REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

ECOLE SUPERIEURE EN SCIENCES APPLIQUEES
–TLEMCEN–

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

المدرسة العليا في العلوم التطبيقية
-تلمسان-

Analyse 1

Rappel de cours et exercices corrigés

Dr. Fatima DIB

Année Universitaire : 2019-2020

Table des matières

Preface

Ce polycopié est le fruit de l'enseignement du module ANALYSE I dans le cadre de la formation préparatoire à l'école supérieure en sciences appliquées de Tlemcen (E.S.S.A.T). Cet ouvrage est non seulement déstiné aux étudiants de la première année des classes préparatoires aux grandes écoles mais aussi aux étudiants de première année de tronc commun (MI-ST-SM).

Ce mansucrit comprend cinq chapitres qui couvrent l'ensemble du programme du module ANALYSE I :

Le premier chapitre donne un aperçu sur l'ensemble des nombres réels et ses propriétés fondamentales.

Le second chapitre est consacré aux suites réelles, on y étudie leur nature et leur sens de variation.

Le troisième chapitre traite les fonctions réelles, on y expose les notions de limite et continuité.

Dans le quatrième chapitre, on présente les notions de dérivabilité et de développement limité pour les fonctions réelles.

Enfin, dans le cinquième et dernier chapitre, on introduit le concept de l'intégrale de Riemann d'une fonction réelle, ainsi que les différentes méthodes d'intégration.

Chaque chapitre débute par un résumé de cours plus ou moins détaillé suivi d'une série d'exercices avec leurs solutions respectives.
Un grand nombre d'exercices proposés a été testé dans le cadre de travaux dirigés ou a fait l'objet de devoirs de réflexion ou de contrôle des connaissances pour les étudiants de la première année : formation préparatoire à l'E.S.S.A.T.
Les autres exercices ont été inspirés de lecture d'ouvrages spécialisés dont les références sont données à la fin du document.
Les solutions des exercices ont été rédigées avec le plus grand soin possible, le souci principal était donc de familiariser l'étudiant avec le raisonnement mathématique et de lui apprendre surtout à bien rédiger son travail.

Comme tout travail le notre reste bien évidemment perfectible, c'est pourquoi, nous saurions gré à tout lecteur de bien vouloir nous faire parvenir toute remarque ou suggestion pour améliorer notre document.

1. L'ensemble des nombres réels

1.1 Définitions sur les ensembles

1.1.1 Ensembles

Définition 1.1.1 Un ensemble E (collection, famille, classe, groupement, d'objets etc...) est identifié par ses éléments.
Un élément x appartient à l'ensemble E, on note $x \in E$.
Un ensemble peut être déterminé par :
- extention, si on connait la liste de ses éléments, par exemple, $A = \{0, 2, 4, 6, 8, ..., 2n, ...\}$,
- compréhention, si on connait une propriété de ses éléments, par exemple, $A = \{\ n \in \mathbb{N},\ n \text{ est pair}\}$.

Notation 1.1. *- L'ensemble des entiers naturels noté* $\mathbb{N}$:

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, ..., n, ...\}$$

- L'ensemble des entiers relatifs noté $\mathbb{Z}$:

$$\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 5, ..., \pm n, ...\}$$

- L'ensemble des nombres décimaux noté $\mathbb{D}$:

$$\mathbb{D} = \left\{ d = \frac{a}{10^p};\ a \in \mathbb{Z};\ p \in \mathbb{N} \right.$$

- L'ensemble des rationnels noté $\mathbb{Q}$:

$$\mathbb{Q} = \left\{ r = \frac{a}{b};\ a, b \in \mathbb{Z};\ b \neq 0 \right\}$$

- L'ensemble des réels noté $\mathbb{R}$:
Tous les nombres naturels, entiers, décimaux, rationnels et irrationnels, comme par exemple le nombre π *sont des nombres réels.*

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}.$$

•*Ensemble des nombres réels non nuls :* $\mathbb{R}^*$.
•*Ensemble des nombres réels positifs :* $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R}, x \geq 0\}$.
•*Ensemble des nombres réels négatifs :* $\mathbb{R}_- = \{x \in \mathbb{R}, x \leq 0\}$.
•*Ensemble des nombres réels strictement positifs :* $\mathbb{R}_+^* = \{x \in \mathbb{R}, x > 0\}$.
•*Ensemble des nombres réels strictement négatifs :* $\mathbb{R}_-^* = \{x \in \mathbb{R}, x < 0\}$.

Nombre algébrique-nombre transcendant

Définition 1.1.2 Un nombre réel est dit algébrique s'il est solution d'une équation polynomiale à coefficients dans le corps $\mathbb{Q}$ des rationnels (autrement dit racine d'un polynôme non nul à coefficients dans $\mathbb{Q}$).
Les nombres entiers et rationnels sont algébriques ainsi que toutes les racines de ces nombres.
Les nombres réels qui ne sont pas algébriques, comme π et e, sont dits transcendants.

1.2 Propriétés des nombres réels

1.2.1 $\mathbb{R}$ est un corps commutatif

Il existe deux applications définies de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, notées $+$ (respectivement $.$) :

$$\begin{array}{ccc} + & : & \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \\ (x,y) & \mapsto & x+y \end{array} \qquad \begin{array}{c} . : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ (x,y) \mapsto x.y \end{array}$$

appelée addition dans $\mathbb{R}$ (respectivement multiplication dans $\mathbb{R}$) vérifiant :
(1)-$(\mathbb{R},+)$ est un groupe commutatif. (0 est l'élément neutre pour l'addition dans $\mathbb{R}$).

(2)-$(\mathbb{R}^*,.)$ est un groupe commutatif. (1 est l'élément neutre pour la multiplication dans $\mathbb{R}$).
(3)-La multiplication est distributive par rapport à l'addition dans $\mathbb{R}$.
Les propriétés $(1),(2)$ et (3) impliquent que $(\mathbb{R},+,.)$ est un corps commutatif.
Quelques propriétés
Pour tout réel x,y,z on a :
a- $x+z = y+z \Rightarrow x = y$.
b- $x.0 = 0.x = 0$.
c- $x.(-y) = -(x.y) = (-x).y$.
d- $x.y = 0 \Rightarrow x = 0$ ou $y = 0$.

1.2.2 $\mathbb{R}$ est ordonné

Il existe une relation notée $\leq$ définie par :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ (x \leq y) \Leftrightarrow \left(y - x \in \mathbb{R}^+\right),$$

vérifiant les axiomes suivants :
$1-$ Elle est est relexive c-à-d : $\forall x \in \mathbb{R} \quad x \leq x$.
$2-$ Elle est antisymétrique c-à-d :$\forall x,y \in \mathbb{R},\ (x \leq y\ et\ y \leq x) \Rightarrow x = y$.
$3-$ Elle est transitive c-à-d : $\forall x,y,z \in \mathbb{R},\ (x \leq y\ et\ y \leq z) \Rightarrow x \leq z$.
La relation $\leq$ définie sur $\mathbb{R}$ est une relation d'ordre (ordre usuel sur $\mathbb{R}$).
La relation $\leq$ est compatible avec l'addition :

$$\forall x,y,z \in \mathbb{R},\ (x \leq y) \Rightarrow x+z \leq y+z.$$

et avec la multiplication par un réel positif :

$$\forall x,y \in \mathbb{R},\ (x \geq 0\ et\ y \geq 0) \Rightarrow x.y \geq 0.$$

La relation $\leq$ est une relation d'ordre total sur $\mathbb{R}$.

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad \text{on a soit} \;\; x \leq y \;\; \text{soit} \;\; y \leq x.$$

La relation d'ordre stricte sur $\mathbb{R}$ est définie par :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \text{on a} : \; (x < y) \Leftrightarrow (x \leq y \text{ et } x \neq y).$$

$(\mathbb{R}, +, ., \leq)$ est un corps ordonné.

1.2.3 Intervalles de $\mathbb{R}$

Définition 1.2.1 Un intervalle de $\mathbb{R}$ est un ensemble I de réels vérifiant la propriété suivante

$$\forall (x,y) \in I^2, \; \forall z \in \mathbb{R}, \; (x \leq z \leq y) \Rightarrow z \in I.$$

Cette définition regroupe les intervalles des types suivants (avec a et b réels et $a < b$) :
$\{x \in \mathbb{R}, \, a < x < b\} =]a, b[$ (ouvert),
$\{x \in \mathbb{R}, \, a \leq x \leq b\} = [a, b]$ (fermé),
$\{x \in \mathbb{R}, \, a < x \leq b\} =]a, b]$ (semi-ouvert à gauche, semi-fermé à droite),
$\{x \in \mathbb{R}, \, a \leq x < b\} = [a, b[$ (semi-fermé à gauche, semi-ouvert à droite).
Une autre notation (d'origine anglaise mais très répandue également) utilise, pour les intervalles (semi-)ouverts, une parenthèse au lieu d'un crochet : les intervalles ci-dessus sont alors notés respectivement (a, b), $[a, b]$, $(a, b]$, $[a, b)$.
À ces ensembles réels, on ajoute les intervalles de ce type :
$\{x \in \mathbb{R}, \, x < a\} =]-\infty, a[= (-\infty, a)$ (ouvert),
$\{x \in \mathbb{R}, \, x \leq a\} =]-\infty, a] = (-\infty, a]$ (fermé),
$\{x \in \mathbb{R}, \, x > a\} =]a, +\infty[= (a, +\infty)$ (ouvert),
$\{x \in \mathbb{R}, \, x \geq a\} = [a, +\infty[= [a, +\infty)$ (fermé).
Auxquels se sont ajoutés les intervalles :
$\emptyset$ (à la fois ouvert et fermé) ;
$\{a\} = [a, a]$ (fermé) ;
$\mathbb{R} =]-\infty, +\infty[= (-\infty, +\infty)$ (à la fois ouvert et fermé).
La notion de voisinage sera utile pour les limites.

Définition 1.2.2 Soit a un réel, V un sous-ensemble de $\mathbb{R}$. On dit que V est un voisinage de a s'il existe un intervalle ouvert I tel que $a \in I$ et $I \subset V$.

1.2.4 Caractérisation axiomatique de $\mathbb{R}$

Définition 1.2.3 Une partie X de $\mathbb{R}$ non vide est majorée si : $\exists M \in \mathbb{R}$, tel que $\forall x \in X$, $x \leq M$.
On dit alors que M est un majorant de X.

Définition 1.2.4 Une partie X de $\mathbb{R}$ non vide est minorée si : $\exists m \in \mathbb{R}$, tel que $\forall x \in X$, $x \geq m$.
On dit alors que m est un minorant de X.

Définition 1.2.5 Une partie X de $\mathbb{R}$ non vide est bornée si elle est majorée et minorée c-à-d : $\exists M, m \in \mathbb{R}$, tels que $\forall x \in X$, $m \leq x \leq M$.

Définition 1.2.6 Soit X une partie non vide de $\mathbb{R}$ et M est un réel, on dit que M est la borne supérieure de X si M est un majorant de X et si c'est le plus petit des majorants.
S'il existe on le note $\sup(X)$.

Définition 1.2.7 Soit X une partie non vide de $\mathbb{R}$ et m est un réel, on dit m est la borne inférieure de X si m est un minorant de X et si c’est le plus grand des minorants.
S’il existe on le note $\inf(X)$.

Axiome de la borne supérieure

axiome 1.2.1 Toute partie X de $\mathbb{R}$ non vide majorée admet une borne supérieure.
Par conséquent, toute partie X de $\mathbb{R}$ non vide minorée admet une borne inférieure .

Caractérisation de la borne supérieure

Théorème 1.2.2 Soit X une partie non vide de $\mathbb{R}$, soit M un réel majorant de X. Les propriétés suivantes sont équivalentes :
(i) $M = \sup(X)$;
(ii) $\forall z \in \mathbb{R},\ z < M \Rightarrow \exists x \in X$ tel que $z < x \leq M$,
(iii) $\forall \varepsilon > 0,\ \exists x \in X$ tel que $M - \varepsilon < x \leq M$.

Théorème 1.2.3 Soit X une partie non vide de $\mathbb{R}$, soit m un réel minorant de X. Les propriétés suivantes sont équivalentes :
(i) $m = \inf(X)$;
(ii) $\forall z \in \mathbb{R},\ z > m \Rightarrow \exists x \in X$ tel que $z > x \geq m$,
(iii) $\forall \varepsilon > 0,\ \exists x \in X$ tel que $m + \varepsilon > x \geq m$.

R 1) Soient X une partie non vide de $\mathbb{R}$ et $-X = \{-x \in \mathbb{R},\ x \in X\}$, alors

$$a = \inf(X) \Leftrightarrow -a = \sup(-X)$$

2) Si X est une partie non vide, non majorée de $\mathbb{R}$, alors $\sup(X)$ n’existe pas et on pose $\sup(X) = +\infty$.
3) Si X est une partie non vide, non minorée de $\mathbb{R}$, alors $\inf(X)$ n’existe pas et on pose $\inf(X) = -\infty$.

1.2.5 Propriétés de $\mathbb{R}$

Propriété d’Archimède

axiome 1.2.4 Pour tout réel a et tout réel b strictement positif, il existe un entier naturel non nul n tel que le produit $(n.b)$ soit strictement supérieur à a. On dit que $\mathbb{R}$ est archimédien.
Autrement dit :

$$\forall a \in \mathbb{R},\ \forall b > 0,\ \exists n \in \mathbb{N}^* \text{ tel que } n.b > a.$$

En fait l’axiome d’Archimède se limite à la version suivante car l’inégalité est triviale si a<0 :

$$\mathbb{R} \textit{ est archimédien} \Leftrightarrow \forall a > 0,\ \forall b > 0,\ \exists n \in \mathbb{N}^* \text{ tel que } n.b > a.$$

Proposition 1.2.5 l’axiome d’ Archimède est une conséquence de l’axiome de la borne supérieure.

Proposition 1.2.6 Pour tout réel $x > 0$, il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $0 < \frac{1}{n} < x$.

Partie entière d’un réel

Définition 1.2.8 Pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe $n \in \mathbb{Z}$ unique tel que $n \leq x < n+1$; n est appelé la partie entière de x et noté $E(x)$, ou $Ent(x)$ ou $[x]$.

Proposition 1.2.7 Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a :

$$\begin{cases} E(x) \in \mathbb{Z}, \\ E(x) \leq x < E(x)+1 \end{cases}$$

ou encore

$$\begin{cases} E(x) \in \mathbb{Z}, \\ x-1 < E(x) \leq x. \end{cases}$$

Valeur absolue d'un nombre réel

Définition 1.2.9 L'application définie par :

$$\begin{array}{lcl} |.| & : & \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto & |x| = \sup(x,-x) = \begin{cases} x \text{ si } x \in \mathbb{R}_+ \\ -x \text{ si } x \in \mathbb{R}_- \end{cases} \end{array}$$

est appelée valeur absolue.

Elle possède les propriétés suivantes :
pour tous x et y des nombres réels, on a :

1- $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$,
2- $|x+y| \leq |x|+|y|$,
3- $|x.y| = |x|.|y|$,
5- $|x| \leq y \Leftrightarrow -y \leq x \leq y$,
6- Si $x \neq 0$ alors $\left|\frac{1}{x}\right| = \frac{1}{|x|}$

Densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$

Théorème 1.2.8 Etant donné des réels x et y vérifiant $x < y$, il existe un nombre rationnel $q \in \mathbb{Q}$ tel que $x < q < y$. On dit que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

1.2.6 Quelques notions de topologie sur $\mathbb{R}$

Adhérence d'une partie de $\mathbb{R}$

Définition 1.2.10 Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$.
Un réel x est dit adhérent à A si tout intervalle ouvert I_x contenant x rencontre A. On dit que x appartient à l'adhérence de A et on écrit $x \in \overline{A}$.
L'adhérence $\overline{A}$ de A est l'ensemble des points adhérents à A. Autrement dit :

$$x \in \overline{A} \Leftrightarrow \forall I_x \; intervalle \; ouvert \; contenant \; x, I_x \cap A \neq \emptyset.$$

R 1)- $A \subset \overline{A}$.
2)- $x \in \overline{A} \Leftrightarrow \forall\, \varepsilon > 0,\ ]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\cap A \neq \emptyset$.

■ **Exemple 1.1** 1)- $A =]0,1[$, $\overline{A} = [0,1]$.
2)- $A = \{2\} \cup]3,6]$, $\overline{A} = \{2\} \cup [3,6]$. 3)- $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$. On dit que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$. ■

Point d'accumulation- Point isolé

Définition 1.2.11 x est un point d'accumulation de A si tout intervalle ouvert I_x contenant x rencontre A en un point au moins autre que x.

■ **Exemple 1.2** Tout nombre réel est un point d'accumulation de $\mathbb{Q}$. ■

Définition 1.2.12 Un élément x de A qui n'est pas un point d'accumulation est dit un point isolé. Autremant dit, un élément x de A est un point isolé s'il existe un intervalle ouvert I_x contenant x qui ne rencontre A qu'au point x.

Théorème 1.2.9 **(Première formulation du théorème de Bolzano-Weierstrass)** Toute partie infinie bornée de $\mathbb{R}$ admet au moins un point d'accumulation.

1.3 Exercices

Exercice 1.1 Montrer que les nombres $a = 3+2\sqrt{2}$, et $b = \frac{(1+\sqrt{5})}{2}$ sont algébriques. ■

■ **Solution 1.1**

$$\begin{aligned} a &= 3+2\sqrt{2} \Leftrightarrow a-3 = 2\sqrt{2} \\ &\Leftrightarrow (a-3)^2 = 8 \\ &\Leftrightarrow a^2-6a+1 = 0. \end{aligned}$$

On a aussi

$$\begin{aligned} b &= \frac{(1+\sqrt{5})}{2} \Leftrightarrow 2b = (1+\sqrt{5}) \\ &\Leftrightarrow 4b^2 = 6+2\sqrt{5} \\ &\Leftrightarrow 2b^2 = 3+\sqrt{5} \\ &\Leftrightarrow 2b^2-3 = \sqrt{5} \\ &\Leftrightarrow \left(2b^2-3\right)^2 = 5 \\ &\Leftrightarrow 4b^4-12b^2+4 = 0 \\ &\Leftrightarrow b^4-3b^2+1 = 0 \end{aligned}$$

■

R $b = \frac{(1+\sqrt{5})}{2}$ est appelé nombre d'or, il est aussi racine de l'équation polynomiale suivante :

$$b^2-b-1 = 0.$$

Exercice 1.2 Soient $x_1, x_2, \ldots x_n$ et $y_1, y_2, \ldots y_n$ des nombres réels tels que $x_i \leq y_i$, $i = 1, \ldots n$, n un nombre entier strictement positif.
1) Montrer que

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = x_1+x_2+x_3+\ldots+x_n \leq \sum_{i=1}^{n} y_i.$$

2) Montrer que s'il existe $j, 0 \leq j \leq n$, tel que $x_j < y_j$ alors

$$\sum_{i=1}^{n} x_i < \sum_{i=1}^{n} y_i.$$

3) Montrer que si $x_i \geq 0$, $i = 1, \ldots n$, alors

$$\prod_{i=1}^{n} x_i = x_1.x_2.x_3\ldots.x_n \leq \prod_{i=1}^{n} y_i.$$

■

■ **Solution 1.2** 1)- Raisonnons par récurrence.
Pour $n = 1$ on a bien $x_1 \leq y_1$.
Supposons maintenant que l'inégalité $\sum_{i=1}^{k} x_i \leq \sum_{i=1}^{k} y_i$ est vraie jusqu'a l'ordre k et montrons qu'elle est vraie à l'ordre $k+1$. k est un entier compris entre 1 et n.
D'après l'hypothèse de récurrence on a

$$\sum_{i=1}^{k} x_i \leq \sum_{i=1}^{k} y_i,$$

on ajoute aux deux membres de l'inégalité le terme x_{k+1} on obtient

$$\sum_{i=1}^{k+1} x_i = \left(\sum_{i=1}^{k} x_i\right) + x_{kn+1} \leq \left(\sum_{i=1}^{k} y_i\right) + x_{k+1},$$

de plus comme

$$x_{k+1} \leq y_{k+1},$$

on déduit que

$$\sum_{i=1}^{k+1} x_i \leq \left(\sum_{i=1}^{k} y_i\right) + y_{k+1} = \sum_{i=1}^{k+1} y_i.$$

2) D'après 1) on a

$$x_1 + \ldots + x_{j-1} + x_{j+1} + \ldots + x_n \leq y_1 + \ldots + y_{j-1} + y_{j+1} + \ldots + y_n,$$

d'où

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \leq y_1 + \ldots + y_{j-1} + x_j + y_{j+1} + \ldots + y_n,$$

comme maintenant $x_j < y_j$, on déduit que

$$y_1 + \ldots + y_{j-1} + x_j + y_{j+1} + \ldots + y_n < \sum_{i=1}^{n} y_i,$$

par conséquent

$$\sum_{i=1}^{n} x_i < \sum_{i=1}^{n} y_i.$$

3) Raisonnons par récurrence :

Pour $n = 1$ on a bien $x_1 \leq y_1$.
Supposons maintenant que l'inégalité $\prod_{i=1}^{k} x_i \leq \prod_{i=1}^{k} y_i$ est vraie jusqu'a l'ordre k et montrons qu'elle est vraie à l'ordre $k+1$. k est un entier compris entre 1 et n.
D'après l'hypothèse de récurrence on a

$$\prod_{i=1}^{k} x_i \leq \prod_{i=1}^{k} y_i,$$

on multiplie les deux membres de l'inégalité par le terme $x_{k+1} \geq 0$, on obtient

$$\prod_{i=1}^{k+1} x_i = \left(\prod_{i=1}^{k} x_i\right).x_{k+1} \leq \left(\prod_{i=1}^{k} y_i\right).x_{k+1},$$

de plus comme

$$x_{k+1} \leq y_{k+1},$$

cela implique

$$\left(\prod_{i=1}^{k} y_i\right).x_{k+1} \leq \left(\prod_{i=1}^{k} y_i\right).y_{k+1}$$

on déduit que

$$\prod_{i=1}^{k+1} x_i \leq \left(\prod_{i=1}^{k} y_i\right).y_{k+1} = \prod_{i=1}^{k+1} y_i.$$

■

Exercice 1.3 Soient a et b deux nombres réels tels que pour tout nombre réel x vérifiant $x > b$, on ait $a \leq x$. Montrer que $a \leq b$.
■

■ **Solution 1.3** Raisonnons par l'absurde, supposons que $a > b$, puisque $\mathbb{R}$ est un corps totalement ordonné.
Comme $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$, il existe un élément $x \in \mathbb{Q}$ tel que $b < x < a$. Cet élément x vérifie l'inégalité $x > b$ mais ne vérifie pas l'inégalité $a \leq x$.
On obtient ainsi une contradiction avec l'hypothèse. ■

Exercice 1.4 Soit $x \in \mathbb{R}_+$, montrer que si $x \leq \varepsilon$ pour tout $\varepsilon > 0$, alors $x = 0$. ■

■ **Solution 1.4** $1^{ère}$*méthode* : Utillisons la contraposée, étant donné $x \geq 0$, cela revient à prouver que :

$$(x \in \mathbb{R}_+, x \neq 0) \Rightarrow \exists \varepsilon > 0,\ x > \varepsilon.$$

Soit $x \neq 0$, donc $x > 0$, prenons $\varepsilon = \frac{x}{2} > 0$, on a bien $x > \frac{x}{2}$.

$2^{ème}$ *méthode* : Considérons l'ensemble $\mathbb{R}_+^*$. Alors pour tout $\varepsilon > 0$ on a par hypothèse $x \leq \varepsilon$. D'où x est un minorant de $\mathbb{R}_+^*$, mais l'ensemble des minorants de $\mathbb{R}_+^*$ est l'ensemble $\mathbb{R}_-$. On en déduit que x est un élément de $\mathbb{R}_-$, et comme par hypothèse x est un élément de $\mathbb{R}_+$, alors $x = 0$. ■

Exercice 1.5 Soient A et B deux parties non vides de $\mathbb{R}$ telles que A$\subset B$. Montrer que :
a) Si B est majoré alors $\sup A$ existe et $\sup A \leq \sup B$.
b) Si B est minoré alors $\inf A$ existe et $\inf A \geq \inf B$.
c) Donner des exemples où dans a) (respectivement dans b)) on aura l'égalité, l'inégalité stricte.
■

■ **Solution 1.5** a) B étant une partie de $\mathbb{R}$ non vide et majorée, elle admet une borne supérieure, $\sup(B)$ .Or A$\subset B$ donc tout majorant de B (en particulier $\sup B$) est un majorant de A.
A est une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$, donc $\sup(A)$ existe.
Comme $\sup(B)$ est un majorant de A et $\sup(A)$ est le plus petit des majorants de A, on obtient

$$\sup(A) \leq \sup(B).$$

b) Raisonnons de la même manière :
B étant une partie de $\mathbb{R}$ non vide et minorée, elle admet une borne inférieure, $\inf(B)$ .Or A$\subset B$ donc tout minorant de B (en particulier $\inf(B)$) est un minorant de A.
A est une partie non vide et minorée de $\mathbb{R}$, donc $\inf(A)$ existe.
Comme $\inf(B)$ est un minorant de A et $\inf(A)$ est le plus grand des minorants de A, on obtient

$$\inf(A) \geq \inf(B).$$

c) Si $A = [-12,4]$ et $B =]-\infty,4]$, on a $\sup(A) = \sup(B) = 4$.
Si $A = [-2,4]$ et $B =]-\infty,6]$, on a $4 = \sup(A) < \sup(B) = 6$.
Si $A = [-2,4]$ et $B = [-2,+\infty[$, on a $\inf(A) = \inf(B) = -2$.
Si $A = [-2,4]$ et $B = [-3,+\infty[$, on a $-2 = \inf(A) > \inf(B) = -3$.

■

Exercice 1.6 Soit A $\subset \mathbb{R}$ la partie réelle non vide définie par :

$$A = \left\{x \in \mathbb{Q},\ 1 \leq x \leq \sqrt{5}\right\}.$$

1) A est-il un intervalle ? Justifier votre réponse.
2) En utilisant la caractérisation de la borne supérieure, montrer que $\sup(A) = \sqrt{5}$.
3) Soit

$$B = \left\{x \in A,\ x - E(x) \geq \frac{3}{5}\right\},$$

où E(x) es la partie entière du nombre réel x.
a) Vérifier que B est non vide.
b) Déterminer $\inf(B)$. ■

■ **Solution 1.6** Par définition A est l'ensemble de tous les rationnels qui sont entre 1 et $\sqrt{5}$.
1) Remarquons que

$$1 \in A, \ \frac{3}{2} \in A, \ \text{ et } \ 1 < \sqrt{2} < \frac{3}{2}, \ \text{ mais } \sqrt{2} \notin A.$$

Donc l'ensemble A n'est pas un intervalle.
2) Montrons que $\sup(A) = \sqrt{5}$.
Par définition on a $A \subset \left[1, \sqrt{5}\right]$, il résulte que A est majoré et donc $\sup(A)$ existe.
De plus on a

$$\forall x \in A, \ x \leq \sqrt{5}.$$

D'autre part soit $\varepsilon > 0$ suffisament petit de sorte que $\sqrt{5} - \varepsilon > 1$. Comme $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$ (c-à-d il existe toujours un rationnel entre deux nombres réels quelconques), on en déduit que

$$\exists x_0 \in \mathbb{Q}, \ \ \sqrt{5} - \varepsilon < x_0 < \sqrt{5}$$

ce qui signifie que $x_0 \in A$. Donc il vient que

$$\begin{cases} \forall x \in A, \ x \leq \sqrt{5} \\ \textit{et} \\ \forall \varepsilon > 0, \ \exists x_0 \in \mathbb{Q}, \ \ \sqrt{5} - \varepsilon < x_0 < \sqrt{5}. \end{cases}$$

Ainsi $\sup(A) = \sqrt{5}$.
3) Montrons que B est non vide.
a) Remarquons que

$$1,8 = \frac{18}{10} \in B,$$

car

$$1,8 \in A, \ \ 1,8 - E(1,8) = 0,8 \geq \frac{3}{5} = 0,6,$$

donc B est non vide.
b) Comme $B \subset A \subset \left[1, \sqrt{5}\right]$, on en déduit que B est minoré. Donc $\inf(B)$ existe.
Soit $x \in B$, on a

$$x \in B \subset A \subset \left[1, \sqrt{5}\right] \Rightarrow E(x) \in \{1, \ 2\}.$$

Ainsi

$$x \in B \Rightarrow x - E(x) \geq \frac{3}{5} \Rightarrow x \geq E(x) + \frac{3}{5} \geq 1 + \frac{3}{5} = \frac{8}{5}.$$

Donc $\frac{8}{5}$ est un minorant de B. D'autre part, comme $\frac{8}{5} \in A$ et $\frac{8}{5} - E(\frac{8}{5}) = 0,6 = \frac{3}{5}$, on en déduit que $\frac{8}{5} \in B$. Par conséquent

$$\inf(B) = \min(B) = \frac{8}{5}.$$

■

Exercice 1.7 Soient A et B deux parties de $\mathbb{R}$, non vides et bornées.
a) Monter $A \cup B$ est une partie bornée de $\mathbb{R}$ et
i) $\sup(A \cup B) = \max\{\sup(A), \sup(B)\}$.
ii) $\inf(A \cup B) = \min\{\inf(A), \inf(B)\}$.
b) Monter $A \cap B$ est une partie bornée de $\mathbb{R}$ et que si $A \cap B$ est non vide alors
i) $\sup(A \cap B) \leq \min\{\sup(A), \sup(B)\}$.
ii) $\inf(A \cap B) \geq \max\{\inf(A), \inf(B)\}$.
iii) Donner un exemple où dans (b) les inégalités sont strictes. ■

■ **Solution 1.7** a) Commme A et B sont deux parties de $\mathbb{R}$, non vides et bornées, alors $\sup(A), \inf(A), \sup(B)$ et $\inf(B)$ existent.
Soit $x \in A \cup B$, on a par définition de l'union

$$x \in A \ ou \ x \in B.$$

Supposons que $x \in A$, puisque A est bornée, il existe des réels a et b tels que $a \leq x \leq b$. De même si on suppose que $x \in B$, et comme B est bornée, il existe des réels a' et b' tels que $a' \leq x \leq b'$, ce qui implique que $\min(a, a') \leq x \leq \max(b, b')$. C'est à dire $A \cup B$ est bornée.
Ainsi $A \cup B$ est une partie non vide (car A et B sont deux parties de $\mathbb{R}$ non vides), majorée et minorée, donc $\sup(A \cup B)$ et $\inf(A \cup B)$ existent.
i) Montrons maintenant que $\sup(A \cup B) = \max\{\sup(A), \sup(B)\}$.
Comme $A \subset A \cup B$ et $B \subset A \cup B$ on déduit que

$$\begin{cases} \sup(A) \leq \sup(A \cup B), \\ \sup(B) \leq \sup(A \cup B), \end{cases}$$

ce qui implique que

$$\max\{\sup(A), \sup(B)\} \leq \sup(A \cup B).$$

Maintenant, soit $x \in A \cup B$, on a alors

$$\begin{cases} x \leq \sup(A), \ si \ x \in A \\ x \leq \sup(B), \ si \ x \in B \end{cases}$$

ce qui entraine que

$$x \leq \max\{\sup(A), \sup(B)\},$$

c'est à dire $\max\{\sup(A), \sup(B)\}$ est un majorant de $A \cup B$ et puisque $\sup(A \cup B)$ est le plus petit des majorants de $A \cup B$, donc on obtient

$$\sup(A \cup B) \leq \max\{\sup(A), \sup(B)\}.$$

On conclut finalement que

$$\sup(A\cup B)=\max\{\sup(A),\sup(B)\}.$$

ii) Pour montrer que $\inf(A\cup B)=\min\{\inf(A),\inf(B)\}$, on raisonne de la même manière que dans (i).
b) Supposons que $A\cap B$ est non vide. Comme $A\cap B\subset A$, par exemple, et A est borné on déduit de l'exercice 1.5 que $A\cap B$ est borné et donc $\sup(A\cap B)$ et $\inf(A\cap B)$ existent.
Sachant que $A\cap B\subset A$ et $A\cap B\subset A$, et en utilisant les résultats de l'exercice 1.5 on obtient

$$\begin{cases}\sup(A\cap B)\leq\min\{\sup(A),\sup(B)\}, \\ \qquad\qquad et \\ \inf(A\cap B)\geq\max\{\inf(A),\inf(B)\}\end{cases}$$

iii) Soient $A=[0,7]$, $B=\{-1,1,2,3,8\}$, on a

$$A\cap B=\{1,2,3\},$$

et

$$\begin{aligned}3 &= \sup(A\cap B)<\min\{\sup(A),\sup(B)\}=7\\ 1 &= \inf(A\cap B)>\max\{\inf(A),\inf(B)\}=0.\end{aligned}$$

■

Exercice 1.8 Montrer :
a) $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2$, $x\leq y\Rightarrow E(x)\leq E(y)$.
b) $\forall x\in\mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$, $E(-x)=-E(x)-1$.
c) $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2$, $E(x+y)-E(x)-E(y)\in\{0,1\}$.
d) $\forall x\in\mathbb{R}$, $\forall\alpha\in\mathbb{Z}$, $E(x+\alpha)=E(x)+\alpha$. ■

■ **Solution 1.8** a) Par définition, on a

$$E(x)\leq x\leq y<E(y)+1,$$

puisque $E(x)$ et $E(y)$ sont des entiers relatifs on en déduit que

$$E(x)\leq E(y).$$

car $E(y)$ est le plus petit entier inférieur à y.
b) Soit $x\in\mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$, on a

$$\begin{aligned}E(x) &< x<E(x)+1\Rightarrow -E(x)-1<-x<-E(x)\\ &\Rightarrow E(-x)=-E(x)-1.\end{aligned}$$

c) Pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, on a

$$\begin{cases}E(x)\leq x<E(x)+1\\ E(y)\leq y<E(y)+1\end{cases},$$

en additionnant membre à membre on obtient

$$E(y)+E(x) \leq x+y < E(y)+E(x)+2,$$

ce qui implique que

$$E(y)+E(x) \leq E(x+y) \leq E(y)+E(x)+1,$$

par conséquent

$$E(x+y)-E(x)-E(y) \in \{0,1\}.$$

d) $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall \alpha \in \mathbb{Z}$, on a

$$E(x)+\alpha \leq x+\alpha < E(x)+\alpha+1,$$

or $(E(x)+\alpha) \in \mathbb{Z}$, donc

$$E(x+\alpha) = E(x)+\alpha.$$

■

Exercice 1.9 Calculer $E(\sqrt{n^2+n+1})$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. ■

■ **Solution 1.9** Soit $n \in \mathbb{N}$, on distingue deux cas :
1- Si $n=0$, on a

$$E(\sqrt{n^2+n+1}) = E(\sqrt{0^2+0+1}) = E(1) = 1.$$

2- Si $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$n^2 < n^2+n+1 < n^2+2n+1,$$

autrement dit

$$n^2 < n^2+n+1 < (n+1)^2,$$

donc

$$n < \sqrt{n^2+n+1} < n+1,$$

on obtient

$$E(\sqrt{n^2+n+1}) = n \text{ pour } n \in \mathbb{N}^*.$$

■

Exercice 1.10 Soient $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$.
a) Comparer entre $E(\frac{E(x)}{n})$ et $E(\frac{x}{n})$.
b) En déduire la valeur de $E(\frac{E(nx)}{n})$. ■

■ **Solution 1.10** a) Par définition on a

$$E(\frac{x}{n}) \leq \frac{x}{n} < E(\frac{x}{n})+1 \Rightarrow nE(\frac{x}{n}) \leq x < n\left(E(\frac{x}{n})+1\right),$$

puisque $nE(\frac{x}{n})$ et $n\left(E(\frac{x}{n})+1\right)$ sont deux entiers relatifs, alors

$$nE(\frac{x}{n}) \leq E(x) < n\left(E(\frac{x}{n})+1\right),$$

divisons les membres de la double inégalité par n, on obtient

$$E(\frac{x}{n}) \leq \frac{E(x)}{n} < E(\frac{x}{n})+1, \ \textit{pour } x \in \mathbb{R} \textit{ et } n \in \mathbb{N}^*.$$

$E(\frac{x}{n})$ et $E(\frac{x}{n})+1$ étant deux entiers relatifs consécutifs, on déduit que

$$E(\frac{E(x)}{n}) = E(\frac{x}{n}), \ \textit{pour } x \in \mathbb{R} \textit{ et } n \in \mathbb{N}^*.$$

b) En remplaçant x par nx dans l'égalité précédente on obtient

$$E(\frac{E(nx)}{n}) = E(x), \ \textit{pour } x \in \mathbb{R} \textit{ et } n \in \mathbb{N}^*.$$

■

Exercice 1.11 Soient x et y deux nombres réels, montrer que :
a) $||x|-|y|| \leq |x+y|$.
b) $||x|-|y|| \leq |x-y|$. ■

■ **Solution 1.11** a) Il s'agit de montrer que

$$-|x+y| \leq |x|-|y| \leq |x+y|,$$

en effet :

$$|x| = |x+y-y|,$$

et d'après la propriété "inégalité triangulaire", on a

$$|x+y-y| \leq |x+y|+|-y| = |x+y|+|y|,$$

d'où

$$|x|-|y| \leq |x+y|.$$

D'autre part

$$|y| = |y+x-x| \leq |x+y|+|x|,$$

ce qui implique

$$|x| - |y| \geq -|x+y|,$$

on obtient donc

$$||x| - |y|| \leq |x+y|.$$

b) On raisonne de la même façon que dans (a). ■

R Les inégalités précédentes peuvent être généralisées à n nombres réels $x_1, \ldots x_n$. On obtient :

$$\begin{aligned}
|x_1 + x_2 + \ldots + x_n| &\leq |x_1| + |x_2| + \ldots + |x_n|. \\
||x_1| - |x_2 + \ldots + x_n|| &\leq |x_1 + x_2 + \ldots + x_n|. \\
||x_1| - |x_2 + \ldots + x_n|| &\leq |x_1 - x_2 - \ldots - x_n|.
\end{aligned}$$

On démontre ces inégalités en raisonnant par récurrence.

2. Suites numériques

2.1 Généralités

2.1.1 Définitions, notations

$\mathbb{K}$ désigne l'un des corps $\mathbb{C}$ ou $\mathbb{R}$.

Définition 2.1.1 On appelle suite numérique une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{K}$.

$$\begin{array}{rcl} U & : & \mathbb{N} \to \mathbb{K} \\ n & \mapsto & U(n) = U_n. \end{array}$$

On la note souvent $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$, ou $(U_n)_{n\geq n_0}$ où $n_0 \in \mathbb{N}$ est fixé ; ou simplement $(U_n)_n$.
$U_n \in \mathbb{K}$ est appelé le $n^{ème}$ terme de la suite numérique $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

■ **Exemple 2.1** $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ dont le terme général est $U_n = \frac{1}{n}$, on a alors : $U_1 = 1$; $U_2 = \frac{1}{2}$.
■

Proposition 2.1.1 L'ensemble des suites d'éléments de $\mathbb{K}$, noté par $\mathscr{F}(\mathbb{N},\mathbb{K})$, muni de l'addition : $(U_n)_n + (V_n)_n = (U_n + V_n)_n$ et de la multiplication : $(U_n)_n \cdot (V_n)_n = (U_n.V_n)_n$ est un anneau commutatif unitaire.

Proposition 2.1.2 Deux suites $(U_n)_n$ et $(V_n)_n$ sont égales si et seulement si $U_n = V_n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

R 1)- l'enemble des valeurs d'une suite est un ensemble dénombrable.
2)- Deux suites peuvent avoir le même ensemble de valeurs sans qu'elles soient égales. Par exemple : la suite $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite qui alterne $+1, -1, +1, -1, \ldots$ et $\left((-1)^{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite qui alterne $-1, +1, -1, +1, \ldots$.

Dans tout ce qui suit le corps $\mathbb{K}$ désignera $\mathbb{R}$.

2.2 Quelques caractères des suites

2.2.1 Suites monotones

Définition 2.2.1 (Suite croissante) Une suite $(U_n)_n$ est croissante si pour tous $m,n \in \mathbb{N}$ tels que $m < n$, on a : $U_m \leq U_n$. Cela revient à dire que pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}\ :\ U_n \leq U_{n+1}$.
$(U_n)_n$ est strictement croissante si pour tous $m,n \in \mathbb{N}$ tels que $m < n$, on a : $U_m < U_n$. Cela revient à dire que pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}\ :\ U_n < U_{n+1}$.

Définition 2.2.2 (Suite décroissante) Une suite $(U_n)_n$ est décroissante si pour tous $m,n \in \mathbb{N}$ tels que $m < n$, on a : $U_m \geq U_n$. Cela revient à dire que pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}\ :\ U_n \geq U_{n+1}$.
$(U_n)_n$ est strictement décroissante si pour tous $m,n \in \mathbb{N}$ tels que $m < n$, on a : $U_m > U_n$. Cela revient à dire que pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}\ :\ U_n > U_{n+1}$.

Définition 2.2.3 (Suite monotone) Une suite $(U_n)_n$ est monotone si elle est croissante ou décroissante.

Définition 2.2.4 (Suite constante) Une suite $(U_n)_n$ est constante ou constante si pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $U_n = U_{n+1}$.

Définition 2.2.5 (Suite stationnaire) Une suite $(U_n)_n$ est stationnaire si elle est constante à partir d'un certain rang. C'est-à-dire

$$\exists N \in \mathbb{N} :\ \forall n \in \mathbb{N}\ : n \geq N \implies u_{n+1} = u_n$$

R 1)- Si $(U_n)_n$ et $(V_n)_n$ sont croissantes (respectivement décroissantes) alors $(U_n + V_n)_n$ est croissante (respectivement décroissante).
2)- Si $(U_n)_n$ et $(V_n)_n$ sont croissantes (respectivement décroissantes) à termes dans $\mathbb{R}_+$, alors $(U_n.V_n)_n$ est croissante (respectivement décroissante).
3) Pour montrer qu'une suite réelle $(U_n)_n$ est croissante (respectivement décroissante), essayer de montrer que :
- pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n \leq U_{n+1}$ (respectivement $U_n \geq U_{n+1}$) par un calcul direct ou par un raisonnement par récurrence.
- pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} - U_n \geq 0$ (respectivement $U_{n+1} - U_n \leq 0$) si la différence est assez simple.
- pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{U_{n+1}}{U_n} \geq 1$(respectivement $\frac{U_{n+1}}{U_n} \leq 1$) si tous les termes sont strictement positifs et si le rapport $\frac{U_{n+1}}{U_n}$ est assez simple.
- On peut quelque fois considérer la fonction $f : x \mapsto f(x)$ d'une variable réelle telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n = f(n)$, et étudier les variations de la fonction f en envisageant une dérivée.

2.2.2 Suites bornées

Définition 2.2.6 (Suite majorée) Une suite $(U_n)_n$ est majorée s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $U_n \leq M$.

■ **Exemple 2.2** $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ dont le terme général est $U_n = \frac{1}{n}$, est majorée) car pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $U_n \leq 1$..
■

Définition 2.2.7 (Suite minorée) Une suite $(U_n)_n$ est minorée s'il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $U_n \geq m$.

■ **Exemple 2.3** $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dont le terme général est $U_n = n^2$, est minorée par 0 car pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $U_n \geq 0$..
■

Définition 2.2.8 **(Suite bornée)** Une suite $(U_n)_n$ est bornée si elle est à la fois majorée et minorée autrement dit : s'il existe deux réels M et m tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $m \leq U_n \leq M$.
On montre également qu'une suite $(U_n)_n$ est bornée s'il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $|U_n| \leq M$.
On note par $B(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ l'ensemble des suites bornées d'éléments de $\mathbb{R}$.

■ **Exemple 2.4** $(U_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ dont le terme général est $U_n = \frac{1}{n^2}$ est minorée par 0 et majorée par 1 car pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $0 < U_n \leq 1$..
■

2.3 Nature d'une suite

2.3.1 Suite convergente, suite divergente

Définition 2.3.1 Une suite $(U_n)_n$ d'éléments de $\mathbb{R}$ est convergente s'il existe un réel l vérifiant

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}, (N_\varepsilon = N(\varepsilon)) \text{ tel que } \forall n \in \mathbb{N},\ (n \geq N_\varepsilon \Rightarrow |U_n - l| \leq \varepsilon).$$

On dit que la suite $(U_n)_n$ tend vers l, ou converge vers l et on écrit

$$U_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} l \text{ ou } \lim_{n \to +\infty} U_n = l, (l\ est\ finie).$$

On dit qu'une suite $(U_n)_n$ diverge si et seulement si elle ne converge pas, autrement dit :

$$\forall l \in \mathbb{R}, \exists \varepsilon > 0, \forall N \in \mathbb{N}, \text{ tel que } \exists n \in \mathbb{N},\ (n \geq N\ et\ |U_n - l| > \varepsilon).$$

■ **Exemple 2.5** $(U_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ dont le terme général est $U_n = \frac{1}{n^2}$ est convergente vers 0. .
$(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dont le terme général est $U_n = n^2$, est divergente vers l'infini. ■

R 1)- $(U_n)_n$ converge vers l si et seulement si la suite $(U_n - l)_n$ converge vers 0.
2)- Si deux suites coincident à partir d'un certain rang, alors elles sont de même nature, c'est-à-dire que la convergence de l'une entraîne la convergence de l'autre. Autrement dit on ne change pas la nature d'une suite (convergente, divergente) si on modifie ses termes jusqu'à un indice fixé.

Proposition 2.3.1 La limite d'une suite, si elle existe, est unique.

Théorèmes fondamentaux

Théorème 2.3.2 **(Critère de convergence des suites monotones)** Soient $(U_n)_n$une suite réelle et $X = \{U_n \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}\}$ $(U_n)_n$ ensemble des valeurs prises par $(U_n)_n$.
i)- Si $(U_n)_n$ est croissante et majorée alors $(U_n)_n$ converge vers $M = \sup X$.
ii)- Si $(U_n)_n$ est décroissante et minorée alors $(U_n)_n$ converge vers $m = \inf X$.

Théorème 2.3.3 **(Critère de comparaison)** Soient $(U_n)_n$, $(V_n)_n$ deux suites numériques et $(l, l') \in \mathbb{R}^2$. Si $U_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} l$ et $V_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} l'$ et s'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$ on ait $U_n \leq V_n$ ou $(U_n < V_n)$; alors $l \leq l'$.

Théorème 2.3.4 **(Théorème d'encadrement)** Soient $(U_n)_n$, $(V_n)_n$ et $(W_n)_n$ trois suites réelles telles que

$$\begin{cases} \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq n_0 \Rightarrow U_n \leq V_n \leq W_n) \ ou \ (U_n < V_n < W_n) \\ (U_n)_n \text{ et } (W_n)_n \text{ convergent vers la même limite } l. \end{cases}$$

Alors $(V_n)_n$ converge aussi vers l.

2.3.2 Propriétés algébriques des suites convergentes

Proposition 2.3.5 Soient $\lambda \in \mathbb{R}, (U_n)_n$ et $(V_n)_n$ deux suites numériques, $(l, l') \in \mathbb{R}^2$. On a :

1)- $U_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l \Rightarrow |U_n| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} |l|$

2)- $U_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \Leftrightarrow |U_n| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

3)- $\left.\begin{array}{l} U_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l \\ V_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l' \end{array}\right\} \Rightarrow U_n + V_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l + l'$

4)- $U_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l \Rightarrow \lambda U_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \lambda l$

5)- $\left.\begin{array}{c} U_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \\ (V_n)_n \ born\acute{e}e \end{array}\right\} \Rightarrow U_n.V_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

6)- $\left.\begin{array}{l} U_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l \\ V_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l' \end{array}\right\} \Rightarrow U_n.V_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l.l'$

7)- $\left.\begin{array}{c} U_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l \\ l \neq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} \frac{1}{U_n} \text{ est défini à partir d'un certain rang et} \\ \frac{1}{U_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{l} \end{array}\right.$

8)- $\left.\begin{array}{l} U_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l \\ V_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l' \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} \frac{U_n}{V_n} \text{ est défini à partir d'un certain rang et} \\ \frac{U_n}{V_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{l}{l'} \end{array}\right.$

2.3.3 Cas de limites infinies

Définition 2.3.2 Soit $(U_n)_n$ une suite réelle.

1)- On dit que $(U_n)_n$ tend vers $+\infty$ (ou admet $+\infty$ pour limite) si et eulement si :

$$\forall A > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \text{ tel que } \forall n \in \mathbb{N}, \ (n \geq N \Rightarrow U_n \geq A).$$

On note

$$U_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty \text{ ou } \lim_{n\to+\infty} U_n = +\infty.$$

2)- On dit que $(U_n)_n$ tend vers $-\infty$ (ou admet $-\infty$ pour limite) si et eulement si :

$$\forall B < 0, \exists N \in \mathbb{N}, \text{ tel que } \forall n \in \mathbb{N}, \ (n \geq N \Rightarrow U_n \leq B).$$

On note

$$U_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty \text{ ou } \lim_{n\to+\infty} U_n = -\infty.$$

Proposition 2.3.6 1)- $\left(U_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty\right)$ est équivalent à $\left(-U_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty\right)$.

2)- Toute suite réelle de limite $+\infty$ ou $-\infty$ est divergente.

Proposition 2.3.7 1)- Toute suite réelle convergente est bornée.
2)- Toute suite réelle tendant vers $+\infty$ est minorée.
3)- Toute suite réelle tendant vers $-\infty$ est majorée.

R 1)- Il existe des suites bornées mais non convergentes, par exemple $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2)- Si une suite réelle tend vers $+\infty$, alors elle n'est pas majorée, mais la réciproque est fausse comme le montre l'exemple $((-1)^n n)_{n\in\mathbb{N}}$.
3)- Toute suite réelle non bornée est divergente.

2.3.4 Propriétés algébriques des suites de limites infinies

Proposition 2.3.8 Soient $(U_n)_n$ et $(V_n)_n$ deux suites numériques.

1)- $\left.\begin{array}{c} U_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty \\ (V_n)_n \text{ minorée} \end{array}\right\} \Rightarrow U_n + V_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.$

2)- $\left.\begin{array}{c} U_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty \\ V_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty \end{array}\right\} \Rightarrow U_n + V_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.$

3)- $\left.\begin{array}{c} U_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty \\ V_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l' \in \mathbb{R} \end{array}\right\} \Rightarrow U_n + V_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.$

4)- $\left.\begin{array}{c} U_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty \quad \text{et} \\ \exists C \in \mathbb{R}_+^*, \exists N \in \mathbb{N}, (n \geq N \Rightarrow V_n \geq C) \end{array}\right\} \Rightarrow U_n . V_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.$

5)- $\left.\begin{array}{c} U_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty \\ V_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty \end{array}\right\} \Rightarrow U_n . V_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.$

6)- $\left.\begin{array}{c} U_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty \\ V_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l' \in \mathbb{R} \end{array}\right\} \Rightarrow U_n . V_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.$

7)- $U_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty \Rightarrow \frac{1}{U_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$

8)- $\left.\begin{array}{c} U_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \text{et} \\ \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq N \Rightarrow U_n \geq 0) \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{1}{U_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.$

Exemples de suites élémentaires

Suites arithmétiques

Définition 2.3.3 Une suite réelle $(U_n)_n$ est dite arithmétique si et seulement s'il existe $r \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ U_{n+1} = U_n + r.$$

L'élément r (qui est alors unique) est appelé la raison de la suite arithmétique $(U_n)_n$.
On a alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, U_n = U_0 + nr.$$

Proposition 2.3.9 l'étude de limite pour une suite arithmétique est immédiate.
- Si $r < 0$, alors $U_n = U_0 + nr \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$.
- Si $r = 0$, alors $U_n = U_0 + nr \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} U_0$.

Si $r > 0$, alors $U_n = U_0 + nr \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

Suites géométriques

Définition 2.3.4 Une suite réelle $(U_n)_n$ est dite géométrique si et seulement s'il existe $q \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ U_{n+1} = qU_n.$$

L'élément q (qui est alors unique sauf si $\forall n \in \mathbb{N}, U_n = 0$) est appelé la raison de la suite géométrique $(U_n)_n$. On a alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, U_n = U_0 q^n.$$

Proposition 2.3.10 Soit $q \in \mathbb{R}$, la suite géométrique $(q^n)_n$ converge si et seulement si :

$$|q| < 1 \text{ } ou \text{ } q = 1.$$

De plus :
1) $|q| < 1 \Rightarrow q^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$
2) $q \in]1, +\infty[\Rightarrow q^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.$

Suites adjacentes

Définition 2.3.5 Deux suites réelles $(U_n)_n$ et $(V_n)_n$ sont dites adjacentes si et seulement si

$$\begin{cases} (U_n)_n \text{ est croissante} \\ (V_n)_n \text{ est décroissante} \\ U_n - V_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \\ U_n \leq V_n, \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Proposition 2.3.11 Si deux suites réelles $(U_n)_n$ et $(V_n)_n$ sont adjacentes alors elles sont convergentes et ont la même limite; de plus en notant l cette limite commune on a :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ U_n \leq U_{n+1} \leq l \leq V_{n+1} \leq V_n.$$

Suite de Cauchy

Définition 2.3.6 Une suite réelle $(U_n)_n$ est dite de Cauchy si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}, (N_\varepsilon = N(\varepsilon)) \text{ tel que } \forall (p,q) \in \mathbb{N}^2,\ \left(p \geq q \geq N_\varepsilon \Rightarrow \left|U_p - U_q\right| \leq \varepsilon\right).$$

Proposition 2.3.12 Toute suite de Cauchy est bornée.

Théorème 2.3.13 **(Critère de Cauchy)** Une suite réelle $(U_n)_n$ est convergente si et seulement si elle est de Cauchy.
On dit que $\mathbb{R}$ est complet.

R L'intérêt du critère de Cauchy est que, pour montrer qu'une suite réelle est convergente il suffit de prouver qu'elle est de Cauchy. A priori, on n'a pas besoin de connaitre la limite de cette suite.

Suites récurrentes

Définition 2.3.7 Soient I un intervalle fermé de $\mathbb{R}$, $f : I \to I$ une application, on peut définir une suite $(U_n)_n$ en se donnant le premier terme U_0 et la relation récurrente $U_{n+1} = f(U_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

R On se limite dans cette étude au cas où f est croissante sur I.

Sens de variation de la suite récurrente $(U_n)_n$.
Comme $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} - U_n = f(U_n) - f(U_{n-1})$, on voit que $U_{n+1} - U_n$ est de même signe que $U_1 - U_0$.
Ainsi $(U_n)_n$ est monotone, et son sens de variation dépend de la position relative de U_1 *et* U_0, c-à-d :
- si $U_1 \geq U_0$ alors $(U_n)_n$ est croissante.
- si $U_1 \leq U_0$ alors $(U_n)_n$ est décroissante.

Nature de la suite récurrente $(U_n)_n$.
Pour déterminer la nature de la suite $(U_n)_n$ il suffit de voir dans chaque exemple si $(U_n)_n$ est minorée, majorée et donc utiliser le critère de convergence des suites monotones.
Si de plus f est continue sur I et si $U_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l \in \mathbb{R}$, alors $l \in I$ (puisque , par hypothèse, I est un intervalle fermé de $\mathbb{R}$) et comme f est continue sur I, en passant à la limite quand $n \to +\infty$ dans la relation $U_{n+1} = f(U_n)$, on déduit que $f(l) = l$.

2.3.5 Résultats généraux

Théorème 2.3.14 Tout nombre réel est la limite d'une suite de nombres rationnels. Autrement dit :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \exists (q_n)_n, \quad q_n \in \mathbb{Q}, \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \text{tel que} \quad q_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x.$$

Définition 2.3.8 (Valeur d'adhérence d'une suite) Soit $(U_n)_n$ une suite réelle. On dit qu'un point $a \in \mathbb{R}$ est une valeur d'adhérence de la suite $(U_n)_n$ si, pour tout nombre réel $\varepsilon > 0$, il existe une infinité de valeurs de n telles que $|U_n - a| < \varepsilon$.

■ **Exemple 2.6** La suite $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$, admet deux valeurs d'adhérence : -1 et 1. ■

Proposition 2.3.15 La limite d'une suite convergente est sa seule valeur d'adhérence.

Définition 2.3.9 (Sous-suite, suite extraite ou suite partielle) Etant données une suite $(U_n)_n$ et une application strictement croissante $\begin{array}{c} s : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \\ k \mapsto s(k) \end{array}$.
La suite $(V_k)_k$ définie par $V_k = U_{s(k)}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ est appelée sous-suite ou suite extraite de la suite $(U_n)_n$.

■ **Exemple 2.7** La suite $(U_{2k})_k$, (repectivement $(U_{2k+1})_k$) est une sous-suite de $(U_n)_n$. ■

Proposition 2.3.16 Si une suite $(U_n)_n$ converge vers l, alors toute suite extraite de $(U_n)_n$ converge aussi vers l.

Proposition 2.3.17 Soit $(U_n)_n$ une suite réelle et $l \in \mathbb{R}$, pour que $(U_n)_n$ converge vers l il faut et il suffit que les sous-suites $(U_{2k})_k$ et $(U_{2k+1})_k$ convergent toutes les deux vers l.

Proposition 2.3.18 $a \in \mathbb{R}$ est une valeur d'adhérence de la suite $(U_n)_n$ si et seulement s'il existe une sous-suite $\left(U_{s(k)}\right)_k$ de $(U_n)_n$ telle que $\lim\limits_{k\to+\infty} U_{s(k)} = a$.

Théorème 2.3.19 **(Deuxième formulation du théorème de Bolzano-Weierstrass)** De toute suite bornée d'éléments de $\mathbb{R}$, on peut extraire une sous-suite convergente.

Corollaire 2.3.20 Si une suite réelle est bornée alors elle admet au moins une valeur d'adhérence.

2.4 Exercices

Exercice 2.1 Etudier la convergence des suites suivantes :
1)- $\left(\sqrt[n]{a}\right)_n$; $a \in \mathbb{R}_+^*$ fixé.
2)- $\left(\frac{a^n}{n^\alpha}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$; $a \in [1,+\infty[$, $\alpha \in \mathbb{N}$ fixés.
3)- $\left(\frac{a^n}{n!}\right)_n$; $a \in \mathbb{R}$ fixé. ■

■ **Solution 2.1** 1)- Nous allons étudier, pour $a \in \mathbb{R}_+^*$ fixé la convergence de la suite du terme général $\sqrt[n]{a}$.
• supposons que $a > 1$.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$; appliquons la formule du binôme de Newton :

$$\begin{aligned} a &= \left(\sqrt[n]{a}\right)^n = \left(1+\left(\sqrt[n]{a}-1\right)\right)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k\left(\sqrt[n]{a}-1\right)^k \\ &\geq \sum_{k=0}^{1} C_n^k\left(\sqrt[n]{a}-1\right)^k = 1+n\left(\sqrt[n]{a}-1\right). \end{aligned}$$

Ceci montre que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \leq \left(\sqrt[n]{a}-1\right) \leq \frac{a-1}{n},$$

d'où, en utilisant le théorème d'encadrement : $\sqrt[n]{a}-1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et donc $\sqrt[n]{a} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.
• Supposons que $0 < a < 1$.
Alors $\frac{1}{a} > 1$, donc (d'après ci-dessus) $\sqrt[n]{\frac{1}{a}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$, or $\sqrt[n]{a} = \left(\sqrt[n]{\frac{1}{a}}\right)^{-1}$, donc $\sqrt[n]{a} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.
• Le cas $a = 1$ est évident.
Finalement pour tout $a \in \mathbb{R}_+^*$ fixé, $\sqrt[n]{a} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.
2)- Etudions, pour $a \in [1,+\infty[$, $\alpha \in \mathbb{N}$ fixés, la convergence de la suite $\left(\frac{a^n}{n^\alpha}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
On a

$$\frac{a^n}{n^\alpha} = \left(\frac{(a^n)^{\frac{1}{\alpha}}}{n}\right)^\alpha = \left(\frac{\left(a^{\frac{1}{\alpha}}\right)^n}{n}\right)^\alpha.$$

Puisque $a^{\frac{1}{\alpha}} > 1$, il existe $h \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $a^{\frac{1}{\alpha}} = 1+h$.

En utilisant la formule du binôme de Newton, on a pour tout $n \in \mathbb{N} - \{0,1\}$:

$$\left(a^{\frac{1}{\alpha}}\right)^n = (1+h)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k h^k \geq 1 + nh + \frac{n(n-1)}{2}h^2 \geq \frac{n(n-1)}{2}h^2.$$

D'où

$$\frac{\left(a^{\frac{1}{\alpha}}\right)^n}{n} \geq \frac{n-1}{2}h^2,$$

et donc d'après le critère de comparaison

$$\frac{\left(a^{\frac{1}{\alpha}}\right)^n}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

D'où le résultat

$$pour\ a \in [1,+\infty[,\ \alpha \in \mathbb{N}\ fixés\ \frac{a^n}{n^\alpha} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

On dit que l'exponnentielle (a^n) l'emporte sur les puissances (n^α).
Par exemples, $\frac{2^n}{n^5} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, $\frac{(3{,}01)^n}{n^{200}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, $\frac{n^3}{2^n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
3)- Etudions, pour $a \in \mathbb{R}$ fixé la convergence de la suite du terme général $\frac{a^n}{n!}$.
Notons par $N = E(|a|) + 1$;on a pour $n \in \mathbb{N}$ tel que $n > N$:

$$\begin{aligned} \left|\frac{a^n}{n!}\right| &= \left(\frac{|a|}{1}.\frac{|a|}{2}\cdots\frac{|a|}{N}\right)\left(\frac{|a|}{N+1}\cdots\frac{|a|}{n}\right) \\ &\leq \left(\frac{|a|}{1}.\frac{|a|}{2}\cdots\frac{|a|}{N}\right)\frac{|a|}{n}. \end{aligned}$$

Sachant que $\left(\frac{|a|}{1}.\frac{|a|}{2}\cdots\frac{|a|}{N}\right)\frac{|a|}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc d'après le théorème d'encadrement on obtient

$$\left|\frac{a^n}{n!}\right| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$

d'où le résultat :

$$pour\ a \in \mathbb{R}\ fixé,\ \frac{a^n}{n!} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

On dit que la factorielle $(n!)$ l'emporte sur l'exponentielle (a^n).
Par exemple, $\frac{3^n}{n!} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. ■

Exercice 2.2 Etudier la convergence et déterminer la limite si elle existe, pour les suites dont les termes généraux sont les suivants :

a) $\frac{\sin n}{n}$ b) $\frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n} kE(kx),\, x\in\mathbb{R}$ c) $\sum_{k=1}^{n^2}\frac{1}{\sqrt{n^2+3k}}$ d) $\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n}\right).$ ■

■ **Solution 2.2** a)- On a $\forall n\in\mathbb{N}^*, 0\leq\left|\frac{\sin n}{n}\right|\leq\frac{1}{n}$.
Comme $\frac{1}{n}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0$, on déduit par le théorème d'encadrement que $\left|\frac{\sin n}{n}\right|\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0$ et par suite :

$$\frac{\sin n}{n}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0.$$

b)- On a $\forall y\in\mathbb{R},\, y-1<E(y)\leq y$, d'où en notant $U_n=\frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n}kE(kx)$:

$$U_n\leq\frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n}k(kx)=\frac{x}{n^3}\sum_{k=1}^{n}k^2.$$

On sait que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$:

$$\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

on obtient alors,

$$U_n\leq\frac{x}{n^3}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

D'autre part

$$U_n\geq\frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n}k(kx-1)=\frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n}k^2x-\frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n}k,$$

On sait aussi que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$:

$$\sum_{k=1}^{n}k=\frac{n(n+1)}{2},$$

d'où

$$\begin{aligned}U_n &\geq \frac{x}{n^3}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}-\frac{1}{n^3}\frac{n(n+1)}{2}\\ &= \frac{x}{n^2}\frac{(n+1)(2n+1)}{6}-\frac{1}{n^2}\frac{(n+1)}{2},\end{aligned}$$

comme $\frac{x}{n^2}\frac{(n+1)(2n+1)}{6}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}\frac{x}{3}$ et $\frac{1}{n^2}\frac{(n+1)}{2}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0$, on conclut par le théorème d'encadrement :

$$U_n\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}\frac{x}{3}.$$

c)- On a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\forall k \in \left\{1,...,n^2\right\}, \ \sqrt{n^2+3k} \leq \sqrt{n^2+3n^2} = 2n,$$

d'où

$$\frac{1}{\sqrt{n^2+3k}} \geq \frac{1}{2n},$$

et en sommant de $k=1$ à $k=n^2$ on obtient

$$\sum_{k=1}^{n^2} \frac{1}{\sqrt{n^2+3k}} \geq n^2 \frac{1}{2n} = \frac{n}{2}.$$

Comme $\frac{n}{2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, on conclut que

$$\sum_{k=1}^{n^2} \frac{1}{\sqrt{n^2+3k}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

d)- En développant le produit , on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned}\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n}\right) &= \left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right)...\left(1+\frac{n}{n}\right) \\ &= 1+\left(\frac{1}{n}+\frac{2}{n}+...+\frac{n}{n}\right)+...\end{aligned}$$

Alors

$$\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n}\right) \geq \sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{n}\frac{n(n+1)}{2} = \frac{n+1}{2}$$

Comme $\frac{n+1}{2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, on obtient

$$\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

■

Exercice 2.3 Etudier le sens de variation et la convergence des suites suivantes :

1) $U_n = \frac{(-1)^n}{n}$; 2) $U_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$; 3) $U_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-2)^k}{7^k}$; 4) $U_n = \ln(n+1) - \ln(n)$;

5) $U_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$. ■

■ **Solution 2.3** 1)- Commençons par étudier le sens de variation de la suite $\left(\frac{(-1)^n}{n}\right)_n$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$U_n = \begin{cases} U_{2k} = \frac{1}{2k};\ \text{si } n = 2k \\ U_{2k+1} = \frac{-1}{2k+1};\ \text{si } n = 2k+1. \end{cases}$$

On remarque que la sous-suite $(U_{2k})_k$ est décroissante, en effet, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ on a :

$$U_{2(k+1)} - U_{2k} = \frac{1}{2k+2} - \frac{1}{2k} = \frac{-2}{2k(2k+2)} < 0;$$

d'un autre côté, la sous-suite $(U_{2k+1})_k$ est croissante, en effet, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ on a :

$$U_{2(k+1)+1} - U_{2k+1} = \frac{-1}{2k+3} - \frac{-1}{2k+1} = \frac{2}{(2k+1)(2k+3)} > 0.$$

Ce qui implique que $(U_n)_n$ n'est pas monotone.
Passons maintenant à l'étude de la convergence.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$-\frac{1}{n} \leq \frac{(-1)^n}{n} \leq \frac{1}{n},$$

puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} -\frac{1}{n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$, d'après le théorème d'encadrement, on obtient

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0.$$

2)- Il est clair que

$$U_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}},$$

d'où pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $(U_n)_n$ est décroissante et tend vers 0.
3)- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\begin{aligned} U_{n+1} - U_n &= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{(-2)^k}{7^k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-2)^k}{7^k} \\ &= \left(\frac{-2}{7}\right)^{n+1}, \end{aligned}$$

or

$$\left(\frac{-2}{7}\right)^{n+1} est \begin{cases} négatif;\ \text{si } n = 2k \\ positif;\ \text{si } n = 2k+1. \end{cases}$$

Par conséquent, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $(U_n)_n$ n'est pas monotone.
Pour la convergence remarquons que la suite U_n est la somme des termes d'une suite géométrique

de raison $\frac{-2}{7}$.

$$\begin{aligned} U_n &= \left(\frac{-2}{7}\right)\frac{1-\left(\frac{-2}{7}\right)^n}{1+\frac{2}{7}} \\ &= \left(\frac{-2}{9}\right)\left(1-\left(\frac{-2}{7}\right)^n\right), \end{aligned}$$

or $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{-2}{7}\right)^n = 0$, donc

$$\lim_{n\to+\infty} U_n = \frac{-2}{9}.$$

4)- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\begin{aligned} U_{n+1} - U_n &= \ln(n+2) - 2\ln(n+1) + \ln(n) \\ &= \ln\left(\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}\right) \\ &= \ln\left(\frac{n^2+2n}{n^2+2n+1}\right) < 0; \end{aligned}$$

car $\frac{n^2+2n}{n^2+2n+1} < 1$.
Par conséquent, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $(U_n)_n$ est décroissante.
Autre méthode :
Remarquons que

$$\begin{aligned} U_n &= \ln(n+1) - \ln(n) \\ &= \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \\ &= \ln\left(1+\frac{1}{n}\right). \end{aligned}$$

d'où

$$U_n = \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = f(n),$$

où

$$f(x) = \ln\left(1+\frac{1}{x}\right), \text{ pour tout } x \in [1,+\infty[.$$

En dérivant, on trouve

$$f'(x) = \frac{-1}{x^2\left(1+\frac{1}{x}\right)} < 0,$$

donc f est décroissante sur $[1,+\infty[$, en particulier, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $(U_n)_n$ est décroissante.
Pour l'étude de la convergence on a

$$\lim_{n\to+\infty} U_n = \lim_{n\to+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \ln 1 = 0.$$

5)- D'après la formule de Newton, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$\begin{aligned}
U_n &= \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1+\frac{n}{n}+\frac{n(n-1)}{2!}\frac{1}{n^2}+\ldots+\frac{n(n-1)\ldots(n-n+1)}{n!}\frac{1}{n^n} \\
&= 2+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\ldots+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{n}\right) \\
&\leq 2+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)+\ldots+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{n+1}\right)+\frac{1}{(n+1)^{n+1}} \\
&= \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} = U_{n+1}.
\end{aligned}$$

Ainsi $(U_n)_n$ est croissante.
Pour l'étude de la covergence, on a

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} U_n &= \lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n\to+\infty} U_n = \lim_{n\to+\infty} \exp\left(n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right) \\
&= \lim_{n\to+\infty} \exp\left(\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}}\right) = e,
\end{aligned}$$

car en faisant le changement de variable $x = \frac{1}{n}$,
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1.$$
■

Exercice 2.4 Soit λ un réel fixé. Considérons les suites $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies pour tout $n \in \mathbb{N}$ par

$$U_n = 10^{-n}E(10^n\lambda) \;\; et \;\; V_n = U_n + 10^{-n}.$$

1) Montrer que les suites $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes.
2) Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \lim_{n\to+\infty} V_n = \lambda$. ■

■ **Solution 2.4** 1) Montrons que $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes.
On remarque que $U_n \leq V_n = U_n + 10^{-n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et on a

$$\begin{aligned}
U_{n+1} - U_n &= 10^{-(n+1)}E(10^{n+1}\lambda) - 10^{-n}E(10^n\lambda) \\
&= 10^{-(n+1)}\left[E(10^{n+1}\lambda) - 10E(10^n\lambda)\right].
\end{aligned}$$

Posons $\alpha := E(10^{n+1}\lambda) - 10E(10^n\lambda)$.

D'autre part, d'après la définition de la partie entière d'un nombre réel, on a

$$10^{n+1}\lambda - 1 < E(10^{n+1}\lambda) \leq 10^{n+1}\lambda,$$

et

$$-10^{n+1}\lambda \leq -10E(10^n\lambda) < -10^{n+1}\lambda + 10.$$

En additionnant membre à membre les deux doubles inégalités on obtient

$$-1 < \alpha < 10,$$

or $\alpha \in \mathbb{Z}$ cela implique

$$\alpha \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\},$$

donc $\alpha \geq 0$. Par conséquent,

$$U_{n+1} - U_n = 10^{-(n+1)}\alpha \geq 0,$$

et la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
Pour le sens de variation de le suite $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ on a

$$\begin{aligned} V_{n+1} - V_n &= U_{n+1} - U_n + 10^{-(n+1)} - 10^{-n} \\ &= 10^{-(n+1)}\alpha + 10^{-(n+1)} - 10^{-n} \\ &= 10^{-(n+1)}(\alpha + 1 - 10) \\ &= 10^{-(n+1)}(\alpha - 9) \leq 0, \end{aligned}$$

car $\alpha \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$.
Donc la suite $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
De plus,

$$V_n - U_n = 10^{-n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \text{ et } \; V_n \geq U_n \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Ainsi $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes.
2) On sait que deux suites adjacentes sont convergentes vers la même limite, de plus on a pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$10^n\lambda - 1 < E(10^n\lambda) \leq 10^n\lambda,$$

cela implique

$$\lambda - 10^{-n} < 10^{-n}E(10^n\lambda) \leq \lambda,$$

puisque $\lim_{n\to+\infty} 10^{-n} = 0$ donc $\lim_{n\to+\infty} \lambda - 10^{-n} = \lambda$, par conséquent

$$\lim_{n\to+\infty} U_n = \lim_{n\to+\infty} 10^{-n}E(10^n\lambda) = \lim_{n\to+\infty} V_n = \lambda.$$

■

Exercice 2.5 Soit la suite $(U_n)_n$ définie par

$$U_n = \cos\frac{1}{n},$$

a) Montrer que la suite $(U_n)_n$ est une suite de Cauchy.
b) Conclure.

Solution 2.5 a) Il s'agit de prouver que :
$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall (p,q) \in \mathbb{N}^2, (p \geq N \text{ et } q \geq N) \Rightarrow \left|U_p - U_q\right| < \varepsilon.$
Soit alors $\varepsilon > 0$, on a

$$\begin{aligned}
\left|U_p - U_q\right| &= \left|\cos\frac{1}{p} - \cos\frac{1}{q}\right| = \left|-2\sin\frac{p-q}{2pq}\sin\frac{p+q}{2pq}\right| \\
&= 2\left|\sin\left(\frac{1}{2p} - \frac{1}{2q}\right)\right|\left|\sin\left(\frac{1}{2p} + \frac{1}{2q}\right)\right| \\
&\leq 2\left|\sin\left(\frac{1}{2p} + \frac{1}{2q}\right)\right| \leq 2\left(\frac{1}{2p} + \frac{1}{2q}\right) \\
&= \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \leq 2\frac{1}{N} < \varepsilon,
\end{aligned}$$

car si $x \geq 0$ $(x$ petit$)$, $\sin x \leq x$, ou bien pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|\sin x| \leq |x|$.
D'où

$$\frac{2}{N} < \varepsilon \text{ si } N > \frac{2}{\varepsilon}.$$

Ainsi $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$, (N est le premier entier strictement supérieur à $\frac{2}{\varepsilon}$, c-à–d $N = E\left(\frac{2}{\varepsilon}\right) + 1$), tel que $\forall (p,q) \in \mathbb{N}^2, (p \geq N \text{ et } q \geq N) \Rightarrow \left|U_p - U_q\right| < \varepsilon.$
b) Comme la suite réelle $(U_n)_n$ est de Cauchy, on conclut qu'elle est convergente.

Exercice 2.6 Soit $(U_n)_n$ la suite définie par

$$U_n = (-1)^n + \frac{1}{n}, \ \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

a) Montrer que $(U_n)_n$ ne converge pas, que cette suite est bornée.
b) Peut-on extraire une sous-suite convergente ?

Solution 2.6 a) $(U_n)_n$ étant une suite d'éléments de $\mathbb{R}$, pour montrer qu'elle ne converge pas il suffit de montrer qu'elle n'est pas de Cauchy.
Soit $\varepsilon = 1$, alors $\forall N \in \mathbb{N}$, $\exists (p,q) \in \mathbb{N}^2$, $p = 2N+1 \geq N$ et $q = 2N+2 \geq N$ et

$$\left|U_p - U_q\right| = \left|U_{2N+1} - U_{2N+2}\right| = 2 - \frac{1}{(2N+1)(2N+2)} \geq 1,$$

c'est à dire que $(U_n)_n$ n'est pas de Cauchy.

$(U_n)_n$ est bornée en effet

$$|U_n| \leq |(-1)^n| + \frac{1}{n} \leq 1+1 = 2, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

b) $(U_n)_n$ étant une suite bornée d'éléments de $\mathbb{R}$, on peut extraire une sous-suite convergente et ceci d'après le théorème de Bolzano-Weiestrass.
Considérons les sous-suites $(V_n) = (U_{2n})$ et $(W_n) = (U_{2n+1})$.
On a

$$V_n = 1 + \frac{1}{2n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \text{ et } W_n = 1 + \frac{1}{2n+1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

D'où

$$\lim_{n\to+\infty} V_n = 1 \text{ et } \lim_{n\to+\infty} W_n = -1.$$

■

Exercice 2.7 Soit $(U_n)_n$ la suite définie par

$$\begin{aligned} U_0 &= U_1 = 1 \\ U_{n+1} &= (U_n + U_{n-1}), \quad \forall n \geq 1. \end{aligned}$$

a) Montrer que $(U_n)_n$ vérifie la relation

$$(U_n)^2 - U_{n-1}U_{n+1} = (-1)^n, \quad \forall n \geq 1.$$

b) Montrer que $U_n \geq n$, $\forall n \in \mathbb{N}$. En déduire que $\lim_{n\to+\infty} U_n = +\infty$.
On considère la suite $(V_n)_n$ définie par

$$V_n = \frac{U_{n+1}}{U_n}, \forall n \in \mathbb{N}.$$

c) Calculer $\lim_{n\to+\infty} (V_{n+1} - V_n)$.
d) Vérifier que

$$V_n = 1 + \frac{1}{V_{n-1}}, \quad \forall n \geq 1 \text{ et } 1 \leq V_n \leq 2, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

e) Montrer que la sous-suite (V_{2n}) est croissante et que la sous-suite (V_{2n+1}) est décroissante.
f) Déduire de ce qui précède que les sous-suites (V_{2n}) et (V_{2n+1}) sont convergentes.
g) Montrer que la suite $(V_n)_n$ converge et calculer sa limite. ■

■ **Solution 2.7** a) Raisonnons par récurrence sur n.
Si $n = 1$, la relation donnée est vraie car

$$(U_1)^2 - U_0U_2 = -1.$$

Supposons maintenant que la relation donnée est vraie jusqu'à l'ordre n et montrons qu'elle restera vraie à l'ordre $n+1$.

On a

$$\begin{aligned}(U_{n+1})^2 - U_nU_{n+2} &= (U_{n+1})^2 - U_n(U_{n+1}+U_n)\\ &= U_{n+1}(U_{n+1}-U_n) - (U_n)^2\\ &= U_{n+1}U_{n-1} - (U_n)^2 = -(-1)^n = (-1)^{n+1},\end{aligned}$$

d'après l'hypothèse de récurrence. Ainsi la relation $(U_n)^2 - U_{n-1}U_{n+1} = (-1)^n, \quad \forall n \geq 1.$
b) Raisonnons par récurrence sur n pour montrer que $U_n \geq n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.
Si $n=0$, $U_0 = 1 \geq 0$, si $n=1$, $U_1 = 1 \geq 1$,si $n=2$, $U_2 = U_1 + U_0 = 1+1 = 2 \geq 2$.
Supposons alors que $\forall n \geq 2$, $U_{n-1} \geq n-1$, $U_n \geq n$ et montrons que $U_{n+1} \geq n+1$.
On a

$$U_{n+1} = U_n + U_{n-1} \geq 2n-1 \geq n+1,\ \forall n \geq 2.$$

Ensuite,

$$\lim_{n\to+\infty} U_n \geq \lim_{n\to+\infty} n = +\infty.$$

Donc

$$\lim_{n\to+\infty} U_n = +\infty.$$

c) Considérons maintenant la suite $(V_n)_n$ définie par

$$V_n = \frac{U_{n+1}}{U_n}, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Calculons alors $\lim_{n\to+\infty}(V_n - V_{n-1})$.
On a d'après a)

$$\begin{aligned}V_n - V_{n-1} &= \frac{U_{n+1}}{U_n} - \frac{U_n}{U_{n-1}}\\ &= \frac{U_{n+1}U_{n-1} - (U_n)^2}{U_nU_{n-1}}\\ &= \frac{(-1)^{n+1}}{U_nU_{n-1}}\end{aligned}$$

Donc

$$\lim_{n\to+\infty}(V_n - V_{n-1}) = \lim_{n\to+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{U_nU_{n-1}} = 0,$$

car c'est le produit d'une suite bornée qui est $\left((-1)^{n+1}\right)_n$ par une suite convergente vers zéro qui est $\left(\frac{1}{U_nU_{n-1}}\right)_n$.
d) On a

$$V_n = \frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{U_n + U_{n-1}}{U_n} = 1 + \frac{U_{n-1}}{U_n} = 1 + \frac{1}{V_{n-1}}, \quad \forall n \geq 1.$$

Il s'en suit

$$V_n = 1 + \frac{1}{V_{n-1}} \geq 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*,$$

car $V_n \geq 0, \ \forall n \in \mathbb{N}$ (puisque $U_n \geq 0, \ \forall n \in \mathbb{N}$). De plus $V_0 = 1$, donc

$$V_n \geq 1, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Par suite

$$\frac{1}{V_{n-1}} \leq 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*,$$

et donc

$$1 + \frac{1}{V_{n-1}} \leq 2, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

D'où $V_n \leq 2, \forall n \in \mathbb{N}$, puisque $V_0 = 1 \leq 2$.
e) Montrons que la sous-suite (V_{2n}) est croissante.
On a d'après a) et b)

$$\begin{aligned}
V_{2n} - V_{2n-2} &= \frac{U_{2n+1}}{U_{2n}} - \frac{U_{2n-1}}{U_{2n-2}} \\
&= \frac{(U_{2n} + U_{2n-1})U_{2n-2} - (U_{2n-1} + U_{2n-2})U_{2n-1}}{U_{2n}U_{2n-2}} \\
&= \frac{U_{2n}U_{2n-2} - (U_{2n-1})^2}{U_{2n}U_{2n-2}} = \frac{U_{2n}U_{2n-2} - (U_{2n-1})^2}{U_{2n}U_{2n-2}} \\
&= \frac{-(-1)^{2n-1}}{U_{2n}U_{2n-2}} > 0,
\end{aligned}$$

De la même manière on montre que la sous-suite (V_{2n+1}) est décroissante.
f) la sous-suite (V_{2n}) est croissante et majorée (par 2) donc elle est convergente. La sous-suite (V_{2n+1}) est décroissante et minorée (par 1) donc elle est convergente.
g) D'après c) on a $\lim_{n \to +\infty} (V_n - V_{n-1}) = 0$, donc

$$\lim_{n \to +\infty} V_{2n} = \lim_{n \to +\infty} V_{2n+1},$$

car si n est pair alors $n-1$ est impair et inversement. Ainsi les sous-suites (V_{2n}) et (V_{2n+1}) convergent vers la même limite, donc (V_n) converge aussi.
Soit

$$l = \lim_{n \to +\infty} V_n.$$

Comme

$$V_n = 1 + \frac{1}{V_{n-1}}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*,$$

alors

$$l = 1 + \frac{1}{l}$$

c'est-à-dire

$$l^2 - l - 1 = 0,$$

d'où

$$l_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} > 0 \ \text{ et } \ l_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} < 0.$$

Or $V_n \geq 0, \ \forall n \in \mathbb{N}$, alors

$$\lim_{n\to+\infty} V_n \geq 0,$$

donc

$$\lim_{n\to+\infty} V_n = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

■

3. Fonctions numériques d’une variable réelle : Limites - Continuité

3.1 Généralités sur les fonctions numériques

Définition 3.1.1 Soit E un sous ensemble de $\mathbb{R}$.
1- On appelle fonction numérique réelle, sur un ensemble E, toute application f de E dans $\mathbb{R}$.

$$\begin{array}{rcl} f & : & E \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x) \end{array}$$

L’ensemble de toutes les fonctions définies de E dans $\mathbb{R}$ est noté par $\mathscr{F}(E,\mathbb{R})$.
2- $\Gamma(f) = \{(x, f(x))\,;\ x \in E\}$ est appelé graphe de la fonction f.
3- Deux fonctions f et g définies de E dans $\mathbb{R}$ sont égales si $f(x) = g(x)$ pour tout $x \in E$.

Définition 3.1.2 **(Fonction paire- Fonction impaire)** Soit E une partie de $\mathbb{R}$ symétrique par rapport à 0, c’est-à-dire $\forall x \in E, -x \in E$.
Soit $f \in \mathscr{F}(E,\mathbb{R})$.
On dit que f est paire si et seulement si $\forall x \in E, f(-x) = f(x)$.
On dit que f est impaire si et seulement si $\forall x \in E, f(-x) = -f(x)$.

Définition 3.1.3 **(Fonction périodique)** Soit $f \in \mathscr{F}(E,\mathbb{R})$.
Soit $T \in \mathbb{R}_*^+$, on dit que f est T-périodique si et seulement si

$$\forall x \in E,\ x+T \in E \ et\ f(x+T) = f(x).$$

On dit alors que T est une période de f.

Définition 3.1.4 **(Image directe et image réciproque d’un ensemble)** Soit $f \in \mathscr{F}(E,\mathbb{R})$ et soient $A \subset E$ et $B \subset \mathbb{R}$. Alors
- $f(A) = \{f(x) \in \mathbb{R};\ x \in A\}$ c’est l’image directe de l’ensemble A par f.
- $f^{-1}(B) = \{x \in E;\ f(x) \in B\}$ c’est l’image réciproque de l’ensemble B par f.

On a :

$$\forall A \subset E,\ A \subset f^{-1}(f(A)),$$

et

$$B \supset f(f^{-1}(B)),\ \forall B \subset \mathbb{R}.$$

Définition 3.1.5 Soient $f : E \to \mathbb{R}$ et $g : F \to \mathbb{R}$. Si $f(E) \cap F \neq \emptyset$ on pourra définir une nouvelle fonction, la composée de f et g notée $g \circ f$:

$$x \mapsto g(f(x))\ définie\ sur\ A \subset E\ tel\ que\ f(A) \subset F.$$

3.1.1 Opérations algébriques sur les fonctions :

Soient $f : E \to \mathbb{R}$ et $g : E \to \mathbb{R}$ deux fonctions définies sur une même partie E de $\mathbb{R}$. On peut alors définir les fonctions suivantes :

• la somme de f et g est la fonction $f + g : E \to \mathbb{R}$ définie par

$$(f+g)(x) \quad = \quad f(x)+g(x),\ pour\ tout\ x \in E;$$

• le produit de f et g est la fonction $f.g : E \to \mathbb{R}$ définie par

$$(f.g)(x) \quad = \quad f(x).g(x),\ pour\ tout\ x \in E;$$

• la multiplication de f par un scalaire $\lambda \in \mathbb{R}$. est la fonction $\lambda.f : E \to \mathbb{R}$ définie par

$$(\lambda.f)(x) \quad = \quad \lambda.f(x),\ pour\ tout\ x \in E.$$

3.1.2 Relation d'ordre dans $\mathscr{F}(E,\mathbb{R})$:

Définition 3.1.6 la relation $\leq$ définie par :

$$\forall f,g \in \mathscr{F}(E,\mathbb{R}),\ (f \leq g \Leftrightarrow \forall x \in E,\ f(x) \leq g(x)),$$

est une relation d'ordre.

Proposition 3.1.1 1- La relation d'ordre $\leq$ sur $\mathscr{F}(E,\mathbb{R})$ est partielle.
2- La relation d'ordre $\leq$ est compatible avec $+$.

$$\forall f,g,h \in \mathscr{F}(E,\mathbb{R}), (f \leq g \Rightarrow\ f+h \leq g+h).$$

3- On a

$$\forall f,g,h \in \mathscr{F}(E,\mathbb{R}), ((f \leq g \text{ et } h \geq 0) \Rightarrow\ f.h \leq g.h).$$

Définition 3.1.7 **(Fonctions majorées, minorées, bornées)** Soit $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction. On dit que :
• f est majorée sur E si $\exists M \in \mathbb{R}\ :\ f(x) \leq M$. • f est minorée sur E si $\exists m \in \mathbb{R}\ :\ f(x) \geq m$.
• f est bornée sur E si f est à la fois majorée et minorée sur E, c'est-à-dire si

$$\exists M \in \mathbb{R}^+,\ \forall x \in E,\ |f(x)| \leq M.$$

■ **Exemple 3.1** 1)- Les suites réelles sont des fonctions réelles d'une varaiable réelle ; (dans ce cas la variable est entière, $n \in \mathbb{N}$).
2)- $x \to f(x) = x$ est notée $I_{\mathbb{R}}$: l'application identité sur $\mathbb{R}$.
3)- $x \to f(x) = a$: la fonction constante.
4)- $x \to f(x) = 0$: la fonction nulle.
5)- $x \to f(x) = x + a$: la fonction translation.
6)- $x \to f(x) = ax$: la fonction homothétie.
7)- $x \to f(x) = ax + b$: la fonction affine.
8)- $x \to f(x) = -x$: la fonction symétrie.
9)- $x \to f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_i x^k$: la fonction polynôme. ■

3.2 Notion de limite en un point

3.2.1 Définitions

Définition 3.2.1 Soit f une fonction définie au voisinage de x_0 (V_{x_0}), sauf peut être en x_0, et $l \in \mathbb{R}$.
On dit que la fonction f admet pour limite l quand x tend vers x_0 si et seulement si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_\varepsilon > 0, (\delta_\varepsilon = \delta(\varepsilon)), \ \forall x \in E, \ (|x - x_0| < \delta_\varepsilon \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon).$$

Définition 3.2.2 (limite à droite -limite à gauche)
1- Soit f une fonction définie sur $]x_0, x_0 + h[$, $h > 0$ alors

$$\lim_{\substack{x \to x_0^+ \\ x \geq x_0}} f(x) = l \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta_\varepsilon > 0, \ \forall x, \ (0 < x - x_0 < \delta_\varepsilon \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon).$$

2- Soit f une fonction définie sur $]x_0 - h, x_0[$, $h > 0$ alors

$$\lim_{\substack{x \to x_0^- \\ x \leq x_0}} f(x) = l \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta_\varepsilon > 0, \ \forall x, \ (-\delta_\varepsilon < x - x_0 < 0 \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon).$$

Théorème 3.2.1 Soit f une fonction définie au (V_{x_0}), (sauf peut être en x_0), alors

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l \Leftrightarrow \lim_{\substack{x \to x_0^+ \\ x \geq x_0}} f(x) = \lim_{\substack{x \to x_0^- \\ x \leq x_0}} f(x) = l$$

3.2.2 Extention de la notion de la limite

Définition 3.2.3 1)- On suppose que E est non borné et $l \in \mathbb{R}$. Alors
a)- $\lim_{x \to +\infty (resp. -\infty)} f(x) = l$ signifie

$$\forall \varepsilon > 0, \exists A > 0, \ \forall x \in E, \ (x > A (resp.\ x < -A) \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon).$$

b)- $\lim_{x \to +\infty (resp. -\infty)} f(x) = +\infty$ signifie

$$\forall B > 0, \exists A > 0, \ \forall x \in E, \ (x > A (resp.\ x < -A) \Rightarrow f(x) > B).$$

c)- $\lim_{x \to +\infty (resp. -\infty)} f(x) = -\infty$ signifie

$$\forall B > 0, \exists A > 0, \ \forall x \in E, \ (x > A (resp.\ x < -A) \Rightarrow f(x) < -B).$$

2)- On suppose que E est borné et $x_0 \in \overline{E}$ (x_0 adhérent à E). Alors $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty (resp. -\infty)$ signifie

$$\forall B > 0, \exists \delta > 0,\ \forall x \in E,\ \left(|x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) > B (resp. < -B)\right).$$

Théorème 3.2.2 **(Critère de limite)** Soit $f \in \mathscr{F}(E, \mathbb{R})$, l un nombre réel (ou l infini) et x_0 un point adhérent à E. Alors

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l \Leftrightarrow \left[\left[\forall (x_n)_n \subset E, \text{ tel que } \lim_{n \to +\infty} x_n = x_0 \right] \Rightarrow \lim_{n \to +\infty} f(x_n) = l \right].$$

Théorème 3.2.3 **(Unicité de la limite)** Si la fonction f admet une limite, elle est unique.

3.2.3 Opérations sur les limites

Théorème 3.2.4 Soient $f, g \in \mathscr{F}(E, \mathbb{R})$ et x_0 un point adhérent à E (éventuellement $x_0 = +\infty$ ou $x_0 = -\infty$). Si $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$ et $\lim_{x \to x_0} g(x) = l'$, alors
1)- $\lim_{x \to x_0} |f(x)| = |l|$.
2)- $\lim_{x \to x_0} f(x) = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} |f(x)| = 0$.
3)- $\lim_{x \to x_0} f(x) + g(x) = l + l'$, (sauf si $l = +\infty, l' = -\infty$ ou $l = -\infty, l' = +\infty$).
4)- $\lim_{x \to x_0} \lambda f(x) = \lambda l$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$.
5)- $\left\{ \begin{array}{c} \lim_{x \to x_0} f(x) = 0 \\ et\ g\ est\ born\acute{e}e\ au\ voisinage\ de\ x_0 \end{array} \right. \Rightarrow \lim_{x \to x_0} f(x).g(x) = 0.$
6)- $\lim_{x \to x_0} f(x).g(x) = l.l'$, (sauf si $l = 0, l' = \pm\infty$ ou $l = \pm\infty, l' = 0$).
7)- Si $l' \neq 0$, alors $\lim_{x \to x_0} \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{l}$.
8)- Si $l' \neq 0$, alors $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{l}{l'}$.
9)- Si $f(x) \neq 0\ \forall x \in E$ et $l = \pm\infty$, alors $\lim_{x \to x_0} \frac{1}{f(x)} = 0$.

Définition 3.2.4 **(Formes indéterminées)**
1)- $\lim_{x \to x_0} f(x) + g(x) = +\infty - \infty$ si $l = +\infty, l' = -\infty$ ou $l = -\infty, l' = +\infty$.
2)- $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0}$ si $l = l' = 0$.
3) $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\infty}{\infty}$ si $l' = \pm\infty$ et $l = \pm\infty$.
4)- $\lim_{x \to x_0} f(x).g(x) = 0.\infty$ si $l = 0$, $l' = \pm\infty$ ou $l = \pm\infty$, $l' = 0$.
5)- $\lim_{x \to x_0} f(x)^{g(x)} = 0^0, 1^\infty, 0^\infty$.

Proposition 3.2.5 Soient E et F deux parties de $\mathbb{R}$, x_0 un point adhérent à E, l et l' des réels. Soient deux applications $f : E \to \mathbb{R}$ et $g : F \to \mathbb{R}$ telles que $f(E) \subset F$.
Si $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$ et $\lim_{y \to l} g(y) = l'$, alors $\lim_{x \to x_0} g \circ f(x) = l'$.

Limites remarquables

1)- $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.
2)- $\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x = e^a$, $a \in \mathbb{R}^*$.

3.3 Fonctions continues

3.3.1 Généralités

Définition 3.3.1 Soit $f \in \mathscr{F}(E,\mathbb{R})$ et x_0 un point de E, on dit que f est continue en x_0 si $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.
Plus précisément, f est continue en x_0 si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, (\delta = \delta(\varepsilon, x_0)), \forall x \in E, \ (|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon).$$

On dit que f est continue sur une partie X de E si elle est continue en tout point de X.

Définition 3.3.2 (Continuité à droite- continuité à gauche) On dit que $f \in \mathscr{F}(E,\mathbb{R})$ est continue à droite (resp. à gauche) en x_0 si

$$\lim_{\substack{x\to x_0^+ \\ x\geq x_0}} f(x) = f(x_0) \text{ resp. } \lim_{\substack{x\to x_0^- \\ x\leq x_0}} f(x) = f(x_0).$$

Théorème 3.3.1 Soit $f \in \mathscr{F}(E,\mathbb{R})$ et x_0 un point de E, on dit que f est continue en x_0 si et seulement si f est continue à droite et à gauche en x_0. Plus précisément,

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) \Leftrightarrow \begin{cases} \lim_{\substack{x\to x_0^+ \\ x\geq x_0}} f(x) = f(x_0) \\ \quad et \\ \lim_{\substack{x\to x_0^- \\ x\leq x_0}} f(x) = f(x_0) \end{cases}$$

Théorème 3.3.2 (0pérations sur fonctions continues) Si $f,g \in \mathscr{F}(E,\mathbb{R})$ sont continues en un point x_0 de E. Alors
a)- $f+g$, $f.g$, $|f|$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $(\lambda.f)$ sont continues en x_0.
b)- Si de plus $g(x_0) \neq 0$ alors les fonctions $\frac{1}{g}$ et $\frac{f}{g}$ définies sur $\{x \in E, g(x_0) \neq 0\}$, sont continues en x_0.
c)- Si en outre $f \in \mathscr{F}(E,\mathbb{R})$ est continue en x_0, $g \in \mathscr{F}(F,\mathbb{R})$ telle que $f(E) \subset F$ et si g est continue en $f(x_0)$ alors la fonction compsée $g \circ f$ est continue en x_0.

Définition 3.3.3 (Fonction discontinue) f est discontinue en x_0 si elle n'est pas continue en x_0, ce qui revient à écrire :

$$\exists \varepsilon > 0, \forall \delta > 0, \ \exists x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\Rightarrow |f(x) - f(x_0)| > \varepsilon.$$

■ **Exemple 3.2**

$$f(x) = \begin{cases} \sin\frac{1}{x}, \text{ si } x \neq 0 \\ 0, \text{ si } x = 0, \end{cases} \quad \text{n'est pas continue en } 0.$$

■

3.3.2 Prolongement par continuité

Définition 3.3.4 Soient $f \in \mathscr{F}(E,\mathbb{R})$, x_0, un nombre réel adhérent à E mais <u>n'appartient pas à E</u>. On dit que f est prolongeable par continuité en x_0 si f admet une limite finie en x_0. Notons

$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} f(x) = l$. Alors la fonction $\widetilde{f} : E \cup \{x_0\} \to \mathbb{R}$ définie par

$$\widetilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in E \ (x \neq x_0) \\ l & \text{si } x = x_0, \end{cases}$$

est continue en x_0.
La fonction $\widetilde{f}$ est appelée pronlongement par continuité de la fonction f au point x_0.

■ **Exemple 3.3**

$$\widetilde{f}(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, \text{ si } x \neq 0 \\ 1, \text{ si } x = 0, \end{cases} \quad \text{est un prolongement par continuité de } f \text{ à } \mathbb{R}$$

$$\text{où } f(x) = \frac{\sin x}{x}.$$

■

3.3.3 Propriétés fondamentales des fonctions continues sur un intervalle

Théorème 3.3.3 Toute fonction continue sur un intervalle fermé borné $[a,b]$
1)- est bornée sur $[a,b]$, c'est-à-dire qu'il existe deux constantes A_1, A_2 telles que $\forall x \in [a,b]$ on ait $A_1 \leq f(x) \leq A_2$.
2)- atteint son minimum $m = \inf\limits_{x\in[a,b]} f(x)$ et son maximum $M = \sup\limits_{x\in[a,b]} f(x)$, c'est-à-dire qu'il existe des éléments x_1 et x_2 de $[a,b]$ tels que $f(x_1) = m = \inf\limits_{x\in[a,b]} f(x)$ et $f(x_2) = M = \sup\limits_{x\in[a,b]} f(x)$.
3)- atteint au moins une fois toute valeur strictement comprise entre son minimum m et son maximum M, c'est-à-dire que pour tout élément y de $]m,M[$ il existe un élément c de $[a,b]$ tel que $y = f(c)$.

R La propriété (1) n'est plus vraie si :
- l'intervalle est borné mais non fermé (par exemple considérer l'intervalle $]1,2]$ et la fonction f définie par $f(x) = \frac{1}{x-1}$).
- l'intervalle est fermé mais non borné (par exemple considérer l'intervalle $[0,+\infty[$ et la fonction f définie par $f(x) = x^2$).

Conséquences

Théorème 3.3.4 L'image d'un intervalle fermé borné $[a,b]$ par une fonction continue f est un intervalle fermé borné, autrement dit

$$f([a,b]) = [m,M].$$

Théorème 3.3.5 **(Théorème des valeurs intermédiaires)** Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur I. Etant donnés deux éléments y_1 et y_2 de $f(I)$ tels que $y_1 < y_2$ et x_1 et x_2 les éléments de I vérifiant $y_1 = f(x_1)$ et $y_2 = f(x_2)$, alors pour tout élément y de $]y_1,y_2[$, il existe un élément x de $]x_1,x_2[$ (ou de $]x_2,x_1[$) tel que $y = f(x)$.

Théorème 3.3.6 **(Cas particulier du théorème des valeurs intermédiaires)** Soit f continue sur $I = [a,b]$. Si $f(a).f(b) < 0$, alors il existe un point $c \in]a,b[$ tel que $f(c) = 0$.

3.3.4 Continuité uniforme

Définition 3.3.5 Soit $f \in \mathscr{F}(E,\mathbb{R})$, on dit que f est une fonction uniformement continue sur E si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, (\delta = \delta(\varepsilon)),\ \forall x,x' \in E,\ \left(|x-x'| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x')| < \varepsilon\right).$$

R Toute fonction $f \in \mathscr{F}(E,\mathbb{R})$ uniformement continue sur E est continue sur E.
La réciproque est fausse dans le cas général.

Théorème 3.3.7 **(Théorème de Heine)** Toute fonction numérique continue sur un intervalle fermé borné $[a,b]$ est uniformément continue sur $[a,b]$.

Définition 3.3.6 (Fonction lipschitzienne) $f \in \mathscr{F}(E,\mathbb{R})$ est dite lipschitzienne sur E si et seulement s'il existe une constante positive K telle que :

$$\forall x,y \in E,\ |f(x)-f(y)| \leq K|x-y|.$$

Si $K<1$, f est une contraction.

Proposition 3.3.8 Toute fonction lipschitzienne est uniformément continue.

3.3.5 Fonctions monotones

Définition 3.3.7 Soit $f \in \mathscr{F}(E,\mathbb{R})$.
1)- On dit que f est croissante sur E si et seulement si

$$\forall x,x' \in E,\ x<x' \Rightarrow f(x) \leq f(x') \ ou\ \frac{f(x)-f(x')}{x-x'} \geq 0.$$

On note f croissante par $f \nearrow$.
2)- On dit que f est décroissante sur E si et seulement si

$$\forall x,x' \in E,\ x<x' \Rightarrow f(x) \geq f(x') \ ou\ \frac{f(x)-f(x')}{x-x'} \leq 0.$$

On note f décroissante par $f \searrow$.
3)- On dit que f est monotone sur E si et seulement si elle est croissante ou décroissante sur E. Si l'inégalité est stricte on dit que la fonction est strictement monotone.

R Si f est croissante sur $[a,b]$ alors $f([a,b])=[f(a),f(b)]$.

Proposition 3.3.9 Si $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ est monotone, alors elle est bornée.

R Si f est monotone sur un intervalle ouvert, elle n'est pas nécessairement bornée, en effet : $f(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x}}$; $x\in[0,1[\Rightarrow f$ n'est pas bornée.

Proposition 3.3.10 Si $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ est monotone alors $\forall x_0\in[a,b]$, $\lim_{x\to x_0^+} f(x)$ *et* $\lim_{x\to x_0^-} f(x)$ existent.

Fonction réciproque d'une fonction continue strictement monotone

Théorème 3.3.11 Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f:I\to\mathbb{R}$ continue et strictement monotone sur I, alors :
1)- $f(I)$ est un intervalle de même nature que I.
2)- $f:I\to f(I)$ est une bijection.
3)- f^{-1} est strictement monotone et continue sur $f(I)$.
On dit alors que f réalise entre I et $f(I)$ une transformation bijective et bicontinue. f est appelée homéomorphisme de I sur $f(I)$.

3.4 Fonctions circulaires réciproques

3.4.1 Fonction Arc-sinus

Définition 3.4.1 Soit la fonction

$$\begin{array}{lcl} f & : & \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right] \to [-1,1] \\ x & \mapsto & f(x) = \sin x \end{array}$$

f est continue strictement croissante de $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ vers $f(\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]) = [-1,1]$, donc bijective.
La fonction réciproque

$$f^{-1} : [-1,1] \to \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$$

est donc continue, bijective et strictement croissante sur $[-1,1]$.
Pour tout $x \in [-1,1]$, $f^{-1}(x) = y \in \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ et $x = \sin y$.
On note $y = f^{-1}(x) = \arcsin x$.

3.4.2 Fonction Arc-cosinus

Définition 3.4.2 Soit la fonction

$$\begin{array}{lcl} f & : & [0,\pi] \to [-1,1] \\ x & \mapsto & f(x) = \cos x \end{array}$$

f est continue strictement décroissante de $[0,\pi]$ vers $f([0,\pi]) = [-1,1]$, donc bijective.
La fonction réciproque

$$f^{-1} : [-1,1] \to [0,\pi]$$

est donc continue, bijective et strictement décroissante sur $[-1,1]$.
Pour tout $x \in [-1,1]$, $f^{-1}(x) = y \in [0,\pi]$ *et* $x = \cos y$.
On note $y = f^{-1}(x) = \arccos x$.

3.4.3 Fonction Arc-tangente

Définition 3.4.3 Soit la fonction

$$\begin{array}{lcl} f & : & \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x) = \tan x \end{array}$$

f est continue strictement croissante de $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ vers $f(\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[) = \mathbb{R}$, donc bijective.
La fonction réciproque

$$f^{-1} : \mathbb{R} \to \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$$

est donc continue, bijective et strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f^{-1}(x) = y \in \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ *et* $x = \tan y$.
On note $y = f^{-1}(x) = \arctan x$.

3.5 Fonctions hyperboliques et leurs réciproques

Définition 3.5.1 — Fonctions hyperboliques directes. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on pose

$$shx = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad chx = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad thx = \frac{shx}{chx}, \text{ et pour } x \neq 0 \ \coth x = \frac{chx}{shx}.$$

3.5.1 Fonction sinus hyperbolique (sh) et sa reciproque

On voit tout de suite que la fonction sh est impaire, dérivable et sa dérivée est

$$(sh)' x = chx \geq 0 \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

Donc sh est strictement croissante et de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$,de plus

$$\lim_{x \to +\infty} shx = +\infty \text{ et } sh0 = 0.$$

Ainsi sh est une bijection de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$, et sa réciproque appelée $argsh$, possède une expression logarithmique

$$argshx = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right).$$

3.5.2 Fonction cosinus hyperbolique (ch) et sa reciproque

On voit immédiatement que la fonction ch est dérivable et sa dérivée est

$$(ch)' x = shx$$

ch réalise une bijection de classe C^∞ strictement croissante de $[0, +\infty[$ vers $[1, +\infty[$, on appelle $argch$ sa réciproque qui possède une expression logarithmique

$$argchx = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right), \text{pour tout } x \in [1, +\infty[.$$

3.5.3 Fonction tangente hyperbolique (th) et sa reciproque

On peut écrire la fonction th sous la forme

$$thx = \frac{shx}{chx} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}.$$

th est impaire, de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$,de plus

$$(th)' x = 1 - (th)^2 x = \frac{1}{(ch)^2 x},$$

et

$$\lim_{x \to +\infty} thx = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1} = 1.$$

Ainsi constitue une bijection de $\mathbb{R}$ vers $]-1, 1[$. on appelle $argth$ sa réciproque qui peut être exprimée sous la forme logarithmétique suivante

$$argthx = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right), \text{ pour tout } x \in]-1, 1[.$$

3.5.4 Fonction cotangente hyperbolique ($coth$) et sa reciproque

Elle est impaire, de classe C^{∞} sur $\mathbb{R}^*$ de plus

$$(\coth)' x = 1 - (\coth)^2 x = -\frac{1}{(sh)^2 x}.$$

Elle constitue une bijection de $\mathbb{R}^*$ vers $\mathbb{R} \diagdown [-1,1]$, son inverse existe et est appelée $arg\coth$ qui elle aussi peut être exprimée sous forme logarithmique

$$arg\coth x = \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right), \text{ pour tout } x \in \mathbb{R} \diagdown [-1,1].$$

Formulaire

On tire des définitions les formules suivantes

$$\begin{aligned} chx + shx &= e^x \\ chx - shx &= e^{-x} \\ ch^2x - sh^2x &= 1. \end{aligned}$$

On obtient aussi les formules d'addition

$$\begin{aligned} ch(a+b) &= cha.chb + sha.shb \\ sh(a+b) &= sha.chb + cha.shb \\ th(a+b) &= \frac{tha+thb}{1+tha.thb}. \end{aligned}$$

On obtient de ce qui précède

$$\begin{aligned} ch(2a) &= ch^2a + sh^2a = 1 + 2sh^2a = 2ch^2a - 1 \\ sh(2a) &= 2sha.cha \\ th(2a) &= \frac{2tha}{1+th^2a} \end{aligned}$$

3.6 Exercices

Exercice 3.1 Soient l un nombre réel et f une fonction numérique réelle définie sur $\mathbb{R}$. On suppose que f est périodique de période T et que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = l$.
Montrer que f est la fonction constante de valeur l. ■

■ **Solution 3.1** Puisque $\lim_{x\to+\infty} f(x) = l$, alors

$$\forall \varepsilon > 0, \exists A > 0,\ \forall x \in \mathbb{R},\ \ (x > A \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon).$$

Soit $x_0 \in \mathbb{R}$, comme $(A - x_0) \in \mathbb{R}$ et $T > 0$ alors, d'après l'axiome d'Archimède, il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $nT > A - x_0$, d'où

$$nT + x_0 > A.$$

Donc

$$|f(nT + x_0) - l| < \varepsilon,$$

or

$$f(nT + x_0) = f(x_0),$$

car f est T-périodique, on a alors

$$|f(x_0) - l| < \varepsilon, \ \ \forall \varepsilon > 0.$$

Ce qui implique que

$$|f(x_0) - l| = 0,$$

on en déduit que

$$f(x_0) = l \text{ pour tout } x_0 \in \mathbb{R}.$$

f est alors la fonction constante de valeur l. ■

Exercice 3.2 Calculer (si elles existent) les limites suivantes :
1)- $\lim_{x\to a} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}+\sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2-a^2}}$, $a \in \mathbb{R}_+^*$, 2)- $\lim_{x\to+\infty} \sin\sqrt{x+1} - \sin\sqrt{x}$, 3)-$\lim_{x\to 0} \frac{1}{1+\exp\left(\frac{1}{x}\right)}$,
4)- $\lim_{x\to 0} \frac{x}{a} E\left(\frac{b}{x}\right)$, $a \in \mathbb{R}_+^*$, $b \in \mathbb{R}$. 5)- $\lim_{x\to 0} x^n \cos\frac{1}{x}$, $n \in \mathbb{N}$. ■

■ **Solution 3.2** 1)- Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$ fixé, on a :

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to a} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}+\sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2-a^2}} &= \lim_{x\to a} \left(\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{\sqrt{x^2-a^2}} + \frac{\sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2-a^2}} \right) \\
&= \lim_{x\to a} \left(\frac{x-a}{\left(\sqrt{x}+\sqrt{a}\right)\sqrt{x^2-a^2}} + \frac{1}{\sqrt{x+a}} \right) \\
& \lim_{x\to a} \left(\frac{1}{\left(\sqrt{x}+\sqrt{a}\right)} \sqrt{\frac{x-a}{x+a}} + \frac{1}{\sqrt{x+a}} \right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2a}}.
\end{aligned}$$

2)- On a

$$0 \leq \left| \sin\sqrt{x+1} - \sin\sqrt{x} \right| = \left| 2\sin\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{2} \cos\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2} \right|$$

et

$$\left| 2\sin\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{2} \cos\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2} \right| \leq 2\left| \sin\frac{1}{2\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)} \right|,$$

par suite, si $\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$ est très petit alors

$$2\left| \sin\frac{1}{2\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)} \right| \leq \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}.$$

Or

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} = 0,$$

on conclut que

$$\lim_{x\to+\infty} \sin\sqrt{x+1} - \sin\sqrt{x} = 0.$$

3)-On distingue deux cas :

$$\lim_{\substack{x\to 0^+\\ x>0}} \frac{1}{1+\exp\left(\frac{1}{x}\right)} = 0,$$

car $\lim_{x\to 0^+} \exp\left(\frac{1}{x}\right) = +\infty$.
Et

$$\lim_{\substack{x\to 0^-\\ x<0}} \frac{1}{1+\exp\left(\frac{1}{x}\right)} = 1$$

car $\lim_{x\to 0^-} \exp\left(\frac{1}{x}\right) = 0$. Les limites à droite et à gauche de zéro étant différentes, on en déduit que

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{1+\exp\left(\frac{1}{x}\right)} \text{ n'existe pas.}$$

4)- Pour tout $x \neq 0$, on a

$$\frac{b}{x} - 1 < E\left(\frac{b}{x}\right) \leq \frac{b}{x}.$$

On distingue deux cas :
1^{er}cas : Si $x > 0$, alors $\frac{x}{a} > 0$ car $a > 0$. Multiplions les membres de la double inégalité précédente par $\frac{x}{a}$, on obtient alors

$$\frac{b}{a} - \frac{x}{a} < \frac{x}{a}E\left(\frac{b}{x}\right) \leq \frac{b}{a},$$

d'après le théorème d'encadrement on en déduit que

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x}{a}E\left(\frac{b}{x}\right) = \frac{b}{a}.$$

$2^{ème}$cas : Si $x < 0$, alors $\frac{x}{a} < 0$ car $a > 0$. Multiplions par $\frac{x}{a}$, on obtient

$$\frac{b}{a} - \frac{x}{a} > \frac{x}{a}E\left(\frac{b}{x}\right) \geq \frac{b}{a},$$

toujours d'après le théorème d'encadrement on en déduit que

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{x}{a}E\left(\frac{b}{x}\right) = \frac{b}{a}.$$

Les limites à droite et à gauche de zéro étant égales, on conclut que

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{a}E\left(\frac{b}{x}\right)=\frac{b}{a}.$$

5)- Il est clair que si $n\geq 1$,

$$\lim_{x\to 0}x^n=0,$$

et pour tout $x\in\mathbb{R}$, on a

$$\left|\cos\frac{1}{x}\right|\leq 1,$$

on en déduit que

$$\lim_{x\to 0}x^n\cos\frac{1}{x}=0,\ \textit{pour tout } n\geq 1.$$

Maintenant si $n=0$, on cherche

$$\lim_{x\to 0}\cos\frac{1}{x}=?$$

Quand $x\to 0$, $\frac{1}{x}\to\infty$ et la fonction cos est périodique, fort possible, cette limite n'existe pas. En effet, considérons les deux suites $(U_n)_n$ et $(V_n)_n$, convergeant toutes les deux vers zéro, définies par :

$$\begin{aligned} U_n &= \frac{1}{2n\pi}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0 \\ &\textit{et} \\ V_n &= \frac{1}{\frac{\pi}{2}+2n\pi}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0 \end{aligned}$$

mais

$$\begin{aligned} \cos\left(\frac{1}{U_n}\right) &= \cos 2n\pi\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}1 \\ &\textit{et} \\ \cos\left(\frac{1}{V_n}\right) &= \cos\frac{\pi}{2}+2n\pi\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0\,. \end{aligned}$$

Donc

$$\lim_{x\to 0}\cos\frac{1}{x}\ \text{n'existe pas.}$$

■

Exercice 3.3 En utilisant les limites remarquables, calculer les limites suivantes :
1)- $\lim_{x\to\pi}\frac{\sin ax}{\sin bx}$, $a,b\in\mathbb{N}^*$; 2)- $\lim_{x\to 0}\frac{1+\sin x-\cos x}{1+\sin px-\cos px}$, $p\in\mathbb{N}^*$; 3)- $\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^x$; 4)- $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}$;
5)- $\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}$, $a\in\mathbb{R}_+^*$. ■

■ **Solution 3.3** 1)- En faisant le changement de variables $t = x - \pi$, on trouve

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\pi}\frac{\sin ax}{\sin bx} &= \lim_{t\to 0}\frac{\sin a\,(t+\pi)}{\sin b\,(t+\pi)} \\
&= \lim_{t\to 0}\frac{a}{b}\frac{(-1)^a\sin at}{(-1)^b\sin bt}\frac{bt}{at} \\
&= \lim_{t\to 0}(-1)^{a-b}\frac{a}{b}\frac{\sin at}{at}\frac{bt}{\sin bt},
\end{aligned}$$

en utilisant la limite remarquable $\lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{y} = 1$, on trouve

$$\lim_{x\to\pi}\frac{\sin ax}{\sin bx} = (-1)^{a-b}\frac{a}{b}.$$

2)- A l'aide des relations trigonométriques

$$\begin{aligned}
1-\cos\alpha x &= 2\sin^2\left(\frac{\alpha x}{2}\right) \\
&\quad\textit{et} \\
\sin 2x &= 2\sin x\cos x
\end{aligned}$$

et en utilisant la limite remarquable $\lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{y} = 1$, on obtient

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{1+\sin x-\cos x}{1+\sin px-\cos px} &= \lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)+\sin x}{2\sin^2\left(\frac{px}{2}\right)+\sin px} \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)+2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{2\sin^2\left(\frac{px}{2}\right)+2\sin\frac{px}{2}\cos\frac{px}{2}} \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{1}{p}\frac{\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)\left(\frac{x}{2}\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}+\cos\frac{x}{2}\right)}{\left(\frac{\sin\frac{px}{2}}{\frac{px}{2}}\right)\left(\frac{px}{2}\frac{\sin\frac{px}{2}}{\frac{px}{2}}+\cos\frac{px}{2}\right)} \\
&= \frac{1}{p}
\end{aligned}$$

3)- On a

$$\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^x = \left(1-\frac{2}{x+1}\right)^x,$$

on pose ensuite

$$\begin{aligned}
y &= -(x+1) \Leftrightarrow x = -(y+1), \\
\text{quand } x &\to -\infty,\ y\to+\infty.
\end{aligned}$$

En utilisant la limite remarquable $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^x = e^a$, on obtient

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^x &= \lim_{y\to+\infty}\left(1+\frac{2}{y}\right)^{-(y+1)}\\ &= \lim_{y\to+\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{2}{y}\right)^y}\cdot\frac{1}{1+\frac{2}{y}}\\ &= e^{-2}.\end{aligned}$$

4)- On a

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x\to0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}.$$

En faisant le changement de variable suivant

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{x} \Leftrightarrow x = \frac{1}{y},\\ \text{quand } x &\to 0,\ y\to\infty.\end{aligned}$$

On obtient

$$\lim_{x\to0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{y\to\infty}\ln\left(1+\frac{1}{y}\right)^y,$$

or

$$\lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^y = e,$$

ce qui entraine

$$\lim_{y\to\infty}\ln\left(1+\frac{1}{y}\right)^y = \ln e = 1.$$

On conclut que

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1.$$

5)- Soit $a>0$, distingons deux cas :
<u>1^{er}cas</u> : si $a=1$ alors $a^x=1$ pour tout $x\in\mathbb{R}$, d'où

$$\frac{a^x-1}{x} = 0,\ pour\ tout\ x\in\mathbb{R},$$

et

$$\lim_{x\to0}\frac{a^x-1}{x} = 0 = \ln 1.$$

<u>$2^{ème}$cas</u> : si $a\neq1$, en faisant le changement de variable suivant

$$\begin{aligned} a^x-1 &= t \Leftrightarrow x = \frac{\ln(t+1)}{\ln a},\\ \text{quand } x &\to 0,\ t\to 0.\end{aligned}$$

Et en utilisant $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$ on trouve

$$\lim_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \lim_{t\to 0} \ln a \frac{t}{\ln(t+1)} = \ln a.$$

Ainsi

$$\lim_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a, \ \textit{pour tout } a > 0.$$

■

Exercice 3.4 1- Montrer en utilisant la définition de la limite que $\lim_{x\to 0} \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right) = 0$.
2- Soit f la fonction définie par

$$f(x) = x^2 \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right),$$

montrer que f admet un prolongement par continuité au point 0. ■

■ **Solution 3.4** 1- Soit $\varepsilon > 0$, (suffisamment petit) il vient alors

$$\left|\exp\left(-\frac{1}{x^2}\right) - 0\right| = \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right) < \varepsilon \Leftrightarrow -\frac{1}{x^2} < \ln\varepsilon \Leftrightarrow |x| < \frac{1}{\sqrt{\ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)}}.$$

Posons $\delta = \frac{1}{\sqrt{\ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)}}$, donc

$$\forall\varepsilon > 0, \ \exists\delta = \frac{1}{\sqrt{\ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)}} > 0, \ |x| < \delta \Rightarrow \left|\exp\left(-\frac{1}{x^2}\right) - 0\right| < \varepsilon.$$

Par conséquent

$$\lim_{x\to 0} \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right) = 0.$$

2- La fonction f, définie par $f(x) = x^2 \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right)$, est définie continue sur $\mathbb{R}^*$.
Etudions sa limite quand x tend vers 0 :
d'après la question (1), on a $\lim_{x\to 0} \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right) = 0$, ce qui entraine que

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} x^2 \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right) = 0,$$

ainsi, f est prolongeable par continuité au point 0 et son prolongement par continuité $\widetilde{f}$ à $\mathbb{R}$ est défini par

$$\widetilde{f}(x) = \begin{cases} x^2 \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right) \text{ si } x \neq 0, \\ 0 \text{ si } x = 0. \end{cases}$$

■

Exercice 3.5 soient f et g deux applications définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \left|\frac{\sin x}{x}\right| \text{ si } x \neq 0, \\ 1 \text{ si } x = 0 \end{cases} \quad et \quad g(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{|x|} \text{ si } x \neq 0, \\ 1 \text{ si } x = 0 \end{cases}$$

f et g sont-elles continues ? ∎

∎ **Solution 3.5** Pour tout $x \neq 0$, l'application f est continue (comme rapport de deux fonctions continues où la fonction se trouvant au dénominateur est non nulle).
Au point $x = 0$, puisque $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, on obtient

$$\lim_{x\to 0} \left|\frac{\sin x}{x}\right| = 1 = f(0).$$

Donc l'application f est continue sur $\mathbb{R}$.
L'application g est continue en tout point $x \neq 0$, en $x = 0$, on a

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{|x|} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1 = g(0),$$

et

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{\sin x}{|x|} = \lim_{x\to 0^-} -\frac{\sin x}{x} = -1.$$

Ainsi

$$g(0) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{|x|} \neq \lim_{x\to 0^-} \frac{\sin x}{|x|},$$

donc l'application g est discontinue en $x = 0$. ∎

Exercice 3.6 Soient deux applications f et g définies et continues de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$. Montrer que si $f \equiv g$ sur $\mathbb{Q}$, alors $f \equiv g$ sur $\mathbb{R}$ tout entier. ∎

∎ **Solution 3.6** Soit $x \in \mathbb{R}$, comme $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$, alors il existe une suite $(x_n)_n$ d'éléments de $\mathbb{Q}$, telle que

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = x,$$

donc

$$f(x) = f\left(\lim_{n\to+\infty} x_n\right),$$

et comme f est continue alors

$$f\left(\lim_{n\to+\infty} x_n\right) = \lim_{n\to+\infty} f(x_n),$$

or $x_n \in \mathbb{Q}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, donc

$$f(x_n) = g(x_n), \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

D'où

$$\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = \lim_{n\to+\infty} g(x_n) = g(x),$$

car g est continue. Ainsi

$$f(x) = g(x), \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

■

Exercice 3.7 Montrer que l'équation $\tan x = x$ admet au moins une solution sur l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. ■

■ **Solution 3.7** Considérons l'application

$$f(x) = \tan x - x, \ sur \ \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[.$$

f est continue sur l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ comme somme de deux fonctions continues sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. De plus on a

$$\lim_{x\to-\frac{\pi}{2}} f(x) = -\infty \text{ et } \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} f(x) = +\infty,$$

ce qui implique qu'il existe $a > -\frac{\pi}{2}$ et $b < \frac{\pi}{2}$ tels que $f(a) < 0$ et $f(b) > 0$ donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $a < c < b$ tel que $f(c) = 0$, c-à-d $\tan c = c$. ■

Exercice 3.8 Montrer que la fonction définie par $f(x) = x^2$ est uniformement continue sur l'intervalle $[a,b]$; $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq b$; et qu'elle n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{R}$ ni sur $\mathbb{R}^+$. ■

■ **Solution 3.8** La fonction $f(x) = x^2$ est continue sur l'intervalle fermé borné $[a,b]$ donc elle est uniformément continue sur cet intervalle d'après le théorème de Heine.
Il s'agit maintenant de prouver qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $\delta > 0$ on peut trouver x, $x' \in \mathbb{R}$, vérifiant $|x - x'| < \delta$ et $|f(x) - f(x)'| \geq \varepsilon$.
Remarquons d'abord que pour $\delta > 0$, il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\frac{1}{n} < \delta$ car $\mathbb{R}$ est archimédien.
Ainsi il existe $\varepsilon = 2 > 0$, tel que pour tout $\delta > 0$ il existe $n \in \mathbb{N}^*$ et x, $x' \in \mathbb{R}$, $x = n + \frac{1}{n}$ et $x = n$, vérifiant

$$|x - x'| = \frac{1}{n} < \delta$$

et

$$|f(x) - f(x)'| = 2 + \frac{1}{n^2} \geq 2.$$

■

Exercice 3.9 Soient $f, g : [0,1] \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues telles que

$$\sup_{x\in[0,1]} f(x) = \sup_{x\in[0,1]} g(x).$$

Montrer qu'il existe $\alpha \in]0,1[$ tel que $f(\alpha) = g(\alpha)$. ■

■ **Solution 3.9** Comme f, g sont continues sur $[0,1]$ alors elles sont bornées et il existe x_1, $x_2 \in [0,1]$ tels que :

$$\sup_{x\in[0,1]} f(x) = f(x_1) \text{ et } \sup_{x\in[0,1]} g(x) = g(x_2).$$

Donc on a

$$f(x_1) = \sup_{x\in[0,1]} f(x) = \sup_{x\in[0,1]} g(x) = g(x_2).$$

- Si $x_1 = x_2$ alors $\alpha = x_1 = x_2$ et $f(\alpha) = g(\alpha)$.
- Si $x_1 \neq x_2$ supposons que $x_1 < x_2$ (sinon $x_1 > x_2$), dans ce cas considérons la fonction

$$h : [0,1] \to \mathbb{R} \; définie \; par \; h(x) = f(x) - g(x).$$

h est continue sur $[0,1]$ car f et g le sont.
Dans ce cas :

$$\begin{aligned} h(x_1) &= f(x_1) - g(x_1) \\ &= \sup_{x\in[0,1]} g(x) - g(x_1) > 0, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} h(x_2) &= f(x_2) - g(x_2) \\ &= f(x_2) - \sup_{x\in[0,1]} f(x) < 0. \end{aligned}$$

Donc on a

$$\begin{cases} h \text{ est continue sur } [x_1, x_2] \\ h(x_1) > 0 \text{ et } h(x_2) < 0, \end{cases}$$

ainsi d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $\alpha \in]x_1, x_2[$ te que

$$h(\alpha) = 0, \text{ et } f(\alpha) = g(\alpha).$$

■

Exercice 3.10 Pour tout entier $n \geq 1$, on définit la fonction $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ par :

$$f_n(x) = x^n + 2x^2 + x - 1.$$

1- Montrer que la fonction f_n est strictement croissante et qu'il existe un unique $x_n \in \left]0, \frac{1}{2}\right[$ tel que $f_n(x_n) = 0$.

2- Montrer que pour tout $x \in [0,1]$, $f_n(x) \geq f_{n+1}(x)$. En déduire que la suite $(x_n)_n$ est croissante et convergente.
3- Montrer que l'on a $\lim_{x\to+\infty}(x_n)^n = 0$. Calculer $\lim_{x\to+\infty} x_n$.

■ **Solution 3.10** 1- La fonction f_n est continue dérivable sur $[0,1]$ et

$$f_n'(x) = nx^{n-1} + 4x + 1 > 0, \text{ pour tout } x \in [0,1].$$

Alors f_n est strictement croissante sur $[0,1]$.
D'autre part on a

$$f_n(0) = -1 < 0 \text{ et } f_n\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^n > 0.$$

Ainsi, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $x_n \in \left]0, \frac{1}{2}\right[$ tel que $f_n(x_n) = 0$, et puisque f_n est strictement croissante sur $\left]0, \frac{1}{2}\right[\subset [0,1]$, il est unique.
2- Montrons que pour tout $x \in [0,1]$, $f_n(x) \geq f_{n+1}(x)$.
On a pour tout $x \in [0,1]$,

$$\begin{aligned} x^n &\geq x^{n+1} \Rightarrow x^n + 2x^2 + x - 1 \geq x^{n+1} + 2x^2 + x - 1 \\ &\Rightarrow f_n(x) \geq f_{n+1}(x) \; pour\ tout\ x \in [0,1]. \end{aligned}$$

D'après la question (1) $f_n(x_n) = f_{n+1}(x_{n+1}) = 0$, or $x_n \in \left]0, \frac{1}{2}\right[\subset [0,1]$,donc

$$f_n(x_n) = f_{n+1}(x_{n+1}) \geq f_{n+1}(x_n),$$

puisque , f_{n+1} est strictement croissante sur $[0,1]$ on obtient

$$x_{n+1} \geq x_n \; pour\ tout\ n \geq 1.$$

Ainsi la suite $(x_n)_n$ est croissante de plus $0 < x_n < \frac{1}{2}$ *pour tout* $n \geq 1$ ce qui implique qu'elle est convergente vers une limite qu'on note par l.
3- $0 < x_n < \frac{1}{2}$ *pour tout* $n \geq 1$ entraîne que $\lim_{x\to+\infty}(x_n)^n = 0$.

$$\begin{aligned} f_n(x_n) &= 0 \Rightarrow (x_n)^n + 2(x_n)^2 + x_n - 1 = 0 \\ &\Rightarrow \lim_{x\to+\infty}\left[(x_n)^n + 2(x_n)^2 + x_n - 1\right] = 0 \\ &\Rightarrow \lim_{x\to+\infty}(x_n)^n + 2\left(\lim_{x\to+\infty} x_n\right)^2 + \lim_{x\to+\infty} x_n - 1 = 0 \\ &\Rightarrow 2l^2 + l - 1 = 0. \end{aligned}$$

Après calcul on trouve

$$l = -1 \notin [0,1] \text{ ou bien } l = \frac{1}{2}.$$

Par conséquent

$$\lim_{x\to+\infty} x_n = \frac{1}{2}.$$

■

4. Fonctions numériques d'une variable réelle : Dérivée - développement limité

4.1 Dérivée du premier ordre

4.1.1 Généralités

Définition 4.1.1 Soit $x_0 \in \mathbb{R}$, et f une fonction définie au voisinage de x_0 (V_{x_0}). On dit que f est dérivable en x_0 si et seulement si

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \text{ existe et est finie.}$$

Cette limite est appelée dérivée de f en x_0 et elle est notée par $f'(x_0)$.

Définition 4.1.2 Soit $f \in \mathscr{F}(E, \mathbb{R})$, on dit que f est dérivable sur E si et seulement si f est dérivable en x_0, $\forall x_0 \in E$. Et la fonction définie par

$$\begin{array}{ccl} f' & : & E \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f'(x), \end{array}$$

est appelée fonction dérivée de f sur E.

Définition 4.1.3 f est dérivable à droite (respectivement à gauche) de x_0 si et seulement si : $\lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$
(respectivement $\lim_{h \to 0^-} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$) existe et est finie.
elle sera notée $f'_d(x_0)$ (respectivement $f'_g(x_0)$).

■ **Exemple 4.1** La fonction valeur absolue $f(x) = |x|$ n'est pas dérivable en 0, mais elle admet une dérivée à droite et une à gauche de 0, en effet :

$$f'_d(0) = 1 \text{ et } f'_g(0) = -1.$$

■

Proposition 4.1.1 f est dérivable en x_0 si et seulement si $f'_d(x_0) = f'_g(x_0)$.

4.1.2 Interprétation géométrique de la dérivée

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et C_f le graphe de f dans le plan $\mathbb{R}^2$; $M_0 = (x_0, f(x_0))$ et $M = (x, f(x))$ deux points du graphe C_f tels que x, $x_0 \in I$ et $x \neq x_0$. Le rapport $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ est la pente de la droite passant par M_0 et M.

Si f est dérivable en x_0, alors quand $x \to x_0$, la droite (M_0M) a pour position limite la droite passant par M_0 et de pente $f'(x_0)$:

Par définition cette droite est la tangente à C_f au point M_0. Elle a pour équation

$$y = (x - x_0)f'(x_0) + f(x_0)$$

4.1.3 Notion de différentielle

Soit f dérivable en x_0 ; on définit une fonction ζ_{x_0} en posant :

$$\zeta_{x_0}(h) = \begin{cases} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} - f'(x_0), & \text{si } h \neq 0 \\ 0 & \text{si } h = 0 \end{cases} \quad h \textit{ assez petit}.$$

On a donc

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + hf'(x_0) + h\zeta_{x_0}(h),$$

et

$$\lim_{h\to 0} \zeta_{x_0}(h) = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} - f'(x_0) = 0.$$

Donc la fonction ζ_{x_0} est continue en 0.

Définition 4.1.4 La fonction $h \mapsto f'(x_0).h$ est dite la différentielle de la fonction f au point x_0 et elle est notée df_{x_0} telle que $h \mapsto df_{x_0}(h) = f'(x_0).h$.
Dans ce cas f est dite différentiable au point x_0.

Proposition 4.1.2 Soit $x_0 \in \mathbb{R}$, et f une fonction définie au voisinage V_{x_0} du point x_0. f est différentiable en x_0 si et seulement s'il existe $a \in \mathbb{R}$ et $\zeta_{x_0}(.)$ vérifiant

$$\begin{cases} \zeta_{x_0} \textit{est continue en } 0 \text{ et } \zeta_{x_0}(0) = 0 \\ f(x_0 + h) = f(x_0) + h.a + h.\zeta_{x_0}(h), \end{cases}$$

pour tout h assez petit tel que $x_0 + h \in V_{x_0}$. Dans ce cas $a = f'(x_0)$.

■ **Exemple 4.2** 1)- $f(x) = x$, f est différentiable en tout point x_0 de $\mathbb{R}$. $df_{x_0}(h) = h$ et f est dérivable en x_0 et $f'(x_0) = 1$.
2) $\varphi(x) = \sin x$, φ est différentiable en tout point x_0 de $\mathbb{R}$. En effet

$$\begin{aligned} \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x_0+h) - \sin(x_0)}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{2}{h} \sin\frac{h}{2} \cos(x_0 + \frac{h}{2}) \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}.\cos(x_0 + \frac{h}{2}) \\ &= \cos x_0. \end{aligned}$$

Et donc

$$d\varphi_{x_0}(h) = \cos x_0.h \text{ et } \varphi'(x_0) = \cos x_0.$$

■

4.1.4 Propriétés des fonctions dérivables

Proposition 4.1.3 **(Continuité des fonctions dérivables)** Toute fonction dérivable en x_0 est continue en x_0.
La réciproque est fausse en effet, la fonction valeur absolue $f(x) = |x|$ est continue en 0, mais elle n'est pas dérivable en 0.

Théorème 4.1.4 **(Opérations sur les fonctions dérivables)** Soient f, g deux fonctions définies et dérivables en x_0 et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors :
1) $f+g$ est dérivable en x_0 et $(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$.
2) λf est dérivable en x_0 et $(\lambda f)'(x_0) = \lambda . f'(x_0)$.
3) $f.g$ est dérivable en x_0 et $(f.g)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$.
4) Si $g(x_0) \neq 0$, $\frac{1}{g}$ est dérivable en x_0 et $\left(\frac{1}{g}\right)'(x_0) = -\frac{g'(x_0)}{(g(x_0))^2}$.
5) Si $g(x_0) \neq 0$, $\frac{f}{g}$ est dérivable en x_0 et $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{(g(x_0))^2}$.

Théorème 4.1.5 **(Dérivée de la fonction composée)** Soient f et g deux fonctions telles que la composée $g \circ f$ est définie. Si f est dérivable en x_0 et g est dérivable en $f(x_0)$, alors $g \circ f$ est dérivable en x_0 et

$$(gof)'(x_0) = g'(f(x_0)).f'(x_0).$$

Théorème 4.1.6 **(Dérivée de la fonction réciproque)** Soient f une application bijecive, $f : I \to f(I)$, $x_0 \in I$ et $y_0 = f(x_0) \in f(I)$, on suppose que f est dérivable en x_0, que $f'(x_0) \neq 0$ et que f^{-1} est continue en y_0. Alors la fonction réciproque $f^{-1} : f(I) \to I$ est dérivable en y_0 et

$$\left(f^{-1}\right)'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}.$$

R La formule donnant la dérivée de la fonction réciproque f^{-1} de f est facile à retrouver. On a

$$\left(f^{-1} \circ f\right)(x) = x, \ \forall x \in D_f;$$

si de plus f et f^{-1} sont dérivables, alors

$$\left(f^{-1} \circ f\right)'(x) = \left[\left(f^{-1}\right)'(f(x))\right].f'(x) = 1,$$

en posant $y = f(x)$, on obtient

$$\left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}, \ \forall y \in D_{f^{-1}}.$$

Application :

1)- **Dérivées des fonctions circulaires inverses**

• Pour tout $x \in [-1, 1]$, on a

$$(\arcsin)' x = \frac{1}{\sin'(\arcsin(x))} = \frac{1}{\cos(\arcsin(x))} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(\arcsin(x))}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

• Pour tout $x \in [-1,1]$, on a

$$(\arccos)' x = \frac{1}{\cos'(\arccos(x))} = \frac{-1}{\sin(\arccos(x))} = \frac{-1}{\sqrt{1-\cos^2(\arccos(x))}} = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

• Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$(\arctan)' x = \frac{1}{\tan'(\arctan(x))} = \frac{1}{1+\tan^2(\arctan(x))} = \frac{1}{1+x^2}.$$

2)- **Dérivées des fonctions hyperboliques inverses**

• Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$(argsh)' x = \frac{1}{sh'(argsh(x))} = \frac{1}{ch(argsh(x))} = \frac{1}{\sqrt{1+sh^2(argsh(x))}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

• Pour tout $x \in]1,+\infty[$, on a

$$(argch)' x = \frac{1}{ch'(argch(x))} = \frac{1}{sh(argch(x))} = \frac{1}{\sqrt{ch^2(argch(x))-1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}.$$

• Pour tout $x \in]-1,1[$, on a

$$(argth)' x = \frac{1}{th'(argth(x))} = \frac{1}{1-th^2(argth(x))} = \frac{1}{1-x^2}.$$

• Pour tout $x \in \mathbb{R} \backslash [-1,1]$, on a

$$(arg\coth)' x = \frac{1}{\coth'(arg\coth(x))} = \frac{1}{1-\coth^2(arg\coth(x))} = \frac{1}{1-x^2}.$$

4.1.5 Utilisation de la dérivée, théorèmes fondamentaux

Extremums

Définition 4.1.5 Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction et $x_0 \in I$, on a :
- f admet un extremum local en x_0 si f a un maximum ou bien un minimum en x_0.
- f admet un maximum (respectivement un minimum) en x_0, s'il existe un intervalle ouvert $J \subset I$ centré en x_0, tel que $f(x) \leq f(x_0)$ (respectivement $f(x) \geq f(x_0)$), $\forall x \in J$.

■ **Exemple 4.3** Soit f une fonction définie par :

$$\begin{array}{lcl} f & : & \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x) = x^2 - 1. \end{array}$$

Pour tout $-1 < x < 1$, on a $x^2 < 1$ ce qui entraine $x^2 - 1 = f(x) < 0 = f(1) = f(-1)$.
Et pour tout $-1 < x < 1$, on a $f(x) \geq -1 = f(0)$.
Donc f admet un minimum local en 0 et f atteint un maximum local en 1 et -1. ■

Théorème 4.1.7 Si f admet un extremum local en x_0 et f est dérivable en x_0, alors

$$f'(x_0) = 0.$$

R Si f admet un maximum en x_0, alors $(-f)$ admet un minimum en x_0.

Théorème 4.1.8 **(Théorème de Rolle)** Soient a et b deux réels tels que $a < b$. Si f est une fonction continue sur l'intervalle fermé $[a,b]$, dérivable sur l'intervalle $]a,b[$ et vérifiant $f(a) = f(b)$, alors il existe au moins un élément $c \in]a,b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Théorème 4.1.9 **(Théorème des accroissements finis)** Soient a et b deux réels tels que $a < b$. Si f est une fonction continue sur l'intervalle fermé $[a,b]$, dérivable sur l'intervalle $]a,b[$, alors il existe un élément $c \in]a,b[$ tel que

$$f(a) - f(b) = f'(c)(a-b).$$

(Autre formulation du théorème des accroissements finis) soient I un intervalla de $\mathbb{R}$, $a \in I$ et f une fonction définie et continue sur l'intervalle I, dérivable sur I sauf peut-être en a. Alors pour tout h vérifiant $a+h \in I$, il existe $\theta \in]0,1[$ tel que

$$f(a+h) - f(a) = h.f'(a+\theta h).$$

Graphiquement : Le théorème des accroissements finis implique l'existence d'un point $(c, f(c))$ du graphe de f où la tangente est parallèle à la droite passant par les points $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$.

Corollaire 4.1.10 **(Sens de variation)** Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$. Alors
1)- f est constante sur $[a,b]$ si et seulement si $\forall x \in]a,b[,\ f'(x) = 0$.
2)- f est croissante sur $[a,b]$ si et seulement si $\forall x \in]a,b[,\ f'(x) \geq 0$.
3)- f est décroissante sur $[a,b]$ si et seulement si $\forall x \in]a,b[,\ f'(x) \leq 0$.

Théorème 4.1.11 **(Théorème des accroissements finis généralisé)** Soient a et b deux réels tels que $a < b$. Si f et g sont deux fonctions définies et continues sur l'intervalle fermé $[a,b]$, dérivables sur l'intervalle ouvert $]a,b[$, si de plus $g'(x) \neq 0$, alors il existe un élément $c \in]a,b[$ tel que

$$\frac{f(a) - f(b)}{g(a) - g(b)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Théorème 4.1.12 **(Règle de l'Hospital)** Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ un point adhérent à I, f et g deux fonctions définies et continues sur I sauf peut-être en a, telles que :
1)- $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$.
2)- f et g soient dérivables sur $I \setminus \{a\}$ et $g'(x) \neq 0$ pour tout $x \in I \setminus \{a\}$.
Si $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l$ (où $l \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$), alors $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = l$.

R La règle de l'Hospital reste valable si les conditions $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$ sont remplacées par $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = \infty$.

4.2 Fonctions convexes

Définition 4.2.1 Soit $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, f est convexe sur I si et seulement si l'inégalité suivante est vérifiée

$$\forall x,y \in I;\ f(tx+(1-t)y) \leq tf(x)+(1-t)f(y),\ \forall t \in [0,1].$$

- f est concave sur I si et seulement si $(-f)$ est convexe sur I.

Définition 4.2.2 **(Autre définition d'une fonction convexe)** Soit $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, f est convexe sur I si et seulement si l'inégalité suivante est vérifiée

$$\forall x,y \in I;\ \forall \alpha,\beta > 0,\ \alpha+\beta = 1;\ f(\alpha x+\beta y) \leq \alpha f(x)+\beta f(y).$$

Proposition 4.2.1 Soit $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, f est convexe sur I si et seulement si

$$\forall a,b \in I\ \ (a<b);\ \forall x \in [a,b] : f(x) \leq f(a)+(x-a)\,\frac{f(a)-f(b)}{a-b}$$

Proposition 4.2.2 **(Critère de convexité pour les fonctions dérivables)** Soit $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, une fonction dérivable sur I, alors f est convexe sur I si et seulement si f' est croissante sur I.
Et on a de plus

$$\forall a,x \in I;\ f(x) \geq f(a)+f'(a)\,(x-a).$$

4.3 Dérivées successives

4.3.1 Généralités

Définition 4.3.1 **(Fonction dérivée d'ordre n)** Soient I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$,et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur I. Si la fonction $f' : I \to \mathbb{R}$ est dérivable sur I, on note $f'' = (f')' :$ $I \to \mathbb{R}$ la fonction dérivée de f' est est appelée dérivée seconde de f.
En général, si $n \in \mathbb{N}$, alors on définit, si elle existe, la dérivée n-ième de f,(ou bien fonction dérivée d'ordre n de f) $f^{(n)} : I \to \mathbb{R}$ en posant :
i)- $f^{(0)} = f$,
ii)- $f^{(p+1)} = \left(f^{(p)}\right)'$, pour tout $p = 0,\ldots,n-1$.
On dira alors que f est n fois dérivable sur I.

Définition 4.3.2 **(Fonction de classe $\mathbf{C^n}$)** $f : I \to \mathbb{R}$ est une fonction de classe C^n, si elle admet des dérivées continues jusqu'à l'ordre n.
On dit généralement que f est n fois continûment dérivable.

Théorème 4.3.1 **(Formule de Leibnitz)** Si $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : I \to \mathbb{R}$ sont deux fonctions n fois dérivables sur I, alors la fonction $(f.g)$ est n fois dérivable et

$$(f.g)^{(n)} = \sum_{i=0}^{n} C_n^i f^{(i)} g^{(n-i)},$$

où

$$C_n^i = \frac{n!}{i!\,(n-i)!}.$$

Proposition 4.3.2 **(Critère de convexité pour les fonctions deux fois dérivables)**
- f est convexe sur $[a,b]$ si et seulement si $\forall x \in]a,b[,\ f''(x) \geq 0$.
- f est concave sur $[a,b]$ si et seulement si $\forall x \in]a,b[,\ f''(x) \leq 0$.

4.3.2 Formule de Taylor

Théorème 4.3.3 **(Formule de Taylor-Lagrange)** Soit f une fonction de classe C^n sur un intervalle $[a,b]$ de $\mathbb{R}$, ayant une dérivée d'ordre $(n+1)$ sur l'intervalle ouvert $]a,b[$, alors il existe un élément $c \in]a,b[$ tel que

$$f(b) = f(a) + \frac{(b-a)}{1!}f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2!}f''(a) + \ldots + \frac{(b-a)^n}{n!}f^{(n)}(a) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c).$$

C'est la formule de Taylor d'ordre n avec reste de Lagrange : $\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c)$.

Si on pose dans la formule ci-dessus $b = a+h$, on a $c = a+\theta h$, où $0 < \theta < 1$, et on obtient plus précisement le théorème suivant :

Théorème 4.3.4 **(Formule de Taylor-Mac-Laurin)** Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, a un élément de I et f une fonction de classe C^n sur I admettant une dérivée d'ordre $(n+1)$ sur I sauf peut-être en a. Alors pour tout $(a+h) \in I$, il existe un élément $\theta \in]0,1[$ tel que

$$f(a+h) = f(a) + \frac{h}{1!}f'(a) + \frac{h^2}{2!}f''(a) + \ldots + \frac{h^n}{n!}f^{(n)}(a) + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(a+\theta h).$$

A partir de cette dernière formule, pour $a = 0$, $a+h = x$ et $0 < \theta < 1$, on obtient la formule de Mac-Laurin :

$$f(x) = f(0) + \frac{h}{1!}f'(0) + \frac{h^2}{2!}f''(0) + \ldots + \frac{h^n}{n!}f^{(n)}(0) + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\theta x).$$

Théorème 4.3.5 **(Formule de Taylor-Young)** Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, a un élément de I et f une fonction de classe C^n sur I admettant une dérivée d'ordre $(n+1)$ en a. Alors pour tout $(a+h) \in I$, il existe une fonction numérique ε d'une variable réelle telle que

$$f(a+h) = f(a) + \frac{h}{1!}f'(a) + \frac{h^2}{2!}f''(a) + \ldots + \frac{h^n}{n!}f^{(n)}(a) + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!}\left(f^{(n+1)}(a) + \varepsilon(h)\right);$$

avec $\lim_{h\to 0}\varepsilon(h) = 0$.
Il s'agit de la formule de Taylor d'ordre n avec reste de Young : $\frac{h^{n+1}}{(n+1)!}\left(f^{(n+1)}(a) + \varepsilon(h)\right)$.

4.4 Développement limité

4.4.1 Comparaison locale des fonctions

Notion de o et O de Landau (Prépondérence et dominance)

Définition 4.4.1 f est négligeable devant g quand $x \to x_0$ s'il existe une fonction h définie sur un voisinage V_{x_0} de x_0 telle que $\lim_{x\to x_0} h(x) = 0$; et vérifiant :

$$f(x) = g(x).h(x), \quad \forall x \in V_{x_0}.$$

On dira que g est prépondérante devant f et on note :

$$f = o(g) \quad (quand\ x \to x_0) \text{ ou bien } f = \underset{x_0}{o}(g).$$

Proposition 4.4.1 Soient f et g définies au voisinage de x_0, on a l'équivalence suivante :

$$f = \underset{x_0}{o}(g) \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{f}{g} \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} 0 \\ g(x_0) = 0 \Rightarrow f(x_0) = 0 \end{cases}.$$

R 1)- $\underset{x_0}{o}(1)$ est l'ensemble des fonctions f définies sur E telles que $\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$.

2)- On écrit $f(x) = \underset{0}{o}(x^n)$ s'il existe une fonction ε définie sur un voisinage V_0 de 0, telle que

$$f(x) = x^n.\varepsilon(x), \quad \forall x \in V_0 \text{ et } \lim_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0.$$

Définition 4.4.2 f est dominée par g quand $x \to x_0$ s'il existe une fonction h définie et bornée sur un voisinage V_{x_0} de x_0 telle que

$$f(x) = g(x).h(x), \quad \forall x \in V_{x_0}.$$

On note :

$$f = O(g) \quad (quand\ x \to x_0) \text{ ou bien } f = \underset{x_0}{O}(g).$$

R 1)- $\underset{x_0}{O}(g)$ est l'ensemble des fonctions f définies sur E telles qu'il existe une constante C et un voisinage V_{x_0} de x_0, vérifiant

$$|f(x)| \leq C\ |g(x)|, \ \forall x \in V_{x_0}.$$

2)- $\underset{x_0}{O}(1)$ est l'ensemble des fonctions bornées au voisinage de x_0.

Equivalence

Définition 4.4.3 Soient $f, g \in \mathscr{F}(E, \mathbb{R})$, $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ un point adhérent à E, vérifiant :

$$\forall x \in V_{x_0} \setminus \{x_0\}, \ f(x) \neq 0 \text{ et } g(x) \neq 0, \ (\text{où } V_{x_0} \text{ est un voisinage de } x_0).$$

On dit que f est équivalente à g quand $x \to x_0$ si et seulement s'il existe une fonction λ définie sur V_{x_0} telle que

$$\lim_{x \to x_0} h(x) = 1 \text{ et } f(x) = g(x).\lambda(x), \quad \forall x \in V_{x_0}.$$

On note :

$$f \underset{x_0}{\sim} g$$

Propriétés

i)- La relation $\sim$ est une relation d'équivalence sur $\mathscr{F}(E, \mathbb{R})$.

ii)- $\begin{cases} f \underset{x_0}{\sim} g \\ h \underset{x_0}{\sim} k \end{cases} \Rightarrow f.h \underset{x_0}{\sim} g.k$

iii)- $\begin{cases} f \underset{x_0}{\sim} g \\ h \underset{x_0}{\sim} k \end{cases} \Rightarrow \frac{f}{h} \underset{x_0}{\sim} \frac{g}{k}.$

iv)- $\begin{cases} f \underset{x_0}{\sim} g \\ \lim_{x\to x_0} g(x) = l \end{cases} \Rightarrow \lim_{x\to x_0} f(x) = l.$

v)- $f \underset{x_0}{\sim} g \Rightarrow \begin{cases} \frac{f}{g} \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} 1 \\ f(x_0) = 0 \Rightarrow g(x_0) = 0 \end{cases}.$

vi)- $f \underset{x_0}{\sim} g \Rightarrow \begin{cases} f = \underset{x_0}{O}(g) \\ g = \underset{x_0}{O}(f) \end{cases}.$

vii)- $f \underset{x_0}{\sim} g \Leftrightarrow f - g = \underset{x_0}{o}(g).$

Attention :

En général, l'équivalence des fonctions n'est pas pas compatible avec l'addition, autrement dit : si $f \underset{x_0}{\sim} g$ et $h \underset{x_0}{\sim} k$ on ne peut pas toujours déduire que $f + h \underset{x_0}{\sim} g + k$, en effet :
$\cos x \underset{0}{\sim} 1 + x$ et $-1 \underset{0}{\sim} -1$ mais, $\cos x - 1 \underset{0}{\nsim} x$.

4.4.2 Développements limités (d.l.n)

Définition 4.4.4 Soit f une fonction définie dans V_0, un voisinage de 0, si :

$$\exists a_i,\ i = 0,1,2,\ldots,n \text{ tels que } \forall x \in V_0,\ f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i + x^n o(1).$$

Alors f admet un développement limité d'ordre n $(d.l.n)$ au voisinage de 0.
$\sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ est dite partie régulière du $(d.l.n)$.
$x^n o(1)$ est dite reste du $(d.l.n)$.
On peut écrire $o(x^n)$ ou bien $x^n \varepsilon(x)$ avec $\lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$ au lieu de $x^n o(1)$.

■ **Exemple 4.4** Soit $f(x) = \frac{1}{1-x}$, pour $n \geq 1$, on a :

$$1 - x^{n+1} = (1-x)\left(1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n\right),$$

ce qui entraîne :

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n + x^n \frac{x}{1-x} \Rightarrow o(1) = \frac{x}{1-x}.$$

■

Proposition 4.4.2 Si f admet un développement limité d'ordre n $(d.l.n)$, alors il est unique.

On peut définir le développement limité d'ordre n $(d.l.n)$ d'une fonction f au voisinage de $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ en faisant un changement de variables pour se ramener à l'origine 0.

Définition 4.4.5 Soit $E \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ un point adhérent à E et f une fonction définie sur E (sauf peut-être en x_0). On dit que f admet un développement limité d'ordre n au voisinage de x_0 s'il existe des réels b_i, $i = 0,1,2,\ldots,n$ et une fonction ε tels que :
- Si $x_0 \in \mathbb{R}$, on pose $X = x - x_0$ et on obtient

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} b_i (x - x_0)^i + (x - x_0)^n \varepsilon(x - x_0), \text{ avec } \lim_{x\to x_0} \varepsilon(x - x_0) = 0.$$

-Si $x_0 = \pm\infty$, $X = \frac{1}{x}$ et on aura

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} b_i \left(\frac{1}{x}\right)^i + \left(\frac{1}{x}\right)^n \varepsilon\left(\frac{1}{x}\right), \text{ avec } \lim_{x\to\pm\infty} \varepsilon\left(\frac{1}{x}\right) = 0.$$

Proposition 4.4.3 Soit f une fonction admettant un développement limité d'ordre n $(d.l.n)$ au voisinage de 0.
- Si f est une fonction paire alors la partie régulière de son $d.l.n$ est un polynôme pair.
- Si f est une fonction impaire alors la partie régulière de son $d.l.n$ est un polynôme impair.

Proposition 4.4.4 Si $f^{(n)}(0)$ existe alors f admet un développement limité d'ordre n au voisinage de 0 qui coincide avec son développement Taylor-Young.

4.4.3 Opérations algébriques sur les d.l.n

Proposition 4.4.5 Si f et g sont deux fonctions admettant des $d.l.n$ au voisinage de 0, alors :
i)- $f+g$ admet un $d.l.n$ au voisinage de 0 en faisant la somme des parties régulières des $d.l.n$ de f et g.
ii)- $f.g$ admet un $d.l.n$ au voisinage de 0 en faisant le produit des parties régulières des $d.l.n$ de f et g, et ne gardant que les termes d'ordre inférieur ou égal à n.
Si $g(0) \neq 0$, alors $\frac{f}{g}$ admet un $d.l.n$ au voisinage de 0 dont la partie régulière est obtenue en faisant la division selon les puissances croissantes des parties régulières des $d.l.n$ de f et g et en s'arretant à l'ordre n.

4.4.4 D.l.n d'une fonction composée

Si f et g sont deux fonctions admettant des $d.l.n$ au point 0, et si $\lim_{x\to 0} g(x) = 0$, alors $f \circ g$ admet un $d.l.n$ au point 0, dont la partie régulière est obtenue en remplaçant dans la partie régulière du $d.l.n$ de $f(y)$ la variable y par la partie régulière du $d.l.n$ de $g(x)$.

4.4.5 Primitivation d'un d.l.n

Si $f : V_0 \to \mathbb{R}$, est de classe C^1 sur V_0 et f' admet un $d.l.n$ (en 0) dont la partie régulière est notée $\text{Reg}\,(f')$. Alors f admet un $d.l.n$ dont la partie régulière est obtenue par intégration de $\text{Reg}\,(f')$:

$$\forall x \in V_0,\ f(x) = f(0) + \int_0^x \text{Reg}\,(f') + x^{n+1} o(1).$$

4.4.6 Dérivation d'un d.l.n

Si $f : V_0 \to \mathbb{R}$, est de classe C^1 sur V_0 et f, f' admettent des $d.l.n+1$ et $d.l.n$ respectivement en 0, alors

$$\text{Reg}\,(f') = (\text{Reg}\,(f))'.$$

4.4.7 Infiniment petit - Partie principale

Définition 4.4.6 1- Soit f une fonction définie au voisinage de x_0 (x_0 éventuellement infini). On dit que $f(x)$ est un infiniment petit au voisinage de x_0 si $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$.
2- Soit f un infiniment petit au voisinage de $x_0 = 0$, $a \in \mathbb{R}^*$ et $n \in \mathbb{N}$. On dit ax^n est la partie principale de $f(x)$ quand x tend vers 0 si $f(x)$ est équivalente à ax^n quand x tend vers 0.

4.4.8 Application des développements limités

Application à la recherche de limites

Puisque les développements limités permettent l'étude de fonction au voisinage d'un point x_0, ils peuvent être utiles pour des recherches de limites quand $x \to x_0$.

Application au calcul des dérivées n-ième en un point

Si l'on peut calculer le développement limité d'une fonction au point x_0, sans calculer ses dérivées (formule de Taylor), on en déduit ses dérivées au même point x_0.

Application aux graphiques des fonctions

On cherche un développement limité de f au voisinage de x_0 :
- Pour étudier la forme du graphique de $x \mapsto y = f(x)$ au voisinage du point de coordonnées $(x_0, y_0 = f(x_0))$.
- Pour étudier les branches infinies du graphique.

4.4.9 Développements limités des fonctions usuelles

les fonctions suivantes admettent un développpement limité au voisinage de 0.

$$\begin{aligned}
\exp x &= 1+x+\frac{x^2}{2}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+x^n o(1).\\
chx &= 1+\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4!}+\ldots+\frac{x^{2n}}{2n!}+x^{2n+1}o(1).\\
shx &= x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\ldots+\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+x^{2n}o(1).\\
\cos x &= 1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4!}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{2n!}+x^{2n+1}o(1).\\
\sin x &= x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+x^{2n}o(1).\\
(1+x)^\alpha &= 1+\alpha x+\alpha(\alpha-1)\frac{x^2}{2}+\ldots+\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-n+1)\frac{x^n}{n!}+x^n o(1).\\
\frac{1}{1-x} &= 1+x+x^2\ldots+x^n+x^n o(1).\\
\frac{1}{1+x} &= 1-x+x^2-x^3+\ldots+(-1)^n x^n+x^n o(1).\\
\ln(1+x) &= x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n!}+x^n o(1).\\
\arctan x &= x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}+x^{2n}o(1)
\end{aligned}$$

4.5 Exercices

Exercice 4.1 Déterminer les ensembles de dérivabilité et les dérivées des fonctions suivantes :
1- $f(x) = \ln(\ln x)$,
2- $g(x) = \arctan(\ln x)$,
3- $h(x) = \ln\sqrt{1-2\sin^2 x}$,
4- $k(x) = \frac{\arcsin\left(\frac{1}{x}\right)}{x}$. ■

■ **Solution 4.1** 1- $f(x) = \ln(\ln x)$ est définie et dérivable ssi $\ln x > 0$, c-à-d $x > 1$, sa dérivée est :

$$f'(x) = \frac{(\ln x)'}{\ln x} = \frac{1}{x\ln x},\ \text{pour tout } x > 1.$$

2- $g(x) = \arctan(\ln x)$ est définie et dérivable ssi $(\ln x) \in \mathbb{R}$, c-à-d $x > 0$, sa dérivée est :

$$g'(x) = \frac{(\ln x)'}{1+\ln^2 x} = \frac{1}{x\left(1+\ln^2 x\right)},\ \text{pour tout } x > 0.$$

3- $h(x) = \sqrt{1-2\sin^2 x}$ est définie et dérivable ssi $1-2\sin^2 x \geq 0$, c-à-d $x \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$ et sa dérivée est :

$$h'(x) = \frac{\left(1-2\sin^2 x\right)'}{2\sqrt{1-2\sin^2 x}} = \frac{-2\sin x\cos x}{\sqrt{1-2\sin^2 x}} = -\frac{\sin 2x}{\sqrt{1-2\sin^2 x}}.$$

4- $k(x) = \frac{\arcsin\left(\frac{1}{x}\right)}{x} = \frac{1}{x}\arcsin\left(\frac{1}{x}\right)$ est la composée de la fonction $(x\arcsin x)$ avec la fonction $\left(\frac{1}{x}\right)$ donc pour que $k(x)$ soit définie il faut que

$$\begin{cases} x \neq 0 \\ \quad et \\ \frac{1}{x} \in [-1,1] \end{cases} \Rightarrow x \in \left]-\infty,-1\right] \cup \left[1,+\infty\right[.$$

$k(x)$ est dérivavle ssi

$$\begin{cases} x \neq 0 \\ \quad et \\ \frac{1}{x} \in \left]-1,1\right[\end{cases} \Rightarrow x \in \left]-\infty,-1\right[\cup \left]1,+\infty\right[.$$

Sa dérivée est :

$$\begin{aligned} k'(x) &= \left(-\frac{1}{x^2}\right)\arcsin\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{x}\frac{-\frac{1}{x^2}}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}} \\ &= \left(-\frac{1}{x^2}\right)\arcsin\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x\sqrt{x^4-x^2}}. \end{aligned}$$

■

Exercice 4.2 Soit f une fonction définie et continument dérivable sur l'intervalle fermé $[0,1]$. Supposons aussi que sa dérivée f' est strictement positive sur l'intervalle fermé $[0,1]$.
1- Montrer qu'il existe un réel $\lambda > 0$ tel que $f'(x) \geq \lambda$, pour tout $x \in [0,1]$.
2- En déduire que si $f(0) = 0$, alors $f(x) \geq \lambda x$, pour tout $x \in [0,1]$. ■

■ **Solution 4.2** 1- La fonction dérivée f' est continue sur l'intervalle fermé borné $[0,1]$, donc elle atteint son minimum en un point $c \in [0,1]$. On a alors

$$\min_{t\in[0,1]} f'(t) = f'(c),$$

or

$$f'(c) > 0;$$

en posant $\lambda = f'(c)$, on aura $f'(x) \geq \lambda$, pour tout $x \in [0,1]$.
2- Soit $x \in \left]0,1\right]$, appliquons le théorème des accroissements finis à f sur $[0,x]$.

Il existe donc $u \in]0,x[$ tel que

$$f(x) - f(0) = f'(u)x,$$

or

$$f(0) = 0 \text{ et } f'(u) \geq \lambda,$$

donc

$$f(x) \geq \lambda x.$$

Cette inégalité est aussi vraie pour $x = 0$, on conclut alors que

$$f(x) \geq \lambda x, \text{ pour tout } x \in [0,1].$$

■

Exercice 4.3 Montrer que pour tout $x, y \in [0,1[$ tels que $x < y$, on a

$$\frac{y-x}{\sqrt{1-x^2}} < \arcsin(y) - \arcsin(x) < \frac{y-x}{\sqrt{1-y^2}}.$$

■

■ **Solution 4.3** Soit $f(t) = \arcsin(t)$, $t \in [x,y]$ où $x, y \in [0,1[$.
Appliquons le théorème des accroissements finis à la fonction f sur $[x,y]$, puisque f est continue dérivable sur $[x,y] \subset [0,1[$, il existe, par conséquent, $z \in]x,y[$ tel que

$$f(y) - f(x) = f'(z)(y-x),$$

donc

$$\arcsin(y) - \arcsin(x) = \frac{1}{\sqrt{1-z^2}}(y-x).$$

D'autre part

$$\begin{aligned}
x &< z < y \Rightarrow \sqrt{1-y^2} < \sqrt{1-z^2} < \sqrt{1-x^2} \\
&\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} < \frac{1}{\sqrt{1-z^2}} < \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} \\
&\Rightarrow \frac{(y-x)}{\sqrt{1-x^2}} < \frac{(y-x)}{\sqrt{1-z^2}} < \frac{(y-x)}{\sqrt{1-y^2}}.
\end{aligned}$$

Ainsi on en déduit

$$\frac{y-x}{\sqrt{1-x^2}} < \arcsin(y) - \arcsin(x) < \frac{y-x}{\sqrt{1-y^2}}.$$

■

Exercice 4.4 Calculer les limites suivantes :
1-$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(7x)}{\sin(2x)}$,2- $\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin(3x)}{x}$, 3- $\lim_{x\to 0}\frac{x-x\cos x}{x-\sin x}$, 4- $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(ax)}{x\tan(bx)}$

Solution 4.4 Pour determiner ces limites, appliquons la régle de l'Hospital.
1-On a

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(7x)}{\sin(2x)}=\lim_{x\to 0}\frac{7\cos(7x)}{2\cos(2x)}=\frac{7}{2}.$$

2- De la même manière

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin(3x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{3}{\sqrt{1-x^2}}}{1}=3$$

3-

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{x-x\cos x}{x-\sin x} &= \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x+x\sin x}{1-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin x+x\cos x}{\sin x}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{3\cos x-x\sin x}{\cos x}=3\end{aligned}$$

4-

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(ax)}{x\tan(bx)} &= \lim_{x\to 0}\frac{a\sin(ax)}{\tan(bx)+bx(1+\tan^2(bx))}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{a^2\cos(ax)}{2b(1+\tan^2(bx))+2b^2\tan(bx)(1+\tan^2(bx))}\\ &= \frac{a^2}{2b}\end{aligned}$$

5-

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{a^x-b^x}{c^x-d^x} &= \lim_{x\to 0}\frac{\exp(x\ln a)-\exp(x\ln b)}{\exp(x\ln c)-\exp(x\ln d)}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{(\ln a)a^x-(\ln b)b^x}{(\ln c)c^x-(\ln d)d^x}\\ &= \frac{\ln a-\ln b}{\ln c-\ln d}=\frac{\ln\frac{a}{b}}{\ln\frac{c}{d}}=\ln_{\frac{c}{d}}\frac{a}{b}\end{aligned}$$

Exercice 4.5 Déterminer la dérivée nième des fonctions suivantes :
1 -$f(x)=[\exp(x\cos\alpha)]\cos(x\sin\alpha)$, où $\alpha\in\mathbb{R}$.
2- $g(x)=x^3\exp(\lambda x)$,où $\lambda\in\mathbb{R}$.

Solution 4.5 1- On a

$$\begin{aligned}f'(x) &= \cos\alpha[\exp(x\cos\alpha)]\cos(x\sin\alpha)-[\exp(x\cos\alpha)]\sin\alpha\sin(x\sin\alpha)\\ &= [\exp(x\cos\alpha)]\cos(x\sin\alpha+\alpha),\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} f''(x) &= \cos\alpha\left[\exp\left(x\cos\alpha\right)\right]\cos\left(x\sin\alpha+\alpha\right)-\left[\exp\left(x\cos\alpha\right)\right]\sin\alpha\sin\left(x\sin\alpha+\alpha\right) \\ &= \left[\exp\left(x\cos\alpha\right)\right]\cos\left(x\sin\alpha+2\alpha\right). \end{aligned}$$

Par itération, on obtient la forme générale suivante (qui peut-être montrée facilement par récurrence) :

$$f^{(n)}(x) = \left[\exp\left(x\cos\alpha\right)\right]\cos\left(x\sin\alpha+n\alpha\right).$$

2- On pose $g_1(x) = x^3$ et $g_2(x) = \exp(\lambda x)$, alors on a

$$\begin{aligned} g_1^{(k)}(x) &= 0, \text{ pour tout } k \geq 4 \\ & \quad\textit{et} \\ g_2^{(k)}(x) &= \lambda^k \exp(\lambda x), \text{ pour tout } k \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Pour calculer la dérivée nième de $g(x) = g_1(x).\, g_2(x)$, appliquons la formule de Leibnitz

$$\begin{aligned} g^{(n)}(x) &= (g_1.g_2)^{(n)} = \sum_{i=0}^{n} C_n^i g_1^{(i)} g_2^{(n-i)} \\ &= \sum_{i=0}^{3} C_n^i g_1^{(i)} g_2^{(n-i)} \\ &= C_n^0 g_1.g_2^{(n)} + C_n^1 g_1^{(1)} g_2^{(n-1)} + C_n^2 g_1^{(2)} g_2^{(n-2)} + C_n^3 g_1^{(3)} g_2^{(n-3)} \\ &= \exp(\lambda x)\left(\lambda^n x^3 + 3n\lambda^{n-1}x^2 + \frac{n(n-1)}{2}6x\lambda^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{6}6\lambda^{n-3}\right) \\ g^{(n)}(x) &= \exp(\lambda x)\left(\lambda^n x^3 + 3n\lambda^{n-1}x^2 + 3n(n-1)\lambda^{n-2}x + n(n-1)(n-2)\lambda^{n-3}\right). \end{aligned}$$

■

Exercice 4.6 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et trois fois dérivable en 0. Soit

$$g(x) = f(3x) - 3f(2x) + 3f(x) - f(0).$$

Déterminer $\lim_{x\to 0} \frac{g(x)}{x^3}$. ■

■ **Solution 4.6** Remarquons que $\lim_{x\to 0} \frac{g(x)}{x^3}$ présente une forme indéterminée $\frac{0}{0}$.
Compte tenu des hypothèses, nous pouvons écrire la formule de Maclaurin-Young de la fonction f à l'ordre 3.

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3 + x^3\varepsilon(x), \quad \lim_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0.$$

Ainsi

$$f(2x) = f(0) + 2f'(0)x + 2f''(0)x^2 + \frac{4f^{(3)}(0)}{3}x^3 + x^3\varepsilon(x), \quad \lim_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0,$$

et

$$f(3x) = f(0) + 3f'(0)x + \frac{9f''(0)}{2!}x^2 + \frac{9f^{(3)}(0)}{3!}x^3 + x^3\varepsilon(x), \quad \lim_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0.$$

Donc

$$\begin{aligned} g(x) &= f(3x) - 3f(2x) + 3f(x) - f(0) \\ &= f^{(3)}(0)x^3 + x^3\varepsilon(x), \end{aligned}$$

ce qui implique

$$\frac{g(x)}{x^3} = f^{(3)}(0) + \varepsilon(x), \quad \lim_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0.$$

Finalement, on obtient

$$\lim_{x\to 0}\frac{g(x)}{x^3} = f^{(3)}(0).$$

Exercice 4.7 Soit la fonction réelle f définie sur $[0,+\infty[$ par

$$f(x) = \sqrt{x+4}.$$

1- Ecrire la formule de Taylor-Lagrange de la fonction f à l'ordre 2 sur l'intervalle $[0,x]$ où $x > 0$.
2- Déduire l'encadrement suivant

$$\frac{1144}{512} < \sqrt{5} < \frac{1145}{512}.$$

Solution 4.7 1- La fonction f définie sur $[0,+\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x+4}$ est de classe C^∞ sur $[0,+\infty[$, donc la formule de Taylor-Lagrange est applicable à f sur l'intervalle $[0,x]$ pour tout $x \in [0,+\infty[$:

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f^{(2)}(0)}{2!}x^2 + \frac{f^{(3)}(c)}{3!}x^3, \text{ avec } 0 < c < x.$$

Calculons les dérivées succéssives de f,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{2}(x+4)^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow f'(0) = \frac{1}{4}, \\ f^{(2)}(x) &= -\frac{1}{4}(x+4)^{-\frac{3}{2}} \Rightarrow \frac{f^{(2)}(0)}{2!} = -\frac{1}{64}, \\ f^{(3)}(x) &= \frac{3}{8}(x+4)^{-\frac{5}{2}} \Rightarrow \frac{f^{(3)}(c)}{3!} = \frac{1}{16\left(\sqrt{c+4}\right)^5}. \end{aligned}$$

Ecrivons alors la formule de Taylor-Lagrange de f sur l'intervalle $[0,x]$ pour tout $x \in [0,+\infty[$:

$$f(x) = 2 + \frac{x}{4} - \frac{x^2}{64} + \frac{x^3}{16\left(\sqrt{c+4}\right)^5}, \text{ avec } 0 < c < x.$$

2- Prenons $x = 1$ dans la formule ci-dessus, il vient

$$\sqrt{5} = f(1) = 2 + \frac{1}{4} - \frac{1}{64} + \frac{1}{16\left(\sqrt{c+4}\right)^5}, \text{ avec } 0 < c < 1.$$

Ainsi

$$\sqrt{5} = \frac{143}{64} + \frac{1}{16\left(\sqrt{c+4}\right)^5}, \text{ avec } 0 < c < 1$$

ce qui implique

$$\sqrt{5} > \frac{143}{64} = \frac{1144}{512}.$$

D'autre part, pour $c > 0$, on a

$$\frac{1}{16\left(\sqrt{c+4}\right)^5} < \frac{1}{16\left(\sqrt{4}\right)^5} = \frac{1}{512},$$

on en déduit alors

$$\frac{1144}{512} < \sqrt{5} < \frac{143}{64} + \frac{1}{512} = \frac{1145}{512}.$$

■

Exercice 4.8 Donner les développements limités d'ordre n au voisinage de 0 pour les fonctions suivantes :

1- $f_1(x) = \sqrt{1+\sin x}$, $n = 4$,

2- $f_2(x) = \exp\left(\frac{x}{\cos x}\right)$, $n = 4$,

3- $f_3(x) = \frac{\ln(1+x)}{1+x}$, $n = 4$,

4- $f_4(x) = \frac{x}{\exp(x)-1}$, $n = 4$,

5- $f_5(x) = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$, $n = 5$. ■

■ **Solution 4.8** 1- En posant $u = \sin x$, on a

$$\begin{aligned} f_1(x) &= (1+u)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{u}{2} + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)}{2!}u^2 + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)}{3!}u^3 \\ &\quad + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)}{4!}u^4 + o\left(u^4\right). \end{aligned}$$

or

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + o\left(x^4\right),$$

d'où

$$u^2 = x^2 - \frac{x^4}{3} + o\left(x^4\right),\ u^3 = x^3 + o\left(x^4\right),\ u^4 = x^4 + o\left(x^4\right).$$

Ainsi

$$f_1(x) = 1 + \frac{1}{2}\left(x - \frac{x^3}{6}\right) - \frac{1}{8}\left(x^2 - \frac{x^4}{3}\right) + \frac{1}{16}x^3 - \frac{5}{128}x^4 + o\left(x^4\right),$$

En fin

$$f_1(x) = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} - \frac{x^3}{48} + \frac{x^4}{384} + o\left(x^4\right).$$

2- On sait que

$$\frac{1}{\cos x} = \frac{1}{1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o\left(x^4\right)},$$

et en posant

$$u = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o\left(x^4\right),$$

on trouve

$$\begin{aligned} \frac{1}{\cos x} &= \frac{1}{1+u} = 1 - u + u^2 + o\left(u^2\right) \\ &= 1 - \left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}\right) + \frac{x^4}{4} + o\left(x^4\right), \end{aligned}$$

d'où

$$\frac{1}{\cos x} = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{24} + o\left(x^4\right),$$

donc

$$\frac{x}{\cos x} = x + \frac{x^3}{2} + o\left(x^4\right).$$

Si on pose $v = x + \frac{x3}{2} + o\left(x^4\right)$, on aura

$$f_2(x) = \exp(v) = 1 + v + \frac{v^2}{2!} + \frac{v^3}{3!} + \frac{v^4}{4!} + o\left(v^4\right),$$

or

$$v^2 = x^2 + x^4 + o\left(x^4\right),\ v^3 = x^3 + o\left(x^4\right),\ v^4 = x^4 + o\left(x^4\right).$$

Par conséquent

$$f_2(x) = 1 + x + \frac{x^3}{2} + \frac{1}{2}\left(x^2 + x^4\right) + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + o\left(x^4\right),$$

d'où

$$f_3(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{2x^3}{3} + \frac{13}{24}x^4 + o\left(x^4\right).$$

3- On a

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 + o\left(x^4\right),$$

et

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o\left(x^4\right).$$

En faisant le produit des deux développements on trouve

$$f_3(x) = \frac{\ln(1+x)}{1+x} = x - \frac{3x^2}{2} + \frac{11x^3}{6} - \frac{25x^4}{12} + o\left(x^4\right).$$

4- Le développement limité d'ordre 5 au voisinage de 0 pour la fonction $\exp(x)$ s'écrit :

$$\begin{aligned} \exp(x) &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + o\left(x^5\right) \\ &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120} + o\left(x^5\right). \end{aligned}$$

Donc

$$\exp(x) - 1 = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120} + o\left(x^5\right).$$

En faisant la division euclidienne suivant les puissances croissantes de x par $\left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120}\right)$, on obtient

$$f_4(x) = \frac{x}{\exp(x) - 1} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{12} - \frac{x^4}{720} + o\left(x^4\right).$$

5- Ecrivons le développement limité d'ordre 4 au voisinage de 0 pour la fonction $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$:

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \left(1 - x^2\right)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{3x^4}{8} + o\left(x^4\right).$$

la fonction $\arcsin x$ étant la primitive de la fonction $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ qui s'annule au point 0, alors le développement limité d'ordre 5 au voisinage de 0 pour la fonction $\arcsin x$ est :

$$\arcsin x = x + \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + o\left(x^5\right),$$

d'où

$$f_5(x) = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} = \left(1 + \frac{x^2}{2} + \frac{3x^4}{8} + o\left(x^4\right)\right)\left(x + \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + o\left(x^5\right)\right),$$

on conclut que

$$f_5(x) = x + \frac{2x^3}{3} + \frac{8x^5}{15} + o\left(x^5\right).$$

■

Exercice 4.9 1- Donner le développement limité d'ordre 3 au voisinage de 1 pour la fonction

$$g(x) = \sqrt{x}.$$

2- Donner le développement limité d'ordre 3 au voisinage de $(+\infty)$ pour la fonction

$$\varphi(x) = \arctan\sqrt{\frac{x+1}{x+2}}.$$

■

■ **Solution 4.9** 1- <u>Première méthode</u> : Nous pouvons appliquer directement la formule de Taylor d'ordre 3 au voisinage de 1 et on obtient

$$g(x) = g(1) + g'(1)\frac{(x-1)}{1!} + \frac{g^{(2)}(1)}{2!}(x-1)^2 + \frac{g^{(3)}(1)}{3!}(x-1)^3 + o\left[(x-1)^3\right],$$

d'autre part, on a

$$\begin{aligned} g(1) &= 1, \text{ et } g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \; d'où \; g'(1) = \frac{1}{2}, \\ g^{(2)}(x) &= -\frac{1}{4\sqrt{x^3}} \; d'où \; g^{(2)}(1) = -\frac{1}{4}, \\ g^{(3)}(x) &= \frac{3}{8\sqrt{x^5}} \; d'où \; g^{(3)}(1) = \frac{3}{8}. \end{aligned}$$

Donc

$$g(x) = 1 + \frac{(x-1)}{2} - \frac{(x-1)^2}{8} + \frac{(x-1)^3}{16} + o\left[(x-1)^3\right].$$

<u>Seconde méthode</u> : Posons $u = x - 1$, si x est au voisinage de 1, alors u est au voisinage de 0 et nous pouvons donc appliquer les formules usuelles :

$$g(x) = \sqrt{x} = \sqrt{1+u} = 1 + \frac{u}{2} + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)}{2!}u^2 + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)}{3!}u^3 + o\left(u^3\right),$$

d'où

$$\sqrt{x} = 1 + \frac{(x-1)}{2} - \frac{(x-1)^2}{8} + \frac{(x-1)^3}{16} + o\left[(x-1)^3\right].$$

2- Puisque

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{\frac{x+1}{x+2}} = 1,$$

cherchons donc le développement limité d'ordre 3 au voisinage de 1 pour la fonction $\arctan v$, en appliquant la formule de Taylor, on trouve

$$\begin{aligned} \arctan v &= \arctan 1 + (\arctan)'(1)\frac{(v-1)}{1!} + \frac{(\arctan)^{(2)}(1)}{2!}(v-1)^2 \\ &\quad + \frac{(\arctan)^{(3)}(1)}{3!}(v-1)^3 + o\left[(v-1)^3\right], \end{aligned}$$

or

$$\begin{aligned} \arctan 1 &= \frac{\pi}{4},\ (\arctan)'(v) = \frac{1}{1+v^2},\ \text{d'où } (\arctan)'(1) = \frac{1}{2}, \\ (\arctan)^{(2)}(v) &= \frac{-2v}{(1+v^2)^2}\ \text{d'où } (\arctan)^{(2)}(1) = -\frac{1}{2}, \\ (\arctan)^{(3)}(v) &= \frac{2(3v^2-1)}{(1+v^2)^3}\ \text{d'où } (\arctan)^{(3)}(1) = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

On trouve alors,

$$\arctan v = \frac{\pi}{4} + \frac{v-1}{2} - \frac{(v-1)^2}{4} + \frac{(v-1)^3}{12} + o\left[(v-1)^3\right].$$

Développons maintenant $v(x) = \sqrt{\frac{1+x}{2+x}}$ au voisinage de $(+\infty)$:
posons $X = \frac{1}{x}$, on obtient $v(x) = \sqrt{\frac{1+X}{1+2X}}$ qu'on doit développer par rapport à X au voisinage de 0, or

$$\frac{1}{1+2X} = 1 - 2X + 4X^2 - 8X^3 + o\left(X^3\right),$$

d'où

$$\begin{aligned} \frac{1+X}{1+2X} &= (1+X)\left(1 - 2X + 4X^2 - 8X^3 + o\left(X^3\right)\right) \\ &= 1 - X + 2X^2 - 4X^3 + o\left(X^3\right). \end{aligned}$$

Si on pose $w = -X + 2X^2 - 4X^3 + o\left(X^3\right)$, on développe alors

$$v = \sqrt{1+w} = 1 + \frac{w}{2} - \frac{w^2}{8} + \frac{w^3}{16} + o\left(w^3\right).$$

D'autre part on a

$$w^2 = X^2 - 4X^3 + o\left(X^3\right) \text{ et } w^3 = -X^3 + o\left(X^3\right),$$

d'où

$$v = 1 - \frac{X}{2} + \frac{7X^2}{8} - \frac{25X^3}{16} + o\left(X^3\right),$$

et

$$\begin{aligned} v-1 &= -\frac{X}{2} + \frac{7X^2}{8} - \frac{25X^3}{16} + o\left(X^3\right), \\ (v-1)^2 &= \frac{X^2}{4} - \frac{7X^3}{8} + o\left(X^3\right), \\ (v-1)^3 &= -\frac{X^3}{8} + o\left(X^3\right). \end{aligned}$$

En remplaçant dans la formule qui nous donne $\arctan v$, on trouve

$$\begin{aligned} \arctan v &= \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\left(-\frac{X}{2} + \frac{7X^2}{8} - \frac{25X^3}{16}\right) - \frac{1}{4}\left(\frac{X^2}{4} - \frac{7X^3}{8}\right) \\ &\quad + \frac{1}{12}\left(-\frac{X^3}{8}\right) + o\left(X^3\right) \\ &= \frac{\pi}{4} - \frac{X}{4} + \frac{3X^2}{8} - \frac{55X^3}{96} + o\left(X^3\right). \end{aligned}$$

Finalement, on obtient

$$\arctan\sqrt{\frac{x+1}{x+2}} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{4x} + \frac{3}{8x^2} - \frac{55}{96x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right).$$

■

Exercice 4.10 Déterminer les limites suivantes :
1- $\lim_{x\to 0} \frac{(1-\exp x)\sin x}{x^2+x^3}$, 2- $\lim_{x\to 0} \frac{(1-\cos x)\arctan x}{x\sin x^2}$, 3- $\lim_{x\to 0} \frac{(1-\cos x)}{\tan^2 x}$, 4- $\lim_{x\to 0^+} (\cos x)^{\frac{1}{x^m}}$,
5- $\lim_{x\to +\infty} x - x^2 \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$. ■

■ **Solution 4.10** 1- Au voisinage de 0, on a

$$1-\exp x \underset{0}{\sim} -x \quad et \quad \sin x \underset{0}{\sim} x,$$

donc

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1-\exp x)\sin x}{x^2+x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{(-x)\,x}{x^2+x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{-1}{1+x} - 1.$$

2- Au voisinage de 0, on a

$$1-\cos x \underset{0}{\sim} \frac{x^2}{2}, \quad \arctan x \underset{0}{\sim} x \quad et \quad \sin x \underset{0}{\sim} x,$$

alors

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1-\cos x)\arctan x}{x\sin x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\left(\frac{x^2}{2}\right)x}{x.x^2} = \frac{1}{2}.$$

3- Toujours au voisinage de 0, on a

$$1-\cos x \underset{0}{\sim} \frac{x^2}{2} \quad et \quad \tan x \underset{0}{\sim} x,$$

d'où

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1-\cos x)}{\tan^2 x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^2}{2}}{x^2} = \frac{1}{2}.$$

4- On a

$$(\cos x)^{\frac{1}{x^m}} = \exp\left(\frac{1}{x^m}\ln(\cos x)\right),$$

d'un autre côté, on sait que

$$\cos x \underset{0}{\sim} 1-\frac{x^2}{2} \quad et \quad \ln(1+u) \underset{0}{\sim} u,$$

et puisque

$$\lim_{x\to 0} \cos x - 1 = 0$$

alors on a

$$\ln(1+(\cos x-1)) \underset{0}{\sim} \cos x - 1 \underset{0}{\sim} -\frac{x^2}{2},$$

donc

$$\ln(\cos x) \underset{0}{\sim} -\frac{x^2}{2}.$$

Par suite, si $m>2$, alors

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^m}\ln\cos x = \lim_{x\to 0^+} -\frac{1}{2x^{m-2}} = -\infty,$$

d'où

$$\lim_{x\to 0^+} (\cos x)^{\frac{1}{x^m}} = 0.$$

Maintenant si $m=2$, alors

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^m}\ln\cos x = \lim_{x\to 0^+} -\frac{1}{2} = -\frac{1}{2},$$

d'où

$$\lim_{x\to 0^+} (\cos x)^{\frac{1}{x^m}} = \exp\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{e}}.$$

Enfin si $m < 2$, alors

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^m} \ln\cos x = \lim_{x\to 0^+} -x^{2-m} = 0,$$

d'où

$$\lim_{x\to 0^+} (\cos x)^{\frac{1}{x^m}} = 1.$$

On conclut que :

$$\lim_{x\to 0^+} (\cos x)^{\frac{1}{x^m}} = \begin{cases} 0 \text{ si } m > 2, \\ \frac{1}{\sqrt{e}} \text{ si } m = 2, \\ 1 \text{ si } 0 \leq m < 2. \end{cases}$$

5- $\lim_{x\to+\infty} x - x^2 \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$ Quand x tend vers $+\infty$, $\frac{1}{x}$ est au voisinage de 0 et nous pouvons écrire

$$\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{3x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right),$$

et par suite

$$\begin{aligned} x - x^2 \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) &= x - x^2\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{3x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right)\right) \\ &= x - x + \frac{1}{2} - \frac{1}{3x} + o\left(\frac{1}{x}\right) \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{3x} + o\left(\frac{1}{x}\right) \end{aligned}$$

d'où

$$\lim_{x\to+\infty} x - x^2 \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{2}.$$

■

5. Intégration au sens de Riemann : Inégrale définie - intégrale indéfinie

5.1 Intégrale définie

5.1.1 Intégration de fonction en escalier sur un segment

Définition 5.1.1 **(Subdivision d'un intervalle)** Soit $[a,b]$ un intervalle fermé borné de $\mathbb{R}$; on appelle subdivision de $[a,b]$ toute suite finie de points

$$\Pi = \{a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b\}.$$

On appelle pas de la division le réel

$$h = \max_{i=1,2,\ldots,n} (x_i - x_{i-1}).$$

On dit que la subdivision est régulière si le pas h est constant

$$h = \frac{b-a}{n}; \;\; x_0 = a \text{ et } x_i = a + ih, i = 1,2,\ldots,n.$$

Définition 5.1.2 **(Fonction en escalier)** Une fonction $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est une fonction en escalier s'il existe une subdivision $\Pi = \{a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b\}$ et des réels $c_i, i = 1,2,\ldots,n$ tels que

$$f(x) = c_i \text{ pour tout } x \in]x_{i-1}, x_i[.$$

Définition 5.1.3 **(Intégrale de Riemann d'une fonction en escalier)** On appelle intégrale de Riemann de la fonction en escalier f, le réel I, indépendant de la subddivision Π :

$$I = \sum_{i=1}^{n} c_i (x_i - x_{i-1}).$$

On note
$$I = \int_a^b f(x)dx.$$
Elle mesure l'aire algébrique comprise entre la courbe de f et l'axe des abscisses.

■ **Exemple 5.1** Soit la fonction définie par

$$\begin{array}{rcl} f & : & \left[-2, \frac{3}{2}\right] \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x) = E(x); \end{array}$$

alors

$$\begin{aligned} \int_{-2}^{\frac{3}{2}} E(x)dx &= \sum_{i=1}^{n} c_i (x_i - x_{i-1}) \\ &= (-2)\times 1 + (-1)\times 1 + 0\times 1 + 1\times 1 + 2\times \frac{1}{2} \\ &= -1. \end{aligned}$$

■

R 1- l'intégrale de Riemann d'une fonction en escalier n'est autre qu'une somme finie d'aires algébriques de rectangles de côtés respectifs

$$\Delta x_i = (x_i - x_{i-1}) \text{ et } c_i = f(x) \text{ pour } x \in]x_{i-1}, x_i[.$$

Elle peut être positive, négative ou nulle.
2- l'intégrale ne dépend pas des valeurs prises aux bornes de la subdivision et elle est indépendante de la subdivision choisie.

Proposition 5.1.1 Soient f et g deux fonctions en escalier sur $[a,b]$, alors
1- $f+g$ est une fonction en escalier et $\int_a^b (f+g)(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$.
2- Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, (λf) est une fonction en escalier et $\int_a^b (\lambda f)(x)dx = \lambda . \int_a^b f(x)dx$.
3- Si $f \geq g$ alors $\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$.
4- Si $f = g$, sauf en un nombre fini de points alors $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b g(x)dx$.
5- Pour tout point $c \in [a,b]$, $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$.

5.1.2 Fonction intégrable sur un segment

Définition 5.1.4 Une fonction bornée $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est intégrable au sens de Riemann (ou de manière abrégée Riemann-intégrable) si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists u, U;\ u \leq f \leq U \text{ et } \int_a^b (U-u)(x)dx \leq \varepsilon,$$

où u *et* U sont deux fonctions en escalier définies sur $[a,b]$.

Soient A et B les ensembles de $\mathbb{R}$ définis par :

$$\begin{aligned} A &= \left\{ \int_a^b u(x)dx,\ u \text{ fonction en escalier, } u \leq f \right\} \\ B &= \left\{ \int_a^b U(x)dx,\ U \text{ fonction en escalier, } f \leq U \right\}. \end{aligned}$$

On a

$$\forall \alpha \in A,\ \forall \beta \in B,\ \alpha \leq \beta.$$

Donc A est majoré et B et minoré et par suite $\sup A$ et $\inf B$ existent.

Définition 5.1.5 Une fonction bornée $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est Riemann-intégrable si et seulement si

$$\sup A = \inf B = \int_a^b f(x)dx.$$

Propriétés

Proposition 5.1.2 Soient f et g des fonctions définies et Riemann-intégrables sur $[a,b]$, alors
1- $f+g$ est Riemann-intégrable sur $[a,b]$ et $\int_a^b (f+g)(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$.
2- Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, (λf) est Riemann-intégrable sur $[a,b]$ et $\int_a^b (\lambda f)(x)dx = \lambda . \int_a^b f(x)dx$.
3- $\int_a^a f(x)dx = 0$.
4- $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$.
5- Pour tout point $c \in [a,b]$, $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$. (Relation de Chasles).
6- Si $f = g$, sauf en un nombre fini de points de $[a,b]$ alors $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b g(x)dx$.
7- Si $f \geq 0$ alors $\int_a^b f(x)dx \geq 0$.
8- Si $f \geq g$ alors $\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$.
9- Si $f \geq 0$ sur $[a,b]$ alors $\int_a^b f(x)dx = 0 \not\Rightarrow f \equiv 0$.
10- $|f|$ est Riemann-intégrable et $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$.
11- $\left(\int_a^b (f.g)(x)dx\right)^2 \leq \int_a^b f^2(x)dx . \int_a^b g^2(x)dx$. (Inégalité de Cauchy-Schwarz).

Corollaire 5.1.3 Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est une fonction Riemann-intégrable telle que

$$\forall x \in [a,b],\ m \leq f(x) \leq M,$$

alors

$$m \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leq M.$$

Exemples de fonctions Riemann-intégrables

Théorème 5.1.4 **(Fonction monotone)**Toute fonction monotone (bornée) f sur un intervalle fermé borné $[a,b]$, est Riemann-intégrable.

Théorème 5.1.5 **(Fonction continue)**Toute fonction f continue sur un intervalle fermé borné $[a,b]$, est Riemann-intégrable.

Théorème 5.1.6 **(Fonction continue par morceaux)**Toute fonction bornée f continue par morceaux sur un intervalle fermé borné $[a,b]$, est Riemann-intégrable.

Définition 5.1.6 **(Somme de Riemann)** On appelle somme de Riemann d'une fonction f

définie sur un intervalle fermé borné $[a,b]$, le réel

$$S_n = \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f(a+i\frac{b-a}{n}).$$

Proposition 5.1.7 **(Propriété de la moyenne)** Si $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ est une fonction Riemann-intégrable (continue, continue par morceaux ou monotone). Alors

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \int_a^b f(x)dx.$$

Définition 5.1.7 **(Valeur moyenne)** On appelle valeur moyenne d'une fonction continue $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, le réel

$$\sigma(f) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx.$$

Théorème 5.1.8 **(Propriété de la moyenne)** Soit une fonction continue $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, alors il existe $c\in[a,b]$ tel que

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a).$$

Théorème 5.1.9 **(Généralisation de la formule de la moyenne)** Soient $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, une fonction continue et $g:[a,b]\to\mathbb{R}$, une fonction intégrable de signe constant sur $[a,b]$, alors il existe $c\in[a,b]$ tel que

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(c)\int_a^b g(x)dx.$$

5.2 Intégrale indéfinie- Calcul des primitives

5.2.1 Intégrale indéfinie

Définition 5.2.1 Soit $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ une fonction continue, on appelle primitive de f sur $[a,b]$, toute fonction $F:[a,b]\to\mathbb{R}$ dérivable et telle que

$$F'(x) = f(x).$$

Proposition 5.2.1 Si F et G sont deux primitives de f sur $[a,b]$, alors

$$F(x) = G(x)+C,\ C\in\mathbb{R}.$$

Définition 5.2.2 **(Intégrale indéfinie)** L'ensemble de toutes les primitives de f sur $[a,b]$, noté $\int f(x)dx$ est appelé intégrale indéfinie et on a

$$\int f(x)dx = F(x)+C,\ C\in\mathbb{R}.$$

Théorème 5.2.2 **(Formule de Newton-Leibniz)** Si F est une primitive de f sur $[a,b]$, alors

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_b^a = F(a) - F(b).$$

Théorème 5.2.3 Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue et soit $x \in [a,b]$, alors la fonction

$$\begin{array}{rcl} F & : & [a,b] \to \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & F(x) = \int_a^x f(t)dt, \end{array}$$

est une primitive de f sur $[a,b]$.

Théorème 5.2.4 Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est une fonction bornée intégrable sur $[a,b]$, alors la fonction

$$\begin{array}{rcl} F & : & [a,b] \to \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & F(x) = \int_a^x f(t)dt, \end{array}$$

est continue sur $[a,b]$.

5.2.2 Calcul des primitives

Tableau des primitives usuelles

Fonction f	Primitive x$\mapsto F(x) = \int f(x)dx$	Ensemble de validité
$a \quad (a \in \mathbb{R})$	$ax + c$	$\mathbb{R}$
$x^n, n \in \mathbb{N}$	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + c$	$\mathbb{R}$
$x^\alpha, \alpha \in \mathbb{R}\backslash\{-1\}$	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c$	$]0,+\infty[$
$\frac{1}{x}$	$\ln\|x\| + c$	$]-\infty,0[\ ou\ ]0,+\infty[$
$\exp(x)$	$\exp(x) + c$	$\mathbb{R}$
$\cos(x)$	$\sin(x) + c$	$\mathbb{R}$
$\sin(x)$	$-\cos(x) + c$	$\mathbb{R}$
$ch(x)$	$sh(x) + c$	$\mathbb{R}$
$sh(x)$	$ch(x) + c$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan(x) + c$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{\cos^2(x)}$	$\tan(x) + c$	$\left]-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right[, k \in \mathbb{Z}$
$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$\ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) + c$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin(x) + c$	$]-1,1[$
$\frac{1}{ch^2(x)}$	$(x) + c$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{1-x^2}$	$\frac{1}{2}\ln\left\|\frac{1+x}{1-x}\right\| + c$	$]-1,1[$

Méthodes d'intégration

Il existe deux techniques trés utilisées dans le calcul intégral :

1)- Intégration par parties.

2)- Changement de variables.

Théorème 5.2.5 **(Intégration par parties)** Si u et v sont deux fonctions de classe C^1 sur $[a,b]$, alors on a

$$\int_a^b u'(x)v(x)dx = [u(x)v(x)]_b^a - \int_a^b u(x)v'(x)dx.$$

On utilise souvent l'abus d'écriture

$$\int vdu = uv - \int udv.$$

Cette formule d'intégration est utilisée chaque fois que udv a une primitive plus simple que vdu.

Théorème 5.2.6 **(Changement de variables)** Soit $f : J \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Si φ est de classe C^1 sur $[a,b]$, telle que $\varphi([a,b]) \subset J$, alors pour tout $u \in [a,b]$, on a

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(u)} f(x)dx = \int_a^u f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

5.2.3 Procédés particuliers d'intégration

Primitives de fractions rationnelles

On consacre cette partie à l'intégration des fractions (fonctions) rationnelles, car la plus part des primitives que l'on sait calculer formellement (exponentielle, abélienne, circulaire...) se ramènent à un calcul de primitives de fonctions rationnelles, par des changements de variables adéquats. Nous commençons par recenser les fractions rationnelles particulières dont on sait calculer une primitive. On les appelle les éléments simples.

Proposition 5.2.7 la fraction rationnelle $\frac{R(x)}{Q(x)}$ (avec $d^\circ R < d^\circ Q$) se décompose en éléments simples sous la forme suivante :

$$\begin{aligned}\frac{R(x)}{Q(x)} &= \frac{A_{11}}{(x-x_1)} + \frac{A_{12}}{(x-x_1)^2} + \ldots + \frac{A_{1k_1}}{(x-x_1)^{k_1}} + \ldots \frac{A_{r1}}{(x-x_r)} + \frac{A_{r2}}{(x-x_r)^2} + \ldots + \frac{A_{rk_r}}{(x-x_r)^{k_r}} + \\ &\quad \frac{B_{1l_1}x + C_{1l_1}}{(x^2+p_1x+q_1)} + \ldots + \frac{B_{l_1l_1}x + C_{l_1l_1}}{(x^2+p_1x+q_1)^{l_1}} + \ldots \frac{B_{1l_s}x + C_{1l_s}}{(x^2+p_1x+q_1)} + \ldots + \frac{B_{l_sl_s}x + C_{l_sl_s}}{(x^2+p_1x+q_1)^{l_s}}.\end{aligned}$$

On remarque que l'intégration d'une fonction rationnelle revient à intégrer les éléments suivants :

$a)-$ Intégration des éléments simples de première espèce : $\int \frac{A}{(x-\alpha)^k}dx$

On distingue deux cas :

- Si $k = 1$,

$$\int \frac{A}{(x-\alpha)}dx = A\ln|x-\alpha| + C,\ C \in \mathbb{R}.$$

- Si $k > 1$,

$$\int \frac{A}{(x-\alpha)^k}dx = \frac{1}{1-k}(x-\alpha)^{1-k} + C,\ C \in \mathbb{R}.$$

$b)-$ Intégration des éléments simples de deuxième espèce : $\int \frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^k}dx$, où $p^2+4q<0$.

On peut toujours écrire

$$\begin{aligned}\int \frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^k}dx &= \int \frac{Bx+C}{\left((x+\lambda)^2+\beta^2\right)^k}dx\\ &= \frac{1}{\beta^{2k}}\int \frac{Bx+C}{\left((\frac{x+\lambda}{\beta})^2+1\right)^k}dx.\end{aligned}$$

En posant $t=\frac{x+\lambda}{\beta}$, l'intégrale devient

$$\frac{1}{\beta^{2k-1}}\int \frac{B(\beta t-\lambda)+C}{(t^2+1)^k}dx = \frac{-B\lambda+C}{\beta^{2k-1}}\int \frac{dt}{(t^2+1)^k}+\frac{B}{\beta^{2k-2}}\int \frac{tdt}{(t^2+1)^k}.$$

Cela revient à intégrer :

• $\int \frac{tdt}{(t^2+1)^k}$, en faisant le changement de variable $u=1+t^2$,

$$\int \frac{tdt}{(t^2+1)^k}=\frac{1}{2}\int \frac{du}{u^k}=\begin{cases}\frac{1}{2}\ln u+C=\frac{1}{2}\ln\left(1+t^2\right)+C, \text{ si } k=1,\\ \frac{1}{2(1-k)}u^{1-k}+C=\frac{1}{2(1-k)}\left(1+t^2\right)^{1-k}+C, \text{ si } k>1.\end{cases}$$

• $\int \frac{dt}{(t^2+1)^k}$, on pose

$$I_k=\int \frac{dt}{(t^2+1)^k},$$

et en faisant une intégration par parties on obtient,

$$I_k=\frac{t}{(t^2+1)^k}+2kI_k-2kI_{k+1},$$

d'où la relation de récurrence

$$2kI_{k+1}=\frac{t}{(t^2+1)^k}+(2k-1)I_k,\ k\geq 1.$$

Sachant que $I_1=\int \frac{dt}{t^2+1}=\arctan t+C$, le reste se calcule en utilisant la formule de récurrence.

Primitives se ramenant à des primitives de fonctions rationnelles

Soit f une fonction rationnelle d'une variable ou de deux variables.

1) $\int f(\exp(x))dx$ $\hookrightarrow$ on pose : $t=\exp(x)$.

2) $\int f(\cos(x),\sin(x))dx$ $\hookrightarrow$ on pose : $t=\tan\left(\frac{x}{2}\right)$, on obtient : $\cos(x)=\frac{1-t^2}{1+t^2}, \sin(x)=\frac{2t}{1+t^2}$.

3) $\int f(\tan(x))dx$ $\hookrightarrow$ on pose : $t=\tan(x)$.

4) $\int f(x,\sqrt{x^2+1})dx$ $\hookrightarrow$ on pose : $t=\arg sh(x)$, pour se ramener au calcul de $\int f(sh(t),ch(t))ch(t)\,dt$ qui se traite de la même manière que $\int f(\exp(x))dx$.

5) $\int f(x,\sqrt{x^2-1})dx$ $\hookrightarrow$ on pose : $t=\arg ch(x)$, pour $x>1$,et $t=\arg ch(-x)$, pour $x<-1$.

6) $\int f(x,\sqrt{1-x^2})dx$ $\hookrightarrow$ on pose : $t=arc\sin(x)$, pour se ramener au calcul de $\int f(\cos(t),\sin(t))\cos(t)\,dt$.

R - Les méthodes systématiques ne sont pas nécessairement les meilleures, il faut toujours voir s'il est possible de trouver mieux.
- Dans tous les cas, on n'oublie pas de revenir à la variable initiale.

5.3 Exercices

Exercice 5.1 1)-En utilisant la formule de Riemann, Calculer les intégrales suivantes :
a)- $\int_a^b x^2 dx$, b)- $\int_0^1 \exp(x)\, dx$.
2)- Les fonctions suivantes sont-elles intégrables au sens de Riemann ?

$$f(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \in [0,1] \cap \mathbb{Q} \\ 0 \text{ si } x \in [0,1] \cap (\mathbb{R} - \mathbb{Q}) \end{cases} ; g(x) = \begin{cases} \cos x \text{ si } x \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ \sin x \text{ si } x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases}$$

$$h(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} \text{ si } x \in]0,3] \\ 1 \text{ si } x = 0 \end{cases}$$

Solution 5.1 1)-
a)-Considérons la fonction $f : x \mapsto x^2$ et une subdivision régulière de l'intervalle $[a,b]$, associée à f.
Soient $h = \frac{b-a}{n}$ le pas de la division et

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{b-a}{n}(f(x_1) + \ldots f(x_n)) \\ &= h\left((a+h)^2 + (a+2h)^2 \ldots + (a+nh)\right)^2 \\ &= h\left(na^2 + 2ah(1+2+\ldots+n) + h^2\left(1+2^2+\ldots n^2\right)\right) \\ &= \frac{b-a}{n}\left(na^2 + 2a\left(\frac{b-a}{n}\right)\frac{n(n+1)}{2} + \left(\frac{b-a}{n}\right)^2 \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right) \\ &= (b-a)a^2 + a(b-a)^2\frac{(n+1)}{n} + (b-a)^3\frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}. \end{aligned}$$

Sachant que la fonction $x \mapsto x^2$ est continue sur $[a,b]$ donc elle est intégrable sur $[a,b]$; par conséquent

$$\int_a^b x^2 dx = \lim_{n \to +\infty} S_n = (b-a)a^2 + a(b-a)^2 + \frac{(b-a)^3}{3} = \frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3}$$

b)- Dans ce cas $h=\frac{1}{n}, f : x \mapsto \exp(x)$ et

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{n}\left(f(x_1)+\ldots f(x_n)\right) \\ &= \frac{1}{n}\left(f(\frac{1}{n})+\ldots f(1)\right) \\ &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\exp\left(\frac{k}{n}\right) \\ &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\exp\left(\frac{1}{n}\right)\right)^k \\ &= \frac{1}{n}\exp\left(\frac{1}{n}\right)\frac{\left(\exp\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n-1}{\exp\left(\frac{1}{n}\right)-1} \\ &= \exp\left(\frac{1}{n}\right)\frac{e-1}{\left(\frac{\exp\left(\frac{1}{n}\right)-1}{\frac{1}{n}}\right)}. \end{aligned}$$

Sachant que la fonction $f : x \mapsto \exp(x)$ est continue sur $[0,1]$, donc elle est intégrable sur $[0,1]$; par conséquent

$$\int_0^1 \exp(x)\,dx = \lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty}\exp\left(\frac{1}{n}\right)\frac{e-1}{\left(\frac{\exp\left(\frac{1}{n}\right)-1}{\frac{1}{n}}\right)} = e-1.$$

2) • La fonction $x \mapsto f(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x\in[0,1]\cap\mathbb{Q} \\ 0 \text{ si } x\in[0,1]\cap(\mathbb{R}-\mathbb{Q}) \end{cases}$ est bornée mais n'est pas Riemann-intégrable en effet :
Soient

$$\begin{aligned} A &= \left\{\int_a^b u(x)dx,\ u \text{ fonction en escalier, } u\le f\right\} \\ & \textit{et} \\ B &= \left\{\int_a^b U(x)dx,\ U \text{ fonction en escalier, } f\le U\right\}. \end{aligned}$$

On a

$$1=\sup A \neq \inf B = 0.$$

• La fonction $g(x) = \begin{cases} \cos x \text{ si } x\in\left[0,\frac{1}{2}\right] \\ \sin x \text{ si } x\in\left]\frac{1}{2},1\right] \end{cases}$ est définie, bornée et continue par morceaux sur $[0,1]$, donc elle est Riemann-intégrable sur $[0,1]$.

• La fonction $h(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} \text{ si } x\in\left]0,3\right] \\ 1 \text{ si } x=0 \end{cases}$ est définie et continue sur $[0,3]$, donc elle est Riemann-intégrable sur $[0,3]$. ■

Exercice 5.2 Calculer les limites des suites dont les termes généraux sont les suivants :
$U_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+n}$, $V_n=\frac{1}{n^2}\prod_{k=1}^{n}\left(n^2+k^2\right)^{\frac{1}{n}}$, $W_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}\sin\left(\frac{k}{n}\right)$. ■

■ **Solution 5.2** • U_n peut s'écrire sous la forme

$$U_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\left(\frac{k}{n}\right)},$$

qui est la somme de Riemann de la fonction $f(x) = \frac{1}{1+x}$ sur l'intervalle $[0,1]$. Sa limite est alors

$$\lim_{n\to+\infty} U_n = \int_0^1 \frac{dx}{1+x} = [\ln(1+x)]_0^1 = -\ln 2.$$

• $V_n = \frac{1}{n^2}\prod_{k=1}^{n}\left(n^2+k^2\right)^{\frac{1}{n}}$ est un produit strictement positif, pour le ramener en somme, on prend le logarithme des deux membres :

$$\begin{aligned}
\ln V_n &= -2\ln n + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(n^2+k^2\right) \\
&= -2\ln n + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left[n^2\left(1+\left(\frac{k}{n}\right)^2\right)\right] \\
&= -2\ln n + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}2\ln n + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\left(\frac{k}{n}\right)^2\right) \\
&= -2\ln n + 2\ln n + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\left(\frac{k}{n}\right)^2\right) \\
&= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\left(\frac{k}{n}\right)^2\right),
\end{aligned}$$

qui est la somme de Riemann de la fonction continue $f(x) = \ln\left(1+x^2\right)$ sur l'intervalle $[0,1]$. Sa limite est alors

$$\lim_{n\to+\infty} \ln V_n = \int_0^1 \ln\left(1+x^2\right) dx.$$

Par une intégration par parties et en posant

$$u = \ln\left(1+x^2\right) \text{ et } dv = dx \Rightarrow du = \frac{2x}{1+x^2} \text{ et } v = x,$$

on obtient

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \ln\left(1+x^2\right) dx &= \left[x\ln\left(1+x^2\right)\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{2x^2}{1+x^2}dx \\
&= \ln 2 - 2\int_0^1 \frac{x^2+1-1}{1+x^2}dx \\
&= \ln 2 - 2\int_0^1 \left(1-\frac{1}{1+x^2}\right)dx \\
&= \ln 2 - 2\left[x-\arctan x\right]_0^1 \\
&= \ln 2 - 2(1-\arctan 1) \\
&= \ln 2 - 2 + \frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

D'où

$$\lim_{n\to+\infty} V_n = 2\exp\left(\frac{\pi}{2} - 2\right).$$

3)-W_n peut s'écrire sous la forme

$$W_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n}\sin\left(\frac{k}{n}\right),$$

qui est la somme de Riemann de la fonction $f(x) = x\sin(x)$ sur l'intervalle $[0,1]$. Sa limite est alors

$$\lim_{n\to+\infty} W_n = \int_0^1 x\sin(x)\,dx.$$

Par une intégration par parties et en posant

$$u = x \text{ et } dv = \sin(x)\,dx \Rightarrow du = dx \text{ et } v = -\cos x,$$

on obtient

$$\begin{aligned} \int_0^1 x\sin(x)\,dx &= [-x\cos x]_0^1 + \int_0^1 \cos(x)\,dx \\ &= \sin 1 - \cos 1, \end{aligned}$$

alors

$$\lim_{n\to+\infty} W_n = \sin 1 - \cos 1.$$

■

Exercice 5.3 Soit $a > 0$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Montrer que
1)- si f est paire alors

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx.$$

2)- si f est impaire alors

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0.$$

3)- si f est périodique de période T alors

$$\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_0^T f(x)dx.$$

■

■ **Solution 5.3** 1)- En utilisant la relation de Chales, on a

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{-a}^{0} f(x)dx + \int_0^a f(x)dx.$$

En faisant le changement de variables : $u = -x \Rightarrow du = -dx$, et en utilisant la parité de f on obtient

$$\int_{-a}^{0} f(x)dx = \int_{a}^{0} -f(-u)du = -\int_{a}^{0} f(u)du = \int_{0}^{a} f(u)du.$$

Donc

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx.$$

2)- Toujours en utilisant la relation de Chales, on a

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{-a}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{a} f(x)dx.$$

En faisant le changement de variables : $u = -x \Rightarrow du = -dx$, et en utilisant le fait que f est impaire, on obtient

$$\int_{-a}^{0} f(x)dx = \int_{a}^{0} -f(-u)du = \int_{a}^{0} f(u)du = -\int_{0}^{a} f(u)du.$$

Donc

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0.$$

3)-En utilisant la relation de Chasles, on a

$$\int_{a}^{a+T} f(x)dx = \int_{a}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{T} f(x)dx + \int_{T}^{a+T} f(x)dx.$$

En appliquant le changement de variables : $u = x - T \Rightarrow du = dx, et$ en utilisant la T-périodicité de f, on obtient

$$\int_{T}^{a+T} f(x)dx = \int_{0}^{a} f(u+T)du = \int_{0}^{a} f(u)du.$$

Donc

$$\begin{aligned}\int_{a}^{a+T} f(x)dx &= \int_{a}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{a} f(u)du + \int_{0}^{T} f(x)dx \\ &= \int_{a}^{a} f(x)dx + \int_{0}^{T} f(x)dx,\end{aligned}$$

or

$$\int_{a}^{a} f(x)dx = 0,$$

par suite

$$\int_{a}^{a+T} f(x)dx = \int_{0}^{T} f(x)dx.$$

■

Exercice 5.4 Soient a et b deux éléments de $\mathbb{R}$ et f de classe C^{n+1} sur l'intervalle $[a,b]$.
a)- Montrer que

$$\begin{aligned} f(b) &= f(a)+\frac{(b-a)}{1!}f'(a)+\frac{(b-a)^2}{2!}f''(a)+\ldots+\frac{(b-a)^n}{n!}f^{(n)}(a) \\ & +\frac{1}{n!}\int_a^b f^{(n+1)}(x)\,(b-x)^n\,dx. \end{aligned}$$

Cette formule est appelée Formule de Taylor à l'ordre n, avec reste intégrale.
b)- En déduire qu'il existe $c \in [a,b]$ tel que

$$\begin{aligned} f(b) &= f(a)+\frac{(b-a)}{1!}f'(a)+\frac{(b-a)^2}{2!}f''(a)+\ldots+\frac{(b-a)^n}{n!}f^{(n)}(a) \\ & +\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c). \end{aligned}$$

■

■ **Solution 5.4** a)- Considérons l'intégrale

$$R_k=\frac{1}{k!}\int_a^b f^{(k+1)}(x)\,(b-x)^k\,dx,\ \text{où } 1\le k\le n.$$

En posant

$$u=\frac{(b-x)^k}{k!} \text{ et } dv=f^{(k+1)}(x)dx,$$

et en intégrant par parties on trouve

$$R_k=-\frac{(b-a)^k}{k!}f^{(k)}(a)+\int_a^b\frac{(b-x)^{k-1}}{(k-1)!}f^{(k)}(x)dx,$$

donc

$$R_k=-\frac{(b-a)^k}{k!}f^{(k)}(a)+R_{k-1},\ 1\le k\le n.$$

Ainsi

$$\begin{aligned} R_1 &= -(b-a)\,f'(a)+R_0, \\ R_2 &= -\frac{(b-a)^2}{2!}f''(a)+R_1, \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ R_{n-1} &= -\frac{(b-a)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(a)+R_{n-2}, \\ R_n &= -\frac{(b-a)^n}{n!}f^{(n)}(a)+R_{n-1}. \end{aligned}$$

En additionnant membre à membre les égalités précédentes, on obtient

$$R_n = R_0 - (b-a) f'(a) - \frac{(b-a)^2}{2!} f''(a) - \dots - \frac{(b-a)^n}{n!} f^{(n)}(a),$$

et puisque

$$R_0 = \int_a^b f'(x)dx = f(b) - f(a),$$

On déduit que

$$\begin{aligned} f(b) &= f(a) + \frac{(b-a)}{1!} f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2!} f''(a) + \dots + \frac{(b-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) \\ &\quad + \frac{1}{n!} \int_a^b f^{(n+1)}(x)(b-x)^n dx. \end{aligned}$$

b)- Il s'agit de montrer qu'il existe $c \in [a,b]$ tel que

$$\frac{1}{n!} \int_a^b f^{(n+1)}(x)(b-x)^n dx = \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c).$$

Puisque la fonction $x \mapsto f^{(n+1)}(x)$ est continue et que la fonction $x \mapsto (b-x)^n$ a un signe constant (positif) sur $[a,b]$, on déduit, d'après la formule de la moyenne généralisée, qu'il existe $c \in [a,b]$ tel que

$$\begin{aligned} \frac{1}{n!} \int_a^b f^{(n+1)}(x)(b-x)^n dx &= f^{(n+1)}(c) \int_a^b \frac{(b-x)^n}{n!} dx \\ &= \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c). \end{aligned}$$

■

Exercice 5.5 Soit f une fonction continue et croissante sur $[a,b]$, on considère F la primitive de f qui s'annule en a. Montrer que

$$F\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{1}{2}(F(x) + F(y)), \text{ pour tout } x, y \in [a,b].$$

■

■ **Solution 5.5** Soit

$$A = F\left(\frac{x+y}{2}\right) - \frac{1}{2}(F(x) + F(y)),$$

il s'agit donc de montrer que $A \leq 0$.

Puisque F est la primitive de f qui s'annule en a, A peut s'écrire sous la forme

$$\begin{aligned}
A &= \int_a^{\frac{x+y}{2}} f(t)dt - \frac{1}{2}\left(\int_a^x f(t)dt + \int_a^y f(t)dt\right) \\
&= \int_a^x f(t)dt + \int_x^{\frac{x+y}{2}} f(t)dt - \frac{1}{2}\int_a^x f(t)dt - \frac{1}{2}\left(\int_a^x f(t)dt + \int_x^y f(t)dt\right) \\
&= \int_x^{\frac{x+y}{2}} f(t)dt - \frac{1}{2}\int_x^y f(t)dt \\
&= \int_x^{\frac{x+y}{2}} f(t)dt - \frac{1}{2}\left(\int_x^{\frac{x+y}{2}} f(t)dt + \int_{\frac{x+y}{2}}^y f(t)dt\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\int_x^{\frac{x+y}{2}} f(t)dt - \int_{\frac{x+y}{2}}^y f(t)dt\right).
\end{aligned}$$

En faisant le changement de variable $s = t - x \Rightarrow ds = dt$,

$$\int_x^{\frac{x+y}{2}} f(t)dt = \int_0^{\frac{y-x}{2}} f(s+x)ds.$$

Et en posant $s = t - \frac{x+y}{2} \Rightarrow ds = dt$,

$$\int_{\frac{x+y}{2}}^y f(t)dt = \int_0^{\frac{y-x}{2}} f(s+\frac{x+y}{2})ds.$$

D'autre part, on a $0 < s < \frac{y-x}{2} \Rightarrow s + x < \frac{y-x}{2} + x = \frac{x+y}{2} < s + \frac{x+y}{2}$.
Or f est croissante, donc

$$f(s+x) < f(s+\frac{x+y}{2})$$

ce qui entraîne

$$\int_0^{\frac{y-x}{2}} f(s+x)ds < \int_0^{\frac{y-x}{2}} f(s+\frac{x+y}{2})ds.$$

Par conséquent

$$A = \int_0^{\frac{y-x}{2}} f(s+x)ds - \int_0^{\frac{y-x}{2}} f(s+\frac{x+y}{2})ds \le 0.$$

■

Exercice 5.6 Soit la fonction

$$F(x) = \int_0^x \frac{dt}{2+\cos t}.$$

1)- Montrer que F est définie et continue sur $\mathbb{R}$, et qu'elle est impaire.
2)- Déterminer $F(x)$ sur $]-\pi,\pi[$, en déduire $F(\pi)$.
3)- Montrer que $F(x) = F(x-2\pi) + \frac{2\pi}{\sqrt{3}}$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.
4)- Soit $k \in \mathbb{Z}$, calculer $F(\pi+2k\pi)$, puis calculer $F(x)$ pour $x \in]-\pi+2k\pi, \pi+2k\pi[$.

5)- En déduire la valeur de l'intégrale : $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \frac{dt}{2+\cos t}$.

Solution 5.6 1)- Soit

$$f(x) = \frac{1}{2+\cos t}.$$

•On a : $1 \leq 2+\cos t \leq 3$, donc f est définie et continue sur $\mathbb{R}$, ce qui entraîne que f est intégrable sur $\mathbb{R}$, par conséquent $F(x) = \int_0^x \frac{dt}{2+\cos t}$ est définie sur $\mathbb{R}$.
F étant la primitive de f (par définition), c-à-d $F' = f$, donc F est de classe C^1sur $\mathbb{R}$.
•En effectuant le changement de variable : $u = -t \Rightarrow du = -dt$, et en tenant compte de la parité de f, on obtient

$$\begin{aligned} F(-x) &= \int_0^{-x} \frac{dt}{2+\cos t} = \int_0^{-x} \frac{dt}{2+\cos t} = \int_0^{x} \frac{-du}{2+\cos(-u)} \\ &= -\int_0^{x} \frac{du}{2+\cos u} = -F(x). \end{aligned}$$

Donc F est impaire.
$2^{ème}$méthode :

$$F(-x) = \int_0^{-x} \frac{dt}{2+\cos t} = -\int_{-x}^{0} \frac{dt}{2+\cos t} = -\int_0^{x} \frac{dt}{2+\cos t} = -F(x),$$

car f est paire.
2)- Déterminons $F(x)$ sur $]-\pi,\pi[$.
Considérons le changement de variable : $u = \tan\frac{t}{2}$. Il est bijectif en effet,

$$t \in]0,x[\subset]-\pi,\pi[\Rightarrow \frac{t}{2} \left]0,\frac{x}{2}\right[\subset \left]\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[,$$

et la fonction tan est bijective sur $\left]\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$.

$$u = \tan\frac{t}{2} \Rightarrow du = \frac{1}{2}\left(1+\tan^2\left(\frac{t}{2}\right)\right)dt = \frac{1}{2}\left(1+u^2\right)dt,$$

Implique que

$$dt = \frac{2du}{1+u^2} \text{ et } \cos t = \frac{1-u^2}{1+u^2},$$

On obtient alors

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_0^x \frac{dt}{2+\cos t} = \int_0^{\tan\frac{x}{2}} \frac{1}{2+\frac{1-u^2}{1+u^2}} \cdot \frac{2du}{1+u^2} = \int_0^{\tan\frac{x}{2}} \frac{2du}{3+u^2} \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}} \int_0^{\tan\frac{x}{2}} \frac{\frac{du}{\sqrt{3}}}{1+\left(\frac{u}{\sqrt{3}}\right)^2} = \left[\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{u}{\sqrt{3}}\right)\right]_0^{\tan\frac{x}{2}} \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\tan\frac{x}{2}\right). \end{aligned}$$

Maintenant calculons $F(\pi)$. F étant continue sur $\mathbb{R}$, alors

$$F(\pi)=\lim_{x\to\pi}\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\tan\frac{x}{2}\right)=\frac{2}{\sqrt{3}}\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{\sqrt{3}}.$$

3)- Montrons que $F(x)=F(x-2\pi)+\frac{2\pi}{\sqrt{3}}$, pour tout $x\in\mathbb{R}$.
En faisant le changement de variable : $u=t+2\pi \Rightarrow du=dt$.

$$F(x-2\pi)=\int_0^{x-2\pi}\frac{dt}{2+\cos t}=\int_{2\pi}^{x}\frac{du}{2+\cos u}=\int_0^{x}\frac{du}{2+\cos u}-\int_0^{2\pi}\frac{du}{2+\cos u}.$$

Or la fonction f est paire et $2\pi-$périodique, donc

$$\int_0^{2\pi}\frac{du}{2+\cos u}=2\int_0^{\pi}\frac{du}{2+\cos u},$$

et

$$F(x-2\pi)=\int_0^{x}\frac{du}{2+\cos u}-2\int_0^{\pi}\frac{du}{2+\cos u}=F(x)+2F(\pi)=F(x)+\frac{2\pi}{\sqrt{3}}.$$

par conséquent

$$F(x)=F(x-2\pi)+\frac{2\pi}{\sqrt{3}},\ \textit{pour tout}\ x\in\mathbb{R}.$$

4)- Soit $k\in\mathbb{Z}$, calculons $F(\pi+2k\pi)$.
Si $k=-1, F(\pi+2k\pi)=F(-\pi)=-F(\pi)=-\frac{\pi}{\sqrt{3}}$,
Si $k=1, F(\pi+2k\pi)=F(3\pi)=F(3\pi-2\pi)+\frac{2\pi}{\sqrt{3}}=\frac{3\pi}{\sqrt{3}}$,
Si $k=2, F(\pi+2k\pi)=F(5\pi)=F(5\pi-2\pi)+\frac{2\pi}{\sqrt{3}}=\frac{5\pi}{\sqrt{3}}$,
Si $k=-2, F(\pi+2k\pi)=F(-3\pi)=-F(3\pi)=-\frac{3\pi}{\sqrt{3}}$.
Par itération on trouve que

$$F(\pi+2k\pi)=(2k+1)F(\pi)=(2k+1)\frac{\pi}{\sqrt{3}},\ \text{pour tout}\ k\in\mathbb{Z}.$$

Maintenant calculons $F(x)$ pour tout $x\in\left]-\pi+2k\pi,\pi+2k\pi\right[$.
Si on pose $z=x-2k\pi$, d'après la $2^{ème}$question, $F(z)=\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\tan\frac{z}{2}\right)$.
D'autre part, d'après la $3^{ème}$question on a pour tout $x\in\mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
F(x) &= F(x-2\pi)+\frac{2\pi}{\sqrt{3}}\\
&= F(x-4\pi)+\frac{4\pi}{\sqrt{3}}\\
&= F(x-6\pi)+\frac{6\pi}{\sqrt{3}}\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&= F(x-2k\pi)+\frac{2k\pi}{\sqrt{3}}\\
&= F(z)+\frac{2k\pi}{\sqrt{3}}.
\end{aligned}$$

Par conséquent, pour tout $x \in]-\pi+2k\pi, \pi+2k\pi[$

$$F(x) = \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}} \tan\left(\frac{x-2k\pi}{2}\right)\right) + \frac{2k\pi}{\sqrt{3}}.$$

5)- En déduire la valeur de l'intégrale : $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \frac{dt}{2+\cos t}$.

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \frac{dt}{2+\cos t} = \int_0^{\frac{3\pi}{2}} \frac{dt}{2+\cos t} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{2+\cos t} = F(\frac{3\pi}{2}) - F(\frac{\pi}{2}).$$

Or

$$\frac{\pi}{2} \in]-\pi, \pi[\text{ c-à-d } k=0 \text{ et } \frac{3\pi}{2} \in]\pi, 3\pi[\text{ c-à-d } k=1,$$

donc

$$\begin{aligned}
\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \frac{dt}{2+\cos t} &= \frac{2}{\sqrt{3}}\left[\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\tan\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) - \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)\right] + \frac{2\pi}{\sqrt{3}} \\
&= \frac{2}{\sqrt{3}}\left[\arctan\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) - \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right] + \frac{2\pi}{\sqrt{3}} \\
&= -\frac{4}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \frac{2\pi}{\sqrt{3}} = -\frac{4}{\sqrt{3}}\left(\frac{\pi}{6}\right) + \frac{2\pi}{\sqrt{3}} = \frac{4\pi}{3\sqrt{3}}.
\end{aligned}$$

■

Exercice 5.7 Calculer les primitives suivantes :
$\int \frac{x^{\frac{1}{2}}}{1+x^{\frac{3}{4}}}dx$, $\int \frac{\sin^5 x}{\cos x}dx$, $\int \sin^4 x \cos^5 x dx$, $\int \frac{x^4}{1+x^3}dx$, $\int \frac{dx}{\sqrt{1+x+x^2}}$, $\int \sqrt{x^2+4x+2}dx$
$\int \sqrt{3+2x-x^2}dx$, $\int \sin 2x\sqrt{3+\cos^4 x}dx$, $\int \ln(\sqrt[3]{x}-1)\,dx$, $\int \arcsin^2 t dt$, $\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x}}$. ■

■ **Solution 5.7** • Calculons $\int \frac{x^{\frac{1}{2}}}{1+x^{\frac{3}{4}}}dx$. La fonction $x \mapsto \frac{x^{\frac{1}{2}}}{1+x^{\frac{3}{4}}}$ est définie continue sur $\mathbb{R}^+$, elle admet donc une primitive. 0n pose

$$t>0,\ x=t^4 \Rightarrow dx = 4t^3 dt,$$

on remplace

$$\int \frac{x^{\frac{1}{2}}}{1+x^{\frac{3}{4}}}dx = 4\int \frac{t^5}{1+t^3}dt,$$

En faisant une division euclidienne, on trouve

$$\begin{aligned}
4\int \frac{t^5}{1+t^3}dt &= 4\int \left(t^2 - \frac{t^2}{1+t^3}\right)dt \\
&= \frac{4}{3}\left(t^3 - \ln\left(1+t^3\right)\right) + C.
\end{aligned}$$

En revenant à la variable initiale, on trouve

$$\int \frac{x^{\frac{1}{2}}}{1+x^{\frac{3}{4}}}dx = \frac{4}{3}\left(x^{\frac{3}{4}} - \ln\left(1+x^{\frac{3}{4}}\right)\right) + C,\ C \in \mathbb{R}.$$

• Calculons $\int \frac{\sin^5 x}{\cos x}dx$. La fonction rationnelle $x \mapsto \frac{\sin^5 x}{\cos x}$ est définie continue sur $\mathbb{R}\backslash\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$, elle admet donc une primitive.
On pose

$$t = \cos x \Rightarrow dt = -\sin x dx,$$

On trouve

$$\begin{aligned}
\int \frac{\sin^5 x}{\cos x}dx &= \int \frac{\left(1-\cos^2 x\right)^2}{\cos x}\sin x dx \\
&= -\int \frac{\left(1-t^2\right)^2}{t}dt \\
&= -\int \left(\frac{1}{t} - 2t + t^3\right)dt \\
&= -\ln|t| + t^2 - \frac{t^4}{4} + C \\
&= -\ln|\cos x| + \cos^2 x - \frac{\cos^4 x}{4} + C,\ C\in\mathbb{R}.
\end{aligned}$$

• $\int \sin^4 x\cos^5 x dx$, s'écrit sous la forme

$$\begin{aligned}
\int \sin^4 x\cos^5 x dx &= \int \sin^4 x\cos^4 x\cos x dx \\
&= \int \sin^4 x\left(1-\sin^2 x\right)^2\cos x dx
\end{aligned}$$

on fait le changement de variables

$$t = \sin x \Rightarrow dt = \cos x dx,$$

et on réécrit l'intégrale

$$\begin{aligned}
\int \sin^4 x\cos^5 x dx &= \int t^4\left(1-t^2\right)^2 dt \\
&= \int \left(t^4 - 2t^6 + t^8\right)dt \\
&= \frac{t^5}{5} - \frac{2}{7}t^7 + \frac{t^9}{9} + C \\
&= \frac{\cos^5 x}{5} - \frac{2}{7}\cos^7 x + \frac{\cos^9 x}{9} + C,\ C\in\mathbb{R}.
\end{aligned}$$

• Calculons $\int \frac{x^4}{1+x^3}dx$. La fonction rationnelle $x \mapsto \frac{x^4}{1+x^3}$ est définie continue sur $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$, donc elle admet une primitive sur $]-\infty,-1[$ et $]-1,+\infty[$.

Calculons la primitive sur $]-1,+\infty[$. A l'aide d'une division euclidienne, séparons la partie régulière de la fraction

$$\frac{x^4}{1+x^3}=x-\frac{x}{(x+1)(x^2-x+1)}=x+\frac{a}{(x+1)}+\frac{bx+c}{x^2-x+1}.$$

Par identification on trouve

$$a=-b=-c=\frac{1}{3}.$$

On obtient alors

$$\begin{aligned}\int\frac{x^4}{1+x^3}dx &= \int xdx+\frac{1}{3}\int\frac{dx}{(x+1)}-\frac{1}{3}\int\frac{x+1}{x^2-x+1}dx\\ &= \frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}\ln(x+1)-\frac{1}{3}\int\frac{x+1}{x^2-x+1}dx,\end{aligned}$$

reste à calculer

$$\begin{aligned}\int\frac{x+1}{x^2-x+1}dx &= \frac{1}{2}\int\frac{2x-1}{x^2-x+1}dx+\frac{3}{2}\int\frac{1}{x^2-x+1}dx\\ &= \frac{1}{2}\ln\left(x^2-x+1\right)+\frac{1}{2}\int\frac{1}{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x-\frac{1}{2}\right)\right)^2+1}dx\end{aligned}$$

On pose

$$t=\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x-\frac{1}{2}\right)\Rightarrow dt=\frac{2}{\sqrt{3}}dx\Rightarrow dx=\frac{\sqrt{3}}{2}dt,$$

on trouve

$$\begin{aligned}\int\frac{x+1}{x^2-x+1}dx &= \frac{1}{2}\ln\left(x^2-x+1\right)+\frac{\sqrt{3}}{4}\int\frac{dt}{t^2+1}\\ &= \frac{1}{2}\ln\left(x^2-x+1\right)+\frac{\sqrt{3}}{4}\arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x-\frac{1}{2}\right)\right)+C.\end{aligned}$$

Finalement, on obtient

$$\int\frac{x^4}{1+x^3}dx=\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}\ln(x+1)-\frac{1}{6}\ln\left(x^2-x+1\right)-\frac{\sqrt{3}}{12}\arctan\left(\frac{2x}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+C.$$

• $\int\frac{dx}{\sqrt{1+x+x^2}}$ est définie sur $\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}1+x+x^2 &= \left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\\ &= \frac{3}{4}\left(\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right)^2+1\right),\end{aligned}$$

on pose

$$t=\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)\Rightarrow dt=\frac{2}{\sqrt{3}}dx\Rightarrow dx=\frac{\sqrt{3}}{2}dt,$$

on remplace

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{\sqrt{1+x+x^2}} &= \int \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} \\
&= \arg sht + C \\
&= \arg sh\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right) + C,\ C \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

• $\int \sqrt{x^2+4x+2}dx$ est définie sur $\left]-\infty, 2-\sqrt{2}\right] \cup \left[2+\sqrt{2}, +\infty\right[$, et on a

$$x^2+4x+2 = (x+2)^2 - 2 = 2\left(\left(\frac{x+2}{\sqrt{2}}\right)^2 - 1\right).$$

On pose

$$u = \frac{x+2}{\sqrt{2}} \Rightarrow dx = \sqrt{2}du,$$

donc

$$\int \sqrt{x^2+4x+2}dx = 2\int \sqrt{u^2-1}du.$$

Pour $x \in \left[2+\sqrt{2}, +\infty\right[$, $u = \frac{x+2}{\sqrt{2}} > 1$, on pose alors

$$\begin{aligned}
u &= cht \Rightarrow t = \arg chu \\
du &= shtdt \Rightarrow dt = \frac{du}{sht}
\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}
2\int \sqrt{u^2-1}du &= 2\int sh^2tdt == \int (ch(2t)-1)\,dt \\
&= \frac{1}{2}sh(2t) - t + C \\
&= sh(t)\,ch(t) - t + C \\
&= cht\sqrt{ch^2t-1} - t + C \\
&= ch(\arg chu)\sqrt{ch^2(\arg chu)-1} - \arg chu + C \\
&= u\sqrt{u^2-1} - \ln\left(u+\sqrt{u^2-1}\right) + C.
\end{aligned}$$

Par suite, pour $x \in \left[2+\sqrt{2}, +\infty\right[$

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{x^2+4x+2}dx &= \frac{x+2}{2}\sqrt{x^2+4x+2} - \ln\frac{1}{\sqrt{2}}\left(x+2+\sqrt{x^2+4x+2}\right) + C \\
&= \frac{x+2}{2}\sqrt{x^2+4x+2} - \ln\left(x+2+\sqrt{x^2+4x+2}\right) + \frac{1}{2}\ln 2 + C,\ C \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Nous pouvons calculer de la même manière la primitive sur $x \in \left]-\infty, 2-\sqrt{2}\right]$, en posant $u = -cht$.

• Calculons $\int \sqrt{3+2x-x^2}dx$.

La fonction $x \mapsto \sqrt{3+2x-x^2}$ est définie continue sur $[-1,3]$, donc elle admet une primitive sur $[-1,3]$.

$$3+2x-x^2 = 4\left(1-\left(\frac{x-1}{2}\right)^2\right),$$

on pose

$$\begin{array}{rcl} u & = & \left(\frac{x-1}{2}\right) \Rightarrow du = \frac{dx}{2} \Rightarrow dx = 2du \\ si\ x & \in & [-1,3],\ \text{alors } u \in [-1,1]. \end{array}$$

d'où

$$\int \sqrt{3+2x-x^2}dx = 4\int \sqrt{1-u^2}du,$$

on pose ensuite

$$u = \sin t,\ t \in \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\text{ et } du = \cos t dt,$$

on trouve

$$\begin{array}{rcl} \int \sqrt{3+2x-x^2}dx & = & 4\int \sqrt{1-u^2}du \\ & = & 4\int \cos^2 t dt = 2\int (1+\cos 2t)\,dt \\ & = & 2t+\sin 2t + C \\ & = & 2t+2\sin t\cos t + C \\ & = & 2t+2\sin t\sqrt{1-\sin^2 t}+C \\ & = & 2\arcsin u + 2u\sqrt{1-u^2}+C \\ & = & \left(\frac{x-1}{4}\right)\sqrt{3+2x-x^2}+2\arcsin\left(\frac{x-1}{2}\right)+C,\ C\in\mathbb{R}. \end{array}$$

• Calculons $\int \sin 2x\sqrt{3+\cos^4 x}dx$.
La fonction $x \mapsto \sin 2x\sqrt{3+\cos^4 x}$ est définie continue sur $\mathbb{R}$, donc elle admet une primitive sur $\mathbb{R}$.

$$\sin 2x\sqrt{3+\cos^4 x} = 2\sin x\cos x\sqrt{3+\cos^4 x}.$$

En posant

$$t = \cos^2 x \Rightarrow dt = -2\sin x\cos x dx.$$

L'intégrale devient

$$\int \sin 2x\sqrt{3+\cos^4 x}dx = -\int \sqrt{3+t^2}dt.$$

On pose ensuite

$$t = \sqrt{3}shu \Rightarrow u = \arg sh\frac{t}{\sqrt{3}} \text{ et } dt = \sqrt{3}chudu.$$

En remplaçant, on trouve

$$\begin{aligned}
\int \sin 2x\sqrt{3+\cos^4 x}dx &= -\int \sqrt{3\left(1+sh^2u\right)}\sqrt{3}chudu \\
&= -3\int ch^2udu = -\frac{3}{2}\int (1+ch2u)\,du \\
&= -\frac{3}{2}u-\frac{3}{4}sh2u+C \\
&= -\frac{3}{2}u-\frac{3}{2}shuchu+C \\
&= -\frac{3}{2}u-\frac{3}{2}\sinh u\sqrt{1+sh^2u}+C \\
&= -\frac{3}{2}\arg sh\frac{t}{\sqrt{3}}-\frac{t}{2}\sqrt{3+t^2}+C \\
&= -\frac{3}{2}\ln\left(t+\sqrt{3+t^2}\right)-\frac{t}{2}\sqrt{3+t^2}+C,\ C\in\mathbb{R}.
\end{aligned}$$

• Calculons $\int \ln\left(\sqrt[3]{x}-1\right)dx$.
La fonction $x\mapsto \ln\left(\sqrt[3]{x}-1\right)$ est définie continue sur $]1,+\infty[$, donc elle admet une primitive sur $]1,+\infty[$.
On pose

$$t=\left(\sqrt[3]{x}-1\right)\Rightarrow x=(t+1)^3\Rightarrow dx=3\,(t+1)^2\,dt,$$

on remplace dans l'intégrale

$$\int \ln\left(\sqrt[3]{x}-1\right)dx=\int 3\,(t+1)^2\,(\ln t)\,dt,$$

appliquons une intégration par parties, en posant

$$\begin{aligned}
u &= \ln t\Rightarrow du=\frac{dt}{t} \\
dv &= 3\,(t+1)^2\,dt\Rightarrow v=(t+1)^3
\end{aligned}$$

et on obtient

$$\begin{aligned}
\int 3\,(t+1)^2\,(\ln t)\,dt &= (t+1)^3\ln t-\int \frac{(t+1)^3}{t}dt \\
&= (t+1)^3\ln t-\int \frac{t^3+3t^2+3t+1}{t}dt \\
&= (t+1)^3\ln t-\int \left(t^2+3t+3+\frac{1}{t}\right)dt \\
&= (t+1)^3\ln t-\frac{t^3}{3}-\frac{3}{2}t^2-3t-\ln t+C.
\end{aligned}$$

Finalement, on revient à la variable initiale

$$\int \ln\left(\sqrt[3]{x}-1\right)dx=(x-1)\ln\left(\sqrt[3]{x}-1\right)-\frac{\left(\sqrt[3]{x}-1\right)^3}{3}-\frac{3}{2}\left(\sqrt[3]{x}-1\right)^2-3\left(\sqrt[3]{x}-1\right)+C.$$

• $\int \arcsin^2 x dx$ est définie sur $[-1,1]$, pour calculer cette intégrale, nous procédons par intégration par parties. On pose

$$\begin{aligned} u &= \arcsin^2 x \Rightarrow du = \frac{2\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx, \\ dv &= dx \Rightarrow v = x. \end{aligned}$$

On obtient

$$\int \arcsin^2 x dx = x\arcsin^2 x - 2\int \frac{x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx,$$

faisons une $2^{ème}$ intégration par parties pour calculer $\int \frac{-x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx$.
Posons

$$\begin{aligned} u &= \arcsin x \Rightarrow du = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}, \\ dv &= \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}dx \Rightarrow v = \sqrt{1-x^2}. \end{aligned}$$

on obtient

$$\begin{aligned} \int \frac{-x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx &= \arcsin x\sqrt{1-x^2} - \int dx \\ &= \arcsin x\sqrt{1-x^2} - x + C. \end{aligned}$$

Par conséquent

$$\int \arcsin^2 x dx = x\arcsin^2 x + 2\arcsin x\sqrt{1-x^2} - x + C.$$

• $\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x}}$ est définie sur $]-1,0[\cup]0,+\infty[$.
On pose

$$t = \sqrt{1+x} \Rightarrow x = t^2 - 1, dx = 2tdt.$$

On remplace

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x}} = \int \frac{2dt}{t^2-1} = \int \frac{2dt}{(t-1)(t+1)}.$$

Maintenant, décomposons en éléments simples la fraction $\frac{2}{(t-1)(t+1)}$, on trouve

$$\frac{2}{(t-1)(t+1)} = \frac{-1}{(t+1)} + \frac{1}{(t-1)}.$$

d'où

$$\begin{aligned} \int \frac{2dt}{(t-1)(t+1)} &= \int \frac{-dt}{(t+1)} + \int \frac{dt}{(t-1)} \\ &= -\ln(t+1) + \ln|t-1| + C \\ &= \ln\left(\frac{|t-1|}{t+1}\right) + C. \end{aligned}$$

Par suite

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x}} = \ln\left(\frac{\left|\sqrt{1+x}-1\right|}{\sqrt{1+x}+1}\right) + C.$$

■

Exercice 5.8 Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\tan x)^n \, dx.$$

1)- Montrer que $I_n \geq 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2)- Etablir une relation entre I_{n+2} et I_n.
3)- Montrer que la suite $(I_n)_n$ tend vers 0.
4)- Calculer I_1 puis I_3. ■

■ **Solution 5.8** 1)- Puisque $(\tan x)^n \geq 0$ pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\tan x)^n \, dx \geq 0, \; \textit{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

2)- On a

$$\begin{aligned} I_{n+2} &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\tan x)^{n+2} \, dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\tan x)^n \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x} dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{(\tan x)^n}{\cos^2 x} dx - I_n. \end{aligned}$$

Cela implique que

$$I_{n+2} + I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{(\tan x)^n}{\cos^2 x} dx,$$

et en faisant le changement de variables : $y = \tan x$, on obtient

$$I_{n+2} + I_n = \int_0^1 y^n dy = \frac{1}{n+1}.$$

3)- Montrons d'abord que la suite $(I_n)_n$ est convergente.
D'après la question 1) la suite $(I_n)_n$ est minorée par 0. Montrons qu'elle est décroissante.
On a

$$0 \leq \tan x \leq 1, \; \textit{pour tout } x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right],$$

alors

$$(\tan x)^{n+1} \leq (\tan x)^n, \; \textit{pour tout } n \in \mathbb{N},$$

et en intégrant entre 0 et $\frac{\pi}{4}$, on obtient

$$I_{n+1} \leq I_n, \ pour\ tout\ n \in \mathbb{N}.$$

La suite $(I_n)_n$ est décroissante et minorée donc elle converge. De la question 2), on déduit que

$$\lim_{n\to+\infty} I_n = 0, \text{ car } \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0.$$

4)-Calculons I_1 ensuite I_3.
On a d'abord

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x dx = [-\ln(\cos x)]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2}\ln 2.$$

Et d'après la question 2)

$$I_3 = \frac{1}{2} - I_1 = \frac{1}{2}(1-\ln 2).$$

■

Bibliographie

[1] K. Abdelkarim, Cours d'analyse : 1^{er} cycle universitaire, O.P.U., Alger (1989), 162 pages.

[2] K. Allab, Elements d'Analyse, O.P.U., Alger 1984.

[3] C. Baba-Hamed, K. Benhabib, Analyse I : Rappel de Cours et Exercices avec Solutions, O.P.U., Alger (1988), 309 pages.

[4] B. Calvo, J. Doyen, A. Calvo et F. Boschet, Exercices D'analyse : 1^{er}cycle scientifique, $1^{ère}$année préparation aux grandes écoles, Armand Colin, Paris 1977.

[5] N. Daoudi-Merzagui, Cours D'analyse présenté aux étudiants de la $1^{ère}$ année : formation préparatoire de l'école supérieure en sciences appliquées de Tlemcen (E.S.S.A.T), Version (2013), 426 pages.

[6] J. Dixmier, Cours de Mathématiques du Premier Cycle, Bordas, Paris (1976), 630 pages.

[7] J.-M. Monier, Analyse : PCSI-PTSI (cours, méthodes et exercices corrigés), Dunod, Paris (2007), 510 pages.

[8] Séries d'exercices de T. D. et Sujets d'examens réalisés à l'Ecole Supérieure en Sciences Appliquées E.S.S.A de Tlemcen.