}\int \frac{\mathrm{d}x}{3x+1} \\
&= \frac{1}{6}\ln|x-1| + \frac{1}{4}\ln|x+1| - \frac{3}{8}\ln|3x+1| + c \\
&= \frac{1}{6}\ln|\cos(t)-1| + \frac{1}{4}\ln|\cos(t)+1| - \frac{3}{8}\ln|3\cos(t)+1| + c
\end{aligned}$$

Exercice 7:

a) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{ch}(t)}{\mathrm{sh}+\mathrm{ch}(t)}\,\mathrm{d}t = \int \frac{\mathrm{e}^t+\mathrm{e}^{-t}}{2\mathrm{e}^t}\,\mathrm{d}t = \int \frac{1}{2} + \mathrm{e}^{-2t}\mathrm{d}t = \frac{t}{2} - \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2t} + c.$

b)

$$\begin{aligned}
I &= \int \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{sh}(t)\mathrm{ch}(t)} = \int \frac{\mathrm{ch}(t)}{\mathrm{sh}(t)\mathrm{ch}^2(t)}\,\mathrm{d}t = \int \frac{\mathrm{ch}(t)}{\mathrm{sh}(t)(1+\mathrm{sh}^2(t))}\,\mathrm{d}t \\
& \quad x=\mathrm{sh}(t) \ \Rightarrow\ \mathrm{d}x = \mathrm{ch}(t)\,\mathrm{d}t, \\
&= \int \frac{\mathrm{d}x}{x(1+x^2)} = \int \frac{\mathrm{d}x}{x} - \int \frac{x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \ln|x| - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + c \\
&= \ln|\mathrm{sh}(t)| - \frac{1}{2}\ln(\mathrm{ch}(t)) + c.
\end{aligned}$$

c) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{th}(t)+1} = \int \frac{\mathrm{ch}(t)}{\mathrm{sh}+\mathrm{ch}(t)}\,\mathrm{d}t = \frac{t}{2} - \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2t} + c.$

d)

$$\begin{aligned}
I &= \int \mathrm{e}^t\frac{\mathrm{ch}(t)-1}{\mathrm{ch}(t)+1}\,\mathrm{d}t = \int \frac{\mathrm{e}^t+\mathrm{e}^{-t}-2}{\mathrm{e}^t+\mathrm{e}^{-t}-2}\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t = \int \frac{\mathrm{e}^{2t}-2e^t+1}{\mathrm{e}^{2t}+2e^t+1}\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t = \int \frac{(\mathrm{e}^t-1)^2}{(\mathrm{e}^t+1)^2}\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t \\
&= \int \left(1-\frac{2}{\mathrm{e}^t+1}\right)^2 \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t = \int \left(1-\frac{4}{\mathrm{e}^t+1}+\frac{4}{(\mathrm{e}^t+1)^2}\right)\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t \\
& \quad x=\mathrm{e}^t \ \Rightarrow\ \mathrm{d}x = \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t, \\
&= \int \left(1-\frac{4}{x+1}+\frac{4}{(x+1)^2}\right)\mathrm{d}x = x - 4\ln|x+1| - \frac{4}{x+1} + c \\
&= \mathrm{e}^t - 4\ln(\mathrm{e}^t+1) - \frac{4}{\mathrm{e}^t+1} + c.
\end{aligned}$$

Exercice 8:

a)

$$\begin{aligned}
I &= \int \frac{\mathrm{d}t}{t+\sqrt{t-1}} \\
&\quad y=\sqrt{t-1} \;\Rightarrow\; \mathrm{d}t = 2y\,\mathrm{d}y, \\
&= \int \frac{2y\,\mathrm{d}y}{y^2+y+1} = \int \frac{2y+1\,\mathrm{d}y}{y^2+y+1} - \int \frac{\mathrm{d}y}{y^2+y+1} \\
&= \ln(y^2+y+1) - \frac{4}{3}\int \frac{\mathrm{d}y}{(\frac{2}{\sqrt{3}}y+\frac{1}{\sqrt{3}})^2+1} \\
&\quad u = \frac{2}{\sqrt{3}}y + \frac{1}{\sqrt{3}} \;\Rightarrow\; \mathrm{d}u = \frac{\sqrt{3}}{2}\,\mathrm{d}y, \\
&= \ln(y^2+y+1) - \frac{2}{\sqrt{3}}\int \frac{\mathrm{d}u}{u^2+1} = \ln(y^2+y+1) - \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan(u) + c \\
&= \ln(y^2+y+1) - \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan(\frac{2}{\sqrt{3}}y + \frac{1}{\sqrt{3}}) + c \\
&= \ln(t+\sqrt{t-1}) - \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan(\frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{t-1} + \frac{1}{\sqrt{3}}) + c.
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
I &= \int t\sqrt{\frac{t-2}{t+1}}\,\mathrm{d}t \\
&\quad y = \sqrt{\frac{t-2}{t+1}} \;\Rightarrow\; \mathrm{d}t = \frac{-3y}{(y^2-1)^2}\,\mathrm{d}y \\
&= \int \frac{-6y^2(y^2+2)}{(y-1)^3(y+1)^3}\,\mathrm{d}y \\
&= \frac{9}{4}\left(\int \frac{\mathrm{d}y}{y-1} - \int \frac{\mathrm{d}y}{(y-1)^2} - \int \frac{\mathrm{d}y}{(y-1)^3} - \int \frac{\mathrm{d}y}{y+1} + \int \frac{\mathrm{d}y}{(y+1)^2} + \int \frac{\mathrm{d}y}{(y+1)^3}\right) \\
&= \frac{9}{4}\left(\ln\left|\frac{y-1}{y+1}\right| + \frac{2}{y^2-1} + \frac{2y}{(y^2-1)^2}\right) + c \\
&= \frac{9}{4}\left(\ln\left|\frac{\sqrt{\frac{t-2}{t+1}}-1}{\sqrt{\frac{t-2}{t+1}}+1}\right| - \frac{2}{3}(t+1) + \frac{2\sqrt{\frac{t-2}{t+1}}}{(\frac{t-2}{t+1}-1)^2}\right) + c
\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}
I &= \int \frac{t\,\mathrm{d}t}{\sqrt{t^2+2t+2}} = \int \frac{t\,\mathrm{d}t}{\sqrt{(t+1)^2+1}} \\
&\quad t = \mathrm{sh}(x) - 1 \;\Rightarrow\; \mathrm{d}t = \mathrm{ch}(x)\,\mathrm{d}x, \\
&= \int \frac{\mathrm{ch}(x)(\mathrm{sh}(x)-1)}{\sqrt{\mathrm{sh}^2(x)+1}}\,\mathrm{d}x = \int \mathrm{sh}(x) - 1\,\mathrm{d}x = \mathrm{ch}(x) - x + c \\
&= \mathrm{ch}(\arg\mathrm{sh}(t+1)) - \arg\mathrm{sh}(t+1) + c = \sqrt{t^2+2t+2} - \arg\mathrm{sh}(t+1) + c.
\end{aligned}$$

Exercice 9:

1) En faisant le chagement de variable $t = \frac{\pi}{2} - x \Rightarrow \mathrm{d}t = -\mathrm{d}x$ on obtient

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t)\,\mathrm{d}t = -\int_{\frac{\pi}{2}}^0 \sin^n(\frac{\pi}{2} - x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t)\,\mathrm{d}t = I_n.$$

2) $I_0 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^0(t)\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}$ et $I_1 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)\,\mathrm{d}t = [\sin(t)]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$

3)

$$\begin{array}{rcl} I_{n+1} & = & \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+1}(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t).\sin(t)\,\mathrm{d}t \\ & & \begin{array}{ll} u' = \sin(t) & u = -\cos(t) \\ v = \sin^n(t) & v' = n\cos(t)\sin^{n-1}(t) \end{array} \\ & = & -[\cos(t)\sin^n(t)]_0^{\frac{\pi}{2}} + n\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(t)\sin^{n-1}(t)\,\mathrm{d}t = n\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^2(t))\sin^{n-1}(t)\,\mathrm{d}t \\ & = & -n\,I_{n+1} + n\,I_{n-1} \end{array}$$

ce qui donne que $I_{n+1} = \dfrac{n}{n+1} I_{n-1},\ \forall\, n \in \mathbb{N}^*$.

4) Montrons par récurrence que $I_{2p+1} = \dfrac{(2^p p!)^2}{(2p+1)!} I_1$ et $I_{2p} = \dfrac{(2p)!}{(2^p p!)^2} I_0$.
Pour $p = 0$ lapropriété est évidante.
Supposons que pour $p \in \mathbb{N}$ on a $I_{2p+1} = \dfrac{(2^p p!)^2}{(2p+1)!} I_1$ et $I_{2p} = \dfrac{(2p)!}{(2^p p!)^2} I_0$ et montrons que $I_{2p+3} = \dfrac{(2^{p+1}(p+1)!)^2}{(2p+3)!} I_1$ et $I_{2p+2} = \dfrac{(2p+2)!}{(2^{p+1}(p+1)!)^2} I_0$. D'apès laquestion précédente on a

$$\begin{array}{rcl} I_{2p+3} & = & \dfrac{2p+2}{2p+3} I_{2p+1} = \dfrac{(2p+2)^2}{(2p+3)(2p+2)} I_{2p+1} = \dfrac{(2(p+1))^2 (2^p p!)^2}{(2p+3)(2p+2)(2p+1)!} I_1 \\ & = & \dfrac{(2^{p+1}(p+1)!)^2}{(2p+3)!} I_1 \end{array}$$

et aussi

$$\begin{array}{rcl} I_{2p+2} & = & \dfrac{2p+1}{2p+2} I_{2p} = \dfrac{(2p+2)(2p+1)}{(2p+2)^2} I_{2p+1} = \dfrac{(2p+2)(2p+1)(2p)!}{(2(p+1))^2 (2^p p!)^2} I_0 \\ & = & \dfrac{(2p+2)!}{(2^{p+1}(p+1)!)^2} I_0. \end{array}$$

D'où $I_{2p+1} = \dfrac{(2^p p!)^2}{(2p+1)!} I_1$ et $I_{2p} = \dfrac{(2p)!}{(2^p p!)^2} I_0,\ \forall\, p \in \mathbb{N}$.

Bibliographie

[1] A. Bodin et all Ce livre est diffusé sous la licence Creative Commons - BY-NC-SA - 3.0 FR. Sur le site Exo7 vous pouvez le télécharger gratuitement et aussi récupérer les fichiers sources.

[2] J. Dieudonné, Element d'analy se tome 3 Gauthier-Villars(1970).

[3] N. Piskounov, Calcul différentiel et integral tome 2 Edition mir Moscou (1980).