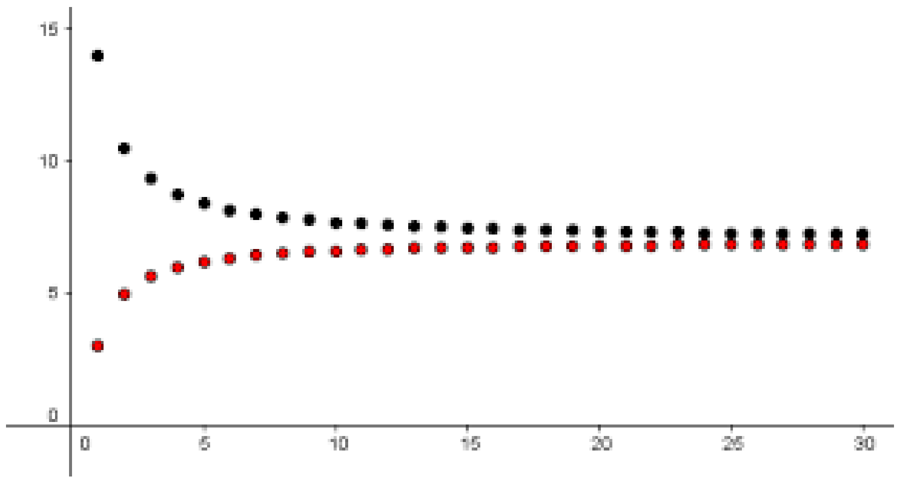
Ecole Supérieure en Sciences Appliquées de Tlemcen

Analyse I

Polycopié de cours rédigé par

Lotfi MOUHADJER



Préface

Ce polycopié est le fruit de dix ans d'enseignement de cours et TD du module Analyse I dans le cadre de la formation préparatoire à l'école supérieure en sciences appliquées de Tlemcen (E.S.S.A.T). Cet ouvrage est non seulement destine aux étudiants de la première année des classes préparatoires aux grandes écoles mais aussi aux étudiants de première année de tronc commun (MI-ST-SM).

Ce manuscrit comprend six chapitres qui couvrent l'ensemble du programme officiel du module Analyse I :
Le premier chapitre donne un aperçu sur l'ensemble des nombres réels et ses propriétés algébriques et métriques. La notion importante dans ce chapitre est celle de la borne supérieure et ses conséquences.
Le second chapitre est consacré aux suites réelles, on y étudie leur convergence.
Le troisième chapitre traite les fonctions réelles, on y expose les notions de limite et continuité et quelques résultat fondamentaux des fonctions continues.
Dans le quatrième chapitre, on présente la notion de dérivabilité et le théorème des accroissements finis et ses applications.
Le chapitre cinq est réserver pour les formules de Taylor et développements limités et ses applications.
Enfin, dans le sixième et dernier chapitre, on expose le concept de l'intégrale de Riemann d'une fonction réelle bornée, ainsi que les différentes méthodes de calcul de primitives et intégrales définies.

Chaque chapitre contient des exemples entièrement traités pour illustrer les différentes notions exposés et suivi d'une série d'exercices proposés.
Signalons qu'un grand nombre d'exercices proposés a été testé dans le cadre de travaux dirigés ou a fait l'objet de devoirs de réflexion ou de contrôle des connaissances pour les étudiants de la première année : formation préparatoire à l'E.S.S.A.T.
Les autres exercices ont été inspirés de lecture d'ouvrages spécialisés dont les références sont données à la fin du document.

Comme tout travail le notre reste bien évidemment perfectible, c'est pourquoi, nous saurions gré à tout lecteur de bien vouloir nous faire parvenir toute remarque ou suggestion pour améliorer notre document.

Table des matières

Chapitre 1

Nombres réels

Le présent chapitre, est consacré à l'étude des nombres réels sans passer par leur construction. Il s'agit de définir l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ sous différents points de vue. On présente une définition générale et une autre dite axiomatique. Cette dernière définition s'articule autour de structure algébrique de $\mathbb{R}$, et la propriété importante de la borne supérieure.

1.1 Définition générale de l'ensemble des nombres réels

1.1.1 Les nombres rationnels

Considérons les ensembles bien connus

$$\begin{aligned} \mathbb{N} &= \{0,1,2,3,4,5....\}, \quad \mathbb{N}^* = \mathbb{N}\setminus\{0\} \\ -\mathbb{N} &= \{-n \;:\; n\in\mathbb{N}\} = \{0,-1,-2,-3,-4,-5....\} \\ \mathbb{Z} &= -\mathbb{N}\cup\mathbb{N}, \quad \mathbb{Z}^* = \mathbb{Z}\setminus\{0\}. \end{aligned}$$

L'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels, est caractérisé de la manière suivante

$$0\in\mathbb{N} \quad et \quad (p\in\mathbb{N} \Longrightarrow p+1\in\mathbb{N})$$

L'ensemble $\mathbb{Z}$ des entiers relatifs, est caractérisé de la manière suivante

$$0\in\mathbb{Z} \quad et \quad (p\in\mathbb{Z} \Longrightarrow p-1\in\mathbb{Z} \quad et \quad p+1\in\mathbb{Z})$$

On considère l'ensemble $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels

$$\mathbb{Q} = \left\{\frac{p}{q} \;:\; p\in\mathbb{Z},\, q\in\mathbb{Z}^*\right\},\; \mathbb{Q}^* = \mathbb{Q}\setminus\{0\}$$

En tenant compte de la relation d'équivalence suivante (égalité de deux rationnels)

$$\frac{p}{q} = \frac{p'}{q'} \Longleftrightarrow pq' = qp'$$

l'ensemble $\mathbb{Q}$ est défini de manière équivalente, comme suit

$$\mathbb{Q} = \left\{\frac{p}{q} \;:\; p\in\mathbb{Z},\, q\in\mathbb{N}^* \quad p\wedge q = 1\right\}$$

où la notation $p\wedge q = 1$ signifie que les entiers p et q sont premier entre eux.

1.1.2 Nombres irrationnels

Les nombres rationnels sont insuffisant pour étudier la géométrie plane, par exemple. En effet, la longueur de diagonale d'un carré de côté 1, n'est pas un nombre rationnel. Autrement dit, nous avons la

Proposition 1.1

Il n'existe aucun rationnel positif r tel que $r^2 = 2$.

Démonstration On raisonne par l'absurde. Supposons qu'il existe un rationnel positif $r = \frac{p}{q}$ avec $p, q \in \mathbb{N}^*$ et $p \wedge q = 1$ tel que $r^2 = 2$. Donc

$$\frac{p^2}{q^2} = 2 \implies p^2 = 2q^2 \implies 2 \, divise \, p^2 \implies 2 \, divise \, p$$

Cela signifie que p est pair. Supposons donc $p = 2k$ avec $k \in \mathbb{N}^*$. Il vient alors

$$p^2 = 2q^2 \implies 4k^2 = 2q^2 \implies q^2 = 2k^2 \implies 2 \, divise \, q$$

Par conséquent, 2 divise p et q, donc 2 divise le plus grand commun diviseur de p et q qui est égal à 1 puisque $p \wedge q = 1$. Contradiction. ■

Les considérations géométriques et la proposition précédente, montrent bien qu'ils existent des nombres (des meseures) n'appartients pas à $\mathbb{Q}$.

Définition 1.1

Le nombre positif r qui vérifier $r^2 = 2$ est noté $\sqrt{2}$ est appelé racine carré de 2. On a $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Proposition 1.2

Pour tout $a \in \mathbb{Q}^*$ alors $a + \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ et $a\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Démonstration Soit $a \in \mathbb{Q}^*$. On raisonne par l'absurde. Supposons que $b := a + \sqrt{2} \in \mathbb{Q}$. Or $-a \in \mathbb{Q}$, alors

$$-a + b \in \mathbb{Q} \implies \sqrt{2} \in \mathbb{Q} \qquad \text{contradiction}$$

De la même manière, si on suppose que $a\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$, alors

$$\frac{1}{a} \in \mathbb{Q} \; et \; a\sqrt{2} \in \mathbb{Q} \implies \sqrt{2} = \left(\frac{1}{a}\right) \times (a\sqrt{2}) \in \mathbb{Q} \qquad \text{contradiction}$$

■

De la proposition 1.2, on en déduit qu'il existe une infinité des nombres qui ne sont pas des rationnels.

Définition 1.2

Un nombre qui n'appartient pas à $\mathbb{Q}$ est appelé nombre irrationnel. L'ensemble des nombres irrationnels se note par $\overline{\mathbb{Q}}$.

Définition 1.3

Un nombre réel est un nombre rationnel ou irrationnel. L'ensemble des nombres réels se note par $\mathbb{R}$. On a donc

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \overline{\mathbb{Q}}$$

1.1.3 Nombres algébréques , nombres transcendants

Définition 1.4

Un nombre réel λ est appelé nombre algébrique s'il existe un polynôme P à coefficients dans $\mathbb{Q}$, tel que $P(\lambda) = 0$. En d'autre terme, les zéros des polynômes à coefficients rationnels, sont appelés nombres algébriques.
On note par $\mathbb{A}$ l'ensemble des nombres algébriques.

Exemple 1.1 L'équation $ax = b$ où $a \in \mathbb{Z}^*$ et $b \in \mathbb{Z}$ admet une solution unique $\frac{b}{a}$. Donc tout nombre rationnel $\frac{b}{a}$

est algébrique. Par conséquent nous avons l'inclusion $\mathbb{Q} \subset \mathbb{A}$.

Exemple 1.2 Soit $\alpha = \sqrt{3} + 2\sqrt{2}$. On a

$$\alpha^2 = (\sqrt{3} + 2\sqrt{2})^2 = 11 + 4\sqrt{6}$$

Par suite, nous avons

$$(\alpha^2 - 11)^2 = (4\sqrt{6})^2 = 96$$

Finalement, on trouve

$$\alpha^4 - 11\alpha^2 + 25 = 0$$

Ainsi, on voit clairement, que α est un zéro d'un polynôme de degré 4 à coefficients rationnels. Donc α est un nombre algébrique.

Remarque Il existe une infinité des nombres réels qui ne sont pas algébriques comme le nombre célèbre π.

Définition 1.5

Un nombre réel qui n'est pas algébrique, est appelé nombre transcendant. On notera $\mathbb{T}$ l'ensemble des nombres transcendants.

$$\eta \in \mathbb{T} \iff (\textit{Il n'existe aucun polynôme à coefficients rationnels } P \textit{ tel que } P(\eta) = 0)$$

Remarque Montrer qu'un nombre donné est transcendant n'est pas évident en général. Ce type de questions se trouve au coeur de la théorie des nombres. On donne par la suite, un résultat de cette théorie, qui caractérise une classe des nombres réels transcendants.

Théorème 1.1

(Hermite-Lindemann) Soit α un nombre algébrique non nul. Alors e^{α} est un nombre transcendant.

Exemple 1.3 Les nombres : e, e^2, $\sqrt{e}$, $e^{\sqrt{2}}$ sont transcendants d'apès le theorème d'Hermite-Lindemann.

1.1.4 Première conclusion

- Un nombre réel est un nombre algébrique ou un nombre transcendant. Ainsi

$$\mathbb{R} = \mathbb{A} \cup \mathbb{T} = \mathbb{Q} \cup \overline{\mathbb{Q}}$$

- Tout nombre rationnel est un nombre algébrique. C'est à dire $\mathbb{Q} \subset \mathbb{A}$.
- Tout nombre transcendant est un nombre irrationnel. C'est à dire $\mathbb{T} \subset \overline{\mathbb{Q}}$.

1.2 Définition axiomatique de l'ensemble des nombres réels

1.2.1 Propriétés algébrique de $\mathbb{R}$

Les deux opérations : l' addition notée $''+''$ et la multiplication notée $''.''$ vérifient les propriétés suivantes :

$(A1)$ $(a+b)+c = a+(b+c)$, $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$ (Associativité de l'addition).

$(A2)$ $a+b = b+a$ $\forall a, b \in \mathbb{R}$ (commutativité de la'ddition).

$(A3)$ $\forall a \in \mathbb{R}$, $a+0 = 0+a = a$ ou 0 est l'élément neutre de l'addition dans $\mathbb{Q}$.

$(A4)$ $\forall a \in \mathbb{R}$, $\exists(-a) \in \mathbb{R}$ tel que $a+(-a) = 0$ (l'existence de l'élément symétrique par rapport l'addition).

$(A5)$ $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$, $a(b+c) = ab + ac$ (distributivité de la multiplication sur l'addition).

$(M1)$ $\forall a, b \in \mathbb{R}$, $ab = ba$ (commutativité de la multiplication).

$(M2)$ $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$, $a(bc) = (ab)c$ (associativité de la multiplication).

$(M3)$ $\forall a\mathbb{R}$, $a.1 = 1.a = a$ où 1 est l'élément neutre de la multiplication dans $\mathbb{Q}$.

$(M4)$ $\forall\, a \in \mathbb{R}^*$, il existe un élément unique noté a^{-1} ou $\frac{1}{a}$ tel que $a.a^{-1} = 1$. (l'existence de l'élément inverse par rapport la multiplication) .

Les propriétés algébriques $(A1)-(A5)$ et $(M1)-(M4)$ se résument, en disant que l'ensemble $\mathbb{R}$ avec les deux opérations addition $+$ et la multiplication . est un corps commutatif. Remarquons quel'ensemble $\mathbb{Q}$ vérifier égalemment les propriétés algébriques $(A1)-(A5)$ et $(M1)-(M4)$. On dit alors, que $\mathbb{Q}$ est un sous corps du corps des nombres réels $\mathbb{R}$.

La structure algébrique de $\mathbb{R}$ permis d'en déduire les identities remarquables suivantes

Proposition 1.3

Pour tout nombres réels a et b on a

1. $(a+b)^2 = a^2 + 2a\,b + b^2$.
2. $(a-b)^2 = a^2 - 2a\,b + b^2$.
3. $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2\,b + 3\,a\,b^2 + b^3$.
4. $a^2 - b^2 = (a+b)\,(a-b)$.
5. $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$.
6. $a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}\,b + a^{n-3}\,b^2 + \ldots + a\,b^{n-2} + b^{n-1})$. *pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$.

La généralisation des propriétés 1 et 3 de la proposition 1.3 est la formule de binôme donnée par la proposition suivantes :

Proposition 1.4

Pour tout nombres réels a et b, et pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k\, a^k\, b^{n-k} \tag{1.1}$$

où le nombre C_n^k est le nombre défini par

$$C_n^k = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

1.2.2 Relation d'ordre sur $\mathbb{R}$

Considérons l'ensemble noté $\mathbb{Q}_+$ défini par

$$\mathbb{Q}_+ = \left\{ \frac{p}{q} \;:\; p \in \mathbb{N} \; et \; q \in \mathbb{N}^* \right\} \subset \mathbb{Q}$$

$\mathbb{Q}_+$ est l'ensemble des nombres rationnels positifs. De manière similaire, considérons $\overline{\mathbb{Q}}_+$ l'ensemble de tout les nombres irrationels positifs.

$$\overline{\mathbb{Q}}_+ = \{x \in \overline{\mathbb{Q}} \;:\; x \geq 0\}$$

Soit maintenant l'ensemble des nombres réels positifs noté $\mathbb{R}_+$ défini par

$$\mathbb{R}_+ = \mathbb{Q}_+ \cup \overline{\mathbb{Q}}_+$$

On définie maintenant une relation d'ordre notée $\leq$ entre deux nombres réels quelconque a et b par

$$a \leq b \iff b - a \in \mathbb{R}_+$$

Si $a \leq b$, on écrit autrement $b \geq a$. En particulier $b \geq 0$ si et seulement si $b \in \mathbb{R}_+$. De plus les notations $a < b$ ou $b > a$ signifient $a \leq b$ et $a \neq b$.

On peut voir facilement que la relation $\leq$ vérifie les propriétés suivantes

$(O1)$ Pour tout $x \in \mathbb{R}$ alors $x \leq x$. (On dit que la relation $\leq$ est réflexive)

$(O2)$ Pour tout $x, y \in \mathbb{R}$ on a

$$x \leq y \;\; et \;\; y \leq x \implies x = y \quad (\text{ On dit que la relation } \leq \text{ est asymétrique })$$

$(O3)$ Pour tout $x, y, z \in \mathbb{R}$ on a

$$x \leq y \;\; et \;\; y \leq z \implies x \leq z \quad (\text{ On dit que la relation } \leq \text{ est transitive })$$

$(O4)$ Pour tout $x, y \in \mathbb{R}$ on a

$$x < y \quad ou \quad x = y \quad ou \quad x > y.$$

Propriété $(O4)$ signéfie que deux nombres réels sont toujours comparable. On dit que $\mathbb{R}$ est totalement ordonné.

Remarque Généralement, une relation $\preceq$ définie sur un ensemble abstrait X qui est réflexive, asymétrique et transitive, est appelée relation d'ordre sur X. Si de plus, la propriété $(O4)$ est satisfaite dans X, olors on dit que $(X, \preceq)$ est totalement ordonné, si non, on dit que X est partiellement ordonné, ou que la relation $\preceq$ est une relation d'ordre partielle dans X.

Par exemple on défini la relation notée $\preceq$ dans $\mathbb{Z}$ par

$$p\,,\, q \in \mathbb{Z}\,,\; p \preceq q \iff p \text{ divise } q$$

L'étudiant peut montrer que $\preceq$ est une relation d'ordre partielle dans $\mathbb{Z}$.

On regroupe les propriétés de base de la relation d'ordre $\leq$ dans $\mathbb{R}$ dans la proposition suivante

Proposition 1.5

.

1. $x \leq y \iff x + z \leq y + z$
2. $(x \leq y \;\; et \;\; z \geq 0) \implies xz \leq yz$
3. $(z > 0 \;\; et \;\; xz \leq yz) \implies x \leq y.$
4. $(n \in \mathbb{N} \;\; et \;\; 0 \leq x \leq y) \implies x^n \leq y^n.$

1.2.3 Les intervalles

Soit a et b deux réels tel que $a \leq b$. Considérons les parties réelles suivantes :

$$\begin{aligned}
I_1 &= [a,b] := \{x \in \mathbb{R} \;:\; a \leq x \leq b\} \\
I_2 &= [a,b[:= \{x \in \mathbb{R} \;:\; a \leq x < b\} \\
I_3 &=]a,b] := \{x \in \mathbb{R} \;:\; a < x \leq b\} \\
I_4 &=]a,b[:= \{x \in \mathbb{R} \;:\; a < x < b\} \\
I_5 &= [a,+\infty[:= \{x \in \mathbb{R} \;:\; x \geq a\} \\
I_6 &=]a,+\infty[:= \{x \in \mathbb{R} \;:\; x > a\} \\
I_7 &=]-\infty,a[:= \{x \in \mathbb{R} \;:\; x < a\} \\
I_8 &=]-\infty,a] := \{x \in \mathbb{R} \;:\; x \leq a\} \\
I_9 &=]-\infty,+\infty[= \mathbb{R}
\end{aligned}$$

Définition 1.6

Un intervalle dans $\mathbb{R}$ est une partie réelle ayant l'une des formes I_k , $k = 1,2,3,...,9$ définies ci-dessus .

En particulier, l'ensemble vide $\emptyset$ est un intervalle puisqu'il s'écrit par exemple comme $[a\,,\,a[$. De plus, il est clair que l'ensemble d'un seul élément (singleton) $\{a\} = [a\,,\,a]$ est aussi un intervalle.

Définition 1.7

Les intervalles de types I_k , $k = 1,2,3,4$ sont des intervalles d'extrimités a et b.

1. *Le nombre $b-a$ est appelé la longueur (ou l'amplitude) de l'intervalle I_k , $k = 1,2,3,4$.*
2. *Le nombre $\frac{a+b}{2}$ est appelé le centre de l'intervalle I_k , $k = 1,2,3,4$.*

Les intervalles I_k , $k = 1,2,3,...,9$ ont une caractérisation commune suivante :

Théorème 1.2

Une partie réelle non vide J est un intervalle si et seulement si :

$$(\forall\, a,\, b \in J\ (a<b)\,,:\ \forall x : a<x<b) \implies x \in J \tag{1.2}$$

Le Théorème 1.2 exprime q'un intervalle est un ensemble connexe (ne présente aucun saut à son intérieur). La négation de l'expression (1.2) nous amène au résultat suivant

Corollaire 1.1

Soit A une partie réelle non vide.

$$A \text{ n'est pas un intervalle} \iff (\exists\, a\,,\, b\, \in\, A\,, \exists\, c \in]a\,,\, b[\text{ et } c \notin A)$$

Exemple 1.4 Soit $J = [0,\ \sqrt{2}] \cap \mathbb{Q}$. On a $0 \in J$ et $1 \in J$ et $0 \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \leq 1$; mais

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \notin \mathbb{Q} \implies \frac{\sqrt{2}}{2} \notin J$$

Donc J n'est pas un intervalle.

1.2.4 La valeur absolue

Définition 1.8

La valeur absolue d'un nombre réel a est le nombre noté $|a|$ défini par

$$|a| = \begin{cases} a & si\ \ a \geq 0 \\ -a & si\ a \leq 0 \end{cases}$$

Il découle de la définition précédente, que la valeur absolue d'un nombre réel est toujours positive. De point de vue géométrique, la valeur absolue $|a|$ d'un nombre réel a mesure la <u>distance</u> entre le point a et l'origine 0 de la droite réelle.

Question 1 *En utilisant la définition* 1.8, *montre que si a et b sont deux réels alors*

$$|a-b| = \begin{cases} a-b & si\ \ a \geq b \\ b-a & si\ b \geq a \end{cases}$$

Remarque Géométriquement parlant, la quantité $|a-b|$ mesure la distance entre les deux point a et b de la droite réelle.

Nous citons, maintenant, quelques propriétés importantes de la valeurs absolues

Proposition 1.6 (Igalités)

Soit a et b deux nombres réels. Alors

1. $|a-b| = |b-a|$
2. $|a-b| = 0 \iff a = b$
3. $|a\,b| = |a|\,|b|$
4. $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$, ($b \neq 0$).

5. $|a^n| = |a|^n$, *pour tout* $n \in \mathbb{N}$.
6. $\sqrt{a^2} = |a|$.

Démonstration Les propriétés 1. et 2. , découlent directement, de la définition de la valeur absolue.
3. On distingue trios cas. a et b sont positifs les duex, sont négatifs les deux, ou sont de signes contraires.

$$\begin{array}{lll}
a > 0\,,\ b > 0 & \Longrightarrow & a\,b > 0 \Longrightarrow |a\,b| = a\,b = |a|\,|b| \\
a < 0\,,\ b > 0 & \Longrightarrow & a\,b < 0 \Longrightarrow |a\,b| = -a\,b = |a|\,|b| \\
a < 0\,,\ b < 0 & \Longrightarrow & a\,b > 0 \Longrightarrow |a\,b| = a\,b = (-a)\,(-b) = |a|\,|b|
\end{array}$$

4. Soit $b \neq 0$. En utlisant la propriété 3., en prenant $a = \frac{1}{b}$, il vient

$$1 = \left|\frac{1}{b}\,b\right| = \left|\frac{1}{b}\right|\,|b| \Longrightarrow \left|\frac{1}{b}\right| = \frac{1}{|b|}$$

Maintenant, soit $a \in \mathbb{R}$, alors

$$\left|\frac{a}{b}\right| = \left|a\,.\,\frac{1}{b}\right| = |a|\,\left|\frac{1}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$$

5. Se démontre facilement en utilisant la récurrence et la propriété 3..
6. Soit $a \in \mathbb{R}$. D'après la propriété 5. on voit que $a^2 = |a^2| = |a|^2$, et comme $|a| \geq 0$, on en déduit que

$$\sqrt{a^2} = \sqrt{|a|^2} = |a|$$

■

Proposition 1.7 (Inégalités)

Soit a et b deux nombres réels quelconques et soit $r > 0$. Alors

1. $|a| \leq r \Longleftrightarrow -r \leq a \leq r$
2. $|a + b| \leq |a| + |b|$ *(Inégalité triangulaire).*
3. $||a| - |b|| \leq |a - b|$ *(Deuxième inégalité triangulaire).*

Démonstration

1. Soit $a \in \mathbb{R}$ et $r > 0$. Alors d'après les propriétés 5. et 6. de la propositions 1.6 , on en déduit que

$$|a| \leq r \Longleftrightarrow a^2 \leq r^2 \Longleftrightarrow a^2 - r^2 \leq 0 \Longleftrightarrow (a - r)(a + r) \leq 0 \Longleftrightarrow -r \leq a \leq r$$

2. Soit a et b deux réels quelconques. Il est clair que

$$-|a| \leq a \leq |a| \quad et \quad -|b| \leq b \leq |b|$$

Par la somme il vient, ainsi

$$-(|a| + |b|) \leq a + b \leq (|a| + |b|) \Longleftrightarrow |a + b| \leq |a| + |b| \quad (\text{En utilisant } 1.)$$

3. Soit a et b deux réels quelconques. D'après la propriété 2., il vient

$$|a| = |a - b + b| \leq |a - b| + |b| \Longrightarrow |a| - |b| \leq |a - b| \tag{1.3}$$

En échangeant les places de a et b dans la relation (1.3), on trouve

$$|b| - |a| \leq |b - a| = |a - b| \Longrightarrow |a| - |b| \geq -|a - b| \tag{1.4}$$

En combainant les relations (1.3) et (1.4), on obtient

$$-|a - b| \leq |a| - |b| \leq |a - b| \Longrightarrow ||a| - |b|| \leq |a - b|$$

■

Remarque [Importante] Pour les réels x , x_0 et $r > 0$, l'expression $|x - x_0| < r$ signifie que la distance entre les deux points x et x_0 ne dipasse jamais r. De plus, d'après la propriété 1. de la proposition 1.7 , il vient

$$|x - x_0| < r \Longleftrightarrow x_0 - r < x < x_0 + r \Longleftrightarrow x \in]x_0 - r\,, x_0 + r[$$

$]x_0 - r, x_0 + r[$ est un intervalle ouvert de centre x_0 et de langueur $2r$.
Bref, l'expression $|x - x_0| < r$ signifie que x se trouve dans un intervalle ouvert de centre x_0 et de langueur $2r$.

1.2.5 Borne supérieure, borne inférieure

1.2.5.1 Partie minorée , majorée , bornée

Définition 1.9

Soit $A \subset \mathbb{R}$ une partie non vide.

1. *Un nombre réel $M \in \mathbb{R}$ est appelé un majorant de la partie A, si M est plus grand à tout les éléments de A. Autrement dit*
$$(M \text{ est un majorant de } A) \iff (\forall x \in A \ : x \leq M) \tag{1.5}$$
2. *Un nombre réel $m \in \mathbb{R}$ est appelé un minorant de la partie A, si m est plus petit à tout les éléments de A. Autrement dit*
$$(m \text{ est un minorant de } A) \iff (\forall x \in A \ : x \geq m) \tag{1.6}$$
3. *On dit que A est majorée (resp : minorée) s'il existe un majorant (resp : minorant) de A. Autrement dit*
$$(A \text{ est un majorée}) \iff (\exists M \in \mathbb{R} \ : \ \forall x \in A \ : x \leq M)$$
$$(A \text{ est un minorée}) \iff (\exists m \in \mathbb{R} \ : \ \forall x \in A \ : x \geq m)$$
4. *On dit que A est bornée si elle est majorée et minorée à la fois. Autrement dit*
$$(A \text{ est un bornée}) \iff (\exists \ m \text{ et } M \in \mathbb{R}\,(m \leq M) \ : \ \forall x \in A \ : m \leq x \leq M)$$

Remarques 1 *Soit $A \subset \mathbb{R}$ une partie non vide.*

1. *Si M est un majorant de A, alors tout nombre réel supérieur à M est aussi un majorant de A. Donc si A est majorée, l'ensemble des ses majorants est infini.*
2. *Si m est un majorant de A, alors tout nombre réel inférieur à m est aussi un minorant de A. Donc si A est minorée, l'ensemble des ses minorants est infini.*

Exemple 1.5 Soit $A = [-5, +\infty[\cap \mathbb{Q}$. A est l'ensemble de tout les nombres rationnels dans l'intervalle $[-5, +\infty[$. Il est clair que A est non vide ($0 \in A$ par exemple). D'autre part on a
$$\forall x \in A \ : \ x \geq 5 \implies A \text{ est minorée}$$
De plus, comme $\mathbb{Q}$ est un ensemble non majoré, alors A est non majorée.

Exemple 1.6 Considérons la partie $B \subset \mathbb{R}$ définie par
$$B = \left\{ 2 + \frac{1}{1+x^2}, \ x \in \mathbb{R} \right\}$$
Il est clair que tout les éléments de B sont positifs. Donc 0 est un minorant de B, se qui signifie que B est minorée. De plus, on sait que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a
$$\frac{1}{1+x^2} \leq 1 \implies 2 + \frac{1}{1+x^2} \leq 3$$
Donc B est majorée. Ainsi B est bornée.

Proposition 1.8

Soit $A \subset \mathbb{R}$ une partie non vide. Les assertions suivantes sont équivalentes

1. *A est bornée.*
2. *Il existe $M > 0$ tel que, pour tout $x \in A$ on a $|x| \leq M$.*

Démonstration Il clair que la deuxième assertion implique la première, puisque

$$|x| \leq M \iff -M \leq x \leq M$$

Montrons maintenant la réciproque. Supposons que A est bornée. Donc il existe deux nombres réels α et β tels que

$$\alpha \leq \beta \quad et \quad \alpha \leq x \leq \beta \quad \forall x \in A$$

En utilisant la valeur absolue ; on obtient

$$\forall x \in A \quad \alpha \leq x \leq \beta \Longrightarrow \forall x \in A \quad m := \min\{|\alpha|, |\beta|\} \leq |x| \leq M := \max\{|\alpha|, |\beta|\}$$

Donc pour $x \in A$ on a

$$-M \leq 0 \leq m \leq |x| \leq M \Longrightarrow |x| \leq M$$

■

Définition 1.10

Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$.
Si α est majorant (resp : minorant) de A et si $\alpha \in A$, alors le nombre α est applé <u>maximum</u> (resp : <u>minmum</u>) de A et on écrit

$$\alpha = \max(A) \quad (resp : \alpha = \min(A))$$

Exemple 1.7 On dit qu'un ensemble non vide $A \subset \mathbb{R}$ est <u>fini</u> s'il possède un nombre fini d'éléments. Dans ce cas l'ensemble A est de la de forme

$$A = \{a_1, a_2, ...a_N\}, \quad a_k \in \mathbb{R},\ k = 1, 2, ..., N\ , \quad N \in \mathbb{N}^*$$

Le plus grand (resp : plus petit) éléments parmis les $a_k \in \mathbb{R},\ k = 1, 2, ..., N$ est le $\max(A)$ (resp : $\min(A)$). En particulier si a et b sont deux nombres réels, on écrit

$$\max\{a, b\} = \begin{cases} a & \text{si } b \leq a \\ b & \text{si } a \leq b \end{cases} \quad et \quad \min\{a, b\} = \begin{cases} a & \text{si } a \leq b \\ b & \text{si } b \leq a \end{cases}$$

Question 2 *Montrer que pour tout nombre réel x :* $|x| = \max\{x, -x\}$

1.2.5.2 Borne supérieure , Borne inférieure

Rappellons que si une partie $A \subset \mathbb{R}$ est non vide et majorée (resp : minorée), alors elle a une infinité de majorants (resp : minorants). On s'intéresse à deux choses : le plus petit des majorants et le plus grand des minorants s'ils existent.

Définition 1.11

Soit $A \subset \mathbb{R}$ une partie non vide.

1. *Si A est majorée, alors le plus petit de ses majorants, s'il existe, est appelé la <u>borne supérieure</u> de A, et se note par* $\sup(A)$.
2. *Si A est minorée, alors le plus grand de ses minorants , s'il existe, est appelé la <u>borne inférieure</u> de A, et se note par* $\inf(A)$.

Remarque Soit A une partie réelle non vide et majorée (resp : minorée). A possède donc une infinité de majorants (resp : minorants). Soit $Maj(A)$ (resp : $Min(A)$) l'ensemble de tout les majorants (resp : minorants) de A. Alors il est clair que si $\sup(A)$ (resp : $\inf(A)$) existe, on a

$$\sup(A) = \min(Maj(A)) \quad (resp : \quad \inf(A) = \max(Min(A)))$$

D'autre part, il est clair que si $\sup(A)$ (resp : $\inf(A)$ existe, alors elle est unique. En effet si l'on suppose qu'il

existe deux bornes supérieures M_1 et M_2 de la partie A, alors puisque M_1 est le plus petit des majorants de A et M_2 est un majorant de A on en déduit que $M_1 \leq M_2$. En échangeant les rôles de M_1 et M_2 dans la déduction précidente, on obtient $M_2 \leq M_1$, et comme la relation d'ordre $\leq$ est antisymétrique, on conclure que $M_1 = M_2$.
Il existe des parties $A \subset \mathbb{Q}$ non vides et majorées, mais $\sup(A) \notin \mathbb{Q}$. En effet, un exemple de cette pathologie est fourné par la proposition suivante.

Proposition 1.9

Soit $A \subset \mathbb{Q}$ une partie définie par

$$A = \{x \in \mathbb{Q} \,:\, x > 0 \text{ et } x^2 < 2\}$$

Alors A ne possède ni plus grand élément, ni borne supérieure dans $\mathbb{Q}$.

La proposition 1.9 révèle l'insuffisance de l'ensemble $\mathbb{Q}$ pour étudier et exploiter la notion de la borne supérieure. Cependant dans $\mathbb{R}$ l'existence de la borne supérieure pour une partie réelle non vide et majorée est toujours assuré. En effet on a le résultat -qu'on admet- suivant

Théorème 1.3

Toute partie non vide de $\mathbb{R}$, majorée (resp : minorée) admet une borne supérieure (resp : inférieure).

Il résulte de ce qui précède, que l'ensemble de tout les majorants d'une partie non vide et majorée (resp : minorée) admet un plus petit (resp : plus grand) élément qu'on appelle borne supérieure (resp : inférieure) de cette partie. Cela nous amène aux caractérisations suivantes de sup et inf d'une partie réelle.

Caractérisation du la borne supérieure : Soit $A \subset \mathbb{R}$ une partie non vide et majorée. Alors

$$M = \sup(A) \iff \begin{cases} \forall x \in A \,:\, x \leq M & (1) \\ et \\ \forall \varepsilon > 0, \exists x_0 \in A \,:\, x_0 > M - \varepsilon & (2) \end{cases}$$

L'expression (1) signéfie que M est un majorant de A, et l'expression (2) traduit le fait que $M - \varepsilon$ n'est pas un majorant de A pour tout $\varepsilon > 0$ (même pour ε trés proche de 0), se qui signéfie que M est le plus petit majorant possible de A.

Caractérisation du la borne inférieure : Soit $A \subset \mathbb{R}$ une partie non vide et minorée. Alors

$$m = \inf(A) \iff \begin{cases} \forall x \in A \,:\, x \geq m & (3) \\ et \\ \forall \varepsilon > 0, \exists x_0 \in A \,:\, x_0 < m + \varepsilon & (4) \end{cases}$$

L'expression (3) signéfie que m est un minorant de A, et l'expression (4) traduit le fait que $m + \varepsilon$ n'est pas un minorant de A pour tout $\varepsilon > 0$ (même pour ε trés proche de 0), se qui signéfie que m est le plus grand minorant possible de A.

Remarque Il est clair que si $\max(A)$ (resp : $\min(A)$) existe, alors $\sup(A) = \max(A)$ (resp : $\inf(A) = \min(A)$).

Exemple 1.8 Soit $A = [-1\ 2[$. Montrer que $\sup(A) = 2$.

Réponse :

Pour tout $x \in A$, nous avons, $x < 2$. Donc, 2 est un majorant de A. Maintenant, soit $\varepsilon > 0$. Deux cas, se présentent :

Premier cas : $2 - \varepsilon < -1 \iff \varepsilon > 3$ Dans ce cas là, il existe toujours un $x_0 \in A$ tel que $x_0 > 2 - \varepsilon$.

Deuxième cas : $-1 < 2 - \varepsilon < 2$. Posons $x_0 = \frac{2+(2-\varepsilon)}{2} = 2 - \frac{\varepsilon}{2}$. Comme A est un intervalle, on en déduit que $x_0 \in A$, et par construction on a bien que $x_0 > 2 - \varepsilon$.

Par conséquent, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe toujours $x_0 \in A$ tel que $x_0 > 2 - \varepsilon$. Donc, il en résulte que $\sup(A) = 2$.

Exemple 1.9 Soit $B = \left\{4 + \frac{1}{1+|x|} \;:\; x \in \mathbb{R}\right\}$. Montrer que $\inf(B) = 4$.

Réponse :

Il est clair que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $4 + \frac{1}{1+|x|} \geq 4$. Donc 4 est un minorant de B. Par la suite nous allons montrer que

$$\forall \varepsilon > 0 \,, \exists\, y_0 \in B \,: \quad y_0 < 4 + \varepsilon \tag{1.7}$$

Soit $\varepsilon > 0$, et considérons l'inégalité

$$4 + \frac{1}{1+|x|} < 4 + \varepsilon \tag{1.8}$$

Il est clair que s'il existe un nombre réel x_0 vérifiant l'inégalit (1.9), alors l'élément $y_0 = 4 + \frac{1}{1+|x_0|} \in B$ vérifie la propriété (1.7). D'autre part, on a

$$4 + \frac{1}{1+|x|} < 4 + \varepsilon \iff |x| > \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon} \tag{1.9}$$

Remarquons que si $\varepsilon \geq 1$ alors l'inégalité (1.9) est vérifie pour tout $x \in \mathbb{R}$. De plus, on a

$$0 < \varepsilon < 1 \quad et \quad |x| > \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon} \implies x \in K := \left]-\infty, -\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}\right[\cup \left]\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}, +\infty\right[$$

Ainsi, un choix possible de x_0 est (par exemple) le suivant

$$x_0 = \begin{cases} 2019 & si \quad \varepsilon \geq 1 \\ \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon} & si \quad 0 < \varepsilon < 1 \end{cases}$$

Donc pour ce choix de x_0, on est sur que l'élément $y_0 = 4 + \frac{1}{1+|x_0|} \in B$ vérifie la propriété (1.7). Par conséquent $\inf(B) = 4$.

1.2.6 Deuxième conclusion

Il résulte de ce qui précède, que $(\mathbb{R}, +, ., \leq)$ est un corps commutatif, totalement ordonné, contenant le sous corps $\mathbb{Q}$ et possède la propriété : Toute partie réelle non vide et majorée, admet une borne supérieure.

1.2.7 Quelques propriétés de la borne sup et inf et méthodes de calcul

1.2.7.1 Quelques propriétés de sup et inf

Soit A une parties non vide de $\mathbb{R}$. On définie la partie notée $-A$ par

$$-A = \{-a \;:\; a \in A\}$$

La proposition suivante regroupe quelques propriétés importantes de sup et inf.

Proposition 1.10

Soient A et B deux parties non vides de $\mathbb{R}$.

1. *Si A est majorée (resp : minorée) alors $-A$ est minorée (resp : majorée), et on a*

$$A \text{ est majorée } \implies \sup(A) = -\inf(-A)$$

et

$$A \text{ est minorée } \implies \inf(A) = -\sup(-A)$$

2. *Si A et B sont majorées (resp : minorées), alors $A \cup B$ est majorée (resp : minorée), et on a*

$$\sup(A \cup B) = \max\{\sup(A), \sup(B)\} \tag{1.10}$$

$$\inf(A \cup B) = \min\{\inf(A), \inf(B)\} \tag{1.11}$$

Proposition 1.11

Soit A une partie réelle non vide . Alors

1. $M = \sup(A)$ *si et seulement si M est un majorant de A et il existe une suite $(a_n)_{n\geq n_0}$, telle que*
$$\forall n \geq n_0 \ : a_n \in A \quad et \quad \lim_{n\to+\infty} a_n = M$$
2. $m = \inf(A)$ *si et seulement si m est un minorant de A et il existe une suite $(b_n)_{n\geq n_0}$, telle que*
$$\forall n \geq n_0 \ : b_n \in A \quad et \quad \lim_{n\to+\infty} b_n = m$$
3. *A n'est pas mojorée (resp : n'est pas minorée) si et seulement si il existe une suite $(a_n)_{n\geq n_0}$, telle que*
$$\forall n \geq n_0 \ : a_n \in A \quad et \quad \lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty \quad (resp\ :\ -\infty\ )$$

1.2.7.2 Quelques méthodes de calcul de $\sup$ et $\inf$

On présente ici quelques méthodes pratique pour calculer la borne supérieure (resp : borne inférieure) d'une partie non vide et majorée (resp : minorée).

Soit $A \subset \mathbb{R}$ une partie réelle non vide.

Premier cas : A est l'ensemble des termes d'une suites monotone :

Soit n_0 un entier naturel fixé. Considérons la partie A définie par
$$A = \{u_n \ :\ n \geq n_0\}$$
où (u_n) est une suite réelle monotone. Deux cas remarquables se présentent :

1) Si A est majorée et la suite (u_n) est croissante, alors
$$\inf(A) = \min(A) = u_{n_0} \quad et \quad \sup(A) = \lim_{n\to+\infty} u_n$$
2) Si A est minorée et la suite (u_n) est décroissante, alors
$$\sup(A) = \max(A) = u_{n_0} \quad et \quad \inf(A) = \lim_{n\to+\infty} u_n$$
Deuxième cas : A est l'ensemble des valeurs d'une fonction réelle continue :

Soit $J \subset \mathbb{R}$ un sous ensemble non vide. Soit $f : J \to \mathbb{R}$. Considérons la partie A définie par
$$A = \{f(x) \ :\ x \in J\} = f(J)$$
L'étude des variations de la fonction f sur J permet de déterminer la partie $A = f(J)$ et d'en déduire $\sup(A)$ et $\inf(A)$ s'ils existent.

Remarque Dans de nombreux cas, pour le calcul des bornes $\sup$ et $\inf$, on est amené d'utiliser leurs propriétés exposés déjà dans les propositions 1.10 et 1.11, mais dans le cas général, ce calcul est difficile.

Exemple 1.10 Calculer $\inf(A)$ et $\sup(A)$ s'ils existent, dans les cas suivants :
$$1) \quad A = \left\{2 + \frac{(-1)^n}{n} \ :\ n \in \mathbb{N}^*\right\} \quad 2) \quad A = \left\{(x+1)e^{-x/4}\ x \in [0, +\infty[\ \right\}$$

Solution :

1) On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$
$$u_n = 2 + \frac{(-1)^n}{n}$$
Il est clair que la suite (u_n) n'est pas monotone, mais on remarque que les suites $(u_{2k} = 2 + 1/2k)$ et $(u_{2k+1} = 2 + 1/(2k+1))$ sont monotones. Ainsi on peut écrire $A = B \cup C$ où
$$B = \left\{u_{2k} = 2 + \frac{1}{2k} \ :\ \ k \in \mathbb{N}^*\right\} \quad et \quad C = \left\{u_{2k+1} = 2 - \frac{1}{2k+1} \ :\ \ k \in \mathbb{N}^*\right\}$$

Il est clair que (u_{2k}) est une suite décroissante et la suite (u_{2k+1}) est croissante. Donc

$$\sup(B) = \max(B) = u_2 = \frac{5}{2}\ ,\ \inf(B) = \lim_{k\to+\infty} u_{2k} = 2$$

et

$$\inf(C) = \min(C) = u_1 = 1\ ,\ \sup(C) = \lim_{k\to+\infty} u_{2k+1} = 2$$

En vertu de la proposition 1.10, il vient donc

$$\sup(A) = \sup(B\cup C) = \max\{\sup(B), \sup(C)\} = \frac{5}{2} \quad et \quad \inf(A) = \inf(B\cup C) = \min\{\inf(B), \inf(C)\} = 1$$

1) On pose pour tout $x \in [0, +\infty[$

$$f(x) = (x+1)\, e^{\frac{-x}{4}}$$

L'étude des variations de la fonction f sur l'intervalle $[0, +\infty[$ est résumé dans le tableaux de variations suivant

x	0		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	-	
$f(x)$	1	$\nearrow$	$4\, e^{-3/4}$	$\searrow$	0

Donc, il est clair maintenant que $A = f([0, +\infty[) =]0, 4e^{-3/4}]$. Par conséquent

$$\inf(A) = 0 \quad et \quad \sup(A) = \max(A) = f(3) = 4\, e^{-3/4}$$

1.3 Quelques conséquences de Théorème de la borne supérieure

Le théorème d'existence de la borne supérieure est un résultat important en analyse. Il a plusieures conséquences. Parmi eux, on présente ici trois les plus importantes.

1.3.1 Principe d'Archimède

Théorème 1.4

L'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers positifs, n'est pas majoré. Autrement dit

$$\forall\, x \in \mathbb{R}\ \exists\, n \in \mathbb{N}\ :\ n > x$$

Démonstration Par l'absurd, supposons que $\mathbb{N}$ est majoré. Donc la borne supérieure de $\mathbb{N}$ existe. Soit $s = \sup(\mathbb{N})$. Comme s est le plus petit des majorants de $\mathbb{N}$, il vient ainsi que $s-1$ n'est pas un majorant de $\mathbb{N}$. Donc

$$\exists\, p \in \mathbb{N}\ :\ s-1 < p \implies s < p+1$$

Le fait que $p+1 \in \mathbb{N}$ contredit $s = \sup(\mathbb{N}) < p+1$. Par conséquence, $\mathbb{N}$ n'est pas majoré. ■

Théorème 1.5 (Principe d'Archimède)

Pour tout nombres réels a et $b > 0$, il existe un entier $n \in \mathbb{N}$ tels que $nb > a$; i.e

$$\forall a \in \mathbb{R}, \forall\, b > 0, \exists\, n \in \mathbb{N}\ :\ nb > a$$

Les théorèmes 1.4 et 1.5 sont équivalent; en effet, si l'on prend $a = 1$ dans le théorème 1.4, on voit clairement que $\mathbb{N}$ n'est pas majoré. Inversement, pour deux réels quelconques a et $b > 0$, on pose $x = \frac{a}{b} \in \mathbb{R}$. Comme $\mathbb{N}$ n'est pas majoré, il existe un entier $n \in \mathbb{N}$ tel que $n > x$, c'est à dire $nb > a$.

1.3.2 Partie entière d'un nombre réel, Fonction partie entière

La notion de partie entière d'un nombre réel est une notion importante en analyse mathématique. Cette notion, est une conséquence du princpe d'Archimède.

Proposition 1.12

Pour tout réel x , il existe un entier uniqe $n \in \mathbb{Z}$ dépand de x, tel que

$$n \leq x < n+1 \tag{1.12}$$

Démonstration Soit $x \in \mathbb{R}$. Considérons l'ensemble $\Omega \subset \mathbb{Z}$ défini par

$$\Omega = \{m \in \mathbb{Z} \ : \ m \leq x\}$$

Si $x \geq 0$, alors $0 \in \Omega$, et si $x < 0$, alors d'après le principe d'Archimède, il existe $q \in \mathbb{N}$ tel que

$$-x < q \implies -q < x \implies -q \in \Omega$$

Nous avons montré que pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'ensemble Ω n'est pas vide. D'autre part, il est clair que x est un majorant de Ω. Donc l'ensemble Ω admet une borne supérieure. Posons $n = \sup(\Omega)$. Montrons maintenant que $n \in \Omega$. En effet, comme n est le plus petit majorant de Ω, il vient que $n-1$ n'est pas un majorant de Ω, ce qui signifie qu'il existe $p \in \Omega$ tel que $p > n-1$. Donc $n = \sup(\Omega) < p+1 \in \mathbb{Z}$. Il vient alors que $p+1 \notin \Omega$ et

$$p \in \Omega \ \ et \ \ \Omega \subset \{m \in \mathbb{Z} \ : \ m \leq p\} \implies \max(\Omega) = p$$

Donc

$$p = \max(\Omega) = \sup(\Omega) = n \implies n \in \Omega.$$

D'autre part, comme n est le plus petit des majorant de Ω, on en déduit que $n \leq x$. De plus, le fait que $n+1 \notin \Omega$ sinéfie que $n+1 > x$. Par conséquence il existe un entier n qui vérifier $n \leq x < n+1$. L'unicité de n due à l'unicité de la borne supérieure d'une partie réelle majorée.

■

Définition 1.12

L'entier n qui vérifier les inégalités (1.12) est appelé la partie entière de x, et se note par $E(x)$ ou $[x]$. Autrement dit, la partie entière d'un nombre réel x est l'entier noté $E(x)$ qui vérifier

$$E(x) \leq x < E(x)+1 \tag{1.13}$$

En d'autre terme, la partie entière d'un nombre réel x est le plus grand entier qui est inférieur ou égal à x.

$$E(x) = \sup\{m \in \mathbb{Z} \ : \ m \leq x\}$$

Remarques 2 .

1) *Il est clair que $E(x) = x$ si et seulement si $x \in \mathbb{Z}$. Donc pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $x \notin \mathbb{Z}$, on a*

$$E(x) < x < E(x)+1$$

2) De la relation (1.13), on en déduit, facilement l'encadrement de la partie entière suivant

$$x-1 < E(x) \leq x, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Exemple 1.11 Comme $3 < \pi < 4$, on en déduit que $E(\pi) = 3$.

Exemple 1.12 Comme $-6 < -5.27 < -5$, on en déduit que $E(-5.27) = -6$.

Exemple 1.13 Soit $n \in \mathbb{N}$. On sait bien que $n^2 < n(n+2) = n^2 + 2n < (n+1)^2$. Donc

$$n < \sqrt{n(n+2)} < n+1 \implies E\left(\sqrt{n(n+2)}\right) = n, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Les propriétés principales de la partie entière sont listé dans la proposition suivante

Proposition 1.13

Pour tout x et y dans $\mathbb{R}$ on a :

1. $x \leq y \implies E(x) \leq E(y)$.
2. $E(x+m) = E(x) + m$, *pour tout* $m \in \mathbb{Z}$.
3. $E(-x) = -E(x) - 1$ *pour tout* $x \in \mathbb{R}$ *et* $x \notin \mathbb{Z}$.
4. $E(x+y) - E(x) - E(y) \in \{0, 1\}$.

Démonstration Soient x et y deux nombres réels, et soit $m \in \mathbb{Z}$.

1. Supposons que $x \leq y$. On sait bien que
$$E(x) \leq x \leq y \implies E(x) \leq y \qquad (1)$$
Comme $E(y)$ est par définition, le plus grand entier qui est inférieur ou égal à y , et $E(x) \leq y$ d'après (1), on en déduit que $E(x) \leq E(y)$.
2. On a
$$E(x) \leq x < E(x) + 1 \implies E(x) + m \leq x + m < E(x) + m + 1 \qquad (2)$$
Posons $p = E(x) + m \in \mathbb{Z}$. Donc la relation (2) signéfie que $p \leq x + m < p + 1$. Cela signéfie que $E(x+m) = p = E(x) + m$.
3. Soit $x \in \mathbb{R}$ et $x \notin \mathbb{Z}$. Alors
$$E(x) < x < E(x) + 1 \implies -E(x) - 1 < -x < -E(x) \qquad (3)$$
La relation (3) signéfie que $-x$ se trouve entre deux entiers consicutifs $m = -E(x) - 1$ et $m + 1 = -E(x)$. Donc, $E(-x) = m = -E(x) - 1$.
4. On a
$$\begin{array}{rcl} x + y - 1 & < & E(x+y) \leq x + y \\ -x & \leq & -E(x) < -x + 1 \\ -y & \leq & -E(y) < -y + 1 \end{array}$$
On fait la somme, membre à membre, les relations ci-dessus, il vient que
$$-1 < E(x+y) - E(x) - E(y) < 2 \implies E(x+y) - E(x) - E(y) = 0 \text{ ou } 1.$$

■

1.3.3 Densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$

Définition 1.13

Une partie non vide $A \subset \mathbb{R}$ est dite dense dans $\mathbb{R}$ si

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \ x < y \implies (\exists a \in A : x < a < y) \qquad (1.14)$$

Autrement dit, la partie non vide A est dense dans $\mathbb{R}$ si pour tout deux réels distincts x et y il existe toujours un élément a de A entre x et y.

Remarque La négation de l'assertion (1.14) est

$$\exists\,(x,y)\in\mathbb{R}^2\ :\ x<y\ et\ (\ \forall\, a\in A\ :\ x\geq a\ ou\ y\leq a\ ) \tag{1.15}$$

Donc une partie non vide $A\subset\mathbb{R}$ n'est pas dense dans $\mathbb{R}$ si et seulement si l'assertion (1.15) est satisfaite.
En utilisant cette remarque, on peut montrer par exemple que l'ensemble $\mathbb{Z}$ n'est pas dense dans $\mathbb{R}$. En effet soit $x=1$ et $y=\sqrt{3}$. Il est clair qu'il n'existe aucun entier $m\in\mathbb{Z}$ qui vérifier $m\in]1,\sqrt{3}[$ ce qui montre que soit $m\leq 1$ soit $m\geq\sqrt{3}$.

Théorème 1.6

L'ensemble des nombres rationnels $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$. C'est à dire qu'entre deux nombres réels distincts, il existe un nombre rationnel.

Démonstration Soient x et y deux nomres réels tels que $x<y$. Posons $a=y-x>0$ et $b=1$ et appliquons le principe d'Archimède. Ainsi

$$\exists\, n\in\mathbb{N}^*: n(y-x)>1$$

Donc

$$y>x+\frac{1}{n}=\frac{nx+1}{n}$$

Posons maintenant $p=E(nx+1)=E(nx)+1$. Il vient ainsi

$$E(nx)>nx-1\implies p>nx\implies\frac{p}{n}>x$$

De plus, on a

$$E(nx)\leq nx\implies\frac{p}{n}\leq\frac{nx+1}{n}=x+\frac{1}{n}<y$$

Nous avons montrer donc l'existence d'un nombre rationnel $\frac{p}{n}$ tels que $x<\frac{p}{n}<y$. Par conséquent l'ensemble $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$. ∎

Corollaire 1.2

L'ensemble des nombres irrationnels $\overline{\mathbb{Q}}$ est dense dans $\mathbb{R}$. C'est à dire qu'entre deux nombres réels distincts, il existe toujours un nombre irrationnel.

Démonstration Soient x et y deux nombres réels tzls que $x<y$. Alors $x-\sqrt{2}<y-\sqrt{2}$. Comme $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$ on déduit qu'il existe un nombre rationnel r tel que $x-\sqrt{2}<r<y-\sqrt{2}$. Donc

$$x-\sqrt{2}<r<y-\sqrt{2}\implies x<r+\sqrt{2}<y$$

Nous avons montrer alors, que le nombre irrationnel $r+\sqrt{2}$ se trouve entre x et y. ∎

Exercices

Exercice 1 1. *Montrer que si p est un entier premier alors* $\sqrt{p}$ *est irrationnel.*

2. *Montrer que le nombre* $\log(2)$ *est un nombre irrationnel, où* $\log(.)$ *désigne le logarithme décimal.*

Exercice 2 *Soient* $a \neq 0$, b, c *et* d *quatre nombres rationnels et soit* x *un nombre irrationnel. Montrer que si* $ad - bc \neq 0$ *alors le nombre* $\frac{ax+b}{cx+d}$ *est irrationnel.*

Exercice 3 *Montrer que les nombres suivants sont algébriques :*

$$a = -1 + 2\sqrt[3]{5}, \quad b = 1 - \sqrt{1 + \sqrt{7}}, \quad c = \frac{\sqrt{5} - 2}{\sqrt{5} + 2}$$

Exercice 4 *Soient* p *et* q *deux nombres rationnels. Posons*

$$x = p^3 + 3pq^2 \quad et \quad y = (p^2 + q^2)\sqrt{p^2 + 4q^2}$$

et soit

$$\gamma = \sqrt[3]{\frac{y + x}{2}} - \sqrt[3]{\frac{y - x}{2}}$$

1. *Simplifier au maximum le nombre* $\frac{y^2 - x^2}{4}$.
2. *Montrer que* γ *est un nombre algébrique.*
3. *Est-ce que* $\gamma \in \mathbb{Q}$ *?*

Exercice 5 *On notera* $\mathbb{A}$ *l'ensembles des nombres réels algébriques, et par* $\mathbb{T}$ *pour l'ensemble des nombres transcendants. On note* $\mathbb{A}^* = \mathbb{A} \setminus \{0\}$.

I) Soient a, b deux nombres réels. En admettant que :

$$a \in \mathbb{A}\,,\ b \in \mathbb{A} \implies a + b \in \mathbb{A} \ \ et \ \ ab \in \mathbb{A}$$

et que

$$a \in \mathbb{A}^* \implies \frac{1}{a} \in \mathbb{A}^*$$

Montrer, alors que

1. $a \in \mathbb{A}\,,\ b \in \mathbb{T} \implies a + b \in \mathbb{T}$.
2. $a \in \mathbb{A}^*\,,\ b \in \mathbb{T} \implies ab \in \mathbb{T}$.
3. $a \in \mathbb{T} \implies \frac{1}{a} \in \mathbb{T}$

II) On admet le résultat due à Hermite-Lindemann suivant :

Théorème (*Hermite-Lindemann*)

$$\alpha \in \mathbb{A}^* \implies e^\alpha \in \mathbb{T}$$

1. *Déduire qu'il existe une infinité des nombres réels transcendants.*

2. *En utilisant le théorème d'Hermite Lindemann, montrer que*

$$x \in \mathbb{A}\,,:\ x > 0 \ et\ x \neq 1 \implies \ln(x) \in \mathbb{T}$$

3. *Les nombres suivants, sont ils algébriques ou transcendants ?*

$$a = \sqrt{e}\,,\ b = (1+\sqrt{5})\ln(2+\sqrt{3})\,,\ c = \frac{1}{e^2+\sqrt{2}}.$$

Exercice 6 *Soient x et y deux nombres réels quelconques. Montrer que :*

1. $|x| + |y| \leq |x+y| + |x-y|$
2. $1 + |xy-1| \leq (1+|x-1|)(1+|y-1|)$
3. $\frac{|x+y|}{1+|x+y|} \leq \frac{|x|}{1+|x|} + \frac{|y|}{1+|y|}$

Exercice 7 *Soient a, b, c trois nombres réels.*

1. *Montrer que* $(|a| < c \ et\ |b| < c) \implies \left|\frac{a+b}{2}\right| + \left|\frac{a-b}{2}\right| < c.$
2. *Montrer que* $(\,|a+b| = |a| + |b|\,) \iff ab \geq 0.$
3. *En déduire que* $\left(\,\left|\frac{a+b}{2}\right| + \left|\frac{a-b}{2}\right| < c\right) \implies (|a| < c \ et\ |b| < c).$

Exercice 8 *Soit* $x \in \mathbb{R}$. *Montrer que si* $|x| \leq \varepsilon$ *pour tout* $\varepsilon > 0$ *, alors* $x = 0$.

Exercice 9 *On note par* $\mathbb{Q}_+^*$ *l'ensemble des nombres rationnels strictement positifs. Considérons la partie non vide A définie par*

$$A = \{\, x \in \mathbb{Q}_+^* \ :\ x^2 < 2\,\}$$

Considérons aussi la fonction $f : \mathbb{Q}_+^* \to \mathbb{Q}_+^*$ *définie par :*

$$f(x) = \frac{x(x^2+6)}{3x^2+2}$$

1. *Vérifier que pour tout* $x \in \mathbb{Q}_+^*$ *on a :*

$$(f(x))^2 - 2 = \frac{(x^2-2)^3}{(3x^2+2)^2} \quad et \quad f(x) - x = \frac{2x(2-x^2)}{3x^2+2}$$

2. *Vérifier que* $a = \sup(A)$ *existe dans* $\mathbb{R}$ *et que* $a > 0$ *et* $a^2 \leq 2$.
3. *Supposons que* $a = \sup(A) \in \mathbb{Q}_+^*$ *, et soit* $b = f(a)$.
   (a). *Montrer que* $b \in A$.
   (b). *Montrer que* $b > a$.
   (c). *Conclure.*

Exercice 10 *Trouver un majorant et un minorant de* $A \subset \mathbb{R}$ *dans les cas suivants :*

1) $A = \left\{\frac{x-y}{x+y+5} \ :\ x \in [-1\,;1], y \in [-1\,;1]\right\}.$

2) $A = \left\{\frac{(-1)^n(4n+3)}{2n+5} \ :\ n \in \mathbb{N}^*\right\}.$

3) $A = \left\{\frac{2n+3m^2}{3n+2m^2} \ :\ n \in \mathbb{N}^*, m \in \mathbb{N}^*\right\}.$

Exercice 11 *Soit* $J = \left\{x \in \mathbb{R}^* : -2 < x + \frac{1}{2x} < 2\right\}$. *L'ensemble J est-il un intervalle ? Déterminer, s'ils existent, la borne supérieure, la borne inférieure, le plus petit et le plus grand élément de J.*

Exercice 12 *Soit* $A \subset \mathbb{R}$ *la partie réelle non vide définie par :*

$$A = \left\{x \in \mathbb{Q} \ :\quad 1 \leq x \leq \sqrt{5}\right\}$$

1. *Est-ce que A est un intervalle ? Justifier votre réponse.*
2. *En utilisant la caractérisation de la borne supérieure, montrer que* $\sup(A) = \sqrt{5}$.
3. *Soit*

$$B = \left\{ x \in A \ : \quad x - E(x) \geq \frac{3}{5} \right\}$$

où $E(x)$ est la partie entière de nombre réel x.

(a). *Vérifier que B est non vide.*

(b). *Calculer* $\inf(B)$.

Exercice 13 *Soient A et B deux parties réelles non vides.*

1. *Montrer que si B est majorée et $A \subset B$ alors A est majorée et* $\sup(A) \leq \sup(B)$.
2. *Montrer que si A est minorée et $A \subset B$ alors B est minorée et* $\inf(A) \geq \inf(B)$.
3. *Montrer que si A et B sont majorées, alors $A \cup B$ est majorée, et l'on a :*

$$\sup(A \cup B) = \max\{\sup(A), \sup(B)\}$$

4. *Montrer que si A et B sont minorées, alors $A \cup B$ est minorée, et l'on a :*

$$\inf(A \cup B) = \min\{\inf(A), \inf(B)\}$$

5. *Déterminer les bornes superieures et inférieures, lorsqu'elles existent, des ensembles suivants :*

$$A = \{0.5, 0.55, 0.555, 0.5555, ...\}, \quad B = \left\{ 2 + \frac{(-1)^n}{n+1}, n \in \mathbb{N} \right\}$$

$$C = \left\{ \frac{n-2}{n+1} \cos\left(\frac{2\pi n}{3}\right), n \in \mathbb{N} \right\}$$

Exercice 14 *Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ une application croissante, c'est-à-dire :*

$$\forall x, y \in [0,1] : x \leq y \implies (x) \leq f(y)$$

Soit A l'ensemble défini par :

$$A = \{x \in [0,1] : x \leq f(x)\}$$

1. *Vérifier que A est non vide et majorée.*
2. *Posons $a = sup(A)$. En utilisant la définition de la borne supérieure, montrer que $a \in [0,1]$.*
3. *Montrer que $f(a)$ est un majorant de A.*
4. *Montrer que si $a = 1$ alors $f(1) = 1$.*
5. *On suppose que $a \in [0,1[$. Montrer que si $x \in]a,1]$, alors $x \in A$.*
6. *En déduire que $f(a)$ est minorant de $]a,1]$.*
7. *Déduire des question 3 et 5 que $f(a) = a$.*

Exercice 15 1. *Calculer $E(\sqrt{4n^2+4n+3})$, pour $n \in \mathbb{N}$.*

2. *Calculer $E((3n+1)e^{-n})$, pour $n \in \mathbb{N}$.*

Exercice 16 .

1. *Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$: $E\left(\frac{E(x)}{n}\right) = E\left(\frac{x}{n}\right)$.*
2. *En déduire que $E\left(\frac{E(nx)}{n}\right) = E(x)$.*

Exercice 17 *Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations :*

$$(1) \quad E(x-5) = 2E(x) \ , \quad (2) \quad E(2x+3) = E(x+2).$$

Exercice 18 *Soit $n \geq 1$ un entier positif. Soient $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ des nombres réels strictement positifs.*

1. *Montrer par récurrence que*

$$\forall n \geq 1 \ : \quad a_1 a_2 \ldots a_n = 1 \implies \sum_{k=1}^{n} a_k \geq n \tag{1.16}$$

2. *On considère les nombres A_n , G_n , H_n appelés respectivement moyenne arithmétique, moyenne géométrique et moyenne harmonique des nombres a_k où $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$, définis par :*

$$A_n = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \ , \ G_n = \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots . a_n} \ , \ H_n = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}} \, .$$

3. *Soit $b_k = \frac{a_k}{G_n}$, pour tout $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$.*
   (a). *Vérifier que $b_1 b_2 \ldots b_n = 1$.*
   (b). *Déduire que pour tout entier $n \geq 1$ on a : $G_n \leq A_n$.*
   (c). *Soit $c_k = \frac{1}{a_k}$ pour tout $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Utiliser les nombres c_k et le résultat $G_n \leq A_n$, pour montrer que pour tout entier $n \geq 1$: $H_n \leq G_n$.*
   (d). *Conclure.*

Exercice 19 (*Inégalités de Schawrz et de Minkowski*)
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soient $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ et $y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n$ des nombres réels. On pose

$$A = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \, , \quad B = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \, , \quad C = \sum_{i=1}^{n} y_i^2$$

1. *Montrer que*

$$\forall t \in \mathbb{R} : \quad A t^2 + 2 B t + C \geq 0$$

2. *Déduire de la question précidente que*

$$\left| \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \right| \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2 \right)^{1/2} \qquad (\textit{Inégalités de Schawrz})$$

3. *En utilisant l'inégalité de Schwarz, montrer l'inégalité suivante*

$$\left(\sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i)^2 \right)^{1/2} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \right)^{1/2} + \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2 \right)^{1/2} \qquad (\textit{Inégalités de Minkowski})$$

Chapitre 2

Suites réelles

Ce chapitre est consacré à l'étude des suites numériques. La notion la plus importante dans ce chapitre est la convergence d'une suite numérique. En effet, les suites convergentes jouent un rôle primordiale en analyse numérique qui est la discipline mathématique qui se charge d'étudier les méthodes et les algorithmes de résolution approchée de différent problèmes mathématiques (équations non linéaires , calcul intégral, équations différentielles, équations intégrales, équations aux dérivées partielles ...) issue de différentes disciplines scientifiques (Physique , chimie , biologie , ingénierie, ...).

2.1 Généralités sur les suites rélles

2.1.1 Définitions et vocabulaires

Définition 2.1

Soit $n_0 \in \mathbb{N}$. L'application u qui fait associée pour chaque entier $n \geq n_0$ un nombre réel noté u_n est appelée suite réelle. Autrement dit, une suite réelle est une relation qui fait associer un entier $n \geq n_0$ où n_0 est un certain rang fixé, un nombre réel dépend de n, noté u_n. On note souvent une telle suite réelle par $(u_n)_{n \geq n_0}$. S'il y a pas risque d'ambiguïté, on note (u_n) au lieu de $(u_n)_{n \geq n_0}$ où n_0 se détermine par le contexte.

Vocabulaire

1) Les nombres $u_0, u_1, \ldots, u_n$ sont appelés les termes de la suite $(u_n)_{n \geq 0}$.
2) Le nombre u_n est appelé terme général de la suite (u_n).
3) L'ensemble $\Omega \subset \mathbb{R}$ définie par

$$\Omega = \{u_0, u_1, \ldots, u_n, \ldots.\} = \{u_k : k \geq 0\}$$

est appelé l'ensemble de termes de la suite $(u_n)_{n \geq 0}$.
4) Le graphe d'une suite réelle $(u_n)_{n \geq n_0}$ est l'ensemble suivant

$$G = \{ (n, u_n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R} \ : \ n \geq n_0 \}$$

De point de vue géométrique, le graphe d'une suite $(u_n)_{n \geq n_0}$ est l'ensemble de points de coordonnées (n, u_n) dans le plan muni d'un repère orthonormé.

Comment définir une suite réelle ?

Une suite réelle $(u_n)_{n \geq n_0}$ peut se définie par différentes façons :

1. Explicitement par la donné de son terme général $u_n = f(n)$ en fonction de n où f est une fonction réelle définie sur un ensemble contenant l'intervalle $[n_0, +\infty[$.

2. Implicitement par la donné d'une relation récurrente de type

$$\begin{cases} u_{n_0} \in I \text{ est donné} \\ u_{n+1} = g(u_n) \ \forall\, n \geq n_0 \end{cases} \tag{2.1}$$

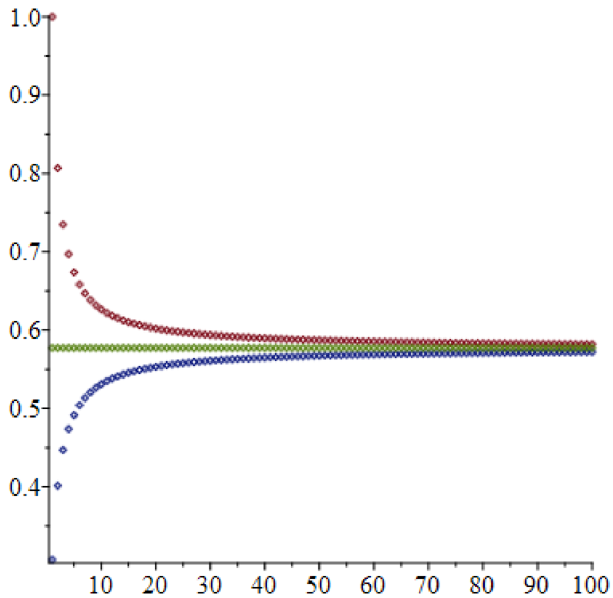
ou

$$\begin{cases} u_{n_0}\ ,\ u_{n_0+1} \in I \text{ sont donnés} \\ u_{n+2} = h(u_n, u_{n+1})\ \forall\, n \geq n_0 \end{cases} \tag{2.2}$$

Exemple 2.1 Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ la suite réelle définie par son terme général

$$u_n = 3 + \frac{(-1)^n}{n}, \quad \forall n \geq 1$$

Le graphe de la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est l'ensemble des paires $(n, u_n) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{R}$. La représentation géométrique de ce graphe est donnée par la figure suivante



2.1.2 Suites remarquables

1. **Suites constantes, suites stationnaires**

Définition 2.2

Une suite réelle $(u_n)_{n\geq n_0}$ est appelée suite constante si $u_n = u_{n+1}$ pour tout $n \geq n_0$. Dans ce cas, on a

$$u_{n_0} = u_{n_0+1} = ... = u_n = ...$$

Définition 2.3

Une suite réelle $(u_n)_{n\geq n_0}$ est appelée suite stationnaire s'il existe un certain rang $N \geq n_0$ tel que la suite $(u_n)_{n\geq N}$ soit constante. Autrement dit, une suite stationnaire, est une suite constante à partir d'un certain rang. En particulier, toute suite constante est une suite stationnaire.

Exemple 2.2 Considérons les suites réelles (u_n) et (v_n) définies par

$$u_n = 1 + \sin(n\pi) \; et \; v_n = 25 + E\left(\frac{2019}{n+1}\right), \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Il est clair que $u_n = 1$ pour tout $n \geq 0$. Donc (u_n) est une suite constante. D'autre part, on a

$$n \geq 2019 \implies 0 < \frac{2019}{n+1} < 1 \implies E\left(\frac{2019}{n+1}\right) = 0 \implies v_n = 25$$

Ainsi, la suite (v_n) est constante dès que $n \geq 2019$. Par conséquent, (v_n) est une suite stationnaire.

2. **Suites arithmétiques**

Définition 2.4

Une suite réelle $(u_n)_{n\geq 0}$ est appelée suite arithmétique, s'il existe une constante $r \in \mathbb{R}$ tel que

$$u_{n+1} = u_n + r\,, \quad \forall n \geq 0$$

Le nombre r est appelé la raison de la suite arithmétique (u_n).

Remarque Il est clair qu'une suite arithmétique est constante si et seulement si, sa raison est nulle.

Exemple 2.3 Soit la suite (u_n) définie par

$$u_n = 20\,n - 18\,, \quad n \geq 1.$$

Nous avons, pour tout $n \geq 1$:

$$u_{n+1} - u_n = 20(n+1) - 20\,n \;= 20.$$

Donc, (u_n) est une suite arithmétique de raison 20.

Proposition 2.1

Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite arithmétique de raison r. Alors

1. $u_n = u_p + (n-p)\,r$ *pour tout $n\,,\,p \in \mathbb{N}$.*
2. *Pour tout $n\,,\,p \in \mathbb{N}$, tel que $p < n$, on a*

$$S_{p,n} = u_p + u_{p+1} + \dots + u_n = \frac{n-p+1}{2}\,(u_p + u_n) = \frac{n-p+1}{2}\,(2u_p + (n-p)\,r)$$

3. **Suites géométriques**

Définition 2.5

Une suite réelle $(v_n)_{n\geq 0}$ est appelée suite géométrique (ou progression géométrique), s'il existe une constante $q \in \mathbb{R}$ tel que

$$v_{n+1} = q\,v_n\,, \quad \forall n \geq 0$$

Le nombre q est appelé la raison de la suite géométrique (v_n).

Exemple 2.4 Considérons la suite (v_n) définie par

$$v_n = 5 \times 3^{2n-1}\,, \quad n \geq 0.$$

On a pour tout $n \geq 0$:

$$v_{n+1} = 5 \times 3^{2n+1} = 5 \times 3^{2n-1} \times 3^2 = 9\,v_n.$$

Donc, (v_n) est une suite géométrique de raison 9.

Proposition 2.2

Soit $(v_n)_{n\geq 0}$ une suite géométrique de raison q. Alors

1. $v_n = v_p + q^{n-p}$ *pour tout $n\,,\,p \in \mathbb{N}$.*
2. *Pour tout $n\,,\,p \in \mathbb{N}$, tels que $p < n$, et $q \neq 1$, on a*

$$\Gamma_{p,n} = v_p + v_{p+1} + \dots + v_n = v_p\left(\frac{1-q^{n-p+1}}{1-q}\right)$$

2.1.3 Suites monotones

Les suites monotones possédant des propriétés remarquables.

Définition 2.6

Soit (u_n) une suite réelle. On dit que (u_n) est

1. *Croissante s'il existe un rang $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que*
$$\forall n \geq N_0 \,, \quad u_{n+1} \geq u_n$$
2. *Décroissante s'il existe un rang $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que*
$$\forall n \geq N_0 \,, \quad u_{n+1} \leq u_n$$
3. *Monotone si elle est croissante ou décroissante.*

2.1.4 Les suites extraites

Définition 2.7

Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite réelle. On appelle suite extraite (ou sous suite) de la suite $(u_n)_{n\geq 0}$, toute suite réelle (v_n) tel que
$$v_n = u_{\varphi(n)} \,, \quad n \geq 0$$
où $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est une application strictement croissante.

Exemple 2.5 Soit $u_n = 2 + \frac{(-1)^n}{3n}$ le terme général de la suite $(u_n)_{n\geq 1}$. Une suite extraite est de la forme $(u_{\varphi(n)})_{n\geq 0}$ avec $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Selon le choix de l'application φ ; on obtient une suite extraite particulière. Par exemple :

1. Pour $\varphi(k) = 2k$, on trouve la suite extraite $(u_{2k})_{k\geq 1}$ de terme général
$$v_k = u_{2k} = 2 + \frac{1}{6k}$$
2. Pour $\varphi(k) = 2k+1$, on trouve la suite extraite $(u_{2k+1})_{k\geq 0}$ de terme général
$$w_k = u_{2k+1} = 2 - \frac{1}{6k+3}$$
3. Pour $\varphi(k) = 3k$, on trouve la suite extraite $(u_{3k})_{k\geq 1}$ de terme général
$$z_k = u_{3k} = 2 + \frac{(-1)^k}{9k}$$
4. Pour $\varphi(k) = 3k+1$, on trouve la suite extraite $(u_{3k+1})_{k\geq 0}$ de terme général
$$u_{3k+1} = 2 - \frac{(-1)^k}{9k+3}$$

Remarquons qu'on peut extraire une infinité de sous suites de la suite "mère " $(u_n)_{n\geq 1}$. De plus, les indices des termes d'une suite extraite quelconque sont sélectionner parmi ceux de la suite mère selon le choix de l'application φ.

2.1.5 Suites bornées

Définition 2.8

On dit qu'une suite réelle $(u_n)_{n\geq 0}$ est

1. *Majorée si l'ensemble de ses termes est majorée. C'est à dire si*
$$\exists M \in \mathbb{R} : \ u_n \leq M \,, \quad \forall n \geq 0$$

2. *Minorée si l'ensemble de ses termes est minorée. C'est à dire si*

$$\exists\, m \in \mathbb{R} : \; u_n \geq m \,, \quad \forall n \geq 0$$

3. *Bornée si elle est majorée et minorée à la fois. Dans ce cas l'ensemble des termes de la suite est bornée. Donc nous avons l'équivalence suivante*

$$\begin{aligned} (u_n)_{n\geq 0} \text{ est bornée} \quad &\Longleftrightarrow \quad \exists\,(m,M) \in \mathbb{R}^2 : \; m \leq M \text{ et } \quad m \leq u_n \leq M \quad \forall n \geq 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad \exists\, A > 0 : \quad |u_n| \leq A \quad \forall n \geq 0. \end{aligned}$$

Remarques 3 *:*

1. *Une suite réelle est non bornée si elle est non majorée ou non minorée. Par exemple la suite de terme général $3n+1$ est non majorée et la suite de terme général $4-\ln(n+2)$ est non minorée. Donc les deux sont non bornées.*
2. *L'ensemble des termes d'une suite bornée est inclue dans intervalle borné.*
3. *Une suite extraite d'une suite bornée est évidemment bornée. Donc si on extraire une suite non bornée d'une suite mère, alors cette dernière n'est pas bornée.*

2.2 Limites d'une suite réelle, Convergence

2.2.1 Limite finie d'une suite réelle

On commence par un exemple simples pour donner une définition rigoureuse de la notion de la limite d'une suite réelle.

Exemple 2.6 Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ la suite réelle définie par son terme général

$$u_n = 2 + \frac{1}{n} \;, \; n \geq 1$$

Remarquons que lorsque n devient assez grand, les termes de la suite sont assez proches de 2. Soit $\varepsilon > 0$ un nombre proche de 0. A partir de quel rang $N \in \mathbb{N}$; la distance entre un terme u_n et le nombre 2 soit inférieur à la tolérance ε ? Autrement dit, existe- il un rang $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$n \geq N \implies |u_n - 2| \leq \varepsilon$$

Pour trouver la réponse à cette question, on remplace u_n en fonction de n dans la dernière inégalité. En effet, on a

$$|u_n - 2| \leq \varepsilon \iff \left|2 + \frac{1}{n} - 2\right| \leq \varepsilon \iff \frac{1}{n} \leq \varepsilon \iff n \geq \frac{1}{\varepsilon} \tag{2.3}$$

Par exemple si on prend $\varepsilon = 10^{-9}$, alors d'après (2.3) nous avons

$$n \geq 10^9 \implies |u_n - 2| \leq 10^{-9} \tag{2.4}$$

Donc la distance entre le terme général u_n et le nombre 2 ne dépasse 10^{-9} dès que $n \geq N = 10^9$.
Maintenant soit $\varepsilon = 0{,}00037$ alors $\frac{1}{\varepsilon} = 2702{,}7027$. Donc d'après (2.3) nous avons

$$n \geq 2702{,}7027 \implies |u_n - 2| \leq 0{,}00037 \tag{2.5}$$

La relation (2.5) signifie que $|u_n - 2| \leq 0{,}00037$ pour tout les entiers $n \geq 2702{,}7027$. Le premier entier qui vérifier (2.5) est alors $N = 2703 = E(2702{,}27) + 1$ qui est le rang demandé. On peut choisir d'autres rangs $N = 2704;\ N = 2705$,...de sorte que (2.3) soit toujours satisfaite pour le choix $\varepsilon = 0{,}00037$. Dans le cas général, pour tout choix de $\varepsilon > 0$, nous avons d'après (2.3) :

$$n \geq N = E\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) + 1 > \frac{1}{\varepsilon} \implies |u_n - 2| \leq \varepsilon$$

On constate alors que pour toute valeur de $\varepsilon > 0$ il existe toujours un rang $N = E(\frac{1}{\varepsilon}) + 1$ de sorte que la distance entre le terme général u_n et le nombre 2 est inférieure à ε dès que $n \geq N$.
Le nombre 2 dans cet exemple est appelé la limite de la suite (u_n). On dit aussi que la suite (u_n) converge vers 2.
Maintenant, on présente la définition rigoureuse de notion de limite d'une suite réelle.

Définition 2.9

Un nombre réel ℓ est appelé limite d'une suite réelle (u_n) si :

$$\forall \varepsilon > 0\,,\ \exists N \in \mathbb{N}\ :\ \forall n \in \mathbb{N},\quad n \geq N \implies |u_n - \ell| < \varepsilon \tag{2.6}$$

Théorème 2.1

Si une suite réelle admet une limite finie, alors cette limite est unique.

Démonstration Soit (u_n) une suite réelle convergente. Supposons que cette suite admet deux limites finies ℓ et ℓ'. Par définition de la limite, il vient

$$\forall \varepsilon > 0\,,\ \exists N_0 \in \mathbb{N}\ :\ \forall n \in \mathbb{N},\quad n \geq N_0 \implies |u_n - \ell| < \varepsilon/2$$

et

$$\forall \varepsilon > 0\,,\ \exists N_1 \in \mathbb{N}\ :\ \forall n \in \mathbb{N},\quad n \geq N_0 \implies |u_n - \ell'| < \varepsilon/2$$

Donc

$$\forall \varepsilon > 0 \quad n \geq \max\{N_0, N_1\} \implies |\ell - \ell'| = |\ell - u_n + u_n - \ell'| \leq |u_n - \ell'| + |u_n - \ell'| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

Ainsi

$$\forall \varepsilon > 0 \quad |\ell - \ell'| < \varepsilon \implies \ell = \ell'.$$

■

Notation : Si une suite réelle (u_n) admet une limite ℓ, alors d'après le théorème précédent, cette limite est unique.
On écrit $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ell$, ou de manière différente $u_n \to \ell$ quand $n \to +\infty$.
On a donc

$$(\lim_{n \to +\infty} u_n = \ell) \iff (\forall \varepsilon > 0\,,\ \exists N \in \mathbb{N}\ :\ \forall n \in \mathbb{N},\quad n \geq N \implies |u_n - \ell| < \varepsilon)$$

Définition 2.10

On dit qu'une suite réelle (u_n) est convergente s'il existe un nombre réel ℓ tel que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ell$. Dans ce cas on dit que la suite (u_n) converge vers ℓ. En revanche, si la suite (u_n) n'admet aucune limite finie, alors on dit qu'elle est divergente, ou on dit qu'elle diverge.

Remarques 4 .

1. *La relation* (2.6) *s'interprète ainsi :*
   Pour tout choix de $\varepsilon > 0$ (même très proche de zéro) alors il existe un certain rang $N \in \mathbb{N}$ tels que tout les termes u_n d'indice $n \geq N$ vérifient l'estimation $|u_n - \ell| < \varepsilon$.
2. *On sait que*

   $$|u_n - \ell| < \varepsilon \iff \ell - \varepsilon < u_n < \ell + \varepsilon \iff u_n \in]\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon[$$

   Donc, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ell$ signifie que pour tout $\varepsilon > 0$ (même proche de zéro), il existe un certain rang $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$ on ait $u_n \in]\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon[$ (c'est à dire u_n se trouve dans l'intervalle ouvert de centre de ℓ et de longueur $2\,\varepsilon$ ce qui veut dire que les termes de la suite s'accumule autour de la limite ℓ à partir d'un certain rang. Voir figure 1.1 *).*

Exemple 2.7 Montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 0, \quad \forall q \in]-1, 1[$.

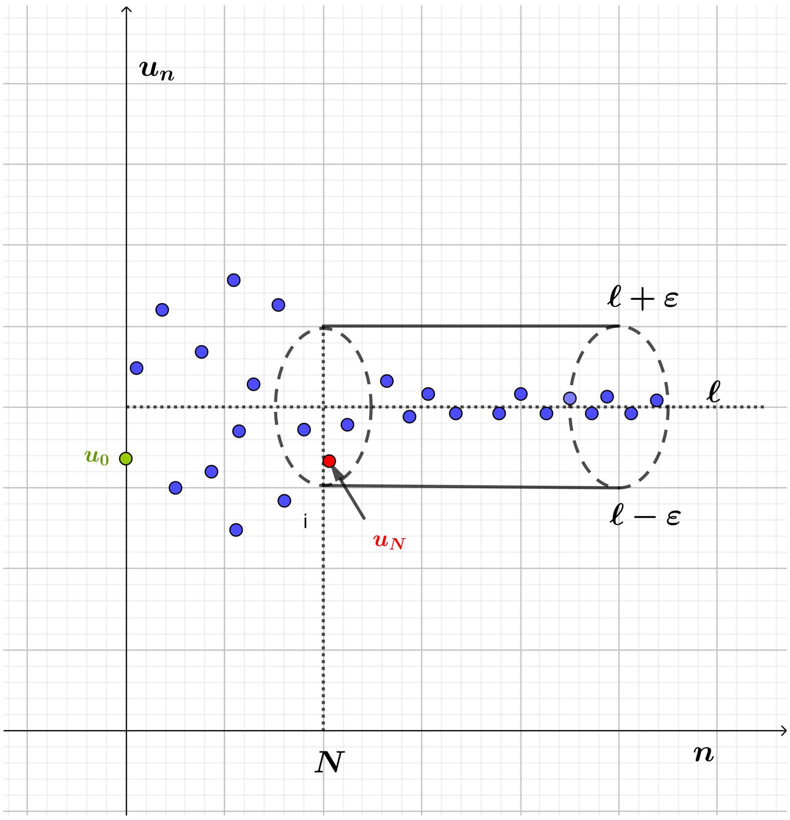


FIGURE 2.1

Il est clair que si $q=0$ alors $q^n=0$, ce qui implique que $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n=0$. Supposons maintenant que $q\in]-1\,,1[$ et $q\neq 0$, ce qui est veut dire que $0<|q|<1$.
On doit montrer que

$$\forall\varepsilon>0\,,\ \exists N\in\mathbb{N}\ :\ \forall n\in\mathbb{N},\quad n\geq N\implies |q^n-0|<\varepsilon$$

Soit $\varepsilon>0$. Donc

$$|q^n-0|<\varepsilon\iff |q|^n<\varepsilon\iff n\ln|q|<\ln(\varepsilon)\iff n>\frac{\ln(\varepsilon)}{\ln|q|}$$

Soit maintenant

$$N_0=\begin{cases}0 & si\quad \varepsilon\geq 1\\ E\left(\frac{\ln(\varepsilon)}{\ln|q|}\right)+1 & si\quad 0<\varepsilon<1\end{cases}$$

$$\forall\varepsilon>0\,,\ \exists N_0\in\mathbb{N}\ :\ \forall n\in\mathbb{N},\quad n\geq N_0\implies |q^n-0|=|q|^n<\varepsilon$$

Ce qui montre par définition que $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n=0$.

2.2.2 Suites de Cauchy

Comment montrer la convergence d'une suite réelle, pas forcément monotone, sans connaître à priori sa limite éventuelle ?
La réponse à cette question s'articule autour de la notion de suite de Cauchy. Si les termes d'une suite réelle sont arbitrairement proche l'un de l'autre à partir d'un certain rang alors la suite en question est appelée suite de Cauchy. Nous allons montrer que toute suite de Cauchy est convergente. On considère tout d'abord la définition suivante

Définition 2.11
On dit qu'une suite réelle (u_n) est une suite de Cauchy si la condition suivante est satisfaite :

$$\forall \varepsilon > 0 \;,\; \exists N_0 \in \mathbb{N} \;:\; \forall p, q \in \mathbb{N} \;: p, q \geq N_0 \implies |u_p - u_q| < \varepsilon \tag{2.7}$$

La relation (2.7) s'interprète comme suit :
Pour tout réel strictement positif ε (même très proche de zéro) il existe un certain rang $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que la distance entre deux termes u_p et u_q pour $p, q \geq N_0$ est inférieure à ε. Autrement dit, les termes d'une suite de Cauchy sont proche l'un de l'autre à partir d'un certain rang.
Remarque Une condition équivalente de celle de (2.7) est la suivante

$$\forall \varepsilon > 0 \;,\; \exists N_0 \in \mathbb{N} \;:\; \forall p, n \in \mathbb{N} \;: p \geq N_0 \implies |u_{p+n} - u_p| < \varepsilon$$

Nous avons le résultat important suivant qui assure l'équivalence entre suite convergente et suite de Cauchy. En effet on a le

Théorème 2.2
Une suite réelle est convergente si et seulement si elle est de Cauchy.

Exemple 2.8 Considérons la suite (u_n) réelle définie par

$$u_0 = 1 \;\; et \quad u_{n+1} = u_n + \frac{\sin(n)}{3^n}$$

Soit $\varepsilon > 0$ et soit p et n deux entier naturels. On a

$$\begin{aligned}
|u_{p+n} - u_p| &= |(u_{p+n} - u_{p+n-1}) + (u_{p+n-1} - u_{p+n-2}) + \ldots + (u_{p+1} - u_p)| \\
&= \left|\frac{\sin(p+n-1)}{3^{p+n-1}} + \frac{\sin(p+n-2)}{3^{p+n-2}} + \ldots + \frac{\sin(p)}{3^p}\right| \\
&\leq \frac{|\sin(p+n-1)|}{3^{p+n-1}} + \frac{|\sin(p+n-2)|}{3^{p+n-2}} + \ldots + \frac{|\sin(p)|}{3^p} \\
&\leq \frac{1}{3^{p+n-1}} + \frac{1}{3^{p+n-2}} + \ldots + \frac{1}{3^p} \quad (\text{Puisque } |\sin(a)| \leq 1) \\
&= \frac{2}{3^{p-1}}\left(1 - \frac{1}{3^n}\right) \leq \frac{1}{3^{p-2}}
\end{aligned}$$

Donc

$$\frac{1}{3^{p-2}} < \varepsilon \implies |u_{p+n} - u_p| < \varepsilon$$

Maintenant

$$\frac{1}{3^{p-2}} < \varepsilon \iff 3^{p-2} > \ln(1/\varepsilon) \iff p > 2 + \frac{\ln(1/\varepsilon)}{\ln 3} = 2 + \log_3(1/\varepsilon)$$

On pose $N_0 = 1 + E(2 + \log_3(1/\varepsilon))$. Il vient ainsi

$$p \geq N_0 > 2 + \log_3(1/\varepsilon) \implies \frac{1}{3^{p-2}} < \varepsilon \implies |u_{p+n} - u_p| < \varepsilon$$

Par conséquent, (u_n) est une suite de Cauchy. Donc elle converge.

2.3 Théorèmes sur les suites convergentes

2.3.1 Convergence et suites extraites

Proposition 2.3
Une suite extraite d'une suite convergente, converge vers la même limite.

Pour montrer la proposition 2.3 nous aurons besoin du lemme suivant

Lemme 2.1

Soit $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une application strictement croissante. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $\varphi(n) \geq n$.

Démonstration Par récurrence. Comme $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, en on déduit que $\varphi(0) \geq 0$. Supposons maintenant que pour un rang n l'on a $\varphi(n) \geq n$. En utilisant la croissance stricte de l'application φ, il vient :

$$\varphi(n+1) > \varphi(n) \geq n \implies \varphi(n+1) > n \implies \varphi(n+1) \geq n+1.$$

Donc, d'après le principe de raisonnement par récurrence, on en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'inégalité $\varphi(n) \geq n$ est vraie. ∎

Démonstration [de proposition 2.3] Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite convergente vers un réel ℓ. Alors

$$\forall \varepsilon > 0\,,\ \exists N \in \mathbb{N}\ :\ \forall n \in \mathbb{N},\quad n \geq N \implies |u_n - \ell| < \varepsilon \tag{2.8}$$

Soit $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une application strictement croissante. Il vient alors d'après (2.8) :

$$\begin{aligned}
&(\forall \varepsilon > 0\,,\quad \exists N \in \mathbb{N}\quad : \forall n \in \mathbb{N},\quad n \geq N \implies |u_n - \ell| < \varepsilon)\\
&\qquad \implies \quad (\forall \varepsilon > 0\,,\ \exists N \in \mathbb{N}\ :\ \forall n \in \mathbb{N},\quad n \geq N \implies \varphi(n) > \varphi(N) \geq N \implies |u_{\varphi(n)} - \ell| < \varepsilon)
\end{aligned}$$

Donc, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{\varphi(n)} = \ell$. ∎

Corollaire 2.1

Si l'on peut extraire de la suite (u_n), deux sous suites convergentes vers deux limites différentes , alors la suite (u_n) n'admet aucune limite.

Exemple 2.9 La suite (u_n) définie par $u_n = (-1)^n$ pour $n \geq 0$ n'admet aucune limite. En effet, les deux sous suites $(u_{2n} = 1)$ et $(u_{2n+1} = -1)$ sont constantes, elles convergent vers deux limites différentes.

2.3.2 Convergence et bornitude

Théorème 2.3

Toute suite réelle convergente est bornée.

Démonstration Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite réelle convergente vers une limite finie ℓ. D'après la définition de la limite, nous avons

$$\forall \varepsilon > 0\,,\ \exists N_0 \in \mathbb{N}\ :\ \forall n \in \mathbb{N},\quad n \geq N_0 \implies |u_n - \ell| < \varepsilon$$

En particulier pour $\varepsilon = 1$, il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tels que

$$n \geq N_1 \implies |u_n - \ell| < 1 \implies \ell - 1 < u_n < \ell + 1$$

Soient maintenant les deux nombres réels m et M définis par

$$m = \min\{u_0\,, u_1\,, u_2\,, ...\,, u_{N_1-1}\,, \ell - 1\} \quad et \quad M = \max\{u_0\,, u_1\,, u_2\,, ...\,, u_{N_1-1}\,, \ell + 1\}$$

Il est clair maintenant que $m \leq u_n \leq M$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. C'est à dire que (u_n) est bornée. ∎

Remarque La réciproque du Théorème 2.3 est fausse en général. En effet la suite de terme général $(-1)^n$ est bornée et n'admet aucune limite.

En utilisant la contraposée de Théorème 2.3, on en déduit le corollaire suivant

Corollaire 2.2

Toute suite réelle non majorée ou non minorée est divergente.

2.3.3 Propriétés algébriques des suites convergentes

Théorème 2.4

Soient (u_n) et (v_n) deux suites convergentes vers deux limites finies ℓ et ℓ' respectivement. Alors

1. $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n+v_n) = \ell+\ell'$
2. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n v_n = \ell\ell'$
3. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = \dfrac{\ell}{\ell'}$ *si* $\ell' \neq 0$.

Démonstration Considérons (u_n) et (v_n) deux suites convergentes vers deux limites finies ℓ et ℓ' respectivement.

1. Nous utilisons la définition de la limite. On a

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell \iff \forall\varepsilon>0\,,\,\exists N_0\in\mathbb{N}\;\forall n\in\mathbb{N},\; n\geq N_0 \implies |u_n-\ell|<\varepsilon/2$$

La même chose pour (v_n) :

$$\lim_{n\to+\infty} v_n = \ell' \iff \forall\varepsilon>0\,,\,\exists N_1\in\mathbb{N}\;\forall n\in\mathbb{N},\; n\geq N_1 \implies |v_n-\ell'|<\varepsilon/2$$

Soit $N_2=\max\{N_0\,,N_1\}$. Maintenant, en utilisant l'inégalité triangulaire, il vient

$$n\geq N_2 \implies |(u_n+v_n)-(\ell+\ell')| = |(u_n-\ell)+(v_n-\ell')| \leq |u_n-\ell|+|v_n-\ell'| < \varepsilon/2+\varepsilon/2=\varepsilon$$

Ainsi par définition de la limite, on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n+v_n)=\ell+\ell'$.

2. Comme la suite (v_n) converge vers une limite finie, elle est bornée. Donc

$$\exists M>0\;:\quad |v_n|<M\,,\quad \forall n\in\mathbb{N}$$

On définit deux nombres a et b comme suit

$$a=\begin{cases} 2M & si\quad \ell\neq 0\\ M & si\quad \ell=0\end{cases} \qquad et \qquad b=\begin{cases} 2|\ell| & si\quad \ell\neq 0\\ 1 & si\quad \ell=0\end{cases}$$

Utilisons maintenant la définition de la limite,il vient alors

$$\forall\varepsilon>0\,,\,\exists N_0\in\mathbb{N}\;:\;\forall n\in\mathbb{N},\quad n\geq N_0 \implies |u_n-\ell|<\varepsilon/a$$

et

$$\forall\varepsilon>0\,,\,\exists N_1\in\mathbb{N}\;:\;\forall n\in\mathbb{N},\quad n\geq N_1 \implies |v_n-\ell'|<\varepsilon/b$$

D'autre part, en utilisant l'inégalité triangulaire, il vient

$$\begin{aligned} |u_nv_n-\ell\ell'| &= |u_nv_n-\ell v_n+\ell v_n\ell\ell'|\\ &= |v_n(u_n-\ell)+\ell(v_n-\ell')|\\ &\leq |v_n||u_n-\ell|+|\ell||v_n-\ell'| \end{aligned}$$

Maintenant, on pose $N_2=\max\{N_0\,,N_1\}$. En utilisant la dernière inégalité on trouve

$$n\geq N_2 \implies |u_nv_n-\ell\ell'|\leq M\varepsilon/a+|\ell|\varepsilon/b=\varepsilon(M/a+|\ell|/b)=\varepsilon$$

Ce qui montre que $u_nv_n\to\ell\ell'$ quand $n\to+\infty$.

3. On donne la preuve en trois étapes

Première étape : Montrons que

$$\ell'\neq 0 \implies (\,\exists N\in\mathbb{N}:\forall n\geq N \implies v_n\neq 0\,) \tag{2.9}$$

En effet

$$\lim_{n\to+\infty} v_n=\ell' \iff \forall\,\varepsilon>0\,,\,\exists N_0\in\mathbb{N}\,,\,\forall n\in\mathbb{N},\; n\geq N_0 \implies \ell'-\varepsilon<v_n<\ell'+\varepsilon$$

En particulier pour $\varepsilon=|\ell'|/2$, il existe un rang $N\in\mathbb{N}$, tel que

$$n\geq N \implies \ell'-|\ell'|/2<v_n<\ell'+|\ell'|/2$$

Donc pour $n \geq N$ nous avons

$$\ell' < 0 \implies v_n < \ell'/2 < 0 \quad et \quad \ell' > 0 \implies v_n > \ell'/2 > 0$$

Ainsi, l'impliction (2.9) est vraie.

Deuxième étape : Montrons que

$$\lim_{n\to+\infty} v_n = \ell' \neq 0 \implies \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{v_n} = \frac{1}{\ell'} \tag{2.10}$$

En utilisant la deuxième inégalité triangulaire, nous obtenons

$$\begin{aligned} \lim_{n\to+\infty} v_n = \ell' \neq 0 \quad &\implies \quad \forall\, \varepsilon > 0\,,\, \exists\, N_0 \in \mathbb{N}\,,\, \forall n \in \mathbb{N},\, n \geq N_0 \implies \big||v_n| - |\ell'|\big| \leq |v_n - \ell'| < \varepsilon \\ &\implies \quad |\ell'| - \varepsilon < |v_n| < |\ell'| + \varepsilon \end{aligned}$$

En particulier pour $\varepsilon = |\ell'|/2$, il existe un rang $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que

$$n \geq N_1 \implies |\ell'|/2 < |v_n| < 3|\ell'|/2 \implies \frac{2}{3|\ell'|} < \frac{1}{|v_n|} < \frac{2}{|\ell'|}$$

D'autre part comme $\lim_{n\to+\infty} v_n = \ell' \neq 0$ on peut déduire toujours que

$$\forall\, \varepsilon > 0\,,\, \exists\, N_2 \in \mathbb{N}\,,\, \forall n \in \mathbb{N},\, n \geq N_2 \implies |v_n - \ell'| < \varepsilon|\ell'|^2/2$$

Soit $N_3 = \max\{N_1\,,\, N_2\}$, alors

$$n \geq N_3 \implies \left|\frac{1}{v_n} - \frac{1}{\ell'}\right| = \frac{|v_n - \ell'|}{|v_n||\ell'|} < \frac{2}{|\ell'|^2}|v_n - \ell'| < \frac{2\varepsilon|\ell'|^2/2}{|\ell'|^2} = \varepsilon$$

Ce qui montre bien que l'implication (2.10) est vraie.

■

2.3.4 La convergence et relation d'ordre

Théorème 2.5

Soit (u_n) une suite réelle positive à partir d'un certain rang, c'est à dire :

$$\exists\, N_0 \in \mathbb{N} : \quad u_n > 0\,, \quad \forall n \geq N_0.$$

Si (u_n) converge vers une limite ℓ, alors $\ell \geq 0$.

Démonstration Soit (u_n) une suite réelle, tel que :

$$\exists\, N_0 \in \mathbb{N} : \quad u_n > 0\,, \quad \forall n \geq N_0. \tag{2.11}$$

$$(\,(2.11) \text{ est vraie et } \lim_{n\to+\infty} u_n = \ell\,) \implies \ell \geq 0$$

Par l'absurde, supposons que (2.11) est vraie et $\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell$ et que $\ell < 0$.

Par définition de la limite, on a

$$\forall \varepsilon > 0\,,\, \exists\, N_1 \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N} : n \geq N_1 \implies |u_n - \ell| < \varepsilon \implies \ell - \varepsilon < u_n < \ell + \varepsilon$$

En particulier pour $\varepsilon = -\frac{\ell}{2} > 0$, il existe un rang $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que

$$n \geq N_2 \implies |u_n - \ell| < -\frac{\ell}{2} \implies \frac{3\ell}{2} < u_n < \frac{\ell}{2} < 0 \implies u_n < 0$$

Soit $N_3 = \max\{N_0\,,\, N_2\}$. Alors

$$n \geq N_3 \implies u_n > 0 \quad et \quad u_n < 0 \quad \text{Contradiction}$$

■

Corollaire 2.3

Soient (u_n) et (v_n) deux suites convergentes vers deux limites ℓ et ℓ' respectivement. Alors

$$\Big(\exists\, N_0 \in \mathbb{N} : \quad u_n > v_n\,, \quad \forall n \geq N_0\Big) \implies \ell \geq \ell'.$$

Démonstration Posons $w_n = u_n - v_n$. Alors la suite (w_n) converge vers $\ell - \ell'$ et vérifier la relation

$$\exists\, N_0 \in \mathbb{N} : \quad w_n > 0\,, \quad \forall n \geq N_0.$$

Donc d'après le théorème 2.5, on déduit que $\ell \geq \ell'$. ∎

Théorème 2.6 (Théorème d'encadrement)

Soient (u_n), (v_n) et (w_n) trois suites réelles vérifiant la condition suivante

$$\exists N_0 \in \mathbb{N} : \quad v_n \leq u_n \leq w_n \quad \forall\, n \geq N_0. \tag{2.12}$$

Si les deux suites (v_n) et (w_n) convergent vers la même limite $\ell \in \mathbb{R}$, alors (u_n) converge aussi vers ℓ.

Démonstration Puisque les deux suites (v_n) et (w_n) convergent vers la même limite $\ell \in \mathbb{R}$, on en déduit que

$$\forall \varepsilon > 0\,, \exists\, N_1 \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N} : n \geq N_1 \implies (|v_n - \ell| < \varepsilon \ et\ |w_n - \ell| < \varepsilon) \tag{2.13}$$

De la condition (2.12) il vient

$$n \geq N_0 \implies v_n - \ell \leq u_n - \ell \leq w_n - \ell \implies |u_n - \ell| \leq \max\{|v_n - \ell|, |w_n - \ell|\} \tag{2.14}$$

En combainant les deux relations (2.13) et (2.14), il vient ainsi

$$\forall \varepsilon > 0\,, \exists\, N_2 = \max\{N_0, N_1\} \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N} : n \geq N_2 \implies |u_n - \ell| < \varepsilon$$

Ce qui signifie que (u_n) converge vers ℓ. ∎

Exemple 2.10 Calculer

$$\lim_{n\to+\infty} 10^{-n} E(10^n \pi)$$

où $E(x)$ est la partie entière du nombre réel x.

Réponse :

On pose $u_n = 10^{-n} E(10^n \pi)$. On a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$10^n \pi - 1 < E(10^n \pi) \leq 10^n \pi \implies \pi - 10^{-n} < u_n \leq \pi$$

Comme les extrémités de l'encadrement de u_n convergeant vers π, on en déduit que

$$\lim_{n\to+\infty} 10^{-n} E(10^n \pi) = \pi.$$

Remarquer que u_n est une approximation décimale du nombre π ! !

Deux corollaires pratiques découlent du théorème d'encadrement sont les suivants

Corollaire 2.4

Soit (u_n) une suite réelle. S'il existe une suite réelle positive (λ_n) qui converge vers zéro et vérifiant $|u_n| \leq \lambda_n$ à partir d'un certain rang, alors (u_n) converge vers zéro. Autrement dit

$$\left\{\begin{array}{c} |u_n| \leq \lambda_n \ \ \forall n \geq N_0 \in \mathbb{N}, \\ et \\ \lim\limits_{n\to+\infty} \lambda_n = 0 \end{array}\right. \implies \lim_{n\to+\infty} u_n = 0$$

Démonstration L'expression $|u_n| \leq \lambda_n \quad \forall n \geq N_0$ est équivalente à

$$\forall n \geq N_0 \ : -\lambda_n \leq u_n \leq \lambda_n$$

Comme $\lambda_n \to 0$ quand $n \to +\infty$, il vient d'après le théorème d'encadrement que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$. ■

Exemple 2.11 Il est clair que

$$\left| \frac{(-1)^n \sin(n)}{\sqrt{n}} \right| = \frac{|\sin(n)|}{\sqrt{n}} \le \frac{1}{\sqrt{n}} \to 0 \quad \text{quand } n \to +\infty$$

Ainsi $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{(-1)^n \sin(n)}{\sqrt{n}} = 0$.

Corollaire 2.5

Soit (a_n) une suite bornée et soit (b_n) une suite réelle qui converge vers zéro. Alors la suite $(a_n\, b_n)$ (de terme général le produit de a_n et b_n) converge vers zéro.

Démonstration Comme (a_n) est une suite bornée, il existe un nombre réel $M > 0$ tel que

$$\forall n : \quad |a_n| \le M$$

Donc

$$\forall n : \quad 0 \le |a_n\, b_n| = |a_n||b_n| \le M\,|b_n| \implies M\,|b_n| \le a_n\, b_n \le M\,|b_n|$$

Or $b_n \to 0$ quand $n \to +\infty$; il en résulte donc d'après le Théorème d'encadrement que $a_n\, b_n \to 0$ quand $n \to +\infty$. ■

Exemple 2.12 Il est clair que les suites de termes généraux $(-1)^n$ et $\cos(n)$ sont bornées. Donc si $a_n \to 0$ quand $n \to +\infty$, on en déduit que $(-1)^n a_n \to 0$ et $\cos(n)\, a_n \to 0$ quand $n \to +\infty$. En particulier, pour $a_n = \frac{\ln(n)}{n}$ par exemple, on trouve :

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{(-1)^n \ln(n)}{n} = 0\,, \quad \lim_{n \to +\infty} \frac{\sin(n) \ln(n)}{n} = 0$$

2.3.5 La convergence monotone

Théorème 2.7

Toute suite réelle croissante (resp : décroissante) et majorée (resp : minorée) converge vers la borne supérieure (resp : inférieure) de l'ensemble de ses termes.

Démonstration Soit $(u_n)_{n \ge 0}$ une suite réelle . Considérons l'ensemble $\Omega \subset \mathbb{R}$ suivant

$$\Omega = \{\, u_n \ : \ n \ge 0 \,\}$$

Premier cas : $(u_n)_{n \ge 0}$ est croissante et majorée.

L'ensemble Ω est non vide et majoré puisque la suite (u_n) est majorée par hypothèse. Donc la borne supérieure de Ω existe. Posons maintenant $\ell = \sup(\Omega)$. Nous allons montrer par la suite que (u_n) converge vers ℓ. En effet, en utilisant la caractérisation de la borne supérieure, il vient que

$$\forall \varepsilon > 0\,,\, \exists n_0 \in \mathbb{N} \ : \ell - \varepsilon < u_{n_0} \le \ell \tag{2.15}$$

En utilisant maintenant la croissance de la suite (u_n), la relation (2.15) devient

$$\forall \varepsilon > 0\,,\, \exists n_0 \in \mathbb{N} \ : \forall n \in \mathbb{N} \ : \ n \ge n_0 \implies \ell - \varepsilon < u_{n_0} \le u_n \le \ell < \ell + \varepsilon$$

C'est à dire

$$\forall \varepsilon > 0\,,\, \exists n_0 \in \mathbb{N} \ : \forall n \in \mathbb{N} \ : \ n \ge n_0 \implies |u_n - \ell| < \varepsilon \tag{2.16}$$

Par conséquent, par définition de la limite, la relation (2.16) signéfie que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ell$.

Deuxième cas : $(u_n)_{n \ge 0}$ est décroissante et minorée.

Posons $v_n = -u_n$; alors la suite (v_n) est croissante et majorée. Donc, d'après le résultat du premier cas, (v_n) converge vers la borne supérieure de l'ensemble de ses termes. Soit $m = \lim_{n\to+\infty} v_n$. En utilisant les propriétés de la borne supérieure et de la limite, il vient

$$\ell = \lim_{n\to+\infty} u_n = -m = -\sup\{v_n = -u_n \;:\; n \in \mathbb{N}\} = -\sup(-\Omega) = \inf(\Omega)$$

■

2.3.6 Suites adjacentes

Définition 2.12

Deux suites réelles sont appelée adjacente si l'une est croissante et l'autre est décroissante et leur différence tend vers zéro.

Exemple 2.13 Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles définies par

$$u_n = 5 + 3^{-n}, \quad v_n = 5 - 3^{-n}, \quad n \in \mathbb{N}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$u_{n+1} - u_n = 3^{-n-1} - 3^{-n} = 3^{-n}(3^{-1} - 1) = -\frac{2}{3^n} < 0 \implies (u_n) \quad \text{est décroissante}$$

et

$$v_{n+1} - v_n = -3^{-n-1} + 3^{-n} = \frac{2}{3^n} > 0 \implies (u_n) \quad \text{est croissante}$$

D'autre part

$$u_n - v_n = 2 \times 3^{-n} \to 0 \quad \text{quand} \quad n \to +\infty$$

Donc (u_n) et (v_n) sont adjacentes.
Remarquons que les deux suites de l'exemple précédent convergent vers la même limite. En effet, le résultat suivant assure la convergence de deux suites adjacentes vers une même limite.

Théorème 2.8

Deux suites réelles adjacentes sont convergentes vers la même limite.

Démonstration Soient (u_n) et (v_n) deux suites adjacentes. Supposons par exemple que (u_n) est croissante et que (v_n) est décroissante. Posons $w_n = v_n - u_n$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$w_{n+1} - w_n = v_{n+1} - u_{n+1} - v_n + u_n = (v_{n+1} - v_n) - (u_{n+1} - u_n) \le 0 \implies (w_n) \quad \text{est décroissante.}$$

Donc puisque $w_n \to 0$, on en déduit d'après le théorème de la convergence monotone ; que

$$0 = \lim_{n\to+\infty} w_n = \inf\{\, w_n \;: \quad n \in \mathbb{N}\,\}$$

Par conséquent, $w_n \ge 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, c'est à dire $u_n \le v_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Il vient ainsi

$$u_0 \le u_1 \le u_2 \le \ldots \le u_n \le u_{n+1} \le v_{n+1} \le v_n \le \ldots \le v_1 \le v_0$$

Donc la suite (u_n) est croissante est majorée par v_0 et (v_n) est décroissante et minorée par u_0. Alors les deux suites sont convergentes. Soit $\ell = \lim_{n\to+\infty} u_n$ et $\ell' = \lim_{n\to+\infty} v_n$. Les propriétés algébrique de la limite entraîne alors

$$\ell - \ell' = \lim_{n\to+\infty} u_n - v_n = 0 \implies \ell = \ell'$$

Donc (u_n) et (v_n) convergent vers la même limite. ■

Exemple 2.14 Considérons les deux suites réelles $(u_n)_{n\ge1}$ et $(v_n)_{n\ge1}$ définies par

$$u_n = \left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k}\right) - \ln n, \quad \text{et} \quad v_n = \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k}\right) - \ln n$$

Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes. Conclure.

Réponses :

On a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n} - \ln(n+1) + \ln n = \frac{1}{n} - \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = \frac{1}{n} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

Donc

$$u_{n+1} - u_n = f\left(\frac{1}{n}\right), \quad \text{avec } f(x) = x + \ln(1+x)\,,\ x \in]0,1]$$

La dérivée de f est positive sur l'intervalle $]0,1]$ ce qui signifie que f est croissante sur $]0,1]$. Donc, pour tout $x \in]0,1]$ on a $f(x) > 0$ et ceci nous a conduit à dire

$$\forall n \in \mathbb{N}^* : \ u_{n+1} - u_n = f\left(\frac{1}{n}\right) > 0 \implies (u_n) \text{ est croissante}$$

Par une méthode similaire, on peut montrer que la suite (v_n) est décroissante (vérifier ça ! !).

D'autre part, il est clair que

$$\forall n \in \mathbb{N}^* : \ v_n - u_n = \frac{1}{n} \to 0 \text{ quand } n \to +\infty$$

Par conséquent, les deux suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes ; elles sont convergentes vers la même limite. Cette limite est appelée la constante d'Euler et elle est notée souvent par γ. Une valeur approchée de cette constante d'Euler à 10^{-10} près est $0,5772156649$.

2.4 Limite infinie d'une suite réelle

Une classe importante des suites divergentes est celle des suites qui tendent vers l'infini.

Définition 2.13

Soit (u_n) une suite réelle.

1. *On dit que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ si*

$$\forall A > 0\,,\ \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N} : \ n \geq N \implies u_n > A$$

2. *On dit que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$ si*

$$\forall A > 0\,,\ \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N} : \ n \geq N \implies u_n < -A$$

Remarque Soit Ω l'ensemble des termes de la suite réelle (u_n). Il est clair que

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty \ (\text{resp : } -\infty) \implies \Omega \quad \text{n'est pas majoré (resp : n'est pas minoré)}$$

Exemple 2.15 Montrer que

$$1) \quad \lim_{n\to+\infty} (3n^2) = +\infty\,, \quad 2) \quad \lim_{n\to+\infty} \ln\left(\frac{n}{n^2+2}\right) = -\infty$$

Réponses :

1) On doit montrer que :

$$\forall A > 0\,,\ \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N} : \ n \geq N \implies 3n^2 > A$$

Soit $A > 0$. Alors , pour $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$3n^2 > A \iff n > \sqrt{\frac{A}{3}}$$

Soit donc , $N = E\left(\sqrt{\frac{A}{3}}\right) + 1$. Il vient, alors

$$n \geq N \implies n > \sqrt{\frac{A}{3}} \iff 3n^2 > A.$$

D'où
$$\forall\, A>0\,,\ \exists N=E\left(\sqrt{\frac{A}{3}}\right)+1\in\mathbb{N}\ :\forall n\in\mathbb{N}\ :\ n\geq N\ \Longrightarrow\ 3n^2>A$$
C'est à dire : $\lim\limits_{n\to+\infty} 3n^2=+\infty$.

2) On doit montrer que :
$$\forall\, A>0\,,\ \exists N\in\mathbb{N}\ :\forall n\in\mathbb{N}\ :\ n\geq N\ \Longrightarrow\ \ln\left(\frac{n}{n^2+2}\right)<-A$$
Soit $A>0$. Alors , pour $n\in\mathbb{N}$, on a :
$$\begin{aligned}\ln\left(\frac{n}{n^2+2}\right)<-A\quad &\Longleftrightarrow\quad \frac{n}{n^2+2}<e^{-A}\\ &\Longleftrightarrow\quad \frac{n^2+2}{n}>e^{A}\ \Longleftrightarrow\ n+\frac{2}{n}>e^{A}\end{aligned}$$
Comme $n+\frac{2}{n}>n$, il suffit de considérer donc $n>e^A$. On pose $N=E(e^A)+1$. Il vient, alors
$$\begin{aligned}\forall\, A>0\,,\ \exists N\quad &=\quad E(e^A)+1\in\mathbb{N}\ :\forall n\in\mathbb{N}\ :\ n\geq N\ \Longrightarrow\ n>e^A\\ &\Longrightarrow\quad n+\frac{2}{n}>n>e^A\\ &\Longrightarrow\quad \ln\left(\frac{n}{n^2+2}\right)<-A\end{aligned}$$
D'où $\lim\limits_{n\to+\infty}\ln\left(\frac{n}{n^2+2}\right)=-\infty$.

Proposition 2.4

Soit (u_n) une suite réelle monotone.

1. (u_n) *est croissante et non majorée* $\Longrightarrow\ \lim\limits_{n\to+\infty} u_n=+\infty$
2. (u_n) *est décroissante et non minorée* $\Longrightarrow\ \lim\limits_{n\to+\infty} u_n=-\infty$

Démonstration Soit (u_n) une suite réelle croissante et non majorée. On a
$$((u_n)\text{ est une suite réelle non majorée})\ \Longleftrightarrow\ (\forall A>0,\ \exists N\in\mathbb{N}:u_N>A)$$
En utilisant maintenant la croissance de la suite (u_n), on trouve :
$$\forall A>0,\ \exists N\in\mathbb{N}:\ \forall\, n\in\mathbb{N}:\ n\geq N\ \Longrightarrow\ u_n\geq u_N>A\ \Longrightarrow\ u_n>A$$
Cela signifie que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=+\infty$. Le deuxième point se démontre de la même manière. ■

Le résultat suivant est une extension du théorème 2.4. Sa preuve s'articule sur les définitions des limites finies ou non.

Proposition 2.5

Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles. On a les résultats suivants :

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n =$	$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n =$	$\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n+v_n) =$	$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n v_n =$	$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} =$
ℓ	$\ell' \neq 0$	$\ell+\ell'$	$\ell\ell'$	$\frac{\ell}{\ell'}$
$\ell>0$	$\pm\infty$	$\pm\infty$	$\pm\infty$	0
$\ell<0$	$\pm\infty$	$\pm\infty$	$\mp\infty$	0
0	$\pm\infty$	$\pm\infty$	**F.I**	0
$\pm\infty$	$\pm\infty$	$\pm\infty$	$\pm\infty$	**F.I**
$+\infty$	$-\infty$	**F.I**	$-\infty$	**F.I**
$\ell\neq 0$	0	ℓ	0	∞
0	0	0	0	**F.I**

Dans le tableau ci-dessus, la notation **F.I** signifie forme indéterminée. Le calcul d'une limite lorsqu'une forme indéterminée se présente, est effectuer en utilisant les différentes techniques de simplification et de reformulation et l'utilisation des limites standard déjà vue dans le calcul des limites de fonctions en terminale comme par exemple :

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1\,,\ \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1\,,\ \lim_{x\to 0}\frac{\ln(x+1)}{x}=1$$

et

$$\lim_{x\to+\infty} x^{\alpha}e^{-\beta x}=0\,,\ (\alpha,\beta>0)\,,\ \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0\,;....etc$$

Signalons maintenant, une limite importante :

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{a}{n}\right)^n=e^a,\quad a\in\mathbb{R}$$

En effet si l'on pose $u_n=\left(1+\frac{a}{n}\right)^n$, alors -lorsque $a\neq 0$ si non le résultat est trivial - on trouve :

$$\ln(u_n)=n\ln\left(1+\frac{a}{n}\right)=a\left(\frac{\ln\left(1+\frac{a}{n}\right)}{\frac{a}{n}}\right)\longrightarrow a \text{ quand } n\longrightarrow+\infty$$

Donc $u_n\longrightarrow e^a$ quand $n\longrightarrow+\infty$.
Uu cas particulier lorsque $a=1$ on trouve une définition de nombre transcendant e la base des logarithmes népérien :

$$e=\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

Exemple 2.16 Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{n-1}{n+2}\right)^{\frac{n}{3}}$.
Réponse :
On a pour tout $n\mathbb{N}^*$:

$$\left(\frac{n-1}{n+2}\right)^{\frac{n}{3}}=\left(\frac{1-1/n}{1+2/n}\right)^{\frac{n}{3}}=\left(\frac{(1-1/n)^n}{(1+2/n)^n}\right)^{\frac{1}{3}}$$

Il vient, alors

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n-1}{n+2}\right)^{\frac{n}{3}}=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{(1-1/n)^n}{(1+2/n)^n}\right)^{\frac{1}{3}}=\left(\frac{e^{-1}}{e^2}\right)^{1/3}=e^{-1}.$$

2.5 Convergence des suites récurrentes

Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle non vide et soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction réelle vérifiant les deux conditions suivante :

(1) f est continue sur l'intervalle I

(2) $f(I) \subset I$. c'est à dire que f envoi I dans lui même.

Soit (u_n) la suite numérique définie par la relation de récurrence suivante

$$\begin{cases} u_0 \in I & \text{donné} \\ u_{n+1} = f(u_n) & n \geq 0 \end{cases} \tag{2.17}$$

2.5.1 Suite récurrente bien définie

Définition 2.14

On dit que la suite récurrente (u_n) est bien définie si la relation de récurrence (2.18) permet de calculer tout les termes de la suite.

Il est clair que la condition $f(I) \subset I$ assure que la suite (u_n) est bien définie. En effet, pour chaque choix de $u_0 \in I$ on a pour tout $n \geq 0$

$$u_n \in I \implies u_{n+1} = f(u_n) \in I$$

Donc si $D_f \subset \mathbb{R}$ est l'ensemble de définition de la fonction f, alors la suite réelle (u_n) définie par (2.18) est bien définie s'il existe un intervalle (ou une partie non vide) $I \subset D_f$ tels que $u_0 \in I$ et $f(I) \subset I$.

Exemple 2.17 Soit (u_n) la suite réelle définie par

$$u_0 = 3\,, \quad et \quad u_{n+1} = \ln(u_n) \quad \forall n \geq 0.$$

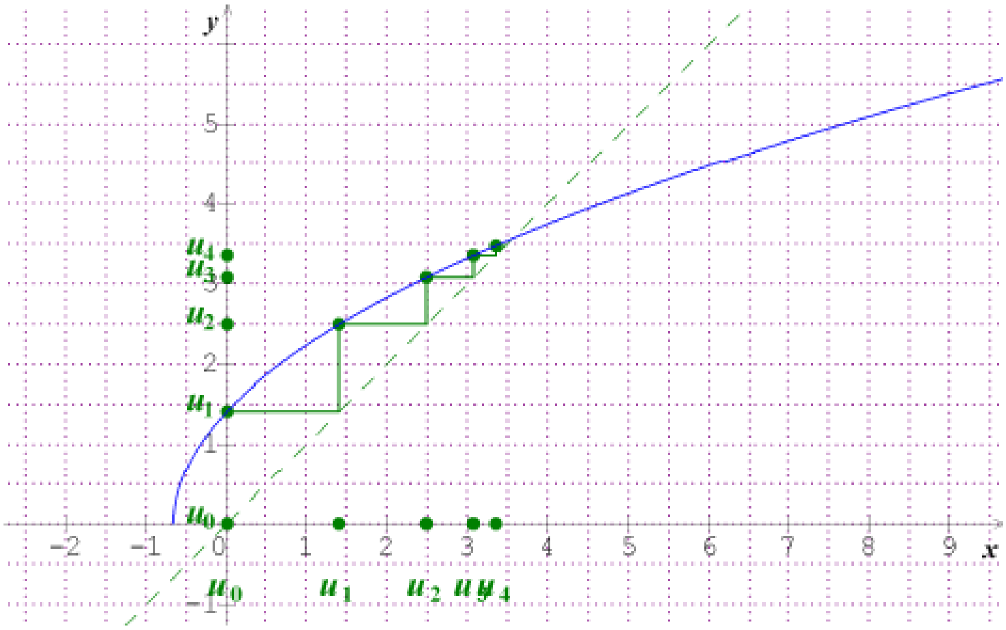
On a $u_1 = \ln 3$, $u_2 = \ln(\ln 3) = 0,094047...$, $u_3 = -2,363951...$ mais on peut pas calculer u_k pour $k \geq 4$. En effet, soit $I = [a, +\infty[$ avec $0 < a \leq 3$. Soit $f(x) = \ln(x)$. Alors on a $3 \in I$ et $f(I) = [\ln(a), +\infty[$. Comme $\ln(a) < a$, il vient que $f(I) \not\subset I$. Donc la suite (u_n) est " mal définie " ! !

Exemple 2.18 Soit (v_n) la suite réelle définie par

$$v_0 = 1\,, \quad et \quad v_{n+1} = \sqrt{2 + v_n} \quad \forall n \geq 0.$$

Soit $f(x) = \sqrt{x+2}$ et $x \in I = [-2, +\infty[$. Comme f est continue et croissante sur I on trouve que $f(I) = [0, +\infty[\subset I$. Donc puisque $v_0 \in I$ et $f(I) \subset I$, la suite (v_n) est bien définie.

2.5.2 Sens de variation



Proposition 2.6

Considérons la suite récurrente (u_n) définie par (2.18). Supposons que la fonction f est croissante sur I . Alors (u_n) est monotone. Plus précisément :

1. *Si $u_0 \leq f(u_0)$, la suite (u_n) est croissante .*
2. *Si $u_0 \geq f(u_0)$, la suite (u_n) est décroissante .*

Démonstration 1. Supposons que $u_0 \leq f(u_0)$. Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n \leq u_{n+1}$.
Initialisation : Par hypothèse on a $u_0 \leq u_1 = f(u_0)$.
Hérédité : La fonction f étant croissante, alors

$$u_n \leq u_{n+1} \implies u_{n+1} = f(u_n) \leq f(u_{n+1}) = u_{n+2}$$

Conclusion : Par le principe de raisonnement par récurrence on en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n \leq u_{n+1}$.
C'est à dire (u_n) est croissante.
2. Se démontre de la même manière.
Donc dans tout les cas ($u_0 \leq u_1$ ou $u_0 \geq u_1$) la suite (u_n) est monotone. ∎

2.5.3 Convergence

On admet le résultat suivant

Lemme 1 *Siot $f : I \to \mathbb{R}$ est une fonction réelle continue sur I. Soit (u_n) une suite d'éléments de I. Alors*

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell \implies \lim_{n\to+\infty} f(u_n) = f(\ell)$$

Autrement dit, si la fonction f est continue sur I alors elle transforme toute suite (u_n) d'éléments de I qui converge vers ℓ en une suite image $(v_n = f(u_n))$ qui converge vers $f(\ell)$.

Proposition 2.7

Soit (u_n) la suite récurrente définie par la relation (2.18). Supposons que $f : I \to I$ est continue. Si la suite (u_n) est convergente, alors sa limite ℓ vérifie $\ell = f(\ell)$. On dit que ℓ est un point fixe de f.

Démonstration La suite (u_n) est bien définie puisque $f(I) \subset I$. En vertu de lemme 1 on en déduit

$$\ell = \lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} u_{n+1} = \lim_{n\to+\infty} f(u_n) = f(\ell)$$

■

Une conséquence immédiate du proposition précédente est le

Corollaire 2.6

Si $\forall x \in D_f\ : f(x) \neq x$ alors la suite récurrente (u_n) définie par (2.18) est divergente.

Exemple 2.19 Soit (u_n) la suite réelle définie par

$$\begin{cases} u_0 = 5 \\ u_{n+1} = u_n + \frac{1}{3\,u_n} \quad n \geq 0 \end{cases} \tag{2.18}$$

Ici, on a $u_{n+1} = f(u_n)$ avec $f(x) = x + \frac{1}{3x}$, $\quad x \in \mathbb{R}^*$. Il est clair que l'équation $f(x) = x$ n'admet aucune solution. Donc la suite (u_n) est divergente. De plus comme $u_0 > 0$ le lecteur peut montrer facilement en utilisant la récurrence que $u_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Ainsi

$$\forall\, n \in \mathbb{N}\ :\ u_{n+1} - u_n = \frac{1}{3\,u_n} > 0 \implies (u_n) \quad \text{est croissante}$$

Finalement, puisque (u_n) est croissante et divergente, on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

Proposition 2.8

Soit (u_n) la suite récurrente définie par la relation (2.18). Supposons que $f : I \to I$ est croissante.

1. *S'il existe $b \in I$ tels que $u_0 \leq b$ et $f(b) \leq b$ alors $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq b$.*
2. *S'il existe $a \in I$ tels que $u_0 \geq a$ et $f(a) \geq a$ alors $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geq a$.*

Démonstration Il suffit d'utiliser le raisonnement par récurrence et la croissance de f. ■

En combinant le théorème de la convergence monotone et les propositions 2.7 ; 2.8 nous obtenons la

Proposition 2.9

Soit (u_n) la suite récurrente définie par la relation (2.18). Supposons que $f : I \to I$ est continue et croissante. Alors

1. *S'il existe $b \in I$ tels que $u_0 \leq f(u_0) \leq f(b) \leq b$ alors la suite (u_n) est convergente et sa limite ℓ vérifie $u_0 \leq \ell \leq b$.*
2. *S'il existe $a \in I$ tels que $a \leq f(a) \leq f(u_0) \leq u_0$ alors la suite (u_n) est convergente et sa limite ℓ vérifie $a \leq \ell \leq u_0$.*

Exemple 2.20 Étudier la convergence de la suite réelle (u_n) définie par

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \sqrt{4 + u_n} \quad n \geq 0 \end{cases} \tag{2.19}$$

Solution : Posons $f(x) = \sqrt{x+4}$ où $x \in I = [0, +\infty[$. Il est clair que f est une fonction continue et croissante sur I. D'autre part, On a $0 \in I$ et $f(I) = [2, +\infty[\subset I$. Donc (u_n) est bien définie. De plus, on a $u_1 = f(u_0) = f(0) = 2 \geq u_0$, alors (u_n) est croissante. Remarquons que $0 = u_0 \leq f(3) = \sqrt{7} \leq 3$. Donc on en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $u_n \leq 3$, ce qui signifie que (u_n) est majorée. Par conséquent, la suite (u_n) est convergente. Posons $\ell = \lim_{n\to+\infty} u_n$. Alors

$$\ell = f(\ell) \implies \ell^2 = 4 + \ell \implies \ell^2 - \ell - 4 = 0$$

Donc ℓ est la solution de l'équation $x^2 - x - 4 = 0$ et qui vérifier $0 \leq \ell \leq 3$. Un calcul simple montre que $\ell = \frac{1+\sqrt{17}}{2} \approx 2{,}56155$

Exercices

Exercice 20 *Montrer en utilisant la définition de la limite que :*

1) $\lim\limits_{n\to+\infty} a^n = 0$, *où a un réel tel que* $|a| < 1$.

2) $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln\left(\dfrac{2n+1}{n+3}\right) = \ln 2$.

Exercice 21 *Considérons les suites réelles* $(u_n)_{n\geq 0}$ *et* $(v_n)_{n\geq 0}$ *définies par*

$$u_n = \sin(n) \quad , \qquad v_n = \cos(n)$$

1. *Vérifier que pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *:*

$$u_{n+1} + u_{n-1} = 2\,u_n\cos(1) \quad et \qquad u_{n+1} - u_{n-1} = 2\,v_n\sin(1)$$

2. *Supposons que les suites* $(u)_n$ *et* $(v)_n$ *convergent vers* ℓ *et* ℓ' *respictivement.*
   - *(a). Montrer que* $\ell^2 + \ell'^2 = 1$.
   - *(b). En utilisant la question 1 montrer que* $\ell = \ell' = 0$.
   - *(c). Déduire que les suites* $(u)_n$ *et* $(v)_n$ *n'admettent aucune limite.*

Exercice 22 *I) Etudier la monotonie et la bornitude de la suite réelle* (u_n) *dans les cas suivants :*

$$(1)\quad u_n = n + \frac{2}{n} \qquad (2)\quad u_n = \sqrt{n+2} - \sqrt{n} \qquad (3)\quad u_n = 2 + \frac{(-1)^n}{2n+1}$$

$$(4)\quad u_n = \frac{n!}{n^n} \quad (5)\quad u_n = (n+2)e^{-\frac{n}{5}} \quad (6)\quad u_n = \left(\alpha + \frac{1}{n}\right)^n.\quad 0 \leq \alpha \leq 1$$

$$(7)\ u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-2)^k}{7^k} \qquad (8)\ u_n = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n-(-1)^n}} \qquad (9)\ u_n = \frac{a^n}{n!}\,, \quad a \in \mathbb{R}^*$$

II) Calculer la limite de la suite (u_n) *dans les cas précédents.*

Exercice 23 *Calculer les limites des suites suivantes et préciser leur sens de variation :*

$$(1)\ u_n = \frac{(-1)^n}{n} \qquad (2)\ u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \qquad (3)\ u_n = \ln(n+1) - \ln(n)$$

$$(4)\ u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-2)^k}{7^k} \qquad (5)\ u_n = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n-(-1)^n}} \qquad (6)\ u_n = \frac{2^n}{n!}$$

$$(7)\ u_n = \left(\alpha + \frac{1}{n}\right)^n.\quad \alpha \in]0;1[.$$

Exercice 24 *Soit* (u_n) *la suite réelle définie pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$ *par :* $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$

Le but de cet exercice est de montrer que (u_n) *est convergente par deux méthodes différentes.*

Première méthode

1. *Montrer que (u_n) est strictement croissante.*
2. *Vérifier que pour tout $k \geq 2$: $\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$ et montrer que (u_n) est majorée. Conclure.*

Deuxième méthode

1. *En utilisant la question 2 précédente, montrer que pour p, q deux entiers positifs tel que $p > q$ alors :*
$$|u_p - u_q| \leq \frac{1}{q}$$
2. *Déduire que (u_n) est une suite de Cauchy. Conclure.*

Exercice 25 *Considérons la suite réelle $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par son term général*
$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$$

1. *Montrer que (u_n) est une suite croissante*
2. *Montrer que*
$$\forall k \geq 4 : \quad k! \geq 2^k$$
3. *Déduire que*
$$\forall n \in \mathbb{N} : \quad \frac{8}{3} \leq u_n \leq \frac{67}{24}$$
4. *Déduire que (u_n) converge vers une limite $\ell \in [\frac{8}{3}, \frac{67}{24}]$.*
5. *Montrer par l'absurde que ℓ est un nombre irrationnel.*
6. *Soit $v_n = u_n + \frac{1}{n!}$ et soit $w_n = \frac{u_n+v_n}{2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.*
   (a). *Montrer que (u_n) et (v_n) sont adjacentes.*
   (b). *Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $|w_n - \ell| \leq \frac{1}{n!}$.*
   (c). *Donner une approximation de ℓ avec 3 chiffres exacte après la virgule.*

Exercice 26 *On considère la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par*
$$u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n}$$

1. *Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{2n} \geq \frac{1}{2} + u_n$.*
2. *Montrer que (u_n) est strictement croissante.*
3. *Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ (On pourra faire un raisonnement par l'absurde).*

Exercice 27 *Étudier la convergence des suites suivantes :*
$$(1)\ u_n = \frac{E(\sqrt{n+1})}{n} \qquad (2)\ u_n = \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{1}{\sqrt{k+n^2}} \qquad (3)\ u_n = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} E(ka)\,, a \in \mathbb{R}$$

Exercice 28 *Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite à termes dans $\mathbb{Z}$. Montrer que $(u_n)_{n\geq 0}$ converge si et seulement si elle est stationnaire (c'est à dire : il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $(u_n)_{n\geq N}$ soit constante).*

Exercice 29 *Soit q un entier supérieur ou égale á 2. On pose $u_n = \cos\frac{2\pi n}{q}$*

1. *Montrer que l'on a $u_{n+q} = u_n$ pour tout n.*
2. *Calculer u_{nq} et u_{nq+1}. En déduire la nature de la suite (u_n).*

Exercice 30 *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle telle que les suites extraites $(u_{2p})_{p\in\mathbb{N}}$, $(u_{2p+1})_{p\in\mathbb{N}}$ et $(u_{3p})_{p\in\mathbb{N}}$ convergent. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.*

Exercice 31 *Soit (u_n) une suite à termes positifs, définie par $u_1 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$*
$$(u_{n+1})^2 = 2\,u_n$$

1. Calculer u_2, u_3 et u_4 (On dennera les résultats sous formes 2^q, q étant un rationnel).
2. On pose : $\forall n \in \mathbb{N}\ v_n = \ln u_n - \ln 2$

   a) Montrer que (v_n) est une suite gémétrique dont on précésera la raison.

   b) Déduire que la suite (u_n) converge et calculer sa limite.

   c) Calculer $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_1\times u_2\times\ldots\times u_n}{\alpha^n}$, avec $\alpha > 1$

Exercice 32 *Soient a et b deux nombres réels tels que $a > b > 0$. Soient (a_n) et (b_n) deux suites réelles définies par*

$$a_0 = a\,,\ b_0 = b \quad a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}\,, \quad b_{n+1} = \sqrt{a_n\, b_n}\ \ n \geq 0.$$

1. Montrer que (a_n) est décroissante et que (b_n) est croissante.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a
$$|a_n - b_n| \leq \frac{1}{2^n}|a-b|$$
3. Conclure que (a_n) et (b_n) convergent vers la même limite.

Exercice 33 *(Approximation décimale d'un nombre réel)*
Soit λ un réel fixé. Considérons les suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies pour tout $n \in \mathbb{N}$ par

$$x_n = 10^{-n}E(10^n\,\lambda) \quad et \quad y_n = x_n + 10^{-n}$$

1. Soit $\lambda = \pi$. Calculer les six premiers termes de chaque suite (x_n) et (y_n). Qu'est ce que vous remarquer ?
2. Montrer que les suites (x_n) et (y_n) sont adjacentes.
3. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \lim\limits_{n\to+\infty} y_n = \lambda$.

Exercice 34 *Soient a_0 et b_0 deux réels tels que $a_0 < b_0$. On définit par récurrence les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par*

$$a_{n+1} = \frac{2a_n + b_n}{3} \quad et \quad b_{n+1} = \frac{a_n + 2b_n}{3}$$

1. Montrer que la suite $(a_n - b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique, et l'exprimer en fonction de a_0 et b_0.
2. Montrer que ces suites sont adjacentes.
3. En calculant $a_n + b_n$, montrer qu'elles convergent vers $\frac{a_0+b_0}{2}$.

Exercice 35 *Soit $a \in \mathbb{R}$ fixé. On considère la suite (u_n) définie par*

$$u_1 = a \quad et \quad \forall n \in \mathbb{N}^*\,,\ u_{n+1} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^2 u_n - \frac{n+1}{(n+2)^2}$$

1. Montrer que la suite (u_n) est constante si et seulement si $a = -\frac{1}{4}$.
2. On suppose que $a = \frac{3}{4}$. On définit la suite (v_n) par $v_n = u_n + \frac{1}{4}$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

   (a). Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\quad v_{n+1} = \left(\frac{n}{n+2}\right)^2 v_n$

   (b). En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\quad v_n = \frac{4}{n^2\,(n+1)^2}$

   (c). En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Exercice 36 *Etudier la convergence des suites définies ci-dessous par les relations récurrentes suivantes :*

1) $u_{n+1} = a\,u_n + \dfrac{1}{2},\ 0 < a < 1$ et $u_0 = 2$ 2) $u_{n+1} = \sqrt[3]{u_n + 6}$ et $u_0 = 3$

3) $u_{n+1} = \ln(u_n + 1)$ et $u_0 = 1$ 4) $u_{n+1} = \sqrt{u_n + \dfrac{u_n^2}{2}}$ et $u_0 = 1$.

Exercice 37 *I) Posons $P_n = \sum_{k=0}^{n} 10^{-k}$, et $\quad Q_n = \sum_{k=0}^{n} 10^{-2k}$*

1. *Calculer* P_n *et* Q_n *en fonction de* n *puis calculer* $\lim_{n\to+\infty} P_n$ *et* $\lim_{n\to+\infty} Q_n$.
2. *Montrer que* $\sup\{P_n : n\in\mathbb{N}\} = \frac{10}{9}$.
3. *Calculer* $\inf\{\frac{1}{Q_n} : n\in\mathbb{N}\}$.

II) Soit (u_n) *la suite réelle définie par :*

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k\, 10^{-k}$$

où

$$\alpha_k = \begin{cases} 1 & si\ k \quad est\ pair \\ 3 & si\ k \quad est\ impair \end{cases}$$

1. *Montrer que la suite* (u_n) *est croissante .*
2. *Montrer que la suite* (u_n) *est bornée. Déduire la nature de la suite* (u_n) *.*
3. *Montrer que pour tout* $n\in\mathbb{N}$ *:* $u_{2n} = \frac{13}{10}Q_n - 3\times 10^{-(2n+1)}$.
4. *Justifier pourquoi* $\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} u_{2n}$ *?*
5. *Déduire la valeur de* $\lim_{n\to+\infty} u_n$.

Exercice 38 *Soit* α *un réel strictement supérieur á* 1 *et* m *un entier naturel tel que :*

$$(m-1)^2 \le \alpha \le m^2$$

On considère la suite (u_n) *définie par* $u_0 = m$ *et pour tout* $n\in\mathbb{N}$ *:* $u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{\alpha}{u_n}\right)$

1. *Montrer que pour tout* $n\in\mathbb{N}$ *on a :* $u_n \ge \sqrt{\alpha}$
2. *Déterminer le sens de variation de la suite* (u_n) *puis justifier que* (u_n) *converge.*
3. *Montrer que pour tout* $n\in\mathbb{N}$ *on a :* $u_n - \sqrt{\alpha} \le \frac{1}{(2\sqrt{\alpha})^{2^n-1}}$. *En déduire la limite de la suite* (u_n).

Exercice 39 *I. Soit* $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ *définie par :* $f(x) = \frac{1}{9}x^3 + \frac{1}{3}x + \frac{2}{9}$

1. *Pour* x *et* y *dans* $[0,1]$, *factoriser* $f(x) - f(y)$.
2. *Déduire que* f *est croissante sur* $[0,1]$ *et que :*

$$|f(x)-f(y)| \le \frac{2}{3}|x-y|, \quad \forall x,y\in[0,1]$$

II. Considérons maintenant les deux suites (u_n) *et* (v_n) *définies par :*

$$u_0 = 0, \quad u_{n+1} = f(u_n), \quad v_0 = 1, \quad v_{n+1} = f(v_n).$$

1. *Montrer que* (u_n) *et* (v_n) *sont adjacentes.*
2. *Notons* $\lambda\in[0,1]$ *la limite commune des suites* (u_n) *et* (v_n). *Montrer que* λ *est la solution unique de l'équation :*

$$\frac{1}{9}x^3 - \frac{2}{3}x + \frac{2}{9} = 0$$

Exercice 40 .

$I)$ *Considérons les deux fonctions réelles* f *et* g *définies sur* $[1,+\infty[$ *par :*

$$f(x) = \frac{1}{x+1} + \ln\left(\frac{x}{x+1}\right), \quad g(x) = \frac{1}{x} + \ln\left(\frac{x}{x+1}\right)$$

1. *Montrer que* $f(x)\le 0$ *et que* $g(x)\ge 0$ *, pour tout* $x\ge 1$.
2. *Déduire que pour tout* $k\in\mathbb{N}^*$, *on a*

$$\frac{1}{k+1} \le \ln(k+1) - \ln k \le \frac{1}{k} \tag{2.20}$$

$II)$ *Considérons les deux suites réelles* (u_n) *et* (v_n) *définies pour tout* $n\in\mathbb{N}^*$ *par :*

$$u_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \ln(n) \ , \quad v_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \ln(n+1)$$

1. *En utilisant la relation* (2.20) *montrer que* (u_n) *est décroissante et que* (v_n) *est croissante.*
2. *En déduire que* (u_n) *et* (v_n) *sont adjacentes.*
3. *Notons par* γ *la limite commune de suites* (u_n) *et* (v_n). *Le nombre* γ *est appelé la constante d'Euler. Soit* $w_n = \frac{u_n+v_n}{2}$.
   (a). *Montrer que pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$ *on a* $|w_n - \gamma| \leq \frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$.
   (b). *A partir de quel rang* N_0 *on ait :* $|w_n - \gamma| \leq 10^{-3}$.

Problème :

$I)$ Soit A une partie réelle non vide . Montrer que

1. $M = \sup(A)$ si et seulement si M est un majorant de A et il existe une suite $(a_n)_{n\geq n_0}$, telle que

$$\forall n \geq n_0 \ : a_n \in A \quad et \quad \lim_{n\to+\infty} a_n = M$$

2. $m = \inf(A)$ si et seulement si m est un minorant de A et il existe une suite $(b_n)_{n\geq n_0}$, telle que

$$\forall n \geq n_0 \ : b_n \in A \quad et \quad \lim_{n\to+\infty} b_n = m$$

3. A n'est pas mojorée (resp : n'est pas minorée) si et seulement si il existe une suite $(a_n)_{n\geq n_0}$, telle que

$$\forall n \geq n_0 \ : a_n \in A \quad et \quad \lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty \quad (resp\ :\ -\infty\ )$$

$II)$

Exercice 41 *On considère les suites* (v_n) *et* (w_n) *définies pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$ *par :*

$$v_n = \frac{1}{n}\sqrt[n]{n!}, \qquad w_n = \frac{n^n}{n!}$$

1. *Trouver une relation simple liant* $\ln(v_n)$ *et* $\ln(w_n)$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$.
2. *Montrer que pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$ *:*

$$\frac{w_{n+1}}{w_n} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

   En déduire que (w_n) *est strictement croissante et minorée par* 1
3. a) *Montrer que pour tout* $x \in \mathbb{R}^+$ *on a :* $0 \leq x - \ln(1+x) \leq \frac{x^2}{2}$
   b) *En déduire que pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$

$$0 \leq 1 + \ln(w_n) - \ln(w_{n+1}) \leq \frac{1}{2n}$$

   c) *Montrer en utilisant la question* 3(b) *que pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$ *on a :*

$$0 \leq n - \ln(w_{n+1}) \leq \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$$

4. a) *Montrer que pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$ *:* $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} \leq 1 + \ln(n)$
   b) *Déduire de ce qui précède que* $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\ln(w_n) = 1$.
5. *Conclure de cette étude que la suite* (v_n) *est une suite qui converge vers* $\frac{1}{e}$.

Exercice 42 *On considère une suite réelle* (u_n) *à termes positifs et soit* (v_n) *la suite définie pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$ *par :*

$$v_n = \frac{u_1 + u_2 + \ldots + u_n}{n}$$

1. *Montrer que si* (u_n) *converge vers* l *alors* (v_n) *converge vers* l.
2. *Soit* $y_n = \ln u_n - \ln u_{n-1}$ *pour* $n \in \mathbb{N}^*$
   a) *Vérifier que pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$ *:* $u_n = u_{n-1}e^{y_n}$.
   b) *Déduire que pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$ *:* $\sqrt[n]{u_n} = \sqrt[n]{u_0}e^{\frac{y_1+y_2+\ldots+y_n}{n}}$
   c) *Déduire de ce qui précède que*

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = l \implies \lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{u_n} = l$$

3. ***Application** : Calculer les limites des suites suivantes :*

$$(1)\ \frac{1}{n}\sqrt[n]{(n+1)(n+2)....(2n-1)} \qquad (2)\ \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} \qquad (3)\ \sqrt[n]{\frac{(n!)^2}{(2n+1)!}} \qquad (4)\ (C_{2n}^{n})^{\frac{1}{n}}.$$

Chapitre 3

Fonctions réelles d'une variable réelle : Continuité

Dans ce chapitre nous allons voir la notion de continuité d'une fonction réelle d'une variable réelle. Dans un premier temps, on rappel quelques notions de base sur les fonctions réelles, puis nous donnons les définitions régeureuses de la notion de la limite. En dernier temps, la définition de la continuité d'une fonction réelle et ses propriétées fondamentales sont étudiées.

3.1 Généralités

3.1.1 Définition d'une fonction réelle d'une variable réelle

Définition 3.1

Soit $I \subset \mathbb{R}$ une partie réelle non vide. Une relation f qui fait associée chaque élément de I un nombre réel, est appelée fonction réelle d'une variable réelle définie sur I. On note $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction f. On écrit parfois $x \mapsto f(x)$ pour notée la relation fonctionnelle f. Toute fonction réelle f d'une variable réelle, est définie sur une partie réelle maximale appelée ensemble de définition de f et noté souvent par D_f

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} : \quad f(x) \quad \textit{existe}\}$$

Si on écrit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, alors on comprend que $I \subset D_f$. Par la suite, on dit tout simplement, fonction réelle, au lieu de dire fonction réelle d'une variable réelle.

Exemple 3.1

1. La fonction affine $x \mapsto ax + b$ où $a, b \in \mathbb{R}$ est une fonction réelle, définie sur $\mathbb{R}$.
2. La relation $x \mapsto \frac{2x+5}{x}$ est une fonction réelle d'une variable réelle, définie sur $\mathbb{R}^*$.
3. La fonction réelle $x \mapsto \sqrt{x}$ est définie sur $[0, +\infty[$.
4. La fonction réelle $x \mapsto E(x)$ est définie sur $\mathbb{R}$. C'est la fonction partie entière.

3.1.2 Graphe d'une fonction réelle

Définition 3.2

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction réelle. L'ensemble noté G_f défini par

$$G_f = \left\{ (x, f(x)) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x \in I \right\} \subset \mathbb{R}^2$$

est appelé graphe de la fonction réelle f.
Dans le plans $\mathbb{R}^2$ muni d'un repère, le graphe G_f de la fonction f peut considérer comme l'ensemble des point M de coordonnées $(x, f(x))$ où $x \in I$. Cet ensemble de points $M(x, f(x))$ lorsque x parcourt I est appelé courbe représentative de la fonction f dans le plan.

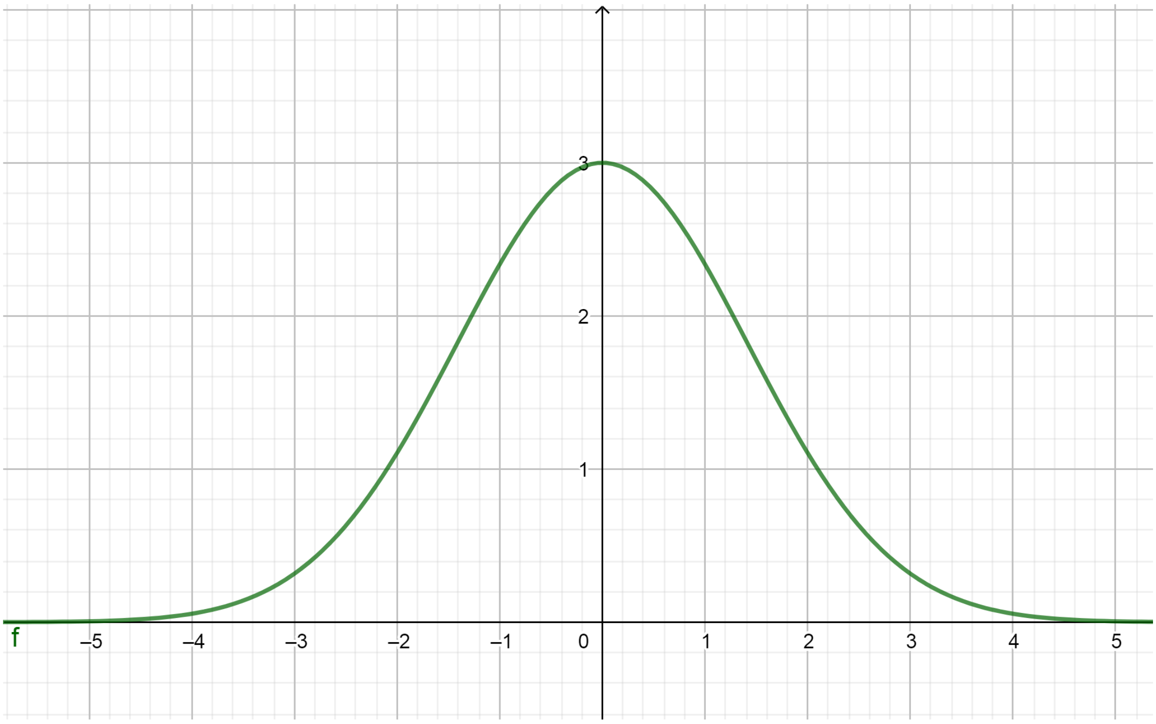


Figure 3.1: Graphe de la fonction $x \mapsto 3\,e^{-x^2/4}$

3.1.3 Fonction paire, impaire, périodique

Définition 3.3

Une fonction réelle $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est appelée fonction paire (Resp : impaire) si :

1. *Pour tout $x \in I$ alors $-x \in I$ (on dit que I est symétrique par rapport à 0) et*
2. *Pour tout $x \in I$ on a $f(-x) = f(x)$. (Resp : $f(-x) = -f(x)$).*

Exemple 3.2

1. Les fonctions $x \mapsto x^2$, $x \mapsto |x|$, $x \mapsto \frac{x^4}{x^2+1}$, $x \mapsto \cos(x)$ sont définie sur $\mathbb{R}$ et sont paires.
2. Les fonctions $x \mapsto x^3$, $x \mapsto x|x|$, $x \mapsto \frac{x^3}{x^2+1}$, $x \mapsto \sin(x)$ sont définie sur $\mathbb{R}$ et sont impaires.
3. La fonction $f :]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{\sin(3x)}{\cos(x)}$ est impaire.

Définition 3.4

Une fonction réelle $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est appelée fonction périodique s'il exite un nombre réel positif $T > 0$ tels que :

1. *Pour tout $x \in I$ on a $x + T \in I$ et*
2. *Pour tout $x \in I$ on a $f(x + T) = f(x)$.*

Le plus petit nombre $T > 0$ s'il existe qui vérifie $f(x + T) = f(x)$, pour tout $x \in I$ est appelé période fondamentale de f (on dit aussi période de f). Dans ce cas on dit que la fonction f est $T-$ périodique.

Remarque La condition $x \in I \implies x+T \in I$ implique que pour tout $x \in I$ et pour tout $n \in \mathbb{Z} : x + nT \in I$.

Exemple 3.3

1. Soit $\omega > 0$. Les fonction $x \mapsto \sin(\omega x)$, et $x \mapsto \cos(\omega x)$ sont périodique de période $\frac{2\pi}{\omega}$.
2. La fonction $x \mapsto \tan(x)$ est définie sur $D = \mathbb{R} - \{(2k+1)\frac{\pi}{2} \; : \; k \in \mathbb{Z}\}$ est $\pi-$ périodique.
3. La fonction partie décimale $x \mapsto x - E(x)$ est $1-$ périodique.

Remarque Pour tracer le graphe d'une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ qui est $T-$ périodique,il suffit de le tracer sur un intervalle $[a, a+T] \subset I$ et de faire des translations de ce tracer de vecteurs $k.T.\vec{i}$ où $k \in \mathbb{Z}$ et $\vec{i}$ est le vecteur unitaire de l'axe des abscisses, pour obtenir le graphe complet. Le point $a \in I$ sera choisi pour simplifier l'expression de f ou de façon à profiter d'éventuelles particularités de la fonction f (parité ou imparité par exemple).

La fonction partie décimale $D : x \mapsto x - E(x)$ est $1-$ périodique et elle a l'expression $D(x) = x$ sur l'intervalle $[0,1[$. Le graphe de D sur $[0,1[$ est alors le segment d'équation $y = x$ dans un repère orthonormé. En faisant des translations des vecteurs $k\vec{i}$ de ce segment,en trouvera le graphe complet de D sur $\mathbb{R}$.

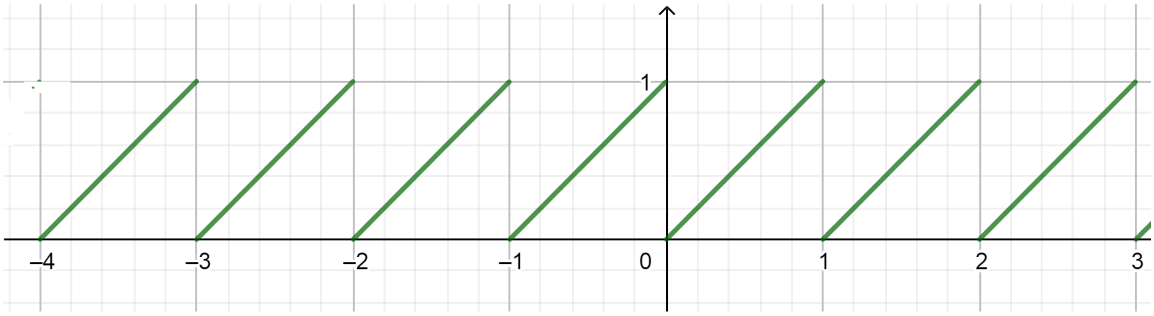


Figure 3.2: Graphe de la fonction $x \mapsto x - E(x)$

3.1.4 Fonction monotone

Définition 3.5

Une fonction réelle $f : I \to \mathbb{R}$ est dite :

1. *Croissante si pour tout $x, y \in I$: $x < y \implies f(x) \leq f(y)$.*
2. *Décroissante si pour tout $x, y \in I$: $x < y \implies f(x) \geq f(y)$.*
3. *Monotone si elle est croissante ou décroissante.*
4. *Strictement croissante si pour tout $x, y \in I$: $x < y \implies f(x) < f(y)$.*
5. *Strictement décroissante si pour tout $x, y \in I$: $x < y \implies f(x) > f(y)$.*
6. *Strictement monotone si elle est strictement croissante ou strictement décroissante.*

Remarque

1. Il est clair que toute fonction strictement monotone est monotone. La réciproque est fausse.
2. Il est clair q'une fonction réelle périodique n'est pas une fonction monotone.

Exemple 3.4

1. La fonction affine $x \mapsto ax + b$ où $a, b \in \mathbb{R}$ est strictement croissante (Resp : strictement décroissante) si $a > 0$ (Resp : $a < 0$). Si $a = 0$ elle est constante.
2. La fonction partie entière $x \mapsto E(x)$ est croissante sur $\mathbb{R}$.
3. La fonction $x \mapsto 1 - \sqrt{x+4}$ est décroissante sur $[-4, +\infty[$.

3.1.5 Fonctions bornées

Définition 3.6

Une fonction réelle $f : I \to \mathbb{R}$ est dite :

1. *Majorée sur I si :* $\exists M \in \mathbb{R} : \forall x \in I : f(x) \leq M$.
2. *Minorée sur I si :* $\exists m \in \mathbb{R} : \forall x \in I : f(x) \geq m$.
3. *Bornée sur I si elle est minorée et majorée à la fois sur I.*

Remarque Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction réelle. On note par $f(I)$ l'ensemble défini par

$$f(I) = \{f(x) \ : \ x \in I\} \subset \mathbb{R}$$

$f(I)$ est appelé l'ensemble des valeurs de f. Il est clair que f est majorée (Resp : minorée, bornée) sur I si et seulement si $f(I)$ est majoré (Resp : minoré, borné).

Remarque Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction réelle. En utilisant la négation logique de la définition précédente, on en déduit :

1. Non majorée sur I si : $\forall M \in \mathbb{R} : \exists x_0 \in I : f(x_0) > M$.
2. Non minorée sur I si : $\forall m \in \mathbb{R} : \exists x_0 \in I : f(x_0) < m$.

Proposition 3.1

Une fonction réelle $f : I \to \mathbb{R}$ est bornée si et seulement s'il existe une constante $M > 0$ tel que

$$\forall x \in I : \quad |f(x)| \leq M$$

Démonstration Il suffit de remarquer que la fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est bornée si et seulement si la partie réelle $f(I)$ est bornée. ■

Exemple 3.5 Soit $\omega \in \mathbb{R}$. La fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = 3\sin(\omega x) + 5\cos(\omega x)$. On sait bien que pour tout $a \in \mathbb{R} : |\sin(a)| \leq 1$ et $|\cos(a)| \leq 1$. Donc

$$\forall x \in \mathbb{R} : \ |g(x)| \leq 3|\sin(\omega x)| + 5|\cos(\omega x)| \leq 8$$

Ainsi, la fonction g est bornée.

Exemple 3.6 Montrer qu'une fonction affine non constante est non bornée sur $\mathbb{R}$.

<u>solution :</u>

Soit $f(x) = ax + b$ avec $a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{R}$. Par l'absurde, supposons que f est bornée sur $\mathbb{R}$. Alors

$$\exists M > 0 \ : \ \forall x \in \mathbb{R} : \quad |f(x)| \leq M$$

Donc $\exists M > 0$ tel que $\forall x \in \mathbb{R} : \quad |ax + b| \leq M$. Il vient alors

$$\exists M > 0 \ : \ \forall x \in \mathbb{R} : -M - b \leq ax \leq M - b$$

Comme $a \neq 0$, on en déduit

$$\exists M > 0 \ : \ \forall x \in \mathbb{R} : \min\left\{\frac{-M-b}{a}, \frac{M-b}{a}\right\} \leq x \leq \max\left\{\frac{-M-b}{a}, \frac{M-b}{a}\right\}$$

Cela signifie que l'ensemble $\mathbb{R}$ est borné. Contradiction.

3.1.6 Propriétés algébriques des fonctions réelles

Soit $I \subset \mathbb{R}$ une partie réelle non vide. L'ensemble de toute les fonctions réelles définies sur I est notée par $\mathbb{F}(I, \mathbb{R})$

3.2 Limite finie d'une fonction réelle

3.2.1 Voisinage d'un nombre réel

Définition 3.7

On appelle voisinage du nombre réel a et on le note par $V(a)$ tout sous ensemble de $\mathbb{R}$ qui contient un intervalle ouvert contenant a. Autrement dit

$$V(a) \text{ est un voisinage de } a \iff \text{il existe un intervalle ouvert } I \text{ tel que } a \in I \subset V(a)$$

Exemple 3.7 .

1. $[2,5]$ est un voisinage de 3.
2. $[-1,0[\cup\left[2,\frac{5}{2}\right]$ est un voisinage de $\frac{23}{10}$.
3. $[9,11[$ n'est pas un voisinage de 9.
4. $]-2,0[\cup]0,1[$ n'est pas un voisinage de 0.

Remarque Soit $r>0$ et soit $a\in\mathbb{R}$. L'intervalle ouvert $]a-r,a+r[$ centré en a de rayon r est un voisinage de a entièrement déterminé par le nombre r. De plus, on a

$$x\in]a-r,a+r[\iff -r<x-a<r \iff |x-a|<r$$

Donc, l'inégalité $|x-a|<r$ signifie que x se trouve dans le voisinage $]a-r,a+r[$ centré en a .

Définition 3.8

Un voisinage de a auquel on a ôté le nombre a s'appelle voisinage épointé de a. On note : $V^*(a)=V(a)\setminus\{a\}$.

Exemple 3.8 $]-2,0[\cup]0,1[$ est un voisinage épointé de 0.

3.2.2 Limite finie d'une fonction au point donné

Définition 3.9

Soit f une fonction réelle définie dans un voisinage de a sauf peut être en a.
On dit que f a pour limite ℓ au point a, si, à tout voisinage $V(\ell)$ de ℓ , on peut associer un voisinage $V(a)$ de a tel que :

$$x\in V^*(a) \implies f(x)\in V(\ell)$$

On note $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\ell$, où la notation $x\to a$ signifier que x se rapproche de a et $x\neq a$.
En considérant les intervalles ouverts centrés en a de rayon r , et ceux centrer en ℓ de rayon ε, l'écriture $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\ell$ se traduit par :

$$\forall\varepsilon>0,\exists r>0,\ (\ x\in]a-r,a+r[\text{ et } x\neq a\ ) \implies (\ f(x)\in]\ell-\varepsilon,\ell+\varepsilon[\ )$$

ou par :

$$\forall\varepsilon>0,\exists r>0,\ 0<|x-a|<r \implies |f(x)-\ell|<\varepsilon$$

Théorème 3.1

Si la fonction f a pour limite ℓ au point a, cette limite est unique.

Démonstration Soit f une fonction définie dans un voisinage de a sauf peut être en a. Supposons que f admet deux limites ℓ_1 et ℓ_2 au point a. Alors, on a

$$\forall\varepsilon>0,\exists r_1>0,\ 0<|x-a|<r_1 \implies |f(x)-\ell_1|<\frac{\varepsilon}{2}$$

et

$$\forall \varepsilon > 0, \exists r_2 > 0,\ 0 < |x-a| < r_2 \implies |f(x) - \ell_2| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Donc,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists r_1 > 0 \ et\ r_2 > 0\ ,\ 0 < |x-a| < min\{r_1, r_2\} \implies |f(x) - \ell_1| < \frac{\varepsilon}{2}\ et\ |f(x) - \ell_2| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Par conséquent, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $r_1 > 0$ et $r_2 > 0$, tel que :

$$\begin{aligned} 0 < |x-a| < min\{r_1, r_2\} \implies |\ell_2 - \ell_1| &= |(f(x) - \ell_2) - (f(x) - \ell_2)| \\ &\leq |f(x) - \ell_1| + |f(x) - \ell_2| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

Il vient finalement que

$$\forall \varepsilon > 0 : |\ell_2 - \ell_1| < \varepsilon \implies \ell_1 = \ell_2.$$

■

Exemple 3.9 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x$. Lorsque x se rapproche de 0 , $f(x)$ se rapproche de 0 (voir figure 1.1).
Montrons maintenant que $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$. On veut donc établir la proposition :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists r > 0,\ 0 < |x| < r \implies |f(x)| < \varepsilon \quad (*)$$

Il faut bien comprendre qu'on veut démontre, pour tout ε donné positif, l'existence de $r > 0$ ayant la propriété $(*)$.
Soit $\varepsilon > 0$. La condition $|f(x)| < \varepsilon$ s'écrit $2|x| < \varepsilon$ ou $|x| < \frac{\varepsilon}{2}$.
Il suffit donc de prendre $r = \frac{\varepsilon}{2}$. (Remarquer que n'importe quel r tel que $0 < r < \frac{\varepsilon}{2}$ convient aussi).

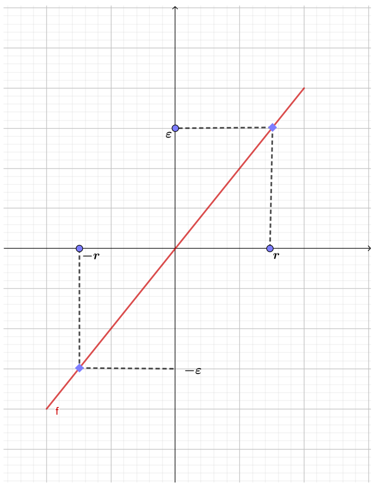


FIGURE 3.3

Exemple 3.10

Soit f la fonction réelle définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$ par $f(x) = \frac{x^2-4}{x+2}$.
Démontrons que $\lim\limits_{x \to -2} f(x) = -4$. On veut donc établir la proposition :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists r > 0,\ 0 < |x+2| < r \implies |f(x) + 4| < \varepsilon$$

Si $x \neq -2$, alors

$$f(x) = \frac{(x-2)(x+2)}{x+2} = x - 2$$

et

$$|f(x) + 4| = |x - 2 + 4| = |x + 2|$$

Ainsi, pour $\varepsilon > 0$, la condition $|f(x) + 4| < \varepsilon$ s'écrit $|x + 2| < \varepsilon$. Donc, il suffit de prendre $r = \varepsilon$.

3.2.3 Limite à droite, limite à gauche

Définition 3.10

Soit f une fonction définie sur un intervalle $]a, b[$, avec $a < b$.
On dit que f a pour limite ℓ à droite au point a si, et seulement si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $r > 0$ tel que :

$$x \in]a, a+r[\implies f(x) \in]\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon[$$

On note $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = \ell$. Ainsi,

$$\left(\lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = \ell \right) \iff (\ \forall \varepsilon > 0, \exists r > 0,\ a < x < a + r \implies |f(x) - \ell| < \varepsilon\ )$$

Définition 3.11

Soit f une fonction définie sur un intervalle $]a, b[$, avec $a < b$.
On dit que f a pour limite ℓ à gauche au point b si, et seulement si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $r > 0$ tel que :

$$x \in]b-r, b[\implies f(x) \in]\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon[$$

On note $\lim\limits_{\substack{x \to b \\ x<b}} f(x) = \ell$. *Ainsi,*

$$\left(\lim_{\substack{x \to b \\ x<b}} f(x) = \ell \right) \iff \left(\forall \varepsilon > 0, \exists r > 0,\ b - r < x < b \implies |f(x) - \ell| < \varepsilon \right)$$

Remarque Il est clair que

$$\left(\lim_{x \to a} f(x) = \ell \right) \iff \left(\lim_{\substack{x \to a \\ x>a}} f(x) = \lim_{\substack{x \to a \\ x<a}} f(x) = \ell \right)$$

Donc, si les limites à droite et à gauche de f au point a existent et sont différentes, alors la limite de f au point a n'existe pas.

$$\left(\lim_{\substack{x \to a \\ x>a}} f(x) = \ell_1 \neq \ell_2 = \lim_{\substack{x \to a \\ x<a}} f(x) \right) \implies \lim_{x \to a} f(x) \text{ n'existe pas}$$

Exemples.

1) Soit f la fonction définie sur $[1, +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x-1}$. Montrons que $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x>1}} f(x) = 0$.

On veut donc établir la proposition suivante :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists r > 0,\ 1 < x < 1 + r \implies |f(x)| < \varepsilon$$

Soit $\varepsilon > 0$. Comme $|\sqrt{x-1}| = \sqrt{x-1}$, alors la condition $|f(x)| < \varepsilon$ s'écrit $\sqrt{x-1} < \varepsilon$, soit $0 < x - 1 < \varepsilon^2$. Il suffit donc de prendre $r = \varepsilon^2$.

2) Rappelons que la fonction partie entière $x \in \mathbb{R} \mapsto E(x) \in \mathbb{Z}$ est définie sur $\mathbb{R}$ et elle vérifie

$$\forall x \in \mathbb{R} : \ E(x) \leq x < E(x) + 1$$

Soit $m \in \mathbb{Z}$ un entier fixé. Montrons que $\lim\limits_{\substack{x \to m \\ x<m}} E(x) = m - 1$. Il faut donc établir la proposition

$$\forall \varepsilon > 0, \exists r > 0,\ m - r < x < m \implies |E(x) - (m-1)| < \varepsilon$$

Pour conclure, il suffit de prendre pour tout $\varepsilon > 0$, $r = 1$. En effet, si $m - 1 < x < m$, alors $E(x) = m - 1$, par suite :

$$|E(x) - (m-1)| = 0 < \varepsilon$$

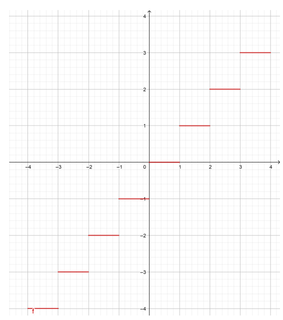


FIGURE 3.4

De la même manière, on peut montrer que $\lim\limits_{\substack{x \to m \\ x>m}} E(x) = m$ (on prend $r = 1$ pour tout $\varepsilon > 0$).

Il en résulte ainsi, que $\lim\limits_{x \to m} E(x)$ n'exite pas.

3.2.4 Opérations sur les limites

Théorème 3.2

Soient f et g deux fonctions réelles définies dans un voisinage de a sauf peut être en a. Si f et g ont pour limites ℓ et ℓ' respectivement au point a, alors

1. *La fonction $f+g$ a pour limite $\ell+\ell'$. Autrement dit :*
$$\lim_{x\to a}(f+g)(x) = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x) = \ell+\ell'.$$
2. *La fonction fg a pour limite $\ell\ell'$. Autrement dit :*
$$\lim_{x\to a}(fg)(x) = \left(\lim_{x\to a} f(x)\right)\left(\lim_{x\to a} g(x)\right) = \ell\ell'.$$
3. *Si $\ell' \neq 0$ alors la fonction $\frac{1}{g}$ a pour limite $\frac{1}{\ell'}$. Autrement dit :*
$$\lim_{x\to a}\left(\frac{1}{g}\right)(x) = \lim_{x\to a}\frac{1}{g(x)} = \frac{1}{\ell'}.$$
4. *Si $\ell' \neq 0$ alors la fonction $\frac{f}{g}$ a pour limite $\frac{\ell}{\ell'}$. Autrement dit :*
$$\lim_{x\to a}\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1}{\ell'}.$$

Remarque Cas particuliers :

1. Si λ est une constante réelle, alors $\lim_{x\to a}(\lambda f)(x) = \lambda\ell$.
2. Le théorème précédent est valable pour les limites à droite et les limites à gauche au point a.

3.3 Théorèmes sur les limites

3.3.1 Signe d'une fonction à partir de signe de sa limite

Théorème 3.3

Si f a une limite strictement positive (Resp : négative) au point a , alors il existe un voisinage épointé de a sur lequel f est positive (Resp : négative) .

Démonstration

Hypothèse : Supposons que $\lim_{x\to a} f(x) = \ell > 0$.

L'écriture $\lim_{x\to a} f(x) = \ell$ se traduit par
$$\forall\varepsilon>0,\exists r>0,\ 0<|x-a|<r \implies |f(x)-\ell|<\varepsilon$$
En particulier, soit $\varepsilon = \frac{\ell}{2}$, ($\varepsilon > 0$ car $\ell > 0$). Alors, il existe $r > 0$ tel que
$$\begin{aligned} 0<|x-a|<r \quad &\implies \quad |f(x)-\ell| < \varepsilon = \frac{\ell}{2} \\ &\implies \quad \ell - \frac{\ell}{2} < f(x) < \ell + \frac{\ell}{2} \\ &\implies \quad \frac{\ell}{2} < f(x) < \frac{3\ell}{2} \end{aligned}$$

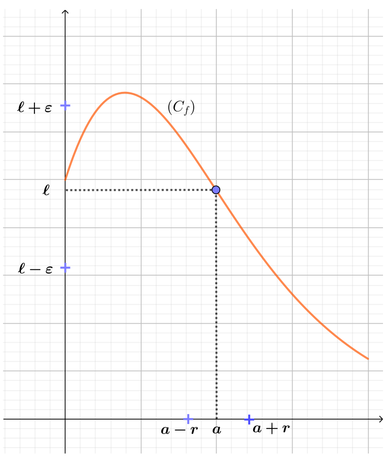


Figure 3.5

Conclusion : f est positive sur $]a-r, a+r[\setminus\{a\}$.

De la même manière, on montre que si $\ell < 0$, alors pour le choix $\varepsilon = -\frac{\ell}{2}$, il existe $r > 0$ tel que
$$0<|x-a|<r \implies \frac{3\ell}{2} < f(x) < \frac{\ell}{2} < 0$$
■

3.3.2 Signe de la limite selon le signe de la fonction

Théorème 3.4

Soit f une fonction définie et positive (Resp : négative) ou nulle dans un voisinage épointé de a. Si f a une limite ℓ au point a, alors ℓ est positive (Resp : négative) ou nulle. Autrement dit

$$\left.\begin{cases} f(x) \geq 0\,, & (\,Resp:\; f(x) \leq 0\,)\;\; \forall x \in V^*(a) \\ et \quad \lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell \end{cases}\right\} \Longrightarrow \ell \geq 0 \quad (\,Resp:\; \ell \leq 0\,)$$

Démonstration Hypothèse : Supposons qu'il existe un voisinage épointé $V^*(a)$ de a sur lequel $f \geq 0$ (Resp : $f \leq 0$) et $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$.
On fait un raisonnement par l'absurde. Supposons que $\ell < 0$ (Resp : $\ell > 0$) . Alors, d'après le théorème 3.3, il existe un voisinage épointé de a , $V^*(a)$ sur lequel $f < 0$ (Resp : $f > 0$) ce qui est en contradiction avec $f \geq 0$ (Resp : $f \leq 0$).
Conclusion : $\ell \geq 0$ (Resp : $\ell \leq 0$). ■

Remarque S'il existe un voisinage épointé de a sur lequel $f > 0$ et $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$, ℓ peut être nul.
Par exemple si $f(x) = x^2$, alors $f > 0$ sur tout voisinage épointé de 0, mais $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$.

Corollaire 3.1

Si $f \leq g$ sur un voisinage épointé de a et si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \ell'$, alors $\ell \leq \ell'$.

Démonstration Soit $h = g - f$. On sait d'après le théorème 3.2 que $\lim\limits_{x\to a} h(x) = \ell' - \ell$. De plus, comme h est positive sur un voisinage épointé de a il vient de théorème 3.3 que $\ell' - \ell \geq 0$, soit $\ell \leq \ell'$. ■

3.3.3 Théorème des gendarmes

Théorème 3.5

Si $f \leq g \leq h$ sur un voisinage épointé de a et si f et h ont la même limite ℓ au point a, alors g a pour limite ℓ au point a.

Démonstration Hypothèse : Il existe un voisinage épointé $V^*(a)$ de point a sur lequel $f(x) \leq g(x) \leq f(x)$ et $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} h(x) = \ell$.
L'hypothèse $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} h(x) = \ell$ se traduit par :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists\, r_1 > 0,\; 0 < |x-a| < r_1 \implies |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

et :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists\, r_2 > 0,\; 0 < |x-a| < r_2 \implies |h(x) - \ell| < \varepsilon$$

Soit $r = \min\{r_1, r_2\}$. Alors

$$0 < |x-a| < r \implies (0 < |x-a| < r_1 \;\text{ et }\; 0 < |x-a| < r_2) \implies (0 < |f(x) - \ell| < \varepsilon \;\text{ et }\; 0 < |h(x) - \ell| < \ell)$$

D'autre part,
$|f(x) - \ell| < \varepsilon$ s'écrit $\ell - \varepsilon < f(x) < \ell + \varepsilon$ et de même, $|h(x) - \ell| < \varepsilon$ s'écrit $\ell - \varepsilon < h(x) < \ell + \varepsilon$.
Comme par hypothèse $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$, en on déduit :

$$\ell - \varepsilon < f(x) \leq g(x) \leq h(x) < \ell + \varepsilon \implies \ell - \varepsilon < g(x) < \ell + \varepsilon$$

d'où

$$\forall \varepsilon > 0, \exists\, r > 0,\; 0 < |x-a| < r \implies |g(x) - \ell| < \varepsilon$$

Conclusion : $\lim\limits_{x\to a} g(x)=\ell$. ■

Exemple 3.11 En admettant que pour tout $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$ on a : $0\le\sin x\le x\le\tan x$. Montrer alors que $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$
.

Réponse : Pour tout $x\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ on a $\sin x>0$. Donc, de l'encadrement $\sin x\le x\le\tan x$, on déduit , en divisant par $\sin x$:

$$1\le\frac{x}{\sin x}\le\frac{1}{\cos x}\,,\quad \forall x\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$$

Autrement, dit :

$$\cos x\le\frac{\sin x}{x}\le 1\,,\quad \forall x\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$$

D'après le théorème des gendarmes :

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{\sin x}{x}=1\,,\ \text{ car }\lim_{x\to 0}\cos x=1$$

Comme la fonction $x\mapsto\frac{\sin x}{x}$ est paire, il en résulte que :

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\frac{\sin x}{x}=1\,.$$

Par conséquent, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$.

3.3.4 Lien avec les suites réelles

Théorème 3.6

Soit f une fonction réelle définie sur un voisinage de a sauf peut être en a. Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. *La limite de f au point a est égale à ℓ. ($\ell\in\mathbb{R}$ ou $\ell=\infty$)*
2. *Pour toute suite réelle(u_n) convergente vers a, la suite image $(f(u_n))$ converge vers ℓ.*

Corollaire 3.2

Soit f une fonction réelle définie sur un voisinage de a sauf peut être en a. S'il existe deux suites réelles (u_n) et (v_n) convergent vers a et les deux suites images $(f(u_n))$ et $(f(v_n))$ convergent vers deux limites différentes, alors f n'admet aucune limite au point a.

Exemple 3.12 Considérons la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x)=\sin\left(\frac{1}{x}\right)$. Montrer que f n'a pas de limite au point 0.

Réponse : Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles définies par leurs termes généraux :

$$u_n=\frac{1}{\pi n}\,,\quad v_n=\frac{1}{\pi/2+2\pi n}$$

Il est clair que $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\lim\limits_{n\to+\infty}v_n=0$, mais

$$\lim_{n\to+\infty}f(u_n)=\lim_{n\to+\infty}\sin(\pi n)=0\ ,\quad \lim_{n\to+\infty}f(v_n)=\lim_{n\to+\infty}\sin(\pi/2+2\pi n)=1$$

Donc, $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ n'existe pas.

3.4 Fonctions continues

3.4.1 Fonctions continues en un point , Continuité sur un intervalle ouvert

Définition 3.12

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle ouvert $I \subset \mathbb{R}$ et soit $x_0 \in I$.

1. *On dit que la fonction f est continue en x_0 si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$. Autrement dit si :*
$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \ \forall x \in I \ (|x - x_0| < \eta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon)$$
2. *On dit que x_0 est un point de discontinuité pour f si f n'est pas continue en x_0.*
3. *On dit que f est continue sur I si f est continue en x_0 pour tout $x_0 \in I$.*

Exemple 3.13 .

1. Toute fonction constante sur un intervalle ouvert I est continue sur I.
2. La fonction affine $x \mapsto ax + b$ où $a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{R}$ est continue sur $\mathbb{R}$.
3. On déjà vu que la fonction partie entière $x \mapsto E(x)$ n'admet aucune limite en tout $m \in \mathbb{Z}$. Donc les entiers sont des point de discontinuité pour la fonction partie entière. De plus, sur tout intervalle $]m, m+1[$ où $m \in \mathbb{Z}$ la fonction $x \mapsto E(x)$ est constante, donc, elle est continue sur tout intervalle de type $]m, m+1[$ avec $m \in \mathbb{Z}$.

3.4.2 Continuité à droite, à gauche en un point , Continuité sur un intervalle quelconque

Définition 3.13

Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle $[a, b]$ ($a < b$).

1. *On dit que la fonction f est continue à droite en a si $\lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = f(a)$. Autrement dit si :*
$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \ \forall x \in [a, b] \ (a \leq x < a + \eta \implies |f(x) - f(a)| < \varepsilon)$$
2. *On dit que la fonction f est continue à gauche en b si $\lim\limits_{\substack{x \to b \\ x < b}} f(x) = f(b)$. Autrement dit si :*
$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \ \forall x \in [a, b] \ (b - \eta < x \leq b \implies |f(x) - f(b)| < \varepsilon)$$

Remarques 5 .

1. *Il clair qu'une fonction f est continue en un point x_0 si et seulement elle est continue à droite et à gauche en ce point.*
2. *Si l'une des limites à droite ou à gauche n'existe pas ou sont existes en x_0 et sont différentes, alors x_0 est un point de discontinuité pour f.*

Définition 3.14

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle quelconque $I \subset \mathbb{R}$.

1. *Si I est ouvert, on dit que f est continue sur I si elle est continue en tout point de I.*
2. *Si $I = [a, b]$ où $a < b$, on dit que f est continue sur I si f est continue sur l'intervalle ouvert $]a, b[$, et elle est continue à droite en a et continue à gauche en b.*
3. *Si $I = [a, b[$ où $a < b$, on dit que f est continue sur I si f est continue sur l'intervalle ouvert $]a, b[$, et elle est continue à droite en a.*
4. *Si $I =]a, b]$ où $a < b$, on dit que f est continue sur I si f est continue sur l'intervalle ouvert $]a, b[$, et elle est continue à gauche en b.*
5. *Si $I = [a, +\infty[$, on dit que f est continue sur I si f est continue sur l'intervalle ouvert $]a, +\infty[$, et*

elle est continue à droite en a.

6. *Si $I =]-\infty, b]$, on dit que f est continue sur I si f est continue sur l'intervalle ouvert $]a, b[$, et elle est continue à gauche en b.*

Remarque La continuité d'une fonction $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ sur un intervalle quelconque I de $\mathbb{R}$ se traduit par :

$$\forall x_0 \in I, \forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 : \forall x \in I \left(|x - x_0| < \eta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon\right)$$

Exemple 3.14

1. La fonction $x \mapsto |x|$ est continue sur $\mathbb{R}$
2. Les fonctions $x \mapsto \sin(x)$ et $x \mapsto \cos(x)$ sont continues sur $\mathbb{R}$.
3. la fonction $x \mapsto E(x)$ est continue sur tout intervalle de type $[m, m+1[$ avec $m \in \mathbb{Z}$ (continue sur l'intervalle $]m, m+1[$ et continue à droite en $m \in \mathbb{Z}$) .

Exercice :

1. Montrer que pour tout nombres a et b positifs, on a $\sqrt{a+b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b}$.
2. Déduire que pour tout nombres x et y positifs, on a $|\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leq \sqrt{|x-y|}$.
3. Montrer en utilisant la définition de la limite que la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est continue sur $[0, +\infty[$.

3.5 Opérations sur les fonctions continues

3.5.1 Opérations algébriques sur les fonctions continues

Le théorème sur les opérations algébriques (somme , produit , quotient) sur les limites des fonctions réelles permet de prouver le résultat suivant

Théorème 3.7

1. *La somme de deux fonctions continues en un point x_0 (resp : continues sur un intervalle I) est une fonction continue en x_0 (resp : continues sur l'intervalle I).*
2. *Le produit de deux fonctions continues en un point x_0 (resp : continues sur un intervalle I) est une fonction continue en x_0 (resp : continues sur l'intervalle I).*
3. *Le quotient de deux fonctions continues en un point x_0 (resp : continues sur un intervalle I) sachant que la fonction en dénominateur ne s'annule pas en x_0 (resp : ne s'annule pas sur l'intervalle I) est une fonction continue en x_0 (resp : continues sur l'intervalle I).*

Remarque On sait bien que la fonction $x \mapsto x$ est continue sur $\mathbb{R}$. Donc, d'après le théorème précédent, le produit de cette fonction par elle même est aussi continue sur $\mathbb{R}$. Il vient, ainsi que la fonction $x \mapsto x^2$ est continue sur $\mathbb{R}$. Par récurrence, on obtient que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $x \mapsto x^n$ est continue sur $\mathbb{R}$. Il en résulte que pour tout $a \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $x \mapsto ax^n$. En utilisant maintenant la continuité de la somme de fonctions de formes $x \mapsto a x^n$ on abouti à la continuité des polynômes sur $\mathbb{R}$. Finalement, il est clair d'après ce qui précède que les fonction rationnelles (quotient de deux polynômes) sont continues sur leurs domaines de définition.

3.5.2 Composée des fonctions continues

Théorème 3.8

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur un intervalle I. Soit $g : J \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction réelle. Si $f(I) \subset J$ et si g est continue sur $f(I)$ alors, la fonction composée $g \circ f$ est continue sur I.

Exemple 3.15 .

1. Les deux fonctions $f : x \mapsto xe^x$ et $g : x \mapsto \sin x$ sont définies et continues sur $\mathbb{R}$, alors les fonctions composées $f \circ g : x \mapsto \sin x\, e^{\sin x}$ et $g \circ f : x \mapsto \sin(xe^x)$ sont continues sur $\mathbb{R}$.
2. Considérons les fonctions $f : I = [1, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : J = [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ définies par :
$$f(x) = \frac{x-1}{x+1}, \quad g(x) = \sqrt{x}$$
Il est facile de montrer que $f(I) \subset J$. D'autre part, comme f et g sont continues sur I et J respectivement, il vient que $g \circ f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$ est continue sur I.

3.6 Théorème sur les fonctions continues

3.6.1 Caractérisation séquentielle des fonctions continues

Proposition 3.2

Soit f une fonction définie au voisinage V d'un nombre réel x_0. Les propriétés suivantes sont équivalentes

1. *f est continue en x_0.*
2. *Pour toute suite réelle (u_n) d'élément de V on a*
$$\lim_{n\to+\infty} u_n = x_0 \Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} f(u_n) = f(x_0)$$

La preuve de cette proposition découle de la caractérisation séquentielle de la limite. Un corollaire immédiat de la proposition précédente est le suivant,

Corollaire 3.3

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle I. Les propriétés suivantes sont équivalentes

1. *f est continue sur I.*
2. *Pour toute $x_0 \in I$ et pour tout suite réelle (u_n) d'élément de I on a*
$$\lim_{n\to+\infty} u_n = x_0 \Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} f(u_n) = f(x_0)$$

Remarque Il est clair que s'il existe $x_0 \in I$ et une suite $(u_n)_{n\geq 0}$ d'élément de I tel que $u_n \to x_0$ et la suite $(f(u_n))_{n\geq 0}$ est divergente, ou bien $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) \neq f(x_0)$ alors f est discontinue en x_0.
Exemple : Considérons la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(x) = \begin{cases} 1 & si \quad x \in \mathbb{Q} \\ 0 & si \quad x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$
Montrer que f est discontinue sur $\mathbb{R}$.
Réponse : Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ quelconque. On distingue deux cas :
Premier cas : $x_0 \in \mathbb{Q}$. Considérons la suite réelle $(u_n)_{n\geq 1}$ tel que $u_n = x_0 + \frac{\sqrt{2}}{n}$. Il est clair que $u_n \to x_0$ quand $n \to +\infty$, mais comme $u_n \notin \mathbb{Q}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il vient que $f(u_n) = 0 \to 0 \neq 1 = f(x_0)$. Donc f est discontinue en tout $x_0 \in \mathbb{Q}$.
Deuxième cas : $x_0 \notin \mathbb{Q}$. Considérons la suite réelle $(v_n)_{n\geq 1}$ tel que $u_n = 10^{-n}E(10^n x_0)$. Il est clair que pour

tout $n \in \mathbb{N}$:

$$10^n x_0 - 1 < E(10^n x_0) \le 10^n x_0 \implies x_0 - 10^{-n} < v_n \le x_0$$

Ainsi, $v_n \to x_0$ quand $n \to +\infty$, mais comme $v_n \in \mathbb{Q}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il vient que $f(v_n) = 1 \to 1 \neq 0 = f(x_0)$.
Donc f est discontinue en tout $x_0 \notin \mathbb{Q}$.
Bilan : La fonction f est discontinue en tout nombre réel. On dit que f est partout discontinue.

3.6.2 Fonctions continues sur un segment

Théorème 3.9

Toute fonction $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue sur le segment $[a,b]$ est bornée et atteint ses bornes ; i.e. il existe $x_0 \in [a,b]$ tel que $f(x_0) = \inf\limits_{x\in[a,b]} f(x)$ et il existe $x_1 \in [a,b]$ tel que $f(x_1) = \sup\limits_{x\in[a,b]} f(x)$.

Remarque Les hypothèses du théorème 3.9 sont indispensable. Si on considère au lieu de l'intervalle $[a,b]$, un autre intervalle non fermé ou non borné ou bien si f n'est pas continue, alors le théorème 3.9 peut tomber en défaut. Voici, quelques exemples :

Exemple 1 **:** (Intervalle bornée non fermé et fonction continue)
Soit $f :]0,1] \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{1}{x}$. Il est clair que f est continue sur $]0,1]$ mais f n'est pas majorée (donc n'est pas bornée) sur $]0,1]$. En effet, on a :

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = +\infty \iff \forall A > 0,\ \exists \eta > 0,\ 0 < x < \eta \implies f(x) > A. \quad (*)$$

Si l'on suppose que f est majorée sur $]0,1]$ alors il existe un réel positif M (puisque la fonction f étant positive) , tel que $f(x) \le M$ pour tout $x \in]0,1]$. Maintenant, si l'on prend $A = M$ dans la relation $(*)$, on en déduit qu'il existe $0 < \eta < 1$ tel que :

$$0 < x < \eta < 1 \implies f(x) > M \text{ ce qui contredit le fait que } M \text{ est un majorant de } f$$

Exemple 2 **:** (Intervalle non bornée et fonction continue)
Il est clair que la fonction $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$ est continue, mais elle n'est pas bornée.
Exemple 3 **:** (Intervalle bornée et fermé et fonction discontinue)
On considère la fonction $f : [0,2] \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 2x & si \quad x \in [0,1] \\ \frac{1}{x-1} & si \quad x \in]1,2] \end{cases}$$

La fonction f est discontinue en 1 puisque $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = +\infty$. Il clair, alors que f n'est pas bornée sur $[0,2]$.

3.6.3 Théorème des valeurs intermédiaires

Théorème 3.10 (des valeurs intermédiaires TVI)

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Soient a , b deux nombres dans I tels que $a < b$.
Tout élément compris entre $f(a)$ et $f(b)$ est l'image d'un élément de $[a,b]$. Autrement dit :

$$\forall k \in [\min\{f(a), f(b)\}, \max\{f(a), f(b)\}] , \exists\, c \in [a,b] \ : \ k = f(c)$$

Corollaire 3.4

Soit f une fonction continue sur un segment $[a,b]$. Si $f(a).f(b) < 0$ alors, il existe $c \in]a,b[$ tels que $f(c) = 0$.

Démonstration Il suffit de prendre $k = 0$ dans le théorème 3.10

■

Remarque Le corollaire 3.4 est très souvent utilisé en analyse numérique pour localiser les solutions d'une équation $f(x) = 0$ où f est une fonction continue sur un certain intervalle.

Proposition 3.3

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur l'intervalle I. L'image $f(I)$ de I par la fonction f est un intervalle.

Démonstration Si $f(I)$ se réduit en u point (i.e. $f(I) = \{y\}$) alors $f(I)$ est un intervalle $[y, y]$.
Supposons que $f(I)$ contient au moins deux éléments. Soient y_1 et y_2 dans $f(I)$ tels que $y_1 < y_2$. Donc, il existe $x_1, x_2 \in I$ tels que $y_1 = f(x_1)$ et $y_2 = f(x_2)$. Si $w \in [y_1, y_2] = [f(x_1), f(x_2)]$ alors d'après le TVI il existe $z \in [x_1, x_2]$ ou $[x_2, x_1]$ tel que $w = f(z)$. Ainsi $w \in f(I)$, et alors on a

$$\forall y_1, y_2 \in f(I), y_1 < y_2 \implies [y_1, y_2] \subset f(I)$$

ceci signifie alors, que $f(I)$ est un intervalle. ■

Corollaire 3.5

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On pose : $m = \inf\limits_{x\in[a,b]} f(x)$ et $M = \sup\limits_{x\in[a,b]} f(x)$. Alors :

1. $f([a, b]) = [m, M]$.
2. *Pour tout $k \in [m, M]$ il existe $c \in [a, b]$ tel que $k = f(c)$.*

3.7 Fonctions continues et strictement monotones

3.7.1 Image d'un intervalle par une fonction continue et strictement monotone

On note la limite à droite (resp : à gauche) en un point a d'une fonction f par : $f(a^+)$ (resp : $f(a^-)$). On note également pour alléger l'écriture des intervalles, $f(\pm\infty) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)$.

Proposition 3.4

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction réelle continue et strictement monotone sur l'intervalle I.

1. *Si $I = [a, b]$ et f est strictement croissante, alors $f(I) = [f(a), f(b)]$.*
2. *Si $I =]a, b[$ et f est strictement croissante, alors $f(I) =]f(a^+), f(b^-)[$.*
3. *Si $I =]a, b]$ et f est strictement croissante, alors $f(I) =]f(a^+), f(b)]$.*
4. *Si $I = [a, b[$ et f est strictement croissante, alors $f(I) = [f(a), f(b^-)[$.*
5. *Si $I = [a, +\infty[$ et f est strictement croissante, alors $f(I) = [f(a), f(+\infty)[$.*
6. *Si $I =]a, +\infty[$ et f est strictement croissante, alors $f(I) =]f(a^+), f(+\infty)[$.*
7. *Si $I =]-\infty, a[$ et f est strictement croissante, alors $f(I) =]f(-\infty), f(a^-)[$.*
8. *Si $I =]-\infty, a]$ et f est strictement croissante, alors $f(I) =]f(-\infty), f(a)]$.*
9. *Si $I =]-\infty, +\infty[$ et f est strictement croissante, alors $f(I) =]f(-\infty), f(+\infty)[$.*

Si f est strictement décroissante sur I, alors $f(I)$ prend les formes précédentes en échangeant les extrémités des intervalles images précédents.

3.7.2 Fonction réciproque d'une fonction continue et strictement monotone

Définition 3.15 (Rappel d'algèbre)

Soit $f : A \longrightarrow B$ une application d'un ensemble non vide A vers un autre ensemble B. On dit que :

1. *f est injective si $\forall (x_1, x_2) \in A \times A,\ x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2)$.*
2. *f est surjective si $\forall y \in B, \exists x \in A\ : f(x) = y$.*
3. *f est bijective si elle est injective et surjective.*

Remarque Si $f : A \longrightarrow B$ est une application surjective, alors cela signifie que pour tout $y \in B$, l'équation $f(x) = y$ d'inconnue x admet au moins une solution dans A.

D'autre part, si f est injective, alors la solution de l'équation $f(x) = y$ si elle existe, est unique. En effet si x_1 et x_2 sont deux solutions de c pour un y fixé dans B, alors :

$$f(x_1) = y = f(x_2) \implies x_1 = x_2$$

Cela montre l'unicité de la solution si elle existe de l'équation $f(x) = y$ dans le cas ou f est injective .

Donc, si $f : A \longrightarrow B$ est une application bijective, alors toute équation $f(x) = y$ d'inconnue x, pour tout $y \in B$ admet une solution unique x dépend de y.

L'application qui fait associer chaque $y \in B$ la solution unique de l'équation $f(x) = y$ est appelée application réciproque de f et elle est notée par f^{-1}. Ainsi, si $f : A \longrightarrow B$ est bijective alors :

$$\begin{cases} f(x) = y \\ x \in A \ \ et \ \ y \in B \end{cases} \iff \begin{cases} x = f^{-1}(y) \\ x \in A \ \ et \ \ y \in B \end{cases}$$

Il est clair que l'application $f^{-1} : B \longrightarrow A$ est aussi bijective, et on a :

1. Pour tout $x \in A : f^{-1}(f(x)) = x$.
2. Pour tout $y \in B : f(f^{-1}(y)) = y$.

Remarque Si A et B sont deux parties réelles et $f : A \longrightarrow B$ est bijective, alors les courbes de f et de sa fonction réciproque f^{-1} dans un repère, sont symétriques par rapport la droite d'équation $y = x$ (la première bissectrice) .

Théorème 3.11 (Théorème de la fonction réciproque continue)

Soit $f : I \longrightarrow J = f(I)$ une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I et a valeurs dans l'intervalle $J = f(I)$. Alors $f : I \longrightarrow J$ est bijective et sa fonction réciproque $f^{-1} : J \longrightarrow I$ est continue et strictement monotone sur J et de même sens de variation de f.

Exemples :

1. La fonction $exp : x \in \mathbb{R} \mapsto e^x \in]0, +\infty[= exp(\mathbb{R})$ est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$, alors elle est bijective et sa fonction réciproque $\ln :]0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ est aussi continue et strictement croissante sur $]0, +\infty[$. On a : $exp(\ln x) = x \,\forall x > 0$ et $\ln(e^x) = x \,\forall x \in \mathbb{R}$.
2. La fonction $f : x \in \mathbb{R}^+ \mapsto x^2 \in \mathbb{R}^+ = f(\mathbb{R}^+)$ est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$, alors elle est bijective et sa fonction réciproque $g : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+ ,\ x \mapsto \sqrt{x}$ est aussi continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$. On a : $\sqrt{x^2} = x,\ \forall x \geq 0$ et $(\sqrt{x})^2 = x,\ \forall x \geq 0$.

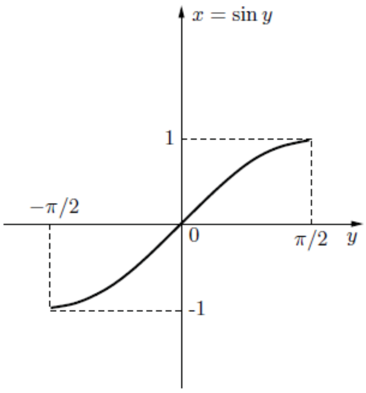
3.7.3 Quelques applications du théorème de la fonction réciproque continue

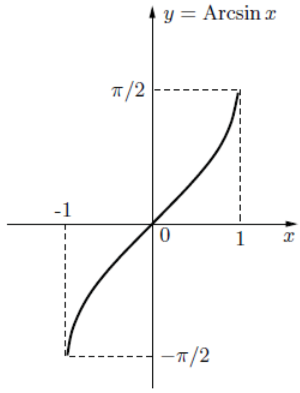
1 **Fonctions trigonométriques réciproques** :

Proposition 3.5 (Fonction $x \mapsto \sin x$ et sa fonction réciproque $x \mapsto Arcsin(x)$)

La fonction $\sin : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1,1]$ *est continue et strictement croissante . Sa fonction réciproque notée* $Arcsin : [-1,1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ *est continue et strictement croissante. On a :*

$$\begin{cases} Arsin(x) = y \\ x \in [-1,1] \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x = \sin(y) \\ y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \end{cases}$$





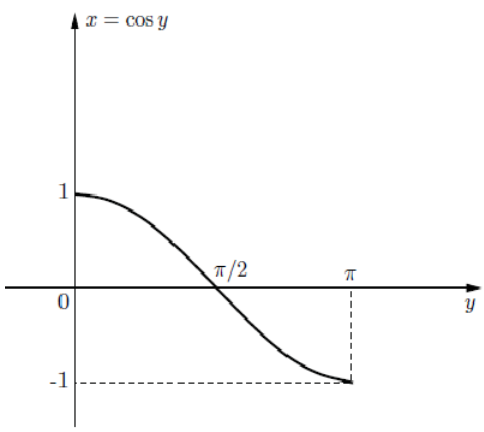
Remarques 6 1) *La fonctions* $Arcsin : [-1,1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ *est impaire ; i.e. :* $Arcsin(-x) = -Arcsin(x)$, $\forall x \in [-1,1]$.
2) *Quelques valeurs usuelles de la fonction* $x \mapsto Arcsin(x)$ *:*

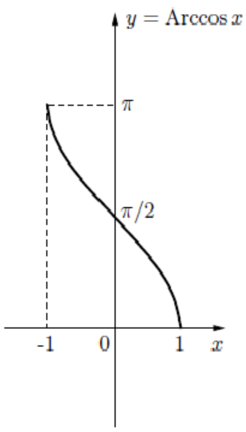
x	0	$\pm\frac{1}{2}$	$\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$	± 1
$Arcsin(x)$	0	$\pm\frac{\pi}{6}$	$\pm\frac{\pi}{4}$	$\pm\frac{\pi}{3}$	$\pm\frac{\pi}{2}$

Proposition 3.6 (Fonction $x \mapsto \cos x$ et sa fonction réciproque $x \mapsto Arccos(x)$)

La fonction $\cos : [0,\pi] \to [-1,1]$ *est continue et strictement décroissante . Sa fonction réciproque notée* $Arccos : [-1,1] \to [0,\pi]$ *est continue et strictement décroissante. On a :*

$$\begin{cases} Arccos(x) = y \\ x \in [-1,1] \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x = \cos(y) \\ y \in [0,\pi] \end{cases}$$



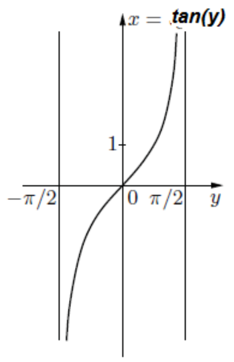


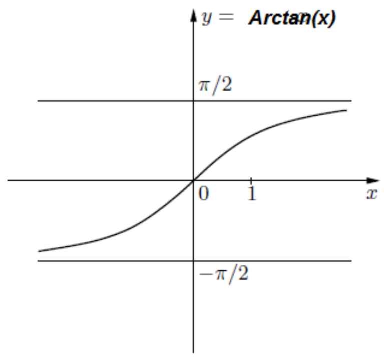
Remarques 7 1) *La fonctions* $Arccos : [-1,1] \longrightarrow [0,\pi]$ *n'étant ni paire ni impaire. On démontre plus tard que :*
$$Arccos(-x) = Arcsin(x) + \frac{\pi}{2} = \pi - Arccos(x)\,,\ \forall x \in [-1,1].$$
. 2) *Quelques valeurs usuelles de la fonction* $x \mapsto Arcsin(x)$ *:*

x	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$Arccos(x)$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	1

Proposition 3.7 (Fonction $x \mapsto \tan x$ et sa fonction réciproque $x \mapsto Arctan(x)$)

La fonction $\tan : \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\longrightarrow \mathbb{R}$ *est continue et strictement croissante . Sa fonction réciproque notée* $Arctan : \mathbb{R} \longrightarrow \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ *est continue et strictement croissante. On a :*
$$\begin{cases} Arctan(x) = y \\ x \in \mathbb{R} \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x = \tan(y) \\ y \in \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\end{cases}$$





Remarques 8 1) *La fonctions* $Arctan : \mathbb{R} \longrightarrow \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ *est impaire ; i.e. :* $Arctan(-x) = -Arctan(x)\,,\ \forall x \in \mathbb{R}$.
2) *Quelques valeurs usuelles de la fonction* $x \mapsto Arctan(x)$ *:*

x	0	$\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$	± 1	$\pm\sqrt{3}$
$Arctan(x)$	0	$\pm\frac{\pi}{6}$	$\pm\frac{\pi}{4}$	$\pm\frac{\pi}{3}$

Proposition 3.8

(Quelques propriétés)

1. *Pour tout* $x \in [-1,1]$ *on a :* $Arcsin(x) + Arccos(x) = \frac{\pi}{2}$.
2. *Pour tout* $x \in [-1,1]$ *on a :* $Arccos(-x) = Arcsin(x) + \frac{\pi}{2} = \pi - Arccos(x)$.
3. *Pour tout* $x \in \mathbb{R}^*$ *on a :*
$$Arctan(x) + Arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & si\ \ x > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & si\ \ x < 0 \end{cases}$$

2 Fonctions hyperboliques et leurs fonctions réciproques :

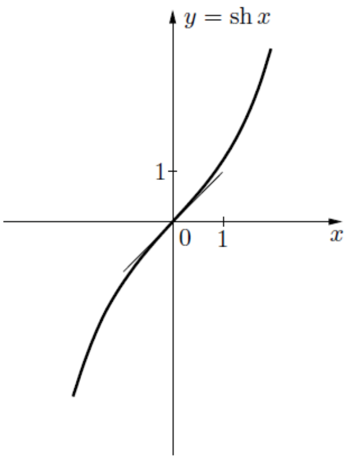
Définition 3.16

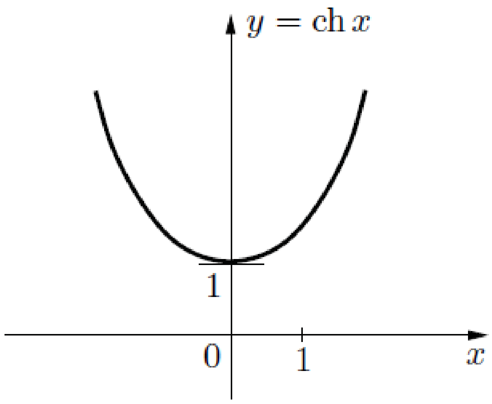
1) *La fonction notée sh définie sur* $\mathbb{R}$ *par :* $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ *est appelée fonction* **sinus hyperbolique**.
2) *La fonction notée ch définie sur* $\mathbb{R}$ *par :* $ch(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ *est appelée fonction* **cosinus hyperbolique**.

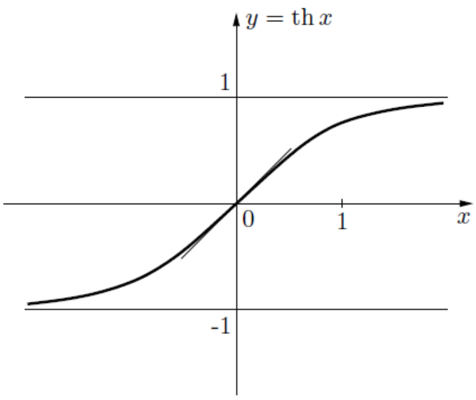
3) *La fonction notée* th *définie sur* $\mathbb{R}$ *par :* $th(x) = \frac{sh(x)}{ch(x)}$ *est appelée fonction* **tangente hyperbolique**. *On a : pour tout* $x \in \mathbb{R} : th(x) = \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$.

Proposition 3.9

1. *La fonction* $sh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, *est impaire, continue et strictement croissante.*
2. *La fonction* $ch : \mathbb{R} \to]0,+\infty[$, *est paire, continue .*
3. *La fonction* $th : \mathbb{R} \to]-1,1[$, *est impaire, continue et strictement croissante.*





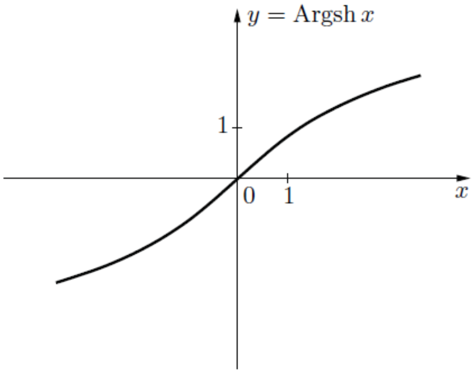


Proposition 3.10

1. *Pour tout* $x \in \mathbb{R}$: $ch^2(x) - sh^2(x) = 1$.
2. *Pour tout* $x \in \mathbb{R}$: $\frac{1}{ch^2(x)} = 1 - th^2(x)$.

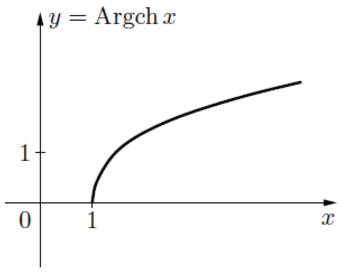
Proposition 3.11 (Fonction réciproque de sh)

La fonction $sh : \mathbb{R} \to \mathbb{R} = sh(\mathbb{R})$ *est continue et strictement croissante et bijective. Sa fonction réciproque est appelée Argument sinus hyperbolique, notée par* $Argsh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *est continue et strictement croissante et impaire.*



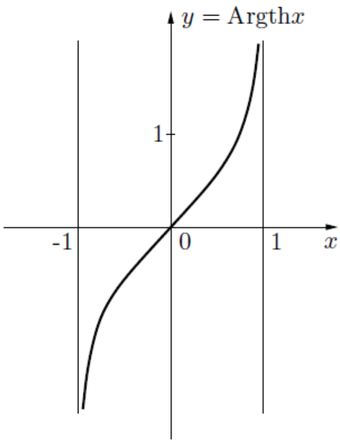
Proposition 3.12 (Fonction réciproque de ch)

La fonction $ch : [0,+\infty[\to [1,+\infty[= ch([0,+\infty[)$ *est continue et strictement croissante et bijective. Sa fonction réciproque est appelée Argument cosinus hyperbolique, notée par* $Argch : [1,+\infty[\to [0,+\infty[$ *est continue et strictement croissante.*



Proposition 3.13 (Fonction réciproque de th)

La fonction $th : \mathbb{R} \to]-1,1[= th(\mathbb{R})$ *est continue et strictement croissante et bijective. Sa fonction réciproque est appelée Argument tangente hyperbolique, notée par* $Argth :]-1,1[\to \mathbb{R}$ *est continue et strictement croissante et impaire.*



Proposition 3.14

(Représentation logarithmique des fonctions hyperboliques réciproques)

1. *Pour tout* $x \in \mathbb{R}$: $Argsh(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$.
2. *Pour tout* $x \in [1, +\infty[$: $Argch(x) = \ln(x + \sqrt{x^2-1})$.
3. *Pour tout* $x \in]-1, 1[$: $Argth(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$.

Exercices

Exercice 43 *En utilisant la définition de la limite, montrer que :*

$$(1)\ \lim_{x\to 0} x\cos\left(\frac{1}{x}\right)=0,\quad (2)\ \lim_{x\to 2}\frac{1}{(x-2)^2}=+\infty,\quad (3)\ \lim_{x\to-\infty}\ln(|x|+2)=+\infty.$$

Exercice 44 *Calculer les limites suivantes :*

$$(1)\ \lim_{x\to+\infty} E\left(\frac{1}{x}\right)e^x \qquad (2)\ \lim_{x\to-\infty}\frac{E(3x)}{E(5x)} \qquad (3)\ \lim_{x\to+\infty}\tan\frac{(x+\pi)(1-\pi x)}{(1-2x)^2}$$

$$(4)\ \lim_{x\to 0}(1+2x)^{1/x} \qquad (5)\ \lim_{x\to 0}\frac{2}{1+e^{\frac{1}{x}}} \qquad (6)\ \lim_{x\to 0}\frac{x}{a}E\left(\frac{b}{x}\right)\quad avec\ a,b>0$$

$$(7)\ \lim_{x\to 0}x^n\cos\left(\frac{1}{x}\right),\ n\in\mathbb{N} \qquad (8)\ \lim_{x\to+\infty}\frac{a^x-3^x}{b^x-3^x},\quad a>0,\ b>3.$$

Exercice 45 *Etudier la continuité des fonctions suivantes :*

$$f(x)=\begin{cases} xE\left(\frac{1}{x}\right) & si\ x\neq 0\\ 1\quad si\ x=0\end{cases} \qquad g(x)=\begin{cases}0 & si\ x\in\mathbb{Q}\\ x & si\ x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\end{cases}$$

Exercice 46 *Soit la fonction f définie par*

$$f(x)=\begin{cases}1 & si\ \ x\in\mathbb{Q}\\ \\ -1 & si\ \ x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\end{cases}$$

1. *Montrer que f n'est continue en aucun point.*
2. *Montrer que $|f|$ est continue en tout point.*
3. *Montrer que $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ x\mapsto xf(x)$ est continue uniquement en zéro.*

Exercice 47 *Considérons la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :*

$$f(x)=E(x)+\sqrt{x-E(x)}$$

1. *Montrer que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.*
2. *Étudier la continuité de f sur $\mathbb{Z}$ puis sur $\mathbb{R}$.*
3. *Montrer que pour tout $x\in\mathbb{R}$: $0\le f(x)-x\le\frac{1}{4}$ et déduire $\lim_{x\to+\infty}f(x)$ et $\lim_{x\to-\infty}f(x)$.*
4. *Vérifier que pour tout $x\in\mathbb{R}$: $f(x+1)=f(x)+1$.*
5. *En utilisant la question 3, tracer le graphique de f dans l'intervalle $[-3;3]$.*
6. *Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :*

$$g(x)=E(x)+(x-E(x))^2$$

   (a). *Montrer que pour tout $x\in\mathbb{R}$: $f\circ g(x)=g\circ f(x)=x$.*

   (b). *Déduire le sens de variation de g et sa continuité sur $\mathbb{R}$.*

Exercice 48 *Soit* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *une fonction continue telle que* $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

1. *Montrer qu'il existe* $c \in \mathbb{R}$ *tel que* $f(c) = 0$.
2. *Montrer que tout polynôme à coefficients réels de degré impair admet au moins une racine réelle.*

Exercice 49 *Soit* $f : [a,b] \to [a,b]$. *Montrer que si* f *est continue ou croissante il existe* $c \in [a,b]$ *tel que* $f(c) = c$.

Exercice 50 *Montrer que :*

1. *Si* f *est une fonction réelle continue sur* $\mathbb{R}$ *telle que* $\lim_{|x|\to+\infty} f(x) = l \in \mathbb{R}$, *alors* f *est bornée sur* $\mathbb{R}$.
2. *Toute fonction continue et périodique sur* $\mathbb{R}$ *est bornée sur* $\mathbb{R}$.

Exercice 51 *Montrer sans utiliser la dérivation, les relations suivantes :*

1. *Pour tout* $x \in [-1,1]$ *:* $Arcsin(x) + Arccos(x) = \frac{\pi}{2}$.
2. *Pour tout* $x \in [-1,1]$ *:* $Arccos(x) + Arccos(-x) = \pi$.
3. *Pour tout* $x \in \mathbb{R}^*$ *:* $Arctan(x) + Arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$.
4. *Pour tout* $x \in \mathbb{R}$ *:* $Argsh(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$.
5. *Pour tout* $x \in [1,+\infty[$ *:* $Argch(x) = \ln(x + \sqrt{x^2-1})$.
6. *Pour tout* $x \in]-1,1[$ *:* $Argth(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$.

Exercice 52

1. *Vérifier que :* $Arcsin\left(\frac{5}{13}\right) + Arcsin\left(\frac{3}{5}\right) = Arcsin\left(\frac{56}{65}\right)$.
2. *Vérifier que :* $Arctan\left(\frac{1}{2}\right) + Arctan\left(\frac{1}{5}\right) + Arctan\left(\frac{1}{8}\right) = \frac{\pi}{4}$.
3. *Trouver une relation entre* $Arctan(x)$ *et* $Arcsin\left(\frac{2x}{x^2+1}\right)$.
4. *Résoudre l'équation :* $Arcsin(x) = 2Arctan(x)$.

Exercice 53 *Soit* $f : I \to \mathbb{R}$ *une fonction réelle.*

1. *Montrer que si* f *est dérivable en un point* x_0, *alors*
$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0-h)}{h}$$
existe.
2. *La réciproque de la question précédente est-elle vraie ?*

Exercice 54 *Montrer les inégalités suivantes :*

1. $\forall x \in]-1,+\infty[, \quad \frac{x}{x+1} \le \ln(x+1) \le x$.
2. $\forall x \in [0,\pi/2], \quad x\cos(x) < \frac{\pi^2}{16}$.
3. $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}^+, \quad x^{n+1} - (n+1)x + n \ge 0$.
4. $\forall x \in [0,1[, \quad \tan(x) \le \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.

Exercice 55 *Soit* $I \subset \mathbb{R}$ *un intervalle contenant* 0. *Soit* $\varphi : I \to \mathbb{R}$ *une fonction réelle dérivable sur* I *telles que :*
$$\varphi(0) = 0, \quad et \quad k := \sup_{x\in I} |\varphi'(x)| < 1$$
Soit (u_n) *une suite numérique définie par* $u_0 \in I, \quad u_{n+1} = \varphi(u_n)$. *Montrer en utilisant le théorème des accroissements finis que* $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Exercice 56 *Montrer que pour tout* $x, y \in \mathbb{R}$ *:*

1. $sh(x+y) = sh(x)ch(y) + ch(x)sh(y)$.
2. $sh(x-y) = sh(x)ch(y) - ch(x)sh(y)$.
3. $ch(x+y) = ch(x)ch(y) + sh(x)sh(y)$.

4. $ch(x+y) = ch(x)ch(y) - sh(x)sh(y)$.
5. $th(x+y) = \frac{th(x)+th(y)}{1+th(x)th(y)}$.

Exercice 57 *I) Soit f une application de $[a;b]$ dans lui même telle que*

$$\forall x,y \in [a;b] : \ |f(x)-f(y)| < |x-y|$$

Soit $g(x) = f(x) - x$.

1. *Montrer que g est continue sur $[a,b]$.*
2. *Montrer que g est strictement décroissante.*
3. *En déduire que l'équation $f(x) = x$ admet une solution unique dans $]a,b[$.*

II) On admet le résultat suivant :

Théorème : *Si une suite réelle (u_n) vérifie la condition (dite critère de Cauchy) :*

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N} : \ \forall p,n \in \mathbb{N},\ n > N \implies |u_{n+p} - u_n| < \varepsilon$$

Alors, la suite (u_n) est convergente.

Considérons maintenant une fonction $h : [a,b] \to [a,b]$ continue, et dérivable sur $]a,b[$ telle que :

$$q := \sup_{x\in I} |h'(x)| < 1$$

1. *Montrer que pour tout $x,y \in [a,b]$ alors $|h(x)-h(y)| \leq q|x-y|$.*
2. *Déduire d'après ce qui précède que l'équation : $h(x) = x$ admet une solution unique x^* dans $]a,b[$.*
3. *Soit (u_n) une suite réelle définie par*

$$u_0 \in [a,b], \quad u_{n+1} = h(u_n), \quad n \in \mathbb{N}.$$

1. *Montrer que $u_n \in [a,b]$, $\forall n \geq 0$.*
2. *Montrer que $|u_{n+1} - u_n| \leq q|u_n - u_{n-1}|$, $n \geq 1$ et déduire que $|u_{n+1} - u_n| \leq q^n|u_1 - u_0|$*
3. *Montrer que $|u_{n+p} - u_n| \leq \frac{q^n}{1-q}|u_1 - u_0|$. $\forall p,n \in \mathbb{N}$.*
4. *Déduire que la suite (u_n) converge et sa limite est égal à x^* la solution unique de l'équation $h(x) = x$.*
5. *Montrer que $|u_n - x^*| \leq \frac{q^n}{1-q}|u_1 - u_0|$. $\forall n \in \mathbb{N}$.*
6. *Soit $\beta \in \mathbb{N}^*$. A partir du quelle valeur de n on ait : $|u_n - x^*| \leq 10^{-\beta}$.*

*III) **Application** : Faire une application des résultats précédents pour montrer l'existence et l'unicité de la solution de l'équation $h(x) = x$ et pour calculer cette solution à 10^{-3} prés dans les cas suivants :*

1. $h(x) = \cos(x)$, $[a,b] = [\pi/6, \pi/3]$.
2. $h(x) = \frac{1}{9}x^3 + \frac{1}{5}$, $[a,b] = [0,1]$.

Chapitre 4

Fonctions réelles d'une variable réelle : Dérivabilité

Ce chapitre est consacré à l'étude de la notion importante de dérivabilité des fonctions réelles d'une variable réelle. On présente les définitions de bases ainsi les résultats classiques de fonctions dérivables et quelques applications utiles pour l'étude de sens de variation, recherche d'éventuel extrémum et le calcul de limites dans le cas de présence d'une forme indéterminée. Toutes ces applications découlent du fameux théorème des accroissements finis.

4.1 Dérivabilité d'une fonction réelle en un point

Définition 4.1

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction réelle définie sur un intervalle ouvert . Soit $x_0 \in I$. On dit que f est dérivable au point x_0 si :

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad existe$$

Cette limite notée par $f'(x_0)$ est appelée le nombre dérivé de f au point x_0 . On écrit

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$

Remarques 9

1. *La quantité $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ est appelée le tau de changement (ou tau d'accroissement) de la fonction f entre x et x_0 . En cinématique, si la variable x représente le temps, et $f(x)$ représente la position d'un mobile dans un chemin, alors le tau d'accroissement $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ représente la vitesse moyenne du mobile entre les instants x et x_0. De plus si $f'(x_0)$ existe, alors ce nombre représente la vitesse instantanée du mobile à l'instant x_0 .*
2. *On pose $h = x - x_0$, ce qui signifie que $x = x_0 + h$. Supposons que h est assez petit pour que $x_0 + h \in I$. Alors, la relation $(*)$ devient :*

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0)$$

Ainsi, la définition précédente de la dérivabilité, devient :

$$(f \ est\ dérivable\ en\ x_0) \iff \left(\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0) \ \ existe \right)$$

3. *Soit (C) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé. Si f est dérivable au point x_0 , alors sa courbe (C) admet au point $A(x_0\ ,\ f(x_0))$ une droite tangente d'équation : $y =$*

$f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$. De plus, si θ est une mesure de l'angle formé par la tangente d et l'axe des abscisses, alors $\tan(\theta)=f'(x_0)$. (Figure ci-dessous)

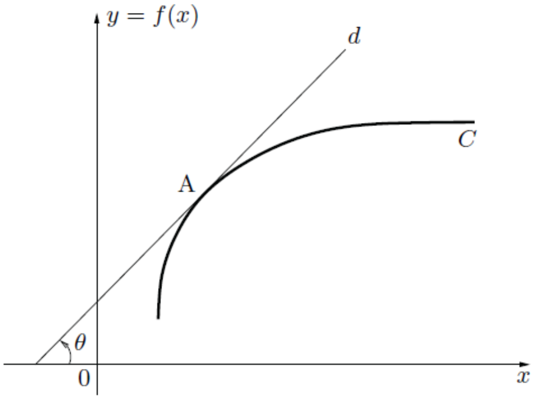


Figure 4.1: La tangente d'une courbe

Exemple 4.1 Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Soit f la fonction réelle définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x)=\begin{cases} x^n\sin\left(\frac{1}{x}\right) & si \quad x\neq 0\\ 0 \quad si & x=0\end{cases}$$

Etudier la dérivabilité de f au point 0.

Réponse : On a pour tout $x\neq 0$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0}x^{n-1}\sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

Donc, si $n=1$ on trouve

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\sin\left(\frac{1}{x}\right)\quad n'existepas$$

et si $n\geq 2$, alors $x^{n-1}\to 0$ quand $x\to 0$ et comme $x\mapsto\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ est bornée, il vient

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=0.$$

Par conséquent, f est dérivable au point 0 si et seulement si $n\geq 2$ et l'on a dans ce cas $f'(0)=0$.

4.2 Dérivabilité à droite , à gauche en un point :

Définition 4.2

Soit $I\subset\mathbb{R}$ est un intervalle . Soit $f\ :I\longrightarrow\ \mathbb{R}$ une fonction réelle définie sur . Soient a , $b\in I$.

1. *Si la limite : $\lim_{x\overset{>}{\longrightarrow}a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{h\overset{>}{\longrightarrow}0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ existe , alors on dit que f est dérivable à droite au point a. Cette limite est notée par $f'_d(a)$ ou $f'(a^+)$.*
2. *Si la limite : $\lim_{x\overset{<}{\longrightarrow}a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{h\overset{<}{\longrightarrow}0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ existe , alors on dit que f est dérivable à gauche au point a . Cette limite est notée par $f'_g(b)$ ou $f'(b^-)$.*

Remarques 10

1. *Si f est dérivable en un point $x_0\in I$ alors $f'(x_0)=f'_g(x_0)=f'_d(x_0)$.*
2. *Si $f'_g(x_0)$ et $f'_d(x_0)$ existent et $f'_g(x_0)\neq f'_d(x_0)$ alors f n'est pas dérivable au point x_0 . Dans ce cas la courbe représentative de f possède au point $A(x_0\ ,\ f(x_0))$ deux demi droites tangentes. Le point $A(x_0\ ,\ f(x_0))$ est appeler : point anguleux .*
3. *Si $f'_g(x_0)$ ou $f'_d(x_0)$ est égal à l'infini, on dit que la courbe de f a une demi tangente verticale au point $(x_0\ ,\ f(x_0))$.*

Exemple 4.2 Soit $f(x) = |x|$. Calculer $f_d'(0)$ et $f_g'(0)$. Conclure.

Réponse : On a pour tout $x \neq 0$:

$$\frac{f(x)-f(0)}{x} = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} 1 & si \quad x > 0 \\ -1 & si \quad x < 0 \end{cases}$$

Par conséquent,

$$f_g'(0) = \lim_{x \to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x} = -1 \ \text{ et } \ f_d'(0) = \lim_{x \to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x} = 1$$

Comme $f_g'(0) \neq f_d'(0)$, on en déduit que f n'est pas dérivable au point 0.

Proposition 4.1

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $x_0 \in I$. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction réelle. Alors

$$(\ f \text{ est dérivable au point } x_0\ ) \Longrightarrow f \ \text{ est continue au point } x_0\ )$$

Démonstration Supposons que f est dérivable au point x_0. Considérons la fonction $\varepsilon : I \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\varepsilon(x) = \begin{cases} \frac{f(x)-f(f(x_0)}{x-x_0} - f'(x_0) & \text{si} \quad x \in I \setminus \{x_0\} \\ 0 & \text{si} \quad x = x_0 \end{cases}$$

Il est clair que la fonction ε est continue en x_0 et que pour tout $x \in I$ on a

$$f(x) = f(x_0) + (x-x_0)(f'(x_0) + \varepsilon(x)) \tag{4.1}$$

De la relation (4.1) il vient que $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$. Donc, f est continue. ■

4.3 Dérivabilité d'une fonction réelle sur un intervalle, Fonction dérivée

4.3.1 Fonction dérivée

Définition 4.3

On dit qu'une fonction réelle $f\ : I \to \mathbb{R}$ est dérivable sur l'intervalle ouvert I si elle est dérivable en chaque point de I. Autrement dit :

$$(f \text{ est dérivable sur } I) \iff \left(\forall\, x \in I \ : \ \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = f'(x) \ \text{ existe}\right)$$

Si f est dérivable sur I, alors la fonction notée f' qui a chaque $x \in I$ fait associée le nombre $f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$, est appelée la fonction dérivée de f .

<u>**Notation**</u> : Parfois on note $\frac{df}{dx}(x_0) = f'(x_0)$. Si l'on pose $y = f(x)$, les notations abrégés $\frac{dy}{dx}$; y' signifient tous, la dérivée de f au point x . On a $\frac{dy}{dx} = y' = f'(x)$.

Définition 4.4

On dit qu'une fonction réelle f est dérivable sur l'intervalle $[a\ ,\ b]$ si elle es dérivable sur l'intervalle ouvert $]a\ ,\ b[$, et si $f_g'(b)$ et $f_d'(a)$ existent.

Remarque Si f est dérivable sur un intervalle I , alors elle est continue sur I .

Exemple 4.3 Montrer que :

1. La fonction constante sur un intervalle ouvert I est dérivable sur I et sa dérivée est la fonction nulle.
2. La fonction affine $x \longmapsto ax+b$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est la fonction constante $x \longmapsto a$.
3. La fonction $x \longmapsto \sqrt{x}$ est dérivable sur $]0\ ,\ +\infty[$ et sa dérivée est la fonction $x \longmapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}$.
4. La fonction $x \longmapsto \sin x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est la fonction $x \longmapsto \cos x$.

5. La fonction $x \longmapsto x^n$ ($n \in \mathbb{N}^*$) est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est la fonction $x \longmapsto n\, x^{n-1}$.

Réponses : On laisse au lecteur le soin de vérifier les deux premiers points. Vérifions les deux autres.

4. Soit $f(x) = \sin x$. Rappelons tout d'abord la formule trigonométrique suivante

$$\forall a, b \in \mathbb{R} \ : \sin a - \sin b = 2\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

Donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et pour tout $h \neq 0$ on a

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{\sin(x+h)-\sin x}{h} = 2\frac{\sin(h/2)\cos(x+h/2)}{h}$$

Par conséquent

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\sin(h/2)}{h/2}\cos(x+h/2) = \cos x$$

car $\frac{\sin(h/2)}{h/2} \to 1$ quand $h \to 0$ et $\lim\limits_{h\to 0}\cos(x+h/2) = \cos x$ puisque la fonction $x \mapsto \cos x$ est continue.

Donc, la fonction $x \mapsto \sin x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa fonction dérivée est $x \mapsto \cos x$.

5. Rappelons dans un premier temps une formule de factorisation importante :

$$\forall\, a, b \in \mathbb{R} \ : \ a^n - b^n = (a-b)\sum_{k=1}^{n} a^{k-1}\, b^{n-k} \tag{4.2}$$

Soit maintenant $f(x) = x^n$ où $n \in \mathbb{N}^*$. En utilisant la formule (4.2) avec $a = x+h$ et $b = x$ où $h \neq 0$ et $x \in \mathbb{R}$, on trouve :

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{(x+h)^n - x^n}{h} = \frac{h\sum_{k=1}^{n}(x+h)^{k-1}\, x^{n-k}}{h} = \sum_{k=1}^{n}(x+h)^{k-1}\, x^{n-k}$$

Donc,

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\sum_{k=1}^{n}(x+h)^{k-1}\, x^{n-k} = \sum_{k=1}^{n} x^{n-1} = n\, x^{n-1}$$

Ainsi, la fonction $x \mapsto x^n$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa fonction dérivée est la fonction $x \mapsto nx^{n-1}$.

4.3.2 Opérations sur les fonctions dérivables

Théorème 4.1 (Dérivée d'une somme , produit de deux fonctions)

Soient f et g deux fonctions dérivables sur un intervalle . Soit $\in \mathbb{R}$. Alors les fonctions $f+g$, λf , $f.g$ sont dérivables sur I et on a pour tout $x \in I$:

1. $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$.
2. $(\lambda f)'(x) = \lambda\, f'(x)$.
3. $(f\ g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$.

Théorème 4.2 (Dérivée de quotient de deux fonctions)

Soit f et g deux fonctions dérivables sur un intervalle I. Supposons que pour tout $x \in I$: $g(x) \neq 0$. Alors les fonctions $\frac{1}{g}$ et $\frac{f}{g}$ sont dérivables sur I et on a pour tout $x \in I$:

1. $\left(\frac{1}{g}\right)'(x) = -\frac{g'(x)}{(g(x))^2}$.
2. $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)\, g'(x)}{(g(x))^2}$

Nous admettons le résultat suivant concernant la dérivation des fonctions composées.

Théorème 4.3 (Dérivée de composée de deux fonctions)

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur I et soit $g : J \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur J tels que $f(I) \subset J$. Alors la fonction composée $g \circ f$ est dérivable sur I et on a pour tout $x \in I$:

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x))f'(x) \tag{4.3}$$

Corollaire 4.1

Soient $u : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur I . Alors :

1. *La fonction u^n est dérivable sur I et on a : $\forall\, x \in I \quad : \quad (u^n)'(x) = n\,(u(x))^n.u'(x)$.*
2. *La fonction e^u est dérivable sur I et on a : $\forall\, x \in I \quad : \quad (e^u)'(x) = u'(x).e^{u(x)}$*
3. *Si $\forall\, x \in I\ :\ u(x) \neq 0$, alors la fonction $\ln|u|$ est dérivable sur I et on a $\forall\, x \in I\ :\ (\ln|u|)'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$ (Dérivée logarithmique de u)*
4. *Si $\forall\ x \in I \quad : \quad u(x) > 0$, alors pour tout $\in \mathbb{R}$, la fonction u^α est dérivable sur I et on a : $\forall\, x \in I \quad : \quad (u^\alpha)'(x) = \alpha\,(u(x))^{\alpha-1}\,u'(x)$.*
   En particulier, la fonction $\sqrt{u}$ est dérivable sur I et on a : $\forall\, x \in I \quad : \quad \left(\sqrt{u}\right)'(x) = \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$.

4.4 Différentielle d'une fonction

La notion de différentielle pour les fonctions réelles d'une variable réelle est équivalente à celle de dérivée. La différence entre ces notions sera claire pour les fonctions de plusieurs variables.
Soit f une fonction réelle définie au voisinage $V(x_0)$ de x_0 et soit h un réel dans un voisinage $V(0)$ de 0 tel que $x_0 + h \in V$. Nous avons vu que si f est dérivable en x_0 alors il existe une fonction $\varepsilon : V(0) \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\varepsilon(h) = \begin{cases} \frac{f(x_0+h)-f(f(x_0)}{h} - f'(x_0) & \text{si} \quad h \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad h = 0 \end{cases}$$

tels que :

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = f'(x)h + h\varepsilon(h) \tag{4.4}$$

Inversement, S'il existe un nombre réel A et une fonction $\varepsilon : V(0) \to \mathbb{R}$ continue en 0, nulle en 0 tels que pour tout $h \in V(0)$ on ait

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = Ah + h\varepsilon(h);$$

alors f est dérivable en x_0 et l'on a $f'(x_0) = A$. D'autre part, l'expression $f'(x)h$ est la meilleure approximation linéaire de la différence $f(x_0 + h) - f(x_0)$.

Définition 4.5

1. *On appelle différentielle première, ou simplement différentielle de la fonction f au point x_0, la fonction linéaire $h \mapsto f'(x_0)h$.*
2. *La différentielle de f en x_0 est notée souvent par $df(x_0)$ ou $Df(x_0)$. Ainsi, pour tout $h \in \mathbb{R}$ on a : $df(x_0)(h) = f'(x_0)h$.*
3. *Si f est dérivable sur un intervalle I , il existe une différentielle de f en tout point de I. Dans ce cas, on a pour tout $x \in I$ et pour tout $h \in \mathbb{R}$: $df(x)(h) = f'(x)h$.*
4. *La différentielle de la fonction $x \mapsto x$ en chaque réel x est l'application linéaire identitie $h \mapsto h$. On écrit, alors $dx(h) = h$. Donc pour une fonction différentiable sur un intervalle I on a pour tout $x \in I$ et $h \in \mathbb{R}$:*

$$df(x)(h) = f'(x)h = f'(x)dx(h) \implies df(x) = f'(x)dx$$

L'écriture $df(x) = f'(x)dx$ est une égalité entre deux applications linéaires.

4.5 Dérivée d'ordre supérieur

Définition 4.6

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur I. Si la fonction dérivée $f' : I \longrightarrow \mathbb{R}$ a son tour est dérivable sur I , alors on dit que f est deux fois dérivable sur . La dérivée seconde se note f'' ou $f^{(2)}$ ou par $\frac{d^2f}{dx^2}$.
On a donc $f''(x) = (f')'(x) = \frac{d}{dx}\, f'(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{df}{dx}\right)(x) = \frac{d^2f}{dx^2}(x)$.
Si la dérivée seconde $f'' : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est dérivable sur , alors sa dérivée est appelée dérivée troisième de f.
On la note par f''' ou $f^{(3)}$ ou par $\frac{d^3f}{dx^3}$. On a ainsi

$$f'''(x) = \left(f''\right)'(x) = \frac{df''}{dx}(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^2f}{dx^2}\right)(x) = \frac{d^3f}{dx^3}(x)$$

De la même manière on définit les dérivée d'ordre 4, 5, . . .
Dans le cas général, pour $\in \mathbb{N}^*$, on dit que la fonction f est n fois dérivable sur I si les dérivées $f', f'', \ldots., f^{(n)}$ sont bien définies sur I.

La fonction $f^{(n)}$ est appelée la dérivée $n-ième$ de la fonction f. Elle est définie par récurrence par

$$f^{(0)} = f \quad et \quad f^{(n)} = \frac{d}{dx}\left(f^{(n-1)}\right) \quad ; \quad n \geq 1$$

Exemple 4.4 Calculer la dérivée $n-ième$ de la fonction f sur I dans les cas suivants :

1. $f(x) = x^m$, $I = \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{N}^*$.
2. $f(x) = e^{ax}$, $I = \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$.
3. $f(x) = \sin(x)$, $I = \mathbb{R}$.
4. $f(x) = \cos(\omega x)$, $I = \mathbb{R}$, $\omega > 0$.
5. $f(x) = \frac{1}{1-x}$, $I =]1 , +\infty[$.

Réponses : Toutes les fonctions citées dans l'exemple sont de classe C^∞ sur I, et alors elles possèdent des dérivées de tout ordre.
Un calcul des dérivées successives de f dans chaque cas permet de capturer la forme générale de la dérivée n^{ime} de f. Le lecteur est inviter de vérifier les calculs suivants :

1. $f^{(n)}(x) = \begin{cases} 0 & si \quad n > m \\ m(m-1)\ldots(m-n+1)x^{m-n} & si \quad 1 \leq n \leq m \end{cases}$
2. $f^{(n)}(x) = a^n\, e^x$.
3. $f^{(n)}(x) = sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$.
4. $f^{(n)}(x) = \omega^n \sin\left(\omega x + (n+1)\frac{\pi}{2}\right)$.
5. $f^{(n)}(x) = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}}$.

Théorème 4.4 (Formule de Leibniz)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soient f et g deux fonctions réelle n fois dérivables sur un intervalle I. Alors la fonction produit $f.g$ est n fois dérivables sur I , et on a :

$$(f.g)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k\, f^{(k)} g^{(n-k)} \tag{4.5}$$

où $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

Démonstration Nous allons utiliser le raisonnement par récurrence. Supposons que f et g sont $n+1$ fois dérivables sur I. La relation (4.5) est vraie pour $n=0$. Supposons maintenant que (4.5) est vraie pour le rang n et montrons qu'elle est vraie aussi pour le rang $n+1$. On a :

$$\begin{aligned}
(f.g)^{(n+1)} &= (f.g^(n))' = \left(\sum_{k=0}^{n} C_n^k\, f^{(k)} g^{(n-k)}\right)' \\
&= \left(f g^(n) + f^(n) g + \sum_{k=1}^{n-1} C_n^k\, f^{(k)} g^{(n-k)}\right)' \\
&= (f' g^{(n)} + f g^{(n+1)} + f^{(n+1)} g + f^{(n)} g') + \sum_{k=1}^{n-1} C_n^k\, (f^{(k+1)} g^{(n-k)} + f^{(k)} g^{(n+1-k)}) \\
&= (f' g^{(n)} + f^{(n)} g' + f g^{(n+1)} + f^{(n+1)} g) + \sum_{k=1}^{n-1} C_n^k f^{(k+1)} g^{(n-k)} + \sum_{k=1}^{n-1} C_n^k f^{(k)} g^{(n+1-k)} \\
&= (f' g^{(n)} + f^{(n)} g' + f g^{(n+1)} + f^{(n+1)} g) + \sum_{m=2}^{n} C_n^{m-1}\, f^{(m)} g^{(n+1-m)} + \sum_{m=1}^{n-1} C_n^m\, f^{(m)} g^{(n+1-m)} \\
&= f' g^{(n)} + f^{(n)} g' + f g^{(n+1)} + f^{(n+1)} g + n(f' g^{(n)} + f^{(n)} g') + \sum_{m=2}^{n} (C_{n-1}^m + C_n^m)\, f^{(m)} g^{(n+1-m)} \\
&= f g^{(n+1)} + f^{(n+1)} g + (n+1)(f' g^{(n)} + f^{(n)} g') + \sum_{m=2}^{n} C_{n+1}^m f^{(m)} g^{(n+1-m)} \\
&= \sum_{m=0}^{n+1} C_{n+1}^m f^{(m)} g^{(n+1-m)}.
\end{aligned}$$

Donc, la formule (4.5) est vraie pour le rang $n+1$. Il en résulte de principe du recurrence que (4.5) est vraie pour tout n. ■

Remarques 11 *1. Pour $n=1$, la formule (4.5) devient la fameuse relation : $(fg)' = f'g + fg'$.*

2. On utilisant pratiquement, le triangle du Pascal pour calculer les nombres C_n^k dans la formule de Leibniz .

Exemple 4.5 Calculer la dérivée n^{me} de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x e^{-x}$.

Réponses :

1) Soient $u(x) = x$ et $v(x) = e^{-x}$. Il est clair que u , v et $f = u.v$ possèdent des dérivées de tout ordre. De plus, Il est clair que

$$u'(x) = 1, \quad u^{(m)}(x) = 0 \ \forall x \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad \forall\, m \geq 2;$$

et

$$v^{(k)}(x) = (-1)^k e^{-x}, \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad \forall\, k \in \mathbb{N}.$$

En appliquant la formule de Leibniz, on obtient pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
f^{(n)}(x) &= \sum_{k=0}^{n} C_n^k\, u^{(k)} v^{(n-k)} = \sum_{k=0}^{1} C_n^k\, u^{(k)}\, v^{(n-k)} \\
&= \sum_{k=0}^{1} C_n^k\, u^{(k)}\, (-1)^{(n-k)}\, e^{-x} \\
&= C_n^0\, x (-1)^n e^{-x} + C_n^1 (-1)^{n-1} e^{-x} \\
&= (-1)^n (x-n) e^{-x}.
\end{aligned}$$

Définition 4.7 (Fonctions de classe C^n)

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction réelle définie sur l'intervalle I . On dit que la fonction f est de classe $C^n(I)$ si f est n fois dérivables sur I et la fonction $f^{(n)}$ est continue sur I. On écrit $f \in C^n(I)$ pour dire que f est de classe $C^n(I)$. Si f est seulement continue sur I , on dit que f est de classe $C^0(I)$ et on écrit $\in C^0(I)$.

On dit que f est de classe $C^\infty(I)$ si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f \in C^n(I)$. Dans ce cas on écrit $f \in C^\infty(I)$.

Remarque Il est clair que $C^\infty(I) \subset C^n(I) \subset \cdots \subset C^2(I) \subset C^1(I) \subset C^0(I)$.

Exemple 4.6 Les fonctions $x \longmapsto e^x$, $x \longmapsto \sin(x)$, $x \longmapsto \cos(x)$, $x \longmapsto x^n$ sont de classe $C^\infty(\mathbb{R})$.

Exemple 4.7 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction réelle définie par

$$f(0) = 0 \quad et \quad f(x) = x^3 \cos\left(\frac{1}{x}\right) \quad si \quad x \neq 0$$

1. Montrer que $f \in C^1(\mathbb{R})$.
2. Est-ce-que f est de classe $C^2(\mathbb{R})$?

Réponse :

Il est clair que la fonction $x \mapsto \cos\left(\frac{1}{x}\right)$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ puisqu'elle est composée de deux fonctions $x \mapsto \frac{1}{x}$ qui est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et $x \mapsto \cos x$ qui est dérivable sur $\mathbb{R}$. De plus, comme le produit de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}^*$ est aussi dérivables sur $\mathbb{R}^*$, il vient que f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$. En utilisant les règles de dérivation de produit et composée des fonctions, on trouve que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$:

$$f'(x) = 3x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right) + x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

Maintenant, vérifions la dérivabilité de f au point 0. On a :

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \to 0} x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

car $\left|x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leq x^2 \to 0$ quand $x \to 0$.

Il vient ainsi que f est dérivable sur tout $\mathbb{R}$ et l'on a

$$f'(0) = 0 \quad \text{et} \quad f'(x) = 3x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right) + x \sin\left(\frac{1}{x}\right) \quad si\, x \neq 0.$$

Les théorèmes de continuité de somme, produit et composée des fonctions continues nous assure que la fonction dérivé f' est continue sur $\mathbb{R}^*$. De plus, comme

$$|f'(x)| \leq 3x^2 + |x| \to 0 \quad \text{quand} \quad x \to 0 \implies \lim_{x \to 0} f'(x) = 0 = f'(0)$$

on en déduit que f' et continue en 0. Donc, f' est continue sur $\mathbb{R}$ ce qui signifie que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. Pour la deuxième question, essayer de suivre la même méthode de la question 1 pour trouver que f'' existe et continue sur $\mathbb{R}^*$ mais elle n'est pas continue au point 0 ce qui signifie que f n'est pas de classe C^2 sur $\mathbb{R}$.

4.6 Dérivées des fonctions réciproques :

Proposition 4.2

Soit $f : I \to J = f(I)$ une fonction strictement monotone et continue sur l'intervalle I . Soit $y_0 \in I$. Si f est dérivable en y_0 et si $f'(y_0) \neq 0$, alors la fonction réciproque $f^{-1} : J \to I$ est dérivable en $x_0 = f(y_0)$ et on a

$$\left(f^{-1}\right)'(x_0) = \frac{1}{f'(y_0)} = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(x_0)\right)}$$

Corollaire 4.2

Soit $f : I \to J = f(I)$ une fonction strictement monotone et dérivable sur l'intervalle I. Alors la fonction réciproque $f^{-1} : J \to I$ est dérivable sur $D = \{ f(z) \ : \ z \in I \ \ et \ \ f'(z) \neq 0 \} \subset J$ et sa dérivée est la fonction $\left(f^{-1}\right)' : D \subset J \to I$ définie par $\forall \ \ x \in D \ \ : \ \ \left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$.

Remarque Si on pose $S = \{ z \in I \ \ : \ \ f'(z) = 0\}$, alors on a

$$D = \{ f(z) \ : \ z \in I \ \ et \ \ f'(z) \neq 0 \} = f(I \setminus S)$$

En appliquant le corollaire 4.2 à des fonction réciproques trigonométrique et hyperboliques, on obtient le résultat suivant :

Proposition 4.3

1. *La fonction $x \longmapsto Arcsin(x)$ est dérivable sur $]-1\ ,\ 1[$ et sa dérivée est la fonction $x \longmapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.*
2. *La fonction $x \longmapsto Arccos(x)$ est dérivable sur $]-1\ ,\ 1[$ et sa dérivée est la fonction $x \longmapsto \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$.*
3. *La fonction $x \longmapsto Arctan(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est la fonction $x \longmapsto \frac{1}{x^2+1}$.*
4. *La fonction $x \longmapsto Argsh(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est la fonction $x \longmapsto \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$.*
5. *La fonction $x \longmapsto Argch(x)$ est dérivable sur $]1\ ,+\infty[$ et sa dérivée est la fonction $x \longmapsto \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$*
6. *La fonction $x \longmapsto Argth(x)$ est dérivable sur $]-1\ ,\ 1[$ et sa dérivée est la fonction $\longmapsto \frac{1}{1-x^2}$.*

4.7 Théorème des accroissements finis

1) Théorème de Rolle :

Théorème 4.5

Soient a et b deux nombres réels tels que $a < b$. Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[a,b]$ et dérivable sur l'intervalle ouvert $]\ a\ ,\ b\ [$ tels que $f(a) = f(b)$. Alors il existe au moins un $c \in\ ]\ a\ ,\ b\ [$ tel que $f'(c) = 0$.

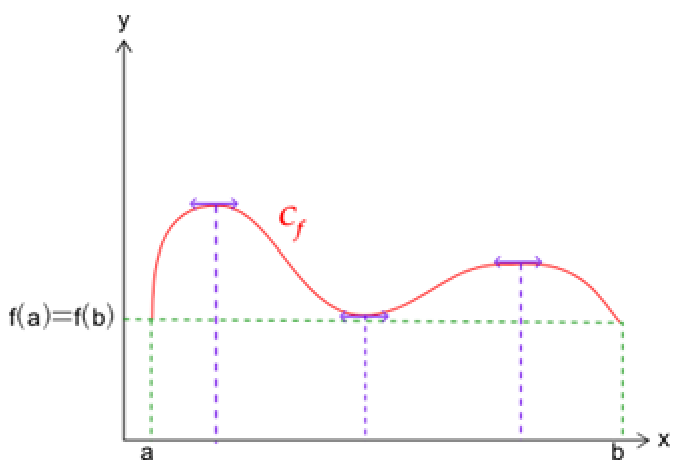


Figure 4.2: Théorème de Rolle

Démonstration Il est clair que si f est une fonction constante, elle vérifier bien les hypothèses du théorème de Rolle et $f'(x) = 0$ sur $]a, b[$.

Supposons désormais que f est non constante sur $[a,b]$. Comme f est continue sur l'intervalle fermé et borné $[a,b]$, elle est bornée et atteint ses bornes sur $[a,b]$, i.e.

$$\exists\, c_1\,,\, c_2 \in [a,b] \;:\; f(c_1) = \sup_{x\in[a,b]} f(x) \;\text{ et }\; f(c_1) = \inf_{x\in[a,b]} f(x)$$

Posons $M = f(c_1)$ et $m = f(c_2)$. Ainsi $m < M$ puisque f n'est pas constante sur $[a,b]$. Trois cas, alors, sont possibles :

Cas 1 : $c_1 = a$ ou $c_1 = b$ et $c_2 \in]a,b[$.

Cas 2 : $c_2 = a$ ou $c_2 = b$ et $c_1 \in]a,b[$.

Cas 3 : c_1 et $c_2 \in]a,b[$.

On a donc dans tous les cas $c_1 \in]a,b[$ ou $c_2 \in]a,b[$. Supposons le cas où $c_1 \in]a,b[$. Pour tout $h > 0$ assez petit de sorte que $c_1 + h \in]a,b[$ on a $f(c_1+h) \leq M = f(c_1)$. Il vient ainsi

$$\forall\, h > 0\,, \quad \frac{f(c_1+h)-f(c_1)}{h} \leq 0 \quad \text{et} \quad f'_d(c_1) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(c_1+h)-f(c_1)}{h} \leq 0$$

D'autre part, pour tout $h < 0$ vérifiant $c_1 + h \in]a,b[$ on a $f(c_1+h) \leq M = f(c_1)$. Par conséquent

$$\forall\, h < 0\,, \quad \frac{f(c_1+h)-f(c_1)}{h} \leq 0 \quad \text{et} \quad f'_g(c_1) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(c_1+h)-f(c_1)}{h} \geq 0$$

Comme f est dérivable en c_1, on a $f'(c_1) = f'_d(c_1) \leq 0$ et $f'(c_1) = f'_g(c_2) \geq 0$. Donc $f'(c_1) = 0$.

De la même manière, on peut montrer que si $c_2 \in]a,b[$ alors $f'(c_2) = 0$. Dans tous les cas on a donc l'existence d'un réel $c \in]a,b[$ tel que $f'(c) = 0$. ■

2) Théorème des accroissements finis (TAF)

Théorème 4.6

Soient a et b deux nombres réels tels que $a < b$. Soit f une fonction réelle continue sur l'intervalle $[a,b]$ et dérivable sur l'intervalle ouvert $]\,a\,,\,b\,[$. Alors il existe au moins un $c \in]\,a\,,\,b\,[$ tel que :

$$f(b) - f(a) = f'(c)\;(b-a). \tag{4.6}$$

Démonstration Considérons la fonction g définie par

$$g(x) = f(x) - f(a) - \left(\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right)(x-a)$$

Il est clair que g est continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$ puisque f l'est aussi. De plus, $g(a) = 0$ et

$$g(b) = f(b) - f(a) - f(b) + f(a) = 0 = g(a)$$

Donc, g vérifier tout les hypothèses du théorème de Rolle ce qui entraine l'existence d'un nombre réel $c \in]a,b[$ vérifiant $g'(c) = 0$. Donc

$$g'(c) = 0 \implies f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$$

■

Remarque La relation (4.6) est appelée formule des accroissements finis. Cette formule nous donne évidemment l'égalité

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$$

D'autre part, le réel $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ est la pente de la corde joignant les deux points A et B du graphe de la fonction f, de coordonnées $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$ respectivement. Donc, la formule des accroissements finis traduit l'existence d'au moins d'une tangente au graphe de f en un point de coordonnées $(c, f(c))$ qui est parallèle à la droite (AB).

Exemple 4.8 En utilisant le TAF, chercher un encadrement par deux nombres rationnels de $\sqrt{5}$.

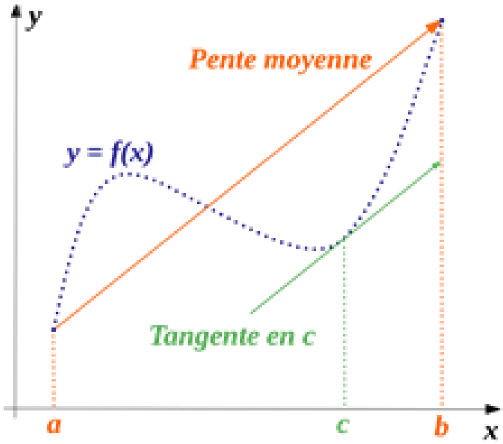


Figure 4.3: Théorème des accroissements finis

Réponse : Soit $f\ \sqrt{x}$. On sait bien que f est continue et dérivable sur $]0,+\infty[$. En appliquant le TAF pour la fonction f sur l'intervalle $[4,5]\subset]0,+\infty[$ on en déduit qu'il existe $c\in]4,5[$ tel que

$$f(5)-f(4)=f'(c)(5-4) \iff \sqrt{5}=2+\frac{1}{2\sqrt{c}}$$

De plus, comme $4<c<9$ on trouve

$$\frac{1}{6}<\frac{1}{2\sqrt{c}}<\frac{1}{4} \implies 2+\frac{1}{6}<\sqrt{5}<2+\frac{1}{4}$$

Par conséquent, $\frac{13}{6}<\sqrt{5}<\frac{9}{4}$.

Remarque Soient a, b, et c trois nombres réels tels que $a<c<b$. On pose $\theta=\frac{c-a}{b-a}$. Alors, il est clair que $0<\theta<1$ et $c=a+\theta(b-a)$. Donc

$$c\in]a,b[\iff (\exists\,\theta\in]0,1[:\ c=a+\theta(b-a)$$

De plus, si l'on pose $\lambda=1-\theta$ alors

$$c\in]a,b[\iff (\exists\,\lambda\in]0,1[:\ c=b+\lambda(a-b)$$

De deux relations $c=a+\theta(b-a)$ et $c=b+\lambda(a-b)$ on tire le principe suivant :
Si x, y sont deux réels quelconque tels que $x\neq y$, alors

$$\min\{x,y\}<z<\max\{x,y\} \iff \exists\theta\in]0,1[:\ z=x+\theta(y-x)$$

En utilisant ce principe, on donne une autre formulation du théorème des accroissement finis.

Théorème 4.7

Soient a et b deux nombres réels tels que $a<b$. Soit f une fonction réelle continue sur l'intervalle $[a,b]$ et dérivable sur l'intervalle ouvert $]\ a\ ,\ b\ [$. Alors il existe au moins un $\theta\in]0,1[$ tel que :

$$f(b)-f(a)=f'(a+\theta(b-a))\ (b-a)$$

.

4.8 Applications du théorème des accroissements finis :

4.8.1 Etude de la monotonie d'une fonction dérivable

Proposition 4.4

Soit f une fonction réelle continue sur l'intervalle $[a,b]$ et dérivable sur l'intervalle ouvert $]\,a\,,\,b\,[$. Alors

1. *Si f' est nulle sur $]a\,,\,b[$ alors f est constante sur $[a\,,\,b]$.*
2. *La fonction f est croissante sur $[a\,,\,b]$ si et seulement si $\forall\ x \in\ ]a,b[\ :\quad f'(x) \geq 0$.*
3. *La fonction f est décroissante sur $[a\,,\,b]$ si et seulement si $\forall\ x \in\ ]a,b[\ :\quad f'(x) \leq 0$.*

Démonstration

1. Un élément quelconque c de $]a,b[$ s'écrit toujours $c = a + \theta(b-a)$ pour un $\theta\ \in]0,1[$. Comme f' s'annule sur $]a,b[$ alors pour tout $\theta\ \in]0,1[$ et pour tout x et $y\ \in]a,b[$ on ait $x + \theta(y-x)\ \in]a,b[$ et alors
$$f'(x+\theta(y-x)) = 0$$
Soient maintenant x et y deux réels quelconque de $[a,b]$. D'après le TAF il existe un réel $\theta\ \in]0,1[$ tel que
$$f(y) - f(x) = f'(x+\theta(y-x))(y-x) = 0 \implies f(x) = f(y)$$
Par conséquent, f est constante sur $[a,b]$.
2. Soient x et y deux réels quelconque de $]a,b[$ tels que $x < y$. Considérons le taux de changement de f entre x et y :
$$T_{xy} = \frac{f(y)-f(x)}{y-x}$$
Si f est croissante sur $[a,b]$ alors $T_{xy} \geq 0$. Ainsi, compte tenu de la dérivabilité de f sur $]a,b[$, il vient que
$$f'(x) = \lim_{y\to x} T_{xy} \geq 0$$
Inversement, si $f' \geq 0$ sur $]a,b[$, alors d'après le TAF il existe $\theta\ \in]0,1[$ tel que
$$f(y) - f(x) = f'(x+\theta(y-x))(y-x) \geq 0 \implies f(y) \geq f(x)$$
Donc f est croissante.
3. Si $f' \leq 0$ sur $]a,b[$ alors $-f' \geq 0$. Donc d'après ce qui précède, $-f$ est croissante sur $]a,b[$ et alors f est décroissante sur $]a,b[$.

■

4.8.2 Recherche d'extremum d'une fonction dérivable

Définition 4.8

Soit $D \subset \mathbb{R}$ une partie réelle non vide. Soit $f\ : D \to \mathbb{R}$ une fonction réelle.

1. *On dit que f admet un maximum local (Resp : minimum local) en $x_0 \in D$ s'il existe un voisinage V de x_0 tels que $V \subset D$ et :*
$$\forall\ x \in V\ : f(x) \leq f(x_0) \qquad (\ Resp\ :\ f(x)\ \geq f(x_0)\ )$$
2. *Un maximum local ou un minimum local est appelé un extremum local.*
3. *On dit que f admet un maximum global (Resp : minimum global) en $x_0 \in D$ si*
$$\forall\ x \in D\ : f(x) \leq f(x_0) \qquad (\ Resp\ :\ f(x)\ \geq f(x_0)\ )$$

Définition 4.9

Si f est dérivable en un point $x_0 \in D$ et si $f'(x_0) = 0$, alors on dit que x_0 est un point critique de f (ou on dit que x_0 est un point stationnaire de f) .

Proposition 4.5

Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ et f une fonction réelle dérivable sur un voisinage de x_0 .

1. *Si $f(x_0)$ est un extremum local de f , alors $f'(x_0) = 0$ (c'est-à-dire que x_0 est un point critique de f)*
2. *Si $f'(x_0) = 0$ et si la fonction dérivée f' change de signe en x_0 , alors $f(x_0)$ est un extremum local de f .*

Démonstration 1. On a déjà vu dans la preuve du théorème de Rolle que si $f(x_0)$ est est un extremum local de f et f est dérivable au point x_0 alors $f'(x_0) = 0$.
2. Supposons que $f'(x_0) = 0$ et la fonction dérivée f' change de signe en x_0. Donc il existe un $r > 0$ tel que f est dérivable sur $V =]x_0 - r, x_0 + r[$ et f' change de signe sur V. Soient maintenant $x \in V$. En appliquant le TAF à f sur l'intervalle d'extimités x et x_0,on en déduit l'existence d'un réel $\theta \in]0,1[$ tel que :

$$f(x) - f(x_0) = f'(x_0 + \theta(x - x_0))(x - x_0)$$

Deux cas se présentes.
Premier cas $f' > 0$ sur $]x_0, x_0 + r[$ et $f' < 0$ sur $]x_0 - r, x_0[$:
Dans ce cas, si $x \in]x_0, x_0 + r[$ alors $x - x_0 > 0$ et $f' > 0$ et si $x \in]x_0 - r, x_0[$ alors $x - x_0 < 0$ et $f' < 0$. Donc pour tout $x \in V$ on a $f(x) - f(x_0) = f'(x_0 + \theta(x - x_0))(x - x_0) > 0$ ce qui signifie que $f(x_0)$ est un minimum local de f.
Premier cas $f' < 0$ sur $]x_0, x_0 + r[$ et $f' > 0$ sur $]x_0 - r, x_0[$:
Dans ce cas, si $x \in]x_0, x_0 + r[$ alors $x - x_0 > 0$ et $f' < 0$ et si $x \in]x_0 - r, x_0[$ alors $x - x_0 < 0$ et $f' > 0$. Donc pour tout $x \in V$ on a $f(x) - f(x_0) = f'(x_0 + \theta(x - x_0))(x - x_0) < 0$ ce qui signifie que $f(x_0)$ est un maximum local de f. ■

Exemple 4.9 Chercher les extremums locaux de la fonction $f\ : x \longmapsto \sin(x)\, e^{-x}$ sur l'intervalle $[0\ ,\ \ 2\pi]$.
Réponse :
Il est clair que f est dérivable sur l'intervalle $[0\ ,\ \ 2\pi]$. Cherchons dans un premier temps les points critiques de f sur $[0\ ,\ \ 2\pi]$. Comme $f'(x) = (\cos x - \sin x)\, e^{-x}$, il vient alors :

$$f'(x) = 0 \iff \sin x = \cos x$$

La seule solution de l'équation $f'(x) = 0$ dans l'intervalle $[0\ ,\ \ 2\pi]$ est $\frac{\pi}{4}$ qui est le point critique de f. De plus, f' est positive sur $[0, \pi/4]$ et négative sur $[\pi/4, 2\pi]$. Donc f possède un extrémum local en $\pi/4$ qui est un maximum global sur l'intervalle $[0\ ,\ \ 2\pi]$.

4.8.3 La règle de L'Hôpital

Théorème 4.8 (des accroissements finis généralisés)

Soient f et g deux fonctions réelles continues sur l'intervalle $[a, b]$ et dérivables sur $]\ a\ ,\ b\ [$. Alors il existe un réel $c \in]a\ ,\ b[$ tel que

$$(f(b) - f(a))\, g'(c) = (g(b) - g(a))\, f'(c) \tag{4.7}$$

La formule (4.7) est appelée formule des accroissements finis généralisés.

Démonstration Si $g(a) = g(b)$ alors le théorème de Rolle s'applique pour la fonction g et il en résulte l'existence

d'un réel $c \in]a,b[$ tel que $g'(c) = 0$. Donc la relation (4.7) est satisfaite dans ce cas.
Supposons maintenant que $g(a) \neq g(b)$. Considérons l'application $\psi : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\psi(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}(g(x)-g(a))$$

Il est clair que la fonction ψ est continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$. De plus $\psi(a) = \psi(b) = 0$. Il vient alors d'après le théorème de Rolle qu' il existe $c \in]a,b[$ tel que

$$\psi'(c) = 0 \implies f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}g'(c) \implies (f(b)-f(a))g'(c) = (g(b)-g(a))f'(c).$$

■

Proposition 4.6 (Règle de L'Hôpital)

Soient $x_0 \in \mathbb{R}$ et f , g deux fonctions continues sur un voisinage V de x_0 et dérivables sur $\setminus\{x_0\}$. Supposons que la dérivée g' ne s'annule pas sur $V \setminus\{x_0\}$. On a :

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell \quad \implies \quad \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)} = \ell$$

Démonstration Soit $V_0 \subset V$ un intervalle contenant x_0. Les deux fonctions f et g sont continues sur V_0 et dérivables sur V_0 sauf x_0. Supposons que $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \ell$. Pour $x \in V_0 \setminus \{x_0\}$, la formule des accroissements finis généralisés appliquée à f et g sur l'intervalle I_0 d'extrémités x et x_0, assure l'existence d'un réel $c_{x,x_0} \in I_0$ tel que

$$(f(x)-f(x_0))g'(c_{x,x_0}) = (g(x)-g(x_0))f'(c_{x,x_0})$$

Comme g' ne s'annule pas sur V, on en déduit via la formule des accroissements finis que $g(x)-g(x_0) \neq 0$ pour tout $x \in V_0 \setminus \{x_0\}$. Il vient alors

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)} = \frac{f'(c_{x,x_0})}{g'(c_{x,x_0})}$$

Puisque $c_{x,x_0} \longrightarrow x_0$ et $\frac{f'(x)}{g'(x)} \longrightarrow \ell$ quand $x \longrightarrow x_0$, on en déduit que

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f'(c_{x,x_0})}{g'(c_{x,x_0})} = \ell \implies \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)} = \ell.$$

■

Remarque L'implication réciproque dans la règle de L'Hôpital est fausse. (Chercher un contre exemple).
Remarque Dans la prtique si l'on veut calculer la limite d'une fraction de type $\frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)}$ quand $x \longrightarrow x_0$ on trouve une forme indéterminée de type $\frac{0}{0}$. Si la règle de l'Hôpital est applicable, alors pour lever cette forme indéterminée on écrit souvent :

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Le fait qu'on passe aux dérivées des fonctions f et g donne une chance pour lever la forme indéterminée que se présente au début du calcul. Si la limite de fraction des dérivée présente encore une forme indéterminée, alors on applique de nouveau la règle de l'Hôpital (si elle est applicable) pour la nouvelle fraction. Ce procédé peut se répéter plusieurs fois jusqu'à la disparition de la forme indéterminée.

Exemple 4.10 En utilisant la règle de L'Hôpital, calculer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(ax)}{\sin(bx)}$; $a, b \in \mathbb{R}^*$.
2. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos(x)}{x^2}$
3. $\lim_{x\to 1} \frac{\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)-\ln(1+\sqrt{2})}{x^2-1}$

Réponses :

1) Le calcule direct nous donne une forme indéterminée de type $\frac{0}{0}$. On remarque que la règle de l'Hôpital est

applicable pour cet exemple. On a alors

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(ax)}{\sin(bx)} = \lim_{x\to 0}\frac{a\cos(ax)}{b\cos(bx)} = \frac{a}{b}.$$

2) En appliquant la règle de l'Hôpital deux fois, on obtient

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{2x} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)}{2} = \frac{1}{2}.$$

3) On a

$$\lim_{x\to 1}\frac{\ln(x+\sqrt{x^2+1})}{x^2-1} = \lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}}{2x} = \frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

Exercices

Exercice 58 *Soit* $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ *une fonction dérivable et telle que* $f(0) = f(1)$. *Considérons la fonction* g *définie par :*

$$g(x) = \begin{cases} f(2x) & si \;\; x \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ f(2x-1) & si \;\; x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases}$$

1. *Montrer que* g *est continue.*
2. *A quelle condition* g *est-elle dérivable ?*

Exercice 59 *Soit* $m \in \mathbb{N}^*$. *Considérons la fonction* f_m *définie sur* $\mathbb{R}$ *par*

$$f_m(0) = 0 \quad et \quad f_m(x) = x^m sin(1/x) \quad si \;\; x \neq 0$$

1. *Montrer que* f_m *est continue sur* $\mathbb{R}$.
2. *Étudier la dérivabilité de* f_m *au point* 0.
3. *Pour quelles valeurs de* m *la fonction* f_m *est de classes* $C^1(\mathbb{R})$, $C^2(\mathbb{R})$ *?*

Exercice 60 *Soit* $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ *une fonction continue et dérivable sur* $]0,1[$ *telles que* $f(0) = 0$ *et*

$$\exists M > 0 : \; |f'(x)| \leq M|f(x)| \quad \forall x \in]0,1[$$

Montrer que $f(x) = 0$, $\forall x \in [0,1]$.

Exercice 61 *Soit* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *une fonction réelle tel que :*

$$\exists \lambda > 0, \; \forall x, y \in \mathbb{R} : \; |f(x) - f(y)| \leq |x - y|^{1+\lambda}$$

Montrer que f *est constante sur* $\mathbb{R}$.

Exercice 62 *Montrer en utilisant la dérivation, les relations suivantes :*

1. *Pour tout* $x \in [-1,1]$ *:* $Arcsin(x) + Arccos(x) = \frac{\pi}{2}$.
2. *Pour tout* $x \in [-1,1]$ *:* $Arccos(x) + Arccos(-x) = \pi$.
3. *Pour tout* $x \in \mathbb{R}^*$ *:* $Arctan(x) + Arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$.
4. *Pour tout* $x \in \mathbb{R}$ *:* $Argsh(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$.
5. *Pour tout* $x \in [1, +\infty[$ *:* $Argch(x) = \ln(x + \sqrt{x^2-1})$.
6. *Pour tout* $x \in]-1,1[$ *:* $Argth(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$.

Exercice 63 *Calculer dans les cas suivants* $f'(x)$ *en précisant en chaque cas le domaine de dérivabilité :*

$$(1)\; f(x) = x^3 sin(\sqrt{x}) \quad (2)\; f(x) = \frac{Arcsin(1/x)}{x} \quad (3)\; f(x) = (Arccos(\sqrt{x}))^2$$

$$(4)\; f(x) = \left(\frac{\pi - Arctan(x)}{\pi + Arctan(x)}\right)^3 \quad (5)\; f(x) = Argsh\left(\frac{1-x}{1+x}\right) \quad (6)\; f(x) = Argth(e^{-x}).$$

Exercice 64 *Considérons la fonction f définie par :*

$$f(0)=0 \quad et \quad f(x)=exp\left(-\frac{1}{x^2}\right) \quad si\ x\neq 0$$

Montrer que $f^{(n)}(0)=0$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$.

Exercice 65 *Calculer la dérivée n^{me} de la fonction f sur I dans les cas suivants :*

1. $f(x)=x^5\,e^{-2x}$, $n=5$, $I=\mathbb{R}$.
2. $f(x)=\frac{x^3}{x+1}$, $n=4$, $I=\,]-1,+\infty[$.

Exercice 66 *Trouver les extrima des fonctions suivantes sur les intervalles considérés :*

$$(1)\ f(x)=e^{-x}\sin(x), \quad sur\ [0,\pi]. \quad (2)\ g(x)=\left(x^3-2x\right)^{2/3}, \quad sur\ [0,3].$$

Exercice 67 *Montrer que : $\forall x,y\in[0,1[$ tel que $x<y$:*

$$\frac{y-x}{\sqrt{1-x^2}}<Arcsin(y)-Arcsin(x)<\frac{y-x}{\sqrt{1-y^2}}$$

Exercice 68 *Calculer en utilisant la règle de l'Hôpital les limites suivantes :*

$$(1)\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin(7x)}{\sin(2x)} \qquad (2)\ \lim_{x\to 0}\frac{Arcsin(3x)}{x} \qquad (3)\ \lim_{x\to 0}\frac{x-x\cos(x)}{x-\sin(x)}$$

$$(4)\ \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(ax)}{x\tan(bx)}, \quad a\in\mathbb{R},\ b\neq 0. \qquad (5)\ \lim_{x\to 0}\frac{a^x-b^x}{c^x-d^x}, \quad 0<a<b<c<d.$$

$$(6)\ \lim_{x\to 1}\frac{x^2-1+\ln(x)}{e^x-e} \qquad (7)\ \lim_{x\to 0}\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1} \qquad (8)\ \lim_{x\to 0}\frac{1}{x-1}-\frac{1}{\ln(x)}$$

$$(9)\ \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(1-\cos(x))}{x^4} \qquad (10)\ \lim_{x\to 0}\frac{Arcsin(x)-Arctan(x)}{x^3} \qquad (11)\ \lim_{x\to 0}\frac{x\sin(1/x)}{\ln(x+1)}.$$

Chapitre 5

Formules de Taylor et développements limités

Dans ce chapitre, on va étudier les formules de Taylors et les dévellopements limités de fonctions réelles d'une variable réelle. L'idée de base est d'approcher une fonction par un polynôme autour d'un point donné.

5.1 Formules de Taylor

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction réelle continue sur un intervalle ouvert I et dérivable en un point $x_0 \in I$. On sait bien qu'il existe une fonction $\varepsilon : V(x_0) \longrightarrow \mathbb{R}$ où $V(x_0) \subset I$ est un voisinage de x_0, tels que $\lim_{x\to x_0} \varepsilon(x) = 0$, et pour $x \in V(x_0)$ assez proche de x_0, on a

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + (x - x_0)\ \varepsilon(x) \tag{5.1}$$

On constate que la fonction f peut être approximée par un polynôme $P(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ de degré 1 au voisinage de x_0. L'erreur commise par cette approximation est $R_1(x) = (x - x_0)\ \varepsilon(x)$ tendant vers zéro quand $x \longrightarrow x_0$.

Si $f^{(n)}(x_0)$ existe, la formule de **<u>Taylor-Young</u>**, généralise la formule (5.1) en montrant que

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x) \quad , \quad x \in V(x_0)$$

Où P_n est un polynôme de degré n et la quantité $R_n(x)$ appelée reste de la formule, tel que

$$R_n(x) = (x - x_0)^n \varepsilon(x) \ \text{ avec } \lim_{x\to x_0} \varepsilon(x) = 0\,.$$

D'autre part, si la fonction f est dérivable sur I, alors pour tout $, b \in I$, la formule des accroissements finis s'applique et on a

$$f(b) = f(a) + f'(c)(b - a) \tag{5.2}$$

Où c est un nombre strictement compris entre a et . i.e. $c = a + \theta(b - a)$ avec un $\theta \in]0\,,\,1[$.

La formule (5.2) est un cas particulier de la formule de **<u>Taylor-Lagrange</u>** d'ordre n si la fonction f est $n+1$ fois dérivable sur I où $n \in \mathbb{N}$.

5.1.1 Formule de Taylor Lagrange

Théorème 5.1

(Formule de Taylor avec reste de Lagrange)

Soient $n \in \mathbb{N}$ et I un intervalle ouvert. Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction réelle. Supposons que f est $n+1$ fois dérivable sur I. Soit $x_0 \in I$. Alors, pour tout $x \in I$, $x \neq x_0$ il existe un nombre réel c

strictement compris entre x_0 et x tel que :

$$f(x) = f(x_0) + \frac{(x-x_0)}{1!} f'(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2!} f^{(2)}(x_0) + \cdots + \frac{(x-x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0) + \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c) \qquad (TL)$$

Le terme $R(x_0, x) = \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)$ est appelé reste de Lagrange d'ordre $n+1$.
La relation (TL) est appelée formule de Taylor-Lagrange d'ordre n entre x_0 et x . (avec un reste d'ordre $n+1$)

Remarques :

1. Pour $n = 0$ dans la relation (TL) , on retrouve la formule des accroissements finis.
2. Dans la relation (TL) , le nombre c est inconnu. La seule information sur le nombre c est qu'il soit strictement compris entre x et x_0 , pour tout x , $x_0 \in I$. i.e. $c = x_0 + \theta\,(x - x_0)$ pour un certain $\theta \in]0\,,1[$.
3. La formule (TL) peut s'écrire sous la forme : $f(x) = P_n(x - x_0) + R_n(x_0\,,\,x)$ avec

$P_n(x-x_0) = f(x_0) + \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \right) (x-x_0)^k$ est appelé le polynôme de Taylor de f au point x_0 , et
$R_n(x_0, x) = \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x_0 + \theta\,(x-x_0)\ )$, $0 < \theta < 1$, le reste de Lagrange .

1. Si on pose $h = x - x_0$, et $c = x_0 + \theta h$ où $\theta \in]0\,,\,1[$, alors la formule de Taylor-Lagrange (TL) devient

$$f(x_0+h) = f(x_0) + \frac{h}{1!} f'(x_0) + \frac{h^2}{2!} f^{(2)}(x_0) + \cdots + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x_0) + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x_0 + \theta h\ )$$

Exemple 5.1 Soit $f(x) = \sin(x)$ où $x \in \mathbb{R}$. Comme f est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$, on en déduit que le théorème 1 de Taylor Lagrange s'applique pour f . Les dérivées jusqu' au l'ordre 4 de f sont :

$$f'(x) = \cos(x)\ ,\quad f''(x) = -\sin(x)\ ,\quad f^{(3)}(x) = -\cos(x)\ ,\quad f^{(4)}(x) = \sin(x)$$

Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $x \neq \frac{\pi}{4}$. Alors il existe un nombre c strictement compris entre x et $\frac{\pi}{4}$ tel que :

$$\begin{aligned} f(x) = f\left(\frac{\pi}{4}\right) &+ f'\left(\frac{\pi}{4}\right)\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{2!} f''\left(\frac{\pi}{4}\right)\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2 + \frac{1}{3!} f^{(3)}\left(\frac{\pi}{4}\right)\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^3 \\ &+ \frac{1}{4!} f^{(4)}(c)\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^4 \end{aligned}$$

Ainsi , la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre 3 (avec reste d'ordre 4) entre x et $\frac{\pi}{4}$ est :

$$\sin(x) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{\sqrt{2}}{4}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2 - \frac{\sqrt{2}}{12}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^3 + \frac{\sin(c)}{24}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^4$$

Avec $c = \frac{\pi}{4} + \theta\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$; $\theta \in]0\,,\,1\,[$.

5.1.2 Formule de Maclaurin Lagrange

Définition 5.1

Soit I un intervalle ouvert contenant 0. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction réelle vérifiant les hypothèse du théorème 1 . La formule de Taylor Lagrange (TL) avec $x_0 = 0$ est appelée formule de Maclaurin-Lagrange :

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!} f'(0) + \frac{x^2}{2!} f^{(2)}(0) + \cdots + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\theta\,x)\ ,\quad \theta \in]0\,,\,1[\qquad (5.3)$$

La relation (5.3) est appelée formule de Maclaurin-Lagrange d'ordre n de la fonction f .

Remarques :

1. Le nombre x dans la formule de Maclaurin-Lagrange (ML) est positif ou négatif strictement.
2. La formule de Maclaurin Lagrange (ML) s'écrit : $f(x) = P_n(x) + R_n(x)$, avec

$P_n(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ où $a_0 = f(0)$ et $a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}$ Pour $k = 1, 2, \ldots, n$.

$R_n(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\theta\, x)$ avec $\theta \in]0\,,\,1[$.

Exemple 5.2 Ecrire la formule de Maclaurin-Lagrange d'ordre n de la fonction $x \mapsto e^x$.

Réponses : La fonction f est indéfiniment dérivable su $\mathbb{R}$. Sa dérivée d'ordre n est $x \mapsto f^{(n)}(x) = e^x$. Donc $f^{(n)}(0) = 1$

Ainsi, la formule de Maclaurin-Lagrange de f s'écrit

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}\, e^{\theta x}}{(n+1)!} \qquad avec \quad 0 < \theta < 1$$

5.1.3 Formule de Taylor Young

Théorème 5.2

(Formule de Taylor avec reste de Young)

Soient $n \in \mathbb{N}$ et I un intervalle ouvert. Soit $f\ : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction réelle. Soit $x_0 \in I$ et supposons que $f^{(n)}(x_0)$ existe.

Alors il existe une fonction $\varepsilon\ : V(x_0) \longrightarrow \mathbb{R}$ définie au voisinage $V(x_0)$ de x_0 tels que $\lim_{x\to x_0} \varepsilon(x) = 0$ et pour tout

$x \in V(x_0)\,,\, x \neq x_0$ on a :

$$f(x) = f(x_0) + \frac{(x-x_0)}{1!} f'(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2!} f^{(2)}(x_0) + \cdots + \frac{(x-x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0) + (x-x_0)^n\, \varepsilon(x) \qquad (TY)$$

Le terme $(x-x_0)^n\, \varepsilon(x)$ est appelé <u>reste de Young</u> d'ordre n . La relation (TY) est appelée formule de Taylor-Young d'ordre n autour de x_0 .

Remarques :

1. Pour $n = 0$ la formule de Taylor-Young (TY) s'écrit : $f(x) = f(x_0) + \varepsilon(x)$, donc $\varepsilon(x_0) = 0$. C'est-à-dire la fonction ε est continue au point x_0 .
2. Il est clair que si la formule de Taylor-Lagrange est applicable pour une fonction réelle f alors la formule de Taylor-Young est automatiquement applicable. En effet, on a

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \right) (x-x_0)^k + \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c) \\ &= \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \right) (x-x_0)^k + (x-x_0)^n \end{aligned}$$

Exemple 5.3 Ecrire la formule de Taylor-Young de la fonction $x \longmapsto \ln(x+2)$ à l'ordre 3 autour de 1 .

Réponses : La fonction $f\ :\ x \longmapsto \ln(x+2)$ est indéfiniment dérivable sur $]-2\,,\,+\infty[$. On doit calculer les trois premières dérivées de la fonction f :

$$f'(x) = \frac{1}{x+2} \quad \Longrightarrow f'(1) = \frac{1}{3}$$

$$f''(x) = -\frac{1}{(x+2)^2} \quad \Longrightarrow \frac{f''(1)}{2!} = -\frac{1}{18}$$

$$f^{(3)}(x) = \frac{2}{(x+2)^3} \quad \Longrightarrow \frac{f^{(3)}(1)}{3!} = \frac{1}{81}$$

Ainsi, la formule de Taylor- Young de f d'ordre 3 autour de 1 , s'écrit

$$\ln(x+2) = \ln 3 + \frac{1}{3}(x-1) - \frac{1}{18}(x-1)^2 + \frac{1}{81}(x-1)^3 + (x-1)^3\, \varepsilon(x)$$

Avec $\lim_{x\to 1} \varepsilon(x) = 0$.

5.1.4 Formule de Maclaurin Young

Si $x_0 = 0$ dans le théorème 2 , alors on obtient sous les mêmes hypothèses, la formule de Maclaurin Young à l'ordre n :

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!} f'(0) + \frac{x^2}{2!} f^{(2)}(0) + \cdots + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + x^n \varepsilon(x) \qquad (M\ Y)$$

avec $\lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$.

Remarque : La formule de Maclaurin Young (MY) s'écrit : $f(x) = P_n(x) + x^n \varepsilon(x)$, avec $\lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$ et $P_n(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ où $a_0 = f(0)$ et $a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}$ Pour $k = 1, 2, \ldots, n$.

Exemple 5.4 Ecrire la formule de Maclaurin Young à l'ordre 4 de la fonction $f :]-1, +\infty[\to \mathbb{R} ; f(x) = \frac{3}{2x+1}$

.

Réponse : La fonction $f : x \mapsto \frac{3}{2x+1}$ est de classe C^∞ sur l'intervalle $I =]-\frac{1}{2}, +\infty[$ qui contient 0. Donc la formule de Maclaurin Young est applicable pour f. D'autre part, la dérivée $n^{ième}$ de f existe au point 0 pour tout $\in \mathbb{N}$. Un calcul simple montre que : $f^{(n)}(x) = \frac{3(-2)^n\, n!}{(2x+1)^{n+1}}$, $\forall x \in I$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, nous avons $\frac{f^{(n)}(0)}{n!} = 3(-2)^n$.

La formule de Maclaurin Young de f à l'ordre n est alors

$f(x) = 3 - 6x + 12x^2 - 24x^3 + \cdots + 3(-2)^n x^n + x^n \varepsilon(x)$ avec $\lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$.

Remarque générale : La formule de Taylor Lagrange a un caractère global (elle est applicable sur un intervalle) tandis que celle de Taylor Young a un caractère local (elle est applicable sur un voisinage d'un point).

5.1.5 La notation petit o

Définition 5.2

Soit $x_0 \in \mathbb{R}$, et soit V un voisinage de x_0 . Soient f , g deux fonctions réelles définies sur $V(x_0)$ sauf peut être en x_0 . Supposons que la fonction g ne s'annule pas sur $V \setminus \{x_0\}$.

On dit que f est négligeable devant g au voisinage de x_0 si $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$

On note par $f = o(g)$, $x \to x_0$ ou par $f(x) = o(g(x))$, $x \to x_0$ pour dire que f est négligeable devant g au voisinage de x_0. Cette notation se lit : f est un petit oh de g lorsque x tend vers x_0.

S'il n'est y a pas de risque de confusion, on note tout simplement $f = o(g)$ ou $f(x) = o(g(x))$ en supposant que x_0 est défini par le contexte . En particulier :

1. *$f(x) = o(1)$ signifie que $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$. (même si $x_0 = 0$).*
2. *$f(x) = o(x^n)$ signifie que $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^n} = 0.$*
3. *$f(x) = o((x - x_0)^n)$ signifie que $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{(x-x_0)^n} = 0$.*

Il est clair que la notation $o(1)$ au voisinage de x_0 , représente n'importe quelle fonction réelle qui tend vers 0, lorsque sa variable tend vers x_0 . Donc si on a

$$f(x) = o((x - x_0)^n) \iff \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{(x - x_0)^n} = 0$$

Il en résulte que

$$f(x) = o((x - x_0)^n) \iff \frac{f(x)}{(x - x_0)^n} = o(1)$$

Donc

$$f(x) = o((x - x_0)^n) \iff f(x) = (x - x_0)^n\, o(1)$$

Autrement dit, n'importe quelle fonction négligeable devant $(x - x_0)^n$ au voisinage de x_0 , s'écrit comme le produit de $(x-x_0)^n$ par une certaine fonction qui tend vers zéro au point x_0 .

Exemple 5.5

1. On a $\frac{x^4}{x^3} = x \to 0 \ quand \ x \to 0$, donc $x^4 = o(x^3)$.
2. On a $\frac{\sin^2(x)}{x} = \sin(x) \left(\frac{\sin(x)}{x}\right) \to 0$ quand $\to 0$, puisque $\sin(x) \to 0$ et $\frac{\sin(x)}{x} \to 1$, donc $\sin^2(x) = o(x)$.
3. $\lim\limits_{x\to 0} x\cos\left(\frac{1}{x}\right) = 0$, donc $x\cos\left(\frac{1}{x}\right) = o(1)$.
4. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^4-4x+3}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1}\left(x^3+x^2+x-3\right) = 0$, donc $\frac{x^4-4x+3}{x-1} = o(x-1)$. (Au voisinage de 1) .

<u>**Remarques importantes**</u> :

1. La notation $o(g)$ au voisinage d'un nombre x_0 est l'ensemble de toutes les fonctions réelle définies au voisinage de x_0 ,sauf peut être en x_0 ,qui sont négligeables devant g au voisinage de x_0 . Ainsi

$$o(g) = \left\{ f \ : V(x_0) \to \mathbb{R} \ : \ \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0 \right\}$$

Donc l'écriture $f = o(g)$ signifie $f \in o(g)$. Autrement dit, dans l'écriture $f = o(g)$, la fonction f est une fonction parmi toute les autres fonctions négligeables devant g au voisinage de x_0 . C'est-à-dire f est une représentante de $o(g)$. Souvent, on écrit $f(x) = o(g(x))$ à la place de $f = o(g)$.

Par exemple on a bien qu'au voisinage de 0 : $x^5 = o(x^4)$ et que $x^5 = o\left(x^3\right)$, cela n'implique pas que $o\left(x^4\right) = o(x^3)$, mais plutôt signifie que l'ensemble $o\left(x^4\right)$ est inclus dans l'ensemble $o(x^3)$. Ainsi, au voisinage de 0; nous avons les inclusions

$$o\left(x^{n+1}\right) \subset o(x^n) \subset \cdots \subset o\left(x^3\right) \subset o\left(x^2\right) \subset o(x) \subset o(1) \qquad (*)$$

1. De la relation $(*)$ on en déduit que : $f(x) = o(x^n) \ \ et \ \ p \le n \Longrightarrow f(x) = o(x^p)$.
2. L'écriture $f(x) = p(x) + o((x-x_0)^n)$ signifie que dans un voisinage de x_0 , $f(x)$ est égale à $p(x)$ plus une fonction négligeable devant $(x-x_0)^n$. C'est-à-dire qu'il existe une fonction $\varepsilon : V(x_0) \to \mathbb{R}$ définie sur un voisinage $V(x_0)$ de x_0 tels que $\lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$ et $f(x) = p(x) + (x-x_0)^n \varepsilon(x)$ sur $V(x_0)$.
3. Le reste de la formule de Taylor-Young (TY) (resp : Maclaurin-Young (MY)) à l'ordre n autour de x_0 , (resp : autour de 0) est négligeable devant $(x-x_0)^n$ (resp : devant x^n) , il s'écrit alors $o((x-x_0)^n)$ (resp : $o(x^n)$) .

Ainsi la formule de de Taylor-Young (TY) s'écrit de la manière suivante :

$$f(x) = f(x_0) + \frac{(x-x_0)}{1!} f'(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2!} f^{(2)}(x_0) + \cdots + \frac{(x-x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0) + o\left((x-x_0)^n\right)$$

et la formule de Maclaurin Young s'écrit

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!} f'(0) + \frac{x^2}{2!} f^{(2)}(0) + \cdots + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + o(x^n)$$

5.1.6 Formules de Maclaurin-Young des fonctions usuelles

Les fonctions $x \mapsto e^x$, $\mapsto \sin(x)$, $x \mapsto \cos(x) \quad x)$, $x \mapsto \frac{1}{1-x}$, $x \mapsto \frac{1}{1+x}$, $x \mapsto \ln(x+1)$, $x \mapsto (x+1)^\alpha$ ($\alpha \in \mathbb{R}^* \setminus \{1\}$) admettent des dérivées de n'import quel ordre au point 0 . Donc elles admettent des développements de Maclaurin-Young d'ordre n quelconque. Un calcul simple montre qu'au voisinage de 0 , on a : (Vérifier les calculs a titre d'exercice)

1. $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$.
2. $\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{(-1)^p x^{2p+1}}{(2p+1)!} + o\left(x^{2p+1}\right), \quad n = 2p+1$
3. $\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{(-1)^p x^{2p}}{(2p)!} + o\left(x^{2p}\right), \quad n = 2p$.
4. $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + o(x^n)$ et $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + o(x^n)$.
5. $\ln(x+1) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + \frac{(-1)^n}{n} x^n + o(x^n)$.

6. $(x+1)^{\alpha} = 1+\alpha\, x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}\, x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}\, x^3 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}\, x^n + o(x^n)$. $\alpha \in \mathbb{R}^* \setminus \{1\}$.
7. $\sqrt{x+1} = (x+1)^{\frac{1}{2}} = 1+\frac{x}{2} - \frac{x^2}{2\times 4} + \frac{3\, x^3}{2\times 4\times 6} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}\, 1\times 3\times 5\times \cdots \times (2n-3)}{2\times 4\times 6\times \cdots \times (2n)}\, x^n + o(x^n)$.

5.1.7 Application de la formule de Taylor : Recherche d'extremum

On a déjà vu que si une fonction dérivable f admet un extremum local en un point x_0 alors $f'(x_0) = 0$; mais la réciproque est fausse en général. Ce problème peut être précisé si la formule de Taylor est applicable à la fonction f au voisinage de x_0 .

Théorème 5.3

Soit f une fonction réelle de classe C^n ($n \geq 2$) au voisinage d'un point x_0 . Supposons de plus que :

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \cdots = f^{(n-1)}(x_0) = 0 \qquad et \qquad f^{(n)}(x_0) \neq 0.$$

Alors :

1. *f admette un maximum local en x_0 si et seulement si n est pair et $f^{(n)}(x_0) < 0$.*
2. *f admette un minimum local en x_0 si et seulement si n est pair et $f^{(n)}(x_0) > 0$.*

La preuve du théorème précédent est basé sur le lemme suivant :

Lemme 5.1

Soit $u : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction réelle continue sur l'intervalle ouvert I . Soit $x_0 \in I$, telle que $u(x_0) \neq 0$. Alors il existe un nombre réel > 0 , telle que sur l'intervalle $]x_0 - \eta\, ,\, x_0 + \eta\, [$, le signe de $u(x)$ est celui de $u(x_0)$.

Démonstration La fonction u étant continue au point x_0 , il vient alors d'après la définition que

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, r > 0 : \forall x \in I \quad : \quad x_0 - r < x < x_0 + r \implies u(x_0) - \varepsilon < u(x) < u(x_0) + \varepsilon \qquad (*)$$

Puisque $u(x_0) \neq 0$, alors on peut choisir $\varepsilon = \frac{|u(x_0)|}{2} > 0$. Alors d'après la relation $(*)$ on en déduit qu'il existe un $\eta > 0$ tel que :

$$x_0 - \eta < x < x_0 + \eta \implies u(x_0) - \frac{|u(x_0)|}{2} < u(x) < u(x_0) + \frac{|u(x_0)|}{2} \qquad (**)$$

Donc :

1. si $u(x_0) > 0$ alors la relation $(**)$ entraine que $u(x) > \frac{u(x_0)}{2} > 0$, $\forall\, x \in\,]x_0 - \eta\, ,\, x_0 + \eta[$.
2. si $u(x_0) < 0$ alors la relation $(**)$ entraine que $u(x) < \frac{u(x_0)}{2} < 0$, $\forall\, x \in\,]x_0 - \eta\, ,\, x_0 + \eta[$.

■

Preuve du Théorème 3 : La fonction f étant de classe C^n au voisinage V de x_0 , alors $f^{(n)}$ est continue sur V. Comme $f^{(n)}(x_0) \neq 0$, il vient d'après le lemme précédent il existe un nombre réel $\eta > 0$, telle que $W = \,]x_0 - \eta\, ,\, x_0 + \eta\, [\, \subset V$ et que $f^{(n)}(x)$ est de même signe de $f^{(n)}(x_0)$ sur l'intervalle W. D'autre part, la formule de Taylor – Lagrange d'ordre $n-1$ est applicable à la fonction f sur W. Donc, pour tout $x \in W$ et $x \neq x_0$ on a

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)^n\, \frac{f^{(n)}(c)}{n!} \qquad (***)$$

Où c est un nombre strictement compris entre x_0 et . Ainsi le signe de $f^{(n)}(c)$ est celui de $f^{(n)}(x_0)$. Donc

1. Si n est pair et $f^{(n)}(x_0) > 0$ alors $(x - x_0)^n\, \frac{f^{(n)}(c)}{n!} > 0$; ce qui implique d'après $(***)$ que pour tout $x \in W$

$f(x) > f(x_0)$; C'est-à-dire $f(x_0)$ est minimum local de f. .

1. Si n est pair et $f^{(n)}(x_0) < 0$ alors $(x - x_0)^n\, \frac{f^{(n)}(c)}{n!} < 0$; ce qui implique d'après $(***)$ que pour tout $x \in W$

$f(x) < f(x_0)$; C'est-à-dire $f(x_0)$ est maximum local de . .
Un cas particulier et fréquent du théorème précédent est pour $n = 2$. Nous avons donc le corollaire suivant :
Corollaire 1 : Soit f une fonction réelle de classe C^2 au voisinage d'un point x_0 telles que $f'(x_0) = 0 \;\; et \;\; f''(x_0) \neq 0$.
Alors :

1. f admette un maximum local en x_0 si et seulement si n est pair et $f''(x_0) < 0$.
2. f admette un minimum local en x_0 si et seulement si n est pair et $f''(x_0) > 0$.

Exemple 6 : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = (x+1)^4 \, e^{-x}$. Il est clair que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.
On a pour tout $\in \mathbb{R}$, $f'(x) = (x+1)^3 (3-x) e^{-x}$. Donc $f'(-1) = f'(3) = 0$. (1 et 3 sont deux points critiques de f).
D'autre part, par un calcul des dérivées d'ordre supérieur, on trouve facilement que

1. $f'(3) = 0$ et $f''(3) = -64 \, e^{-3} \; < 0$. Donc $f(3) = 256 \, e^{-3}$ est un maximum local de f .
2. $f'(-1) = f''(-1) = f^{(3)}(-1) = 0$ et $f^{(4)}(-1) = 24 \, e \; > 0$. Donc $f(-1) = 0$ est un minimum local de . De plus il est clair que pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f(x) \geq 0 = f(-1)$, ce que signifie que 0 est un minimum global de f .

5.2 Développements limités d'ordre n au voisinage de zéro

Nous avons vu que la formule de Taylor-Young permet d'approchée une fonction f atour d'un point x_0 par un polynôme P_n de degré n dés que $f^{(n)}(x_0)$ existe. Plus précisément, la différence $f - P_n$ est négligeable devant la fonction $x \mapsto (x-x_0)^n$ au voisinage de x_0 , c'est-à-dire : $f(x) = P_n(x) + o\left((x-x_0)^n\right)$ ($) .
Soit par exemple f définie sur $I = [-1 \; , \; 1]$, par

$$f(x) = \begin{cases} 1 + x + 2x^2 + x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & si \;\; x \in I \; et \; x \neq 0 \\ 0 & si \quad x = 0 \end{cases}$$

Il est clair que f n'est pas continue au point 0 . De plus, on voit que $x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right) = o(x^2)$ au voisinage de 0. Donc, pour tout $x \in I$ et $\neq 0$, la relation ($) est satisfaite avec $x_0 = 0$, et $P_n(x) = 1 + x + 2x^2$, $n = 2$. En conséquence, dans le cas général, Le polynôme P_n qui vérifier ($) au voisinage de x_0 peut exister sans que la fonction f soit continue en x_0 . Ceci nous amène à la notion de développement limité.

5.2.1 Définition et exemple

Définition 5.3

Soit f une fonction réelle définie sur un voisinage de 0 , sauf peut être en 0 . On dit que f admet un développement limité d'ordre n au voisinage de 0 s'il existe un intervalle I de centre 0 des constantes réels a_0 , a_1 , a_2 , ..., a_n tels que pour tout $x \in I$ et $x \neq 0$ on a :

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 \, x^2 + \cdots + a_n \, x^n + x^n \varepsilon(x) \qquad (dl)$$

Où $\varepsilon \; : \; I \to \mathbb{R}$ est une fonction réelle, telle que $\lim_{x\to 0} \; \varepsilon(x) \; = \; 0$.
La relation (dl) s'écrit aussi de la manière suivante

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 \, x^2 + \cdots + a_n \, x^n + o(x^n)$$

Le polynôme $P_n(x) = \; a_0 + a_1 x + a_2 \, x^2 + \cdots + a_n \, x^n$ dans la formule (dl) est appelé partie régulière du développement et
$x^n \varepsilon(x) = o(x^n)$ est appelé reste ou terme complémentaire .

Abréviation : La phrase, ‘‘ développement limité d'ordre n au voisinage de 0 ‘‘ sera agréger en $DL_n(0)$.
Exemple 7 : En considérant la suite géométrique de terme général x^n où $x \neq 1$, on a bien la somme

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$$

Donc, pour tout $x \neq 1$ on a

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \frac{x^{n+1}}{1-x}$$

Remarquons que $\frac{x^{n+1}}{1-x} = x^n\ \varepsilon(x)$ avec $\varepsilon(x) = \frac{x}{1-x}$. Comme $\lim_{x\to 0}\ \varepsilon(x) = 0$, on en déduit que le $DL_n(0)$ de la fonction $x \mapsto \frac{1}{1-x}$ au voisinage de 0 est $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + x^n\ \varepsilon(x)$
On écrit aussi $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + o(x^n)$ pour tout x dans un voisinage de 0 et $\neq 1$. En particulier

1. Le $DL_0(0)$ de la fonction $x \mapsto \frac{1}{1-x}$ est : $\frac{1}{1-x} = 1 +\ \varepsilon(x) = 1 + o(1)$.
2. Le $DL_1(0)$ de la fonction $x \mapsto \frac{1}{1-x}$ est : $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x\,\varepsilon(x) = 1 + x + o(x)$.
3. Le $DL_2(0)$ de la fonction $x \mapsto \frac{1}{1-x}$ est : $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^2\ \varepsilon(x) = 1 + x + x^2 + o(x^2)$.

Remarques :

1. _Si f admet un $DL_n(0)$ alors f a une limite finie au point 0 . En effet

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2\, x^2 + \cdots + a_n\, x^n + o(x^n) \implies \lim_{x\to 0}\ f(x) = a_0 \quad existe$$

Donc par contra posé on en déduit que
($\lim_{x\to 0}\ f(x)$ n'existe pas) $\implies$ (f n'admet aucun $DL_n(0)$) .
Autrement dit, l'existence de la limite de f au point 0 est une condition nécessaire pour que son $DL_n(0)$ soit existe.
Par exemple, $\lim_{x\to 0}\ \cos\left(\frac{1}{x}\right)$ n'existe pas ce qui signifie que la fonction $x \mapsto \cos\left(\frac{1}{x}\right)$ n'a aucun $L_n(0)$, ($\forall\ n \geq 0$) .

1. Si f est continue au point 0 et admet un $DL_1(0)$ (DL à l'ordre 1) alors f s'écrit au voisinage de 0 :

$$f(x) = a_0 + a_1 x + o(x)$$

On a $\lim_{x\to 0}\ f(x) = a_0 = f(0)$. Ainsi

$$f(x) = f(0) + a_1\ x + o(x) \implies f(x) - f(0) = a_1 x + x\ o(1) \implies \frac{f(x) - f(0)}{x} = a_0 + o(1)$$

Donc $\lim_{x\to 0}\ \frac{f(x)-f(0)}{x} = a_1$ ce qui signifie que f est dérivable au point 0 et $f'(0) = a_1$.
Nous avons établi alors que pour une fonction f continue en 0 :
(f admet un $DL_1(0)$) $\implies$ (f est dérivable au point 0)
Par contra posé nous obtenons alors
(f est continue en 0 mais elle n'est pas dérivable au point 0) $\implies$ (f n'admet aucun $DL_n(0)$ pour $n \geq 1$) .

5.2.2 Unicité de développement limité

Théorème 5.4

Si une fonction f admet un développement limité d'ordre n au voisinage de 0 , ce développement est unique.

Démonstration Supposons que la fonction f admet deux $DL_n(0)$:
$f(x) =\ a_0 + a_1 x + a_2\, x^2 + \cdots + a_n\, x^n + x^n\ \varepsilon_1(x)$ avec $\lim_{x\to 0}\ \varepsilon_1(x) = 0$,
$f(x) =\ b_0 + b_1 x + b_2\, x^2 + \cdots + b_n\, x^n + x^n\ \varepsilon_2(x)$ avec $\lim_{x\to 0}\ \varepsilon_2(x) = 0$.
Alors on a pour tout $x \neq 0$ dans un voisinage de 0 :

$$(a_0 - b_0) + (a_1 - b_1)x + \cdots + (a_n - b_n)x^n = x^n\ (\ \ \varepsilon_2(x) - \varepsilon_1(x)\ \ ) \qquad (\$1)$$

En faisant x tendre vers 0 dans la relation ($1) on obtient $a_0 = b_0$. Donc ($1) devient

$$(a_1 - b_1)x + \cdots + (a_n - b_n)x^n = x^n \ (\varepsilon_2(x) - \varepsilon_1(x))$$

Comme $x \neq 0$, on en déduit

$$(a_1 - b_1) + \cdots + (a_n - b_n)x^{n-1} = x^{n-1} \ (\varepsilon_1(x) - \varepsilon_2(x)) \qquad (\$2)$$

Par le passage à la limite dans ($2) quand $x \to 0$, on obtient $a_1 = b_1$. De la même manière on trouve $a_2 = b_2$, ..., $a_{n-1} = b_{n-1}$ et $a_n - b_n = \varepsilon_2(x) - \varepsilon_1(x)$.

Ainsi : $a_n - b_n = \lim_{x\to 0} \ (\varepsilon_2(x) - \varepsilon_1(x)) = 0 \implies a_n = b_n \implies \varepsilon_1(x) = \varepsilon_2(x)$.

Par conséquent, le $DL_n(0)$ de f est unique . ■

Maintenant voyons quelques conséquences importante du théorème d'unicité de DL.

Corollaire 5.1

Si une fonction paire (resp : impaire) admet un développement limité au voisinge de 0 , alors la partie régulière de ce développement est un polynôme pair (resp : impair) .

Démonstration Supposons que f est paire. Soit le $DL_n(0)$ de f :

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2\,x^2 + \cdots + a_n\,x^n + x^n\,\varepsilon(x)$$

En remplaçant x par $-x$, on obtient

$$f(-x) = a_0 - a_1x + a_2\,x^2 + \cdots + (-1)^n\,a_n\,x^n + \ x^n[(-1)^n\,\varepsilon(-x)].$$

En égalant les développements de $f(x)$ et $f(-x)$, il vient $\varepsilon(x) = (-1)^n\,\varepsilon(-x)$ et

$$a_k = (-1)^k a_k \ , \quad \forall\, k \in \{0, 1, 2, \ldots, n\}$$

Maintenant, pour $k = 2p+1$, on trouve $a_{2p+1} = 0$, c'est-à-dire que dans la partie régulière, les coefficients d'indice impair sont tous nuls. Un raisonnement similaire montre que si f est impaire, alors tout les coefficients d'indice pair de la partie régulière de son DL, sont nuls.

Par conséquent, $DL_n(0)$ de f s'écrit :

1. $f(x) = a_0 + a_2x^2 + \cdots + a_{2p}\,x^{2p} + o(x^{2p})$ si f est pair , où p est le plus grand entier tel que $2p \leq n$.
2. $f(x) = a_1x + a_3x^3 + \cdots + a_{2p+1}\,x^{2p+1} + o(x^{2p+1})$ si f est impair , où p est le plus grand entier tel que $2p+1 \leq n$

■

Corollaire 5.2

Si $f^{(n)}(0)$ existe, alors f admet le développement limité unique d'ordre n suivant

$$f(x) = f(0) + f'(0)\ x + \frac{f''(0)}{2!}\,x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\,x^n + o(x^n)$$

Démonstration Si $f^{(n)}(0)$ existe, alors la formule de Maclaurin-Young d'ordre n s'applique à f , et cette formule donne le , $DL_n(0)$ de f puisque ce développement est unique . ■

Remarque Si $f^{(n)}(0)$ existe et si le $DL_n(0)$ de f est

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2\,x^2 + \cdots + a_n\,x^n + o(x^n)$$

Alors d'après le corollaire 2 , on déduit que pour tout les $k = 1, 2, ..n$, on a $a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}$.

5.2.3 Développement limité usuels obtenus par la formule de Maclaurin Young

En appliquant le corollaire 2 précédent, qui affirme que le $DL_n(0)$ d'une fonction f coïncide avec sa formule de Maclaurin-Young dés que $f^{(n)}(0)$ existe, on obtient alors les développements usuels suivants :

1. $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$.

2. $\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{(-1)^p x^{2p+1}}{(2p+1)!} + o\left(x^{2p+1}\right), \quad n = 2p+1$
3. $\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{(-1)^p x^{2p}}{(2p)!} + o\left(x^{2p}\right), \quad n = 2p$.
4. $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + o(x^n)$
5. $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + o(x^n)$.
6. $\ln(x+1) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + \frac{(-1)^n}{n} x^n + o(x^n)$.
7. $(x+1)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!} x^3 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + o(x^n)$. $\alpha \in \mathbb{R}^* \setminus \{1\}$.
8. $\sqrt{x+1} = (x+1)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{2\times4} + \frac{3x^3}{2\times4\times6} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}\, 1\times3\times5\times\cdots\times(2n-3)}{2\times4\times6\times\cdots\times(2n)} x^n + o(x^n)$.

5.2.4 Opérations sur les développements limités

De point de vue théorique, les développements limités des fonctions possédants des dérivées d'ordre n peuvent calculer par la formules de Maclaurin Young. Ceci est possible et pratique si l'on peut calculer facilement les dérivées jusqu'au l'ordre n . Dans le cas général, ces calculs des dérivées sont fastidieux voir très compliqué. Le plus souvent on calcule les développements limités à partir des autres par des opérations algébriques, par dérivation ou par intégration. Rappelons que l'écriture $w = o(x^n)$ signifie que $w \in o(x^n)$. i.e. w est un élément de l'ensemble $o(x^n)$ des fonctions négligeables devant la fonction $x \mapsto x^n$ au voisinage de 0.
Rappelons aussi que $o(1)$ est l'ensemble de toute les fonctions réelles qui tendent vers 0 au point 0.
On a bien évidemment $o(x^n) = x^n\, o(1)$.

Proposition 5.1

1. *Si $u = o(x^n)$ et $n \geq p$ alors $u = o(x^p)$. Autrement dit $o(x^n) \subset o(x^p) \subset o(1)$, $\forall\, p \leq n$.*
2. *Si $u = o(x^n)$ et $\lambda \in \mathbb{R}^*$ alors $\lambda\, u = o(x^n)$. Autrement dit $\lambda\, o(x^n) \subset o(x^n)$, $\forall\, \lambda \in \mathbb{R}^*$, $\forall\, n \geq 0$.*
3. *Si $u = o(x^n)$ et $v = o(x^p)$ alors $u + v \in o(x^{\min\{n\,,\,p\}})$. Autrement dit $o(x^n) + o(x^p) \subset o(x^{\min\{n\,,\,p\}})$.*
4. *Si $u = o(x^n)$ et $v = o(x^p)$ alors $u.v = o(x^{n+p})$. Autrement dit $o(x^n).o(x^p) \subset o(x^{n+p})$.*

Preuve : Exercice .

1 . Développements limités obtenus par restriction :

Proposition 5.2

Si f admet un $DL_n(0)$ alors elle admet aussi des $DL_p(0)$ pour tout $p \leq n-1$.

Démonstration Soit $p \leq n$ et soit le $DL_n(0)$ de f : $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + o(x^n)$.
En se basant sur l'égalité $o(x^n) = x^n o(\mathbf{??})$, on obtient

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_p x^p + x^p(a_{p+1} x + a_{p+2} x^2 + \cdots + a_n x^{n-p} + x^{n-p}\, o(1))$$

On pose $\varepsilon(x) = a_{p+1} x + a_{p+2} x^2 + \cdots + a_n x^{n-p} + x^{n-p} o(\mathbf{??})$. Ainsi, nous avons $\lim_{x\to0} \varepsilon(x) = 0 \Longrightarrow \varepsilon(x) = o(\mathbf{??})$ et

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_p x^p + x^p\, o(1) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_p x^p + o(x^p)$$

C'est le $DL_p(0)$ de la fonction . ■

Exemple 5.6 On a le $DL_5(0)$ de la fonction $x \mapsto \ln(x+1)$: $\ln(x+1) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + o(x^5)$.
Donc , $\ln(x+1) = x - \frac{x^3}{3} + o(x^4)$ car $\frac{x^5}{5} + o\left(x^5\right) = x^4\left(\frac{x}{5} + x\, o(1)\right) = x^4\, o(1) = o(x^4)$.
L'écriture $\ln(x+1) = x - \frac{x^3}{3} + o(x^4)$ est le $DL_4(0)$ de la fonction $x \mapsto \ln(x+1)$.
D'autre part, on a $\ln(x+1) = x - \frac{x^3}{3} + o(x^4) = x - \frac{x^3}{3} + o(x^3)$ c'est le $DL_3(0)$ de la fonction $x \mapsto \ln(x+1)$.

2 . Opérations algébriques sur les développements limités :

Théorème 5.5

Soient f et g deux fonctions réelles admettant des $DL_n(0)$ (de même ordre n). Alors les fonctions $f+g$ et $f.g$
Admettant des $DL_n(0)$, et il en est de même de $\frac{f}{g}$ si $\lim_{x\to 0} g(x) \neq 0$. De plus :

1. *La partie régulière du $DL_n(0)$ de $f+g$ est la somme des parties régulières des $DL_n(0)$ de f et .*
2. *La partie régulière du $DL_n(0)$ de $f.g$ est le polynôme de degré $\leq n$ obtenu on faisant le produit des parties régulières de f par celle de g en ne gardant que les termes de degré inférieur ou égal à n .*
3. *La partie régulière du $DL_n(0)$ de $\frac{f}{g}$ est le quotient à l'ordre n dans la division suivant les puissances croissantes de la partie régulière de f par celle de .*

Exemple 5.7 Trouver le $DL_n(0)$ de la fonction f dans les cas suivants :

1. $f(x) = ch(x)$, $n = 2p$. ($p \geq 1$)
2. $f(x) = sh(x)$, $n = 2p+1$. ($p \geq 0$)
3. $f(x) = \sin(x).\, e^{-x}$, $n = 6$.
4. $f(x) = \tan(x)$, $n = 5$

Réponses :

1. On a déjà vu le $DL_{2p}(0)$ de la fonction $x \mapsto e^x$: $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^{2p}}{(2p)!} + o(x^{2p})$.

En remplaçant x par $-x$, on trouve $e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2!} + \cdots - \frac{x^{2p-1}}{(2p-1)!} + \frac{x^{2p}}{(2p)!} o(x^{2p})$.
Ainsi $ch(x) = \frac{e^x+e^{-x}}{2} = 1 + \frac{x^2}{2\,!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2p}}{(2p)!} + o(x^{2p})$.

1. De la même manière on obtient

$$sh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!} + o(x^{2p+1})$$

2. La partie régulière du $DL_6(0)$ de la fonction $x \mapsto \sin(x)$ est : $\mathrm{P}_1(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$, et celle du $DL_6(0)$ de la fonction $x \mapsto e^{-x}$ est : $P_2(x) = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!}$.

Il est clair que le produit $P_1(x).P_2(x)$ est un polynôme de degré 11. On note par $Q(x)$ ce produit en ne gardant que les termes de puissances ≤ 6 . Ainsi

$$Q(x) = P_1(x) - xP_1(x) + \frac{x^2}{2}\left(x - \frac{x^3}{6}\right) - \frac{x^3}{6}\left(x - \frac{x^3}{6}\right) + \frac{x^4}{24}\,(x) - \frac{x^5}{120}(x)$$

Après les calculs et la réarrangements des termes, on trouve

$$Q(x) = \ x - x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{30}x^5 + \frac{1}{90}x^6$$

Finalement, le $DL_8(0)$ de f est

$$\sin(x)\, e^{-x} = = \ x - x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{30}x^5 + \frac{1}{90}x^6 + o(x^6)$$

1. La partie régulière du $DL_5(0)$ de la fonction $x \mapsto \sin(x)$ est : $\mathrm{P}_1(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$, et celle du $DL_5(0)$ de la fonction $x \mapsto \cos(x)$ est : $P_2(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}$. Donc $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \frac{P_1(x)+o(x^5)}{P_2(x)+o(x^5)}$

Soit $Q(x)$ le quotient obtenu dans la division suivant les puissances croissantes de $P_1(x)$ par $P_2(x)$
On trouve :

$$Q(x) = x + \frac{1}{3}\,x^3 + \frac{2}{15}\,x^5.$$

Finalement, on a

$$\tan(x) = x + \frac{1}{3}\,x^3 + \frac{2}{15}\,x^5 + o(x^5)$$

3 . Développement limité d'une fonction composée :

Proposition 5.3

Soit u deux fonctions admettant des $DL_n(0)$, de parties régulières f_n , u_n . Si $(0) = 0$, la fonction composée $f \circ u$ admet admet alors un $DL_n(0)$, sa partie régulière s'obtient à partir de $f_n \circ u_n$ et en ne gardant que les termes de puissances $\leq\ n$.

Exemple 5.8 Trouver le $DL_n(0)$ de la fonction f dans les cas suivants :

1. $f(x) = e^{\sin(x)}$, $n = 8$.
2. $f(x) = \ln(\cos(x))$, $n = 4$.

Réponses

1. On a $e^x = 1 + \sum_{k=1}^{6} \frac{x^k}{k!} + o(x^6)$ et $u = \sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^6)$.

Alors : $f(x) = e^u = 1 + \sum_{k=1}^{6} \frac{u^k}{k!} + o(x^6)$.

D'autre part, Nous avons :

$$\frac{u^2}{2} = \frac{1}{2}\left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}\right)^2 + o\left(x^8\right) = \frac{1}{2}\left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}\right)\left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}\right) + o(x^6)$$

On fait la multiplication et en ne conservant que les termes de puissances ≤ 8 , nous obtenons :

$$\frac{u^2}{2} = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^4 + \frac{1}{45}x^6 + o\left(x^6\right)$$

De même $\frac{u^3}{6} = \frac{u^2}{2} \cdot \frac{u}{3} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^4 + \frac{1}{45}x^6\right)\left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}\right) + o(x^6)$.

On trouve ainsi : $\frac{u^3}{6} = \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{12}x^5 + o(x^6)$.

De plus , $\frac{u^4}{24} = \frac{1}{4}u\left(\frac{u^3}{6}\right) = \frac{1}{4}\left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}\right)\left(\frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{12}x^5\right) + o\left(x^6\right)$, on trouve après calcul

$$\frac{u^4}{24} = \frac{1}{24}x^4 - \frac{1}{36}x^6 + o(x^6)$$

En poursuivant cette méthodologie, on montre que $\frac{u^5}{120} = \frac{x^5}{120} + o(x^6)$ et $\frac{u^6}{720} = \frac{x^5}{120} + o(x^6)$.

Finalement on fait la somme des termes de type $\frac{u^k}{k!}$ avec $k = 0, 1, 2, \ldots, 6$, nous obtenons

$$e^{\sin(x)} = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{15}x^5 - \frac{1}{240}x^6 + o(x^6).$$

1. Le $DL_4(0)$ de la fonction $x \mapsto \ln(x+1)$ est : $\ln(x+1) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o\left(x^4\right)$ et le $DL_4(0)$ de la fonction

$x \mapsto \cos(x)$ est $\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)$. Donc, $\ln(\cos(x)) = \ln\left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o\left(x^4\right)\right) = \ln(1+u)$ avec $u = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o\left(x^4\right)$. Ainsi :

$$\ln(\cos(x)) = \ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} - \frac{u^4}{4} + o\left(x^4\right)$$

D'autre part, on a

$$-\frac{u^2}{2} = -\frac{1}{2}\left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}\right)^2 + o\left(x^4\right) = -\frac{1}{8}x^4 + o(x^4)$$

Et $\frac{u^3}{3} = -\frac{u^4}{4} = o(x^4)$. Ainsi par la somme de ces termes on trouve finalement

$$\ln(\cos(x)) = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{12}x^4 + o(x^4)$$

4. Développements limités obtenus par intégration :

Définition 5.4

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction réelle continue sur l'intervalle I . Une fonction $F : I \to \mathbb{R}$ dérivable sur I est appelée primitive de f sur I si pour tout $x \in I$: $F'(x) = f(x)$.

On admet le théorème suivant :

Théorème 5.6

Soit I un intervalle ouvert contenant 0 , et soit $f\ : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction réelle continue sur I . Soit $F\ : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une primitive de f sur I . Si f admet le $DL_n(0)$ suivant

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2\ x^2 + \cdots + a_n\ x^n + o(x^n)$$

Alors la fonction F admet le $DL_{n+1}(0)$ (d'ordre $n+1$) suivant

$$F(x) = F(0) + a_0\ x + \frac{a_1}{2}\ x^2 + \frac{a_2}{3}\ x^3 + \cdots + \frac{a_n}{n+1}\ x^{n+1} + o(x^{n+1})$$

Exemple 5.9

1. On sait bien que la fonction $x \mapsto Arctan(x)$ est une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $\mapsto \frac{1}{x^2+1}$.

Or $\frac{1}{x^2+1} = \frac{1}{u+1}$ avec $= x^2 \longrightarrow 0\ quand\ x \longrightarrow 0$. Donc

$$\frac{1}{x^2+1} = \frac{1}{u+1} = 1 - u + u^2 - u^3 + \cdots + (-1)^n u^n + o(u^n)$$

En remplaçons $u = x^2$ dans le développement précédent, on trouve

$$\frac{1}{x^2+1} = \frac{1}{u+1} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots + (-1)^n x^{2n} + o(x^{2n})$$

Comme $an(0) = 0$, il vient d'après le théorème précédent que :

$$\begin{aligned} Arctan(x) &= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots + \frac{(-1)^n}{2n+1}\ x^{2n+1} + o\left(x^{2n+1}\right) \\ &= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots + \frac{(-1)^n}{2n+1}\ x^{2n+1} + o\left(x^{2n+1}\right) \end{aligned}$$

1. Soit $\alpha \in \mathbb{R}^*$, $\alpha \neq -1$. Le $DL_n(0)$ de la fonction $x \mapsto (1+x)^\alpha$ est :

$$\begin{aligned} (x+1)^\alpha &= 1 + \alpha\ x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}\ x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}\ x^3 \\ &+ \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}\ x^n + o(x^n) \end{aligned}$$

En particulier, pour $= -\frac{1}{2}$, on trouve le $DL_n(0)$ de la fonction $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x+1}}$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{x+1}} &= 1 - \frac{1}{2}\ x + \frac{(1-)^2 1 \times 3}{2^2 \times 2!}\ x^2 + \frac{(1-)^3 \times 1 \times 3 \times 5}{2^3 \times 3!}\ x^3 \\ &+ \cdots + \frac{(1-)^n 1 \times 3 \times 5 \times \cdots \times (2n-1)}{2^n \times\ n!}\ x^n + o(x^n) \qquad (*) \end{aligned}$$

Remarquons que $2^n n! = 2 \times 4 \times 6 \times \cdots \times (2n)$ (produit des nombres pairs). Alors $(*)$ devient

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{x+1}} &= 1 - \frac{1}{2}\ x + \frac{(1-)^2 1 \times 3}{2 \times 4}\ x^2 + \frac{(1-)^3 \times 1 \times 3 \times 5}{2 \times 4 \times 6}\ x^3 \\ &+ \cdots + \frac{(1-)^n 1 \times 3 \times 5 \times \cdots \times (2n-1)}{2 \times 4 \times 6 \times \cdots \times (2n)}\ x^n + o(x^n) \qquad (*) \end{aligned}$$

Soit maintenant $\in]-1\ ,\ 1[$. En remplaçant dans $(*)$ x par $-x^2$ et en suite par x^2 on trouve

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \frac{1}{2}\ x^2 + \frac{1 \times 3}{2^2 \times 2!}\ x^4 + \frac{1 \times 3 \times 5}{2 \times 4 \times 6}\ x^6 + \cdots + \frac{1 \times 3 \times 5 \times \cdots \times (2n-1)}{2 \times 4 \times 6 \times \cdots \times (2n)}\ x^{2n} + o(x^{2n})$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} &= 1 - \frac{1}{2}\ x^2 + \frac{(1-)^2 1 \times 3}{2 \times 4}\ x^4 + \frac{(1-)^3 \times 1 \times 3 \times 5}{2 \times 4 \times 6}\ x^6 \\ &+ \cdots + \frac{(1-)^n 1 \times 3 \times 5 \times \cdots \times (2n-1)}{2 \times 4 \times 6 \times \cdots \times (2n)}\ x^{2n} + o(x^{2n}) \end{aligned}$$

D'autre part, on sait bien que la fonction $x \mapsto Arcsin(x)$ (resp : $x \mapsto Argsh(x)$) est une primitive de la fonction $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ sur $]-1\ ,\ 1[$ (resp : de $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ sur $\mathbb{R}$)

Comme $Arcsin(0) = 0$ et $Argsh(0) = 0$, on obtient en utilisant le théorème d'intégration de DL, les $DL_{2n+1}(0)$

des fonction $x \mapsto Arcsin(x)$ et : $x \mapsto Argsh(x)$ suivants :

$$\begin{aligned} Arcsin(x) &= x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1\times 3}{2\times 4}\frac{x^5}{5} + \frac{1\times 3\times 5}{2^3\times 3!}\frac{x^7}{7} \\ &+ \cdots + \frac{1\times 3\times 5\times\cdots\times(2n-1)}{2\times 4\times 6\times\cdots\times(2n)}\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+1}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Argsh(x) &= x - \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1\times 3}{2\times 4}\frac{x^5}{5} - \frac{1\times 3\times 5}{2^3\times 3!}\frac{x^7}{7} \\ &+ \cdots + (-1)^n\frac{1\times 3\times 5\times\cdots\times(2n-1)}{2\times 4\times 6\times\cdots\times(2n)}\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+1}) \end{aligned}$$

5. Développements limités obtenus par dérivation :

On admet le théorème suivant :

Théorème 5.7

: Soit I un intervalle ouvert contenant 0 , et soit $f\ : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction réelle dérivable sur I . Si f admet un $DL_n(0)$ et si sa dérivée f' admet un $DL_{n-1}(0)$ (d'ordre $n-1$) , alors la partie régulière du développement de la dérivée f'

est la dérivée de la partie régulière du développement de f . C'est-à-dire si le $DL_n(0)$ de f est

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2\, x^2 + \cdots + a_n\, x^n + o(x^n).$$

et si f est dérivable sur I et sa dérivée admet un $L_{n-1}(0)$, alors ce développement est

$$f'(x) = a_1\ + 2a_2 x + 3a_3\, x^2 + \cdots + n\, a_n\, x^{n-1} + o(x^{n-1}).$$

Remarque Si $f^{(n)}(0)$ existe (la dérivée d'ordre n de f au point 0) , alors c'est la dérivée d'ordre $n-1$ de f' au point 0. Donc la formule de Maclaurin-Young d'ordre $n-1$ est applicable à f' qui donne le $DL_{n-1}(0)$ de $'$. Evidemment la partie régulière du $\mathrm{DL}_{n-1}(0)$ de f' est la dérivée du la partie régulière du $DL_n(0)$ de la fonction .

Exemple 5.10 La fonction $x \mapsto \frac{1}{1-x}$ et sa fonction dérivée $x \mapsto \frac{1}{(1-x)^2}$ sont indéfiniment dérivables sur $=]-\infty\ ,\ 1[$.

De plus le $DL_{n+1}(0)$ de la fonction $x \mapsto \frac{1}{1-x}$ est :

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + x^{n+1} + o(x^{n+1})$$

Donc d'après le théorème 6, on en déduit que le $DL_n(0)$ de fonction dérivée $x \mapsto \frac{1}{(1-x)^2}$ est

$$\frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + \cdots + (n+1)x^n + o(x^n)$$

5.3 Développements limités d'ordre n au voisinage d'un point x_0

Définition 5.5

On dit qu'une fonction réelle f définie sur un voisinage d'un point $x_0 \in \mathbb{R}$, sauf peut être en x_0 , admet au voisinage de x_0 un développement limité d'ordre n si la fonction $t \mapsto f(t + x_0)$ admet un $DL_n(0)$.

De plus , soit $r > 0$ et soit $x \in]\, x_0 - r\ ,\ x_0 + r[$ (voisinage de x_0) . On pose $t = x - x_0 \iff x = t + x_0$.

Donc $t \in]-r\ ,\ r[$ (voisinage de 0). Soit maintenant $g(t) = f(t + x_0)$. Si g admet un $DL_n(0)$:

$$g(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots + a_n t^n + o(t^n)$$

Alors le développement limité d'ordre n au voisinage de x_0 de f est

$$f(x) = g(x - x_0) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \cdots + a_n(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n)$$

Abréviation : La phrase, ‘‘ développement limité d'ordre n au voisinage de x_0 ‘‘ sera agréger en $DL_n(x_0)$.

Remarques :

1. La fonction f admet un $DL_n(x_0) \Longrightarrow \lim_{x\to x_0} f(x)$ existe .
2. Si $\lim_{x\to x_0} f(x)$ n'existe pas alors f n'admet aucun $DL_n(x_0)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. Si f est continue au point x_0 et si elle admet un $DL_1(x_0)$ (d'ordre 1) alors elle est dérivable au point x_0 .
4. Si f admet des dérivées successives jusqu'au l'ordre n au point x_0 , alors le $DL_n(x_0)$ de f existe et il coïncide avec la formule de Taylor-Young d'ordre n autour de x_0.

Exemple 5.11 Trouver le $DL_n(x_0)$ de la fonction f dans les cas suivants :

1. $f(x) = \cos(2x)$, $x_0 = \frac{\pi}{2}$, $n = 6$.
2. $f(x) = \ln(3x)$, $x_0 = 2$, $n = 4$.
3. $f(x) = \frac{x^2-1}{2x+3}$, $x_0 = 1$, $n = 3$.

Réponses :

1. Soit $t = x - \frac{\pi}{2} \Longleftrightarrow x = t + \frac{\pi}{2}$. Donc

$$\cos(2x) = \cos(2t+\pi) = -\cos(2t)$$

Ainsi

$$\cos(2x) = -\left(1 - \frac{(2t)^2}{2!} + \frac{(2t)^4}{4!} - \frac{(2t)^6}{6!} + o\left(t^6\right)\right) = -1 + 2t^2 - \frac{2}{3}t^4 + \frac{4}{45}t^6 + o(t^6)$$

Finalement, en remplaçant t par$x - \frac{\pi}{2}$ on obtient le $DL_6(\frac{\pi}{2})$ de la fonction $x \mapsto \cos(2x)$:

$$\cos(2x) = -1 + 2\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2 - \frac{2}{3}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^4 + \frac{4}{45}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^6 + o\left(\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^6\right)$$

1. De la même manière, soit $t = x - 2 \Longleftrightarrow x = t + 2$. Donc

$$\ln(3x) = \ln(3t+6) = \ln\left(6\left(\frac{t}{2} + 1\right)\right) = \ln 6 + \ln\left(\frac{t}{2} + 1\right)$$

Soit maintenant $u = \frac{t}{2} = \frac{x-2}{2}$. Alors $u \to 0$ *quand* $x \to 2$, il vient alors

$$\ln(3x) = \ln 6 + \ln\left(\frac{t}{2} + 1\right) = \ln 6 + \ln(u+1) = \ln 6 + u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} - \frac{u^4}{4} + o\left(u^4\right)$$

On trouve ainsi le $DL_4(2)$ de la fonction $x \mapsto \ln(3x)$:

$$\ln(3x) = \ln 6 + \frac{1}{2}(x-2) - \frac{1}{8}(x-2)^2 + \frac{1}{24}(x-2)^3 - \frac{1}{64}(x-2)^4 + o\left((x-2)^4\right)$$

1. On pose $t = x - 1 \Longleftrightarrow x = t + 1$. Donc

$$f(x) = \frac{x^2-1}{2x+3} = \frac{t^2+2t}{2t+5} = \left(t^2+2t\right) \times \frac{1}{5+2t}$$

D'autre part

$$\frac{1}{5+2t} = \frac{1}{5}\left(\frac{1}{1+\frac{2t}{5}}\right) = \frac{1}{5}\left(1 - \left(\frac{2t}{5}\right) + \left(\frac{2t}{5}\right)^2 - \left(\frac{2t}{5}\right)^3 + o\left(t^3\right)\right)$$
$$= \frac{1}{5} - \frac{2}{25}t + \frac{4}{125}t^2 - \frac{8}{625}t^3 + o(t^3)$$

Ainsi, $\frac{t^2-2t}{2t+5} = \left(t^2+2t\right)\left(\frac{1}{5} - \frac{2}{25}t + \frac{4}{125}t^2 - \frac{8}{625}t^3\right) + o\left(t^3\right) = \frac{2}{5}t + \frac{1}{25}t^2 - \frac{2}{125}t^3 + o(t^3)$.

Finalement, le $DL_3(1)$ de la fonction $x \mapsto \frac{x^2-1}{2x+3}$ est

$$\frac{x^2-1}{2x+3} = \frac{2}{5}(x-1) + \frac{1}{25}(x-1)^2 - \frac{2}{125}(x-1)^3 + o\left((x-1)^3\right).$$

Notons qu'on peut utiliser la division suivant les puissance croissante pour calculer le $DL_3(0)$ de la fonction $t \mapsto \frac{t^2+2t}{2t+5}$.

5.4 Quelques applications de $\mathrm{DL_n}\,(\mathrm{x_0})$

5.4.1 Position de la tangente à une courbe en un point

Proposition 5.4

Soit $f\ : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction réelle dérivable sur un intervalle ouvert I . Soit (C_f) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé . Soit $x_0 \in I$ et supposons que f admet un $DL_p(x_0)$:

$$f\,(x) = a_0 + a_1\,(x - x_0) + a_p(x - x_0)^p + o\;(\;(x - x_0)^p)$$

Où $p \geq 2$ est le plus petit entier tel que $a_p \neq 0$. Alors

1. *La droite (T) d'équation cartésienne $y = a_0 + a_1\,(x - x_0)$ est la tangente à la courbe (C_f) au point $(x_0\ ,\ f\,(x_0))$.*
2. *Si p est impair, alors $A(x_0\ ,\ f\,(x_0))$ est un point d'inflexion de (C_f) . De plus, on a*
3. *Si p est pair et $a_p\ < 0$ (resp : $a_p > 0$) , alors (T) est au dessus (resp : en dessous) de (C_f) . En particulier :*
4. *Si p est pair , $a_1 = 0$ et $a_p\ < 0$ alors $a_0 = f\,(x_0)$ est un maximum local de f .*
5. *Si p est pair , $a_1 = 0$ et $a_p\ > 0$ alors $a_0 = f\,(x_0)$ est un maximum local de f .*

Démonstration

1. Comme f est dérivable sur , alors elle est continue en $x_0 \in I$. Donc $a_0 = \lim_{x\to x_0} f\,(x) = f\,(x_0)$.
   De plus, puisque $f\,(x) = f\,(x_0) + a_1\,(x - x_0) + a_p(x - x_0)^p + o\;(\;(x - x_0)^p)$, pour tout $x \neq x_0$ dans le voisinage de x_0 . Ainsi sur ce voisinage on a
   $$\frac{f\,(x) - f\,(x_0)}{x - x_0} = a_1 + a_p\;(x - x_0)^{p-1} + o\left(\;(x - x_0)^{p-1}\;\right) \qquad (\$)$$
   En considérant la limite quand $x \longrightarrow x_0$ de deux côtés de la relation ($) on trouve bien que $a_1 = f'(x_0)$.
   Par conséquent l'équation de la droite (T) est $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$. C'est-à-dire que (T) est la tangente à la courbe (C_f) au point $A(x_0\ ,\ f\,(x_0))$.
2. On a pour tout x au voisinage de x_0 et $x \neq x_0$:
   $$f\,(x) - (a_0 + a_1\,(x - x_0)\;) = a_p(x - x_0)^p + o\;(\;(x - x_0)^p) = (x - x_0)^p \left(\;a_p + o\,(1)\;\right) \tag{5.4}$$
   Si p est impair alors le terme $(x - x_0)^p$ change de signe au voisinage de x_0 . Donc la différance $f\,(x) - (a_0 + a_1\,(x - x_0)\;)$ change de signe au voisinage de x_0 , ce qui signifie géométriquement que la tangente (T) traverse la courbe (C_f) au point $A(x_0\ ,\ f\,(x_0))$. C'est-à-dire $A(x_0\ ,\ f\,(x_0))$ est un point d'inflexion de la courbe (C_f) .
3. Le $o(1)$ dans la relation (5.4) représente une fonction tendant vers 0 au point x_0 . Le signe de $a_p + o\,(1)$ est celui de a_p . Or p étant pair et alors le terme $(x - x_0)^p$ est strictement positif. Alors le signe de la différance $f\,(x) - (a_0 + a_1\,(x - x_0)\;)$ est celui de a_p . Donc, si p est pair et $a_p\ > 0$ (resp : $a_p < 0$) , alors (T) est localement au dessus (resp : en dessous) de (C_f) . En particulier, si
   (a). Si p est pair , $a_1 = 0$ et $a_p\ < 0$ alors la tangente (T) est horizontale au dessus de la courbe (C_f) , ce qui signifier que $f\,(x_0)$ est un maximum local de f .
   (b). Si p est pair , $a_1 = 0$ et $a_p\ > 0$ alors la tangente (T) est horizontale en dessous de la courbe (C_f) , ce qui signifier que $f\,(x_0)$ est un minimum local de f .

Remarquer que $a_1 = f'(x_0)$. Donc $a_1 = 0 = f'(x_0)$, signifie que x_0 est un point critique de f. C'est une condition nécessaire d'existence d'extremums d'une fonction dérivable. ■

Exemple 5.12 Soit f la fonction définie sur $I =]-\frac{3}{2}\ ,\ +\infty[$ par : $f\,(x) = \frac{x^2-1}{2x+3}$. Cette fonction est dérivable sur .

Nous avons vu que le $DL_3(1)$ de f est

$$f(x) = \frac{2}{5}(x-1) + \frac{1}{25}(x-1)^2 - \frac{2}{125}(x-1)^3 + o\left((x-1)^3\right)$$

Ainsi

$$f(x) = \frac{2}{5}(x-1) + \frac{1}{25}(x-1)^2 + o((x-1)^2)$$

Par conséquent, l'équation de la tangent à la courbe de f au point $A(1,0)$ est : $y = \frac{2}{5}(x-1)$. De plus, on a pour tout x dans le voisinage de 1 :

$$f(x) - \frac{2}{5}(x-1) = \frac{1}{25}(x-1)^2 + o\left((x-1)^2\right) \geq 0$$

Donc la tangente au point A est en dessous de la courbe de f au voisinage du point A.

Exemple 5.13 Soit la fonction h la fonction réelle définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = (-x+2)e^x$. Il est clair que h est dérivable sur $\mathbb{R}$ et elle admet un $DL_3(0)$. Un calcul simple, nous donne le $DL_3(0)$ de h :

$$h(x) = 2 + x - \frac{x^3}{6} + o(x^6)$$

Il est clair maintenant que l'équation de la tangente à la courbe (C_h) de h au point $A(0,2)$ est $y = x+2$. De plus, , nous avons au voisinage de 0 : $h(x) - (x+2) = -\frac{x^3}{6} + o\left(x^3\right) = x^3\left(-\frac{1}{6} + o(1)\right)$ un terme qui change de signe au voisinage de 0 . Donc la tangente au point A traverse la courbe (C_h) . Donc $A(0,2)$ est point d'inflexion de (C_h) .

5.4.2 Equivalences au voisinage d'un point

Définition 5.6

Soient f et g deux fonctions réelles définies au voisinage V d'un point x_0 , sauf peut être en x_0 . Supposons que f et g ne s'annules pas sur $V \setminus \{x_0\}$. On dit que f et g sont <u>équivalente au voisinage</u> de x_0 et on note $f \sim g \quad (x \to x_0)$ ou par $f(x) \sim g(x) \quad (x \to x_0)$ si :

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

<u>Remarques</u> :

1. Pour une fonction non nulle , il est clair que $f \sim f$ dans n'import quel voisinage auquel f est définie.
2. Par définition $f \sim g \quad (x \to x_0) \iff \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$, donc $\frac{f(x)}{g(x)} \neq 0$ au voisinage de x_0 . Donc

$$\lim_{x \to x_0} \frac{g(x)}{f(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{1}{\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)} = 1 \iff g \sim f \quad (x \to x_0)$$

Par conséquent, on a l'équivalence $f \sim g \iff g \sim f \quad (x \to x_0)$.

1. On a $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1 \iff \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} - 1 = 0 \iff \frac{f(x)}{g(x)} - 1 = o(1) \quad (x \to x_0)$.

Donc $f \sim g \quad (x \to x_0) \iff \frac{f(x)}{g(x)} - 1 = o(1) \iff f(x) = g(x)(1 + o(1)) \quad (x \to x_0)$.

1. On n'écrit jamais $f \sim 0$. Autrement dit, il n'existe aucune fonction non nulle équivalente à la fonction nulle .
2. Si $\ell \in \backslash\mathbb{R}^*$ et $f(x) \sim \ell \quad (x \to x_0)$ alors $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$.

Exemple 5.14

1. En utilisant la règle de L'Hôpital deux fois, on a $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1 - x}{1 - \cos(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{\sin(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{e^x}{\cos(x)} = 1$. Donc

$$e^x - 1 - x \sim 1 - \cos(x) \quad (x \to 0)$$

On obtient aussi $e^x - 1 \sim \sin(x) \quad (x \to 0)$

2. En utilisant la règle de L'Hôpital, on trouve aisément les équivalences simples suivantes au voisinage de 0 :
$$\sin(x) \sim x \ , \ln(x+1) \sim x \ , e^x - 1 \sim x.$$
et
$$Arctan(x) \sim x, \ Arcsin(x) \sim x, 1 - \cos(x) \sim \frac{x^2}{2}.$$

Proposition 5.5 (Propriétés)

Soient f , g, h, f_1 , f_2 , g_1 , g_2 des fonctions définies sur un voisinage de x_0 sauf peut être en x_0 .

1. *Si $f \sim g \quad (x \to x_0)$ et $\lim_{x \to x_0} g(x) = \ell$, alors $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$.*
2. *Si $f \sim g \quad (x \to x_0)$ et Si $g \sim h \quad (x \to x_0)$ alors $f \sim h \quad (x \to x_0)$.*
3. *Si $f(x) \sim g(x) \quad (x \to x_0)$, alors $\forall \ n \in \mathbb{N}$: $(f(x))^n \sim (g(x))^n \quad (x \to x_0)$.*
4. *Si $f(x) \neq 0 \sim g(x) \neq 0 \quad (x \to x_0)$, alors $\frac{1}{f(x)} \sim \frac{1}{g(x)} \quad (x \to x_0)$.*
5. *Si $f_1 \sim g_1 \quad (x \to x_0)$ et $f_2 \sim g_2 \quad (x \to x_0)$ alors $f_1 \ f_2 \sim g_1 \ g_2 \quad (x \to x_0)$.*
6. *Si $f_1 \sim g_1 \quad (x \to x_0)$ et $f_2 \neq 0 \sim g_2 \neq 0 \quad (x \to x_0)$ alors $\frac{f_1}{f_2} \sim \frac{g_1}{g_2} \quad (x \to x_0)$.*

<u>**Preuve**</u> : Exercice (Utiliser la définition de l'équivalence) .

Remarque Il n'existe pas un résultat similaire à l'affirmation 4) de la proposition précédente pour la somme . Autrement dit, si $f_1 \sim g_1 \quad (x \to x_0)$ et $f_2 \sim g_2 \quad (x \to x_0)$ alors $f_1 + f_2$ $n'est\ pas\ équivalente$ à $g_1 + g_2 \quad (x \to x_0)$ en général . Par exemple on a $e^x - 1 \sim x \quad (x \to 0)$ et $-x \sim -x$, et si on fait la somme membre à membre, on obtient
$e^x - 1 - x \sim 0 \quad (x \to 0)$ ce qui est absurde car $\lim_{x \to 0} \frac{0}{e^x - 1 - x} = \lim_{x \to 0} 0 = 0 \neq 1$.

Proposition 5.6 (Equivalent simple d'une fonction)

Soit f une fonction réelle admettant le $DL_p(x_0)$ suivant
$$f(x) = a_0 + a_p(x - x_0)^p + o\left((x - x_0)^p\right)$$
Où $p \geq 1$ est le plus petit entier tel que $a_p \neq 0$. Alors

1. *Si $\lim_{x \to x_0} f(x) = a_0 \neq 0$, alors $f \sim a_0 \quad (x \to x_0)$.*
2. *Si $\lim_{x \to x_0} f(x) = a_0 = 0$, alors $f \sim a_p(x - x_0)^p \quad (x \to x_0)$.*

Le terme $a_p(x - x_0)^p$ (où $p \geq 0$)) est appelé un équivalent simple de f au voisinage de x_0 .

Démonstration

1. Est évident .
2. Si $\lim_{x \to x_0} f(x) = a_0 = 0$, alors par hypothèse, on a dans un voisinage de x_0 :
$$f(x) = a_p(x - x_0)^p + o\left((x - x_0)^p\right) = a_p(x - x_0)^p\left(1 + o(1)\right)$$

Donc pour $x \neq x_0$, on trouve d'après ce qui précède :
$$\frac{f(x)}{a_p(x - x_0)^p} = 1 + o(1) \to 1 \quad quand \quad x \to x_0$$
Ce qui montre que $f(x) \sim a_p(x - x_0)^p \quad (x \to x_0)$. ■

Exemple 5.15 Trouver un équivalent simple de f au voisinage de x_0 dans les cas suivants :

1. $f(x) = \ln(2x + 5)$ et $x_0 = 0$.
2. $f(x) = \frac{x^2 - 1}{2x + 3}$ et $x_0 = 1$.
3. $f(x) = 2 - \sqrt[3]{x + 5}$ et $x_0 = 3$.

<u>**Réponses**</u> :

1. Remarquons que $\lim_{x \to 0} \ln(2x + 5) = \ln 5$, donc $\ln(2x + 5) \sim \ln 5 \quad (x \to 0)$.

2. On a $\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{2x+3} = 0$. Le DL_1(**??**) de f (déjà calculé) est

$$f(x) = \frac{2}{5}(x-1) + o((x-1))$$

Donc $\frac{x^2-1}{2x+3} \sim \frac{2}{5}(x-1) \quad (x \to 1)$.

1. On a $\lim_{x\to 3} f(x) = 0$. Cherchons le DL_1(**??**) de f (si le terme de degré 1 dans la partie régulière est nul, alors il faut calculer le DL_2(**??**) , etc. . . . .) . Soit $t = x-3 \iff x = t+3$. Alors

$$f(x) = f(t+3) = 2 - \sqrt[3]{t+8} = 2 - 2\sqrt[3]{1+\frac{t}{8}} = 2 - 2\left(1+\frac{t}{8}\right)^{\frac{1}{3}}$$

Ainsi

$$f(x) = 2 - 2\left(1 + \frac{1}{3}\left(\frac{t}{8}\right) + o(t)\right). \qquad t \to 0$$

Ce qui donne

$$f(x) = -\frac{t}{12} + o(t) = -\frac{(x-3)}{12} + o((x-3)) \quad . \quad x \to 3$$

Par conséquent, $2 - \sqrt[3]{x+5} \sim -\frac{1}{12}(x-3) \qquad (x \to 3)$

5.4.3 Equivalences en l'infini

Définition 5.7

Soient f et g deux fonctions réelles définies sur $[a, +\infty[$ (resp : $]-\infty, a]$) où $a \in \mathbb{R}$.
On dit que f et g sont équivalentes en $+\infty$ (resp : en $-\infty$) et on note $f \sim g \quad (x \to +\infty)$ ou par $f(x) \sim g(x) \quad (x \to +\infty)$ (resp : note $f \sim g \quad (x \to -\infty)$ ou par $f(x) \sim g(x) \quad (x \to -\infty)$) si $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$ (resp : $\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$).

Exemples 17 :

1. On a $\lim_{x\to\infty} \frac{x^2-x+3}{x^2} = 1$, donc $x^2 - x + 3 \sim x^2 \quad (x \to \infty)$ (plus ou moins l'infini) .
2. Il est clair que si $P_n(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ avec $a_n \neq 0$, alors $P_n(x) \sim a_n x^n \quad (x \to \infty)$.
3. On a $\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x}+2xe^{-x}}{\sqrt{x}} = \lim_{x\to+\infty}(1 + 2\sqrt{x}\, e^{-x}) = 1$, donc $\sqrt{x} + 2xe^{-x} \sim \sqrt{x} \quad (x \to +\infty)$.
4. Il est clair que $\sin\left(\frac{1}{x}\right) \sim \frac{1}{x} \quad (x \to \infty)$.

Remarques :

1. Soit $f(x) \sim g(x) \quad (x \to \infty)$. On pose $t = \frac{1}{x} \to 0$ *quand* $x \to \infty$. Soient $u(t) = f\left(\frac{1}{t}\right)$ et $(t) = g\left(\frac{1}{t}\right)$.

Alors il est clair que $f(x) \sim g(x) \quad (x \to \infty) \iff u(t) \sim v(t) \quad (t \to 0)$. Donc les propriétés de l'équivalence au voisinage d'un point x_0 restent vraies si on remplace x_0 par ∞ .

1. Comme les suites numériques sont des fonctions d'une variable entier naturel, on considère également la notion d'équivalence de deux suites réelles. Deux suites réelles (u_n) et (v_n) non nulles à partir d'un certain rang , sont équivalentes si $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$. Par exemple $\frac{2n}{\sqrt[3]{n^5+3n+1}} \sim \frac{2}{n^{\frac{2}{3}}} \quad (n \to +\infty)$.

5.4.4 Application : Calcul des limites

Lors du calcul des limites, le seul problème qui se présent est l'apparition des formes indéterminées. Si les simplifications algébriques et la règle de l'Hôpital ne s'appliquent pas, alors le développement limité et les équivalents simples seront dans ce cas les outils puissants pour lever les formes indéterminées. Dans ce contexte, pour calculer une limite $\lim_{x\to x_0} f(x)$ on procède de la manière suivante :

1. On calcule le $DL_p(x_0)$ s'il existe, où p est un ordre minimum pour puise conclure la limite cherché, ou bien
2. On cherche une fonction g simple et équivalente à f au voisinage de x_0 , en utilisant les équivalents simples des fonctions usuelles et les propriétés de l'équivalence listées dans la proposition 5 . Dans ce cas

$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x)$.

3. Pour calculer $\lim_{x\to\infty} f(x)$, on pose $t = \frac{1}{x} \to 0$, $g(t) = f\left(\frac{1}{t}\right)$. Le problème se ramène alors à calculer $\lim_{t\to 0} g(t)$; ou bien
4. On cherche une fonction g simple et équivalente à f en ∞ , puis on calcule $\lim_{x\to\infty} g(x) = \lim_{x\to\infty} f(x)$.

Exemples 18 : Calculer les limites suivantes :

1. $\lim_{x\to 0} \ (1+\sin(x))^{\frac{3}{x}}$.
2. _ $\lim_{x\to 0} \ (\cos(3x))^{\frac{1}{2x^2}}$.
3. _ $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(\mathrm{Arcsin}(x))}{\ln(1+2x^2)}$.
4. _ $\lim_{x\to 1} \frac{x\, sin(x-1)}{x^3-1}$.
5. _ $\lim_{x\to +\infty} \left(\frac{3x+1}{3x-1}\right)^{2x}$

Réponses :

1. Soit $f(x) = (1+\sin(x))^{\frac{3}{x}}$, $x \neq 0$. On a $f(x) = e^{\frac{3}{x}\ln(1+\sin(x))}$. D'autre part, comme $\sin(x) \to 0$ quand $x \to 0$; on en déduit que
$$\ln(1+\sin(x)) \sim \sin(x) \sim x \quad (x\to 0)$$
Donc $\ln(1+\sin(x)) \sim x \quad (x\to 0)$.
Par suite, $\frac{3}{x}\ln(1+sin(x)) \sim \frac{3\,x}{x} = 3 \quad (x\to 0)$. Donc $\lim_{x\to 0} \ \frac{3}{x}\ln(1+sin(x)) = 3$.
Comme la fonction $x \mapsto e^x$ est continue sur $\mathbb{R}$, il vient $\lim_{x\to 0} \ f(x) = e^3$.
Autre méthode : Cherchons le $DL_p(0)$ pour un $p \geq 0$.
On a $\ln(1+\sin(x)) = \ln(1+u) = u + o(u)$, $u = \sin(x) \to 0$ quand $\to 0$. Donc $u = x + o(x)$
Ainsi,
$$\begin{aligned}\ln(1+\sin x) = x + o(x) = x(1+o(1)) &\implies \frac{3}{x}\ln(1+\sin x) = 3(1+o(1))\\ &\implies f(x) = e^{3\,(1+o(1))}\ ,\ x \to 0.\end{aligned}$$
Ce qui donne finalement $\lim_{x\to 0} \ f(x) = e^3$.
2. On pose $u(x) = (\cos(3x))^{\frac{1}{2x^2}} = e^{\frac{1}{2x^2}\ln(\cos(3x))}$. On sait que $\cos(3x) = 1 - \frac{9}{2}x^2 + o\left(x^2\right) \quad x \to 0$. Donc
$$\ln(\cos(3x)) = \ln\left(1 - \frac{9}{2}x^2 + o\left(x^2\right)\right) = -\frac{9}{2}x^2 + o\left(x^2\right) \qquad x \to 0.$$
Ainsi
$$\begin{aligned}\ln(\cos(3x)) \sim -\frac{9}{2}x^2 \quad (x\to 0) &\implies \frac{1}{2x^2}\ln(\cos(3x)) \sim -\frac{9}{2}\\ &\implies \lim_{x\to 0}\frac{1}{2x^2}\ln(\cos(3x)) = -\frac{9}{2}\end{aligned}$$
D'où $\lim_{x\to 0} \ u(x) = e^{-9/2}$ d'après la continuité de la fonction $\mapsto e^x$.
3. Soit $w(x) = \frac{1-\cos(\mathrm{Arcsin}(x))}{\ln(1+2x^2)}$. On a au voisinage de 0 :
$$Arcsin(x) \sim x \quad et \ \ (1-\cos(x)) \sim \frac{x^2}{2} \quad \implies 1-\cos(Arcsin(x)) \sim \frac{x^2}{2}$$
D'autre part, on sait que $\ln(1+x) \sim x \quad (x\to 0) \implies \ln\left(1+x^2\right) \sim x^2 \qquad (x\to 0)$.
Donc, $w(x) \sim \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2} \quad (x\to 0) \iff \lim_{x\to 0} \ w(x) = \frac{1}{2}$.
4. Soit $h(x) = \frac{x\,sin(x-1)}{x^3-1}$. On pose $t = x-1 \iff x = t+1$. Par suite , $x^3 - 1 = (x-1)\left(1+x+x^2\right) = t(3+3t+t^2)$.
Il vient alors
$$h(x) = h(t+1) = \frac{(t+1)\,sint}{t(3+3t+t^2)} \sim \frac{(t+1)\ \ t}{t(3+3t+t^2)} = \frac{t+1}{3+3t+t^2}$$
Par conséquent : $\lim_{x\to 1} \ h(x) = \lim_{t\to 0} \ h(t+1) = \frac{1}{3}$.

5. Soit $Q(x)=\left(\frac{3x+1}{3x-1}\right)^{2x}$. On pose $=\frac{1}{x} \Longleftrightarrow x=\frac{1}{t}$. Donc

$$Q(x)=Q\left(\frac{1}{t}\right)=\left(\frac{3+t}{3-t}\right)^{\frac{2}{t}}=e^{\frac{2}{t}\ln\left(\frac{3+t}{3-t}\right)}$$

Soit $m(t)=\ln\left(\frac{3+t}{3-t}\right)$. Pour t dans le voisinage de 0 , on a

$$m(t)=\ln(3+t)\ -\ln(3-t)\ =\ln 3+t-(\ln 3-t)+o(t)=2t+\ o(t) \implies m(t)\sim\ 2t$$

Ainsi, $\frac{2}{t}\ m(t)\sim 4 \qquad (t\to 0\ )$, ce qui implique d'après la continuité de la fonction exponentielle que $\lim_{x\to+\infty} Q(x)=e^4$.

Exercices

Exercice 69 *En appliquant la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre* 1 *à la fonction* $f : x \mapsto \sqrt[3]{x+27}$ *sur un intervalle bien choisi, montrer que :*

$$\frac{6641}{2187} < \sqrt[3]{28} < \frac{6642}{2187}$$

Exercice 70

1. *Ecrire la formule de Maclaurin-Lagrange à l'ordre* n *de la fonction* $x \mapsto e^x$.
2. *Cosidérons la suite réelle* (u_n) *définie par :* $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$.
   - (a). *Montrer que :* $k! \geq 2^k \ \forall k \geq 4$. *Déduire que la suite* (u_n) *est bornée.*
   - (b). *Déduire que la suite* (u_n) *est convergente.*
   - (c). *En utilisant, la première question de l'exercice, montrer que* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = e$.
3. *Sachant que* $e < 3$, *chercher une approximation du nombre* e *à* 10^{-5} *près.*

Exercice 71 *Soient* $n \in \mathbb{N}$ *et* a *un paramètre réel. Considérons la fonction réelle* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *définie par* $f(x) = (x+a)^n$

1. *Ecrire la formule de Maclaurin-Lagrange d'ordre* n *de* f.
2. *Déduire que pour tout* $a, b \in \mathbb{R}$ *et pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *:*

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_k^n \, b^k \, a^{n-k} \qquad (*)$$

N.B : *La relation* $(*)$ *est appelée formule de binôme de Newton.*

Exercice 72 .

1. *Soit* $u \in \mathbb{R}$, $0 < u \leq 1$. *En appliquant le théorème des accroissements finis à la fonction* $t \mapsto \sqrt{1-t}$ *sur l'intervalle* $[0, u]$ *montrer que*

$$\sqrt{1-u} < 1 - \frac{u}{2}$$

2. *Soit* $x \in]0, \frac{\pi}{2}]$.
   - (a). *En appliquant la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre* 3 *à la fonction* $t \mapsto \cos(t)$ *sur l' intervalle* $[0, x]$ *montrer que*

$$1 - \frac{x^2}{2} < \cos x < 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$$

   - (b). *Montrer encore que, pour* $x \in]0, 1[$ *:*

$$\cos x - \sqrt{1-x^2} > 0$$

3. *Soit* $u \in]0, 1]$. *Ecrire la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre* 1 *pour la fonction* $t \mapsto \sqrt{1-t}$ *sur l'intervalle*

$[0,u]$. *En déduire, pour* $x \in]0, \frac{\pi}{4}]$ *que :*

$$\sqrt{1-x^2} > 1 - \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8(1-\frac{\pi^2}{16})^{\frac{3}{2}}}$$

4. *Montrer qu'il existe un nombre réel* $A > 0$, *tel que, pour tout* $x \in]0, \frac{\pi}{4}]$ *:*

$$0 < \cos x - \sqrt{1-x^2} < A x^4$$

Exercice 73 *Soit* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *une fonction deux fois dérivable sur* $\mathbb{R}$ *et trois fois dérivable en* 0. *Calculer :*

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^3}\left(f(3x) - 3f(2x) + 3f(x) - f(0)\right)$$

Indication *: Utiliser la formule de Maclaurin-Young.*

Exercice 74 *Déterminer le développement limité à l'ordre n au voisinage de* x_0 *des fonctions suivantes :*

1. $c(x) = \frac{x+1}{x^2+x+1}$, $\quad x_0 = 0, \quad n = 6.$
2. $f(x) = \frac{\ln(x)}{x^2}$, $\quad x_0 = 1, \quad n = 4.$
3. $g(x) = (\cos x - 1)(sh(x) - x) - (ch(x) - 1)(\sin x - x)$, $\quad x_0 = 0, \quad n = 7.$
4. $h(x) = (1+2x)^{\frac{1}{x}}$, $\quad x_0 = 2, \quad n = 2.$
5. $k(x) = \sin(Arctan(x))$, $\quad x_0 = 0, \quad n = 8.$
6. $m(x) = \ln(1 + x + \sqrt{1+x})$, $\quad x_0 = 0, \quad n = 4.$
7. $w(x) = (\cos x)^{1+\sin x}$, $\quad x_0 = 0, \quad n = 4.$

Exercice 75 *Calculer les limites suivantes :*

$$(1)\quad \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{\frac{1}{x}} - \cos(\frac{1}{x})}{1 - \sqrt{1-\frac{1}{x^2}}} \qquad (2)\quad \lim_{x\to 0} \frac{\ln(\cos(ax))}{\ln(\cos(bx))},\ a,b \in \mathbb{R}^* \qquad (3)\quad \lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{\sin^2(x)}}$$

$$(4)\quad \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} (\tan(x))^{\tan(2x)} \qquad (5)\quad \lim_{x\to+\infty} x^2\left(e^{\frac{1}{x}} - e^{\frac{1}{x+1}}\right) \qquad (6)\quad \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{a^{\frac{1}{x}} + b^{\frac{1}{x}} + c^{\frac{1}{x}}}{3}\right)^x \quad a,b,c \in \mathbb{R}_+^*$$

Exercice 76 *Soit* f *la fonction définie sur* $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ *par* $f(x) = 2\tan(x) - x$.

1. *Montrer que f admet une fonction réciproque de classe* C^∞.
2. *Vérifier que* f^{-1} *est impaire.*
3. *Donner le développement limité de* f^{-1} *à l'ordre* 6 *en* 0.

Exercice 77 *I) Soit* f *la fonction définie sur* $\mathbb{R}$ *par* $f(x) = \frac{1}{1+e^x}$.

1. *Donner un développement limité de f à l'ordre* 3 *en zéro.*
2. *En déduire que la courbe représentative de* f *admet une tangente au point d'abscisse* 0, *dont on précisera l'équation.*
3. *Prouver que la courbe traverse la tangente en* 0. *Un tel point est appelé point d'inflexion.*

II) Considérons maintenant la fonctiong définie sur $\mathbb{R}$ *par :* $g(x) = \frac{ax+b}{1+e^x}$ *où* $a, b \in \mathbb{R}$.

1. *Déterminer en fonction de a et b le DL*(3) *en zéro de la fonction g.*
2. *Déduire en fonction de a et b les valeurs suivantes :* $g'(0)$, $g''(0)$ *et* $g^{(3)}(0)$.
3. *Sous quelles conditions sur a et b, la fonction g admet en zéro :*
   (a). *un maximum local , un minmum local ?*
   (b). *un point d'inflexion ?*

Exercice 78 *Calculer les limites suivantes :*

$$(1)\quad \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln\left(\frac{x+1}{x+3}\right)}{\sin\left(\frac{x+1}{x^2+3}\right)} \qquad (2)\quad \lim_{x\to 1} \frac{x^x - x}{1 - x + \ln(x)},\ a,b \in \mathbb{R}^* \qquad (3)\quad \lim_{x\to 0} \frac{\sin^2(x) - x\ln(1+x)}{e^x + \cos x - \sin x - 2}$$

(4) $\lim_{x\to 0}(\cos x+\sin x)^{\frac{1}{\tan(x)}}$ (5) $\lim_{x\to+\infty} e\sqrt{x^2-x+1}-x\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ (6) $\lim_{x\to+\infty} x-\ln(ch(x))$

(7) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}(1+sh(x))^{\frac{1}{\tan(x)}}-e\right)$ (8) $\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{Arctan(2\sin x)-\frac{\pi}{4}}{\cos(3x)}$ (9) $\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\ln(x)}$

Exercice 79 *Soit $n\in\mathbb{N}^*$ fixé et soit la fonction f définie par :*

$$f(0)=n+1,\quad et\quad f(x)=\frac{e^{(n+1)x}-1}{e^x-1}\ \ si\ \ x\neq 0$$

1. *Déterminer le DL(3) de f en zéro. (en fonction de n).*
2. *Vérifier que pour tout $x\in\mathbb{R}$: $f(x)=\sum_{k=0}^{n}e^{kx}$.*
3. *Déduire que :*

$$\sum_{k=0}^{n}k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\quad et\quad \sum_{k=0}^{n}k^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

Chapitre 6

Intégrales et Primitives

Ce dernier chapitre de ce polycopié est dédié au calcul intégral. On commence par définir la notion d'intégrabilité au sens de Riemann d'une fonction réelle bornée, puis on définit l'intégrale de Riemann comme une limite d'une certaine somme. Par suite, nous démontrons le théorème fondamental du calcul intégral qui exprime la valeur d'une l'intégrale définie d'une fonction continue sur l'intervalle d'intégration en utilisant une fonction primitive, ce qui explique l'importance de présenter quelques méthodes classiques de calcul des primitives.

Introduction :

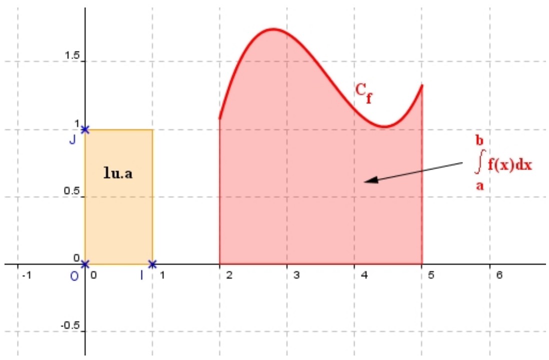
Soit $f : [a\ ,\ b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et à valeurs positives. Considérons le domaine D de points dans le plan (rapporté d'un repère), défini par :

$$D = \left\{ M(x,y) \in \mathbb{R}^2\ :\ a \leq x \leq b\ \ et\ 0 \leq y \leq f(x) \right\} \qquad (1)$$

Vous avez vu en classes de Terminales que l'aire de domaine D est le nombre

$$Aire(D) = \int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) \qquad (2)$$

Où F est une primitive de f. C'est-à-dire $F'(x) = f(x)$.



Le nombre réel $I = \int_a^b f(x)\ dx$ est appelé intégrale de f sur l'intervalle $[a\ ,\ b]$.

Si f est continue et positive, le nombre I est la mesure d'aire du domaine D définie par (**??**). En utilisant ce principe géométrique, il est clair d'après les figures ci-dessous, que :

Dans la suite, nous allons définir le nombre $I = \int_a^b f(x)\,dx$, où la fonction f est supposée bornée et pas forcément continue et positive, sous les trois points de vue suivants :

1. En utilisant les fonctions en escaliers.
2. En utilisant les sommes de Riemann.
3. En utilisant les primitives.

Les point de vue 1) et 2) sont équivalents, et ont un intérêt théorique, et sert à donner un sens de nombre I si f est non continue sur l'intervalle $[a\ ,\ b]$. De plus si la fonction f est continue, alors les trois points de vue précédents sont équivalents.
En pratique le calcul d'une intégrale $\int_a^b f(x)\,dx$ selon les points de vue 1) et 2) est délicat ou presque impossible même si f est assez simple ! !
On peut calculer l'intégrale $(*)$ par le point de vue 2) par exemple, mais il est impossible de calculer l'intégrale $(**)$ avec ce point de vue. Cependant ce calcul devient un jeu d'enfant si en utilise le troisième point de vue.
On va utiliser les points de vue équivalents 1) et 2) pour définir les fonctions intégrables sur $[a\ ,\ b]$, et on utilise le dernier point de vue seulement pour les calculs d'intégrale en pratique.

6.1 Fonctions en escalier , Sommes intégrales

6.1.1 Subdivision d'un intervalle

Définition 6.1

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit a et b deux nombres réels tel que $a < b$.
Un ensemble fini de nombres réels $\sigma = \{x_0\ ,\ x_1\ ,\ \dots,\ x_n\}$ tels que $x_0 = a < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$,
est appelé une subdivision de l'intervalle $[a\ ,b]$.

1. *Le nombre noté $|\sigma|$ défini par $|\sigma| = \max_{1\le k\le n}(x_k - x_{k-1})$ est appelé le pas de la subdivision σ.*
2. *La subdivision $\sigma = \{x_0\ ,\ x_1\ ,\ \dots,\ x_n\}$ permet de partager l'intervalle $[a\ ,\ b]$ en n intervalles partiels $[x_{k-1}\ ,\ x_k]$ où $k = 1,2,\dots,n$.*

Exemple 6.1 L'ensemble $\sigma = \{0\ ,\frac{1}{3}\ ,\frac{4}{5}\ ,\ 1\}$ est une subdivision de l'intervalle $[0\ ,\ 1\ ]$ du pas $|\sigma| = \frac{4}{5} - \frac{1}{3} = \frac{7}{15}$.

Définition 6.2

Si

$$x_1 - x_0 = x_2 - x_1 = \cdots = x_n - x_{n-1} = \frac{b-a}{n}$$

Alors on dit que la subdivision $\sigma = \{x_0\ ,\ x_1\ ,\ \dots,\ x_n\}$ de l'intervalle $[a\ ,\ b]$ est uniforme (ou régulière) .
Donc les éléments d'une subdivision uniforme de l'intervalle $[a\ ,\ b]$, constituent une suite finie arithmétique du raison $\frac{b-a}{n}$. Ainsi , on a pour tout $k = 0,1,2,\dots,n\ :\ x_k = a + kh$; avec $h = \frac{b-a}{n}$.

1. La subdivision uniforme $\sigma_n = \{x_0\ ,\ x_1\ ,\ \dots,\ x_n\}$ permet de partager l'intervalle $[a\ ,\ b]$ en n intervalles partiels $[x_{k-1}\ ,\ x_k]$ de même longueur $h = \frac{b-a}{n}$.

Exemple 6.2 $\sigma = \{2\ ,\ \frac{9}{4}\ ,\ \frac{10}{4}\ ,\frac{11}{4}\ ,\ 3\ \}$ est une subdivision uniforme de pas $\frac{1}{4}$ de l'intervalle $[2\ ,\ 3\ ]$.

Définition 6.3

Soient σ et σ' deux subdivision d'un intervalle $[a\ ,\ b]$. On dit que σ' est plus fine que σ si on a $\sigma \subset \sigma'$.

1. *On note par $\Sigma(a,b)$ l'ensemble (ou la famille) de toutes les subdivisions de l'intervalle $[a\ ,b]$.*
2. *Il est clair que si $\sigma \in \Sigma(a,b)$ et $\sigma' \in \Sigma(a,b)$ alors $\cup\sigma' \in\ \Sigma(a,b)$. De plus $\sigma \cup \sigma'$ est plus fine que σ et σ' .*

Proposition 6.1

Si $\sigma' \in \Sigma(a,b)$ est plus fine que $\sigma \in \Sigma(a,b)$ alors $|\sigma'| \le |\sigma|$.

6.1.2 Fonctions en escaliers

Définition 6.4

Une fonction $\varphi\ : [a,\ b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est appelée fonction en escalier s'il existe une subdivision $\sigma = \{\ x_0\ , x_1,\ x_2,\ ..\ ,\ x_n\}$ de l'intervalle $[a\ ,\ b]$ telle que φ est constante sur chaque intervalle $]x_{k-1}\ ,\ x_k[$. Autrement dit : Il existe des constantes réelles $c_1,\ c_2,\ \dots,\ c_n$ tels que :

$$\varphi(x) = c_k\ ,\quad \forall\ x \in]x_{k-1}\ ,\ x_k[\ ,\quad k = 1, 2, \dots,\ n$$

On dit alors que la subdivision σ est adaptée à φ.
L'ensemble de toutes les fonctions en escalier définies sur l'intervalle $[a\ , b]$ est noté par $\mathcal{E}([a\ , b])$.

Exemple 6.3

1. Toute fonction constante sur $[a\ , b]$ est une fonction en escalier particulière sur $[a\ , b]$.
2. La fonction partie entière $x \mapsto E(x)$ est une fonction en escalier sur tout intervalle $[a\ , b]$.

Proposition 6.2

Si la subdivision σ est adaptée à $\varphi \in \mathcal{E}([a\ , b])$, alors toute autre subdivision plus fine que σ est aussi adaptée à φ .

6.1.3 Intégrale d'une fonction en escalier

Définition 6.5

Reprenant les notations de la définition 2 .
Le nombre $I = \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1})\, c_k$ est appelé l'intégrale de la fonction en escalier φ sur l'intervalle $[a\ , b]$, et se note par

$$I = \int_a^b \varphi(x)\ dx = \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1})\, c_k$$

Cas particuliers :

1. φ est constante sur l'intervalle $[a\ , b]$: Dans ce cas : $c_1 = c_2 = \cdots = c_n = c$

Ainsi $\int_a^b c\ dx = c \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) = c\,(x_n - x_0) = c(b-a)$.

1. φ est définie par une subdivision uniforme : Dans ce cas $x_k - x_{k-1} = h = \frac{b-a}{n}$.

Ainsi $\int_a^b \varphi(x)\ dx = h \sum_{k=1}^{n} c_k = (b-a)\left(\ \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} c_k\ \right)$.

Remarque

1. Dans la notation $\int_a^b \varphi(x)\ dx$, la variable x est une variable muette et on peut la remplacer par une autre variable ; i.e. on peut écrire $\int_a^b \varphi(x)\ dx = \int_a^b \varphi(t)\ dt = \int_a^b \varphi(s)\ ds = \dots$.
2. On peut montrer que le nombre $\int_a^b \varphi(x)\ dx$ est indépendant du choix de la subdivision.

Exemple 6.4 Calculer $\int_{-2}^{1} E(2x)\, dx$.

Réponse : La subdivision régulière $\sigma = \left\{-2,\ -\frac{3}{2}\ , -1\ , -\frac{1}{2}\ , 0\ ,\ \frac{1}{2}\ ,\ 1\right\}$ est adaptée à la fonction en escalier

$x \mapsto E(2x)$. On a :

$$E(2x) = \begin{cases} -4 & si \quad x \in [-2\,,\,-\frac{3}{2}\,[\\ -3 & si \quad x \in [-\frac{3}{2}\,,-1\,[\\ -2 & si \quad x \in [-1\,,-\frac{1}{2}\,[\\ -1 & si \quad x \in [-\frac{1}{2}\,,\,0[\\ 0 & si \quad x \in [0\,,\frac{1}{2}\,[\\ 1 & si \quad x \in [\frac{1}{2}\,,1\,[\\ 2 & si \quad x = 1 \end{cases}$$

Donc $\int_{-2}^{1} E(2x)\,dx = \frac{2-(-1)}{6}\left(-4+(-3)+(-2)+(-1)+\left(-\frac{1}{2}\right)+0+1\right) = -\frac{19}{4}$.

6.1.4 Sommes de Darboux , Sommes de Riemann

Soit $f\ : [a\,,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction bornée . Soit $\sigma = \{\, x_0\,, x_1,\, x_2,\, ..\,,\, x_n\}$ une subdivision de l'intervalle $[a\,,b]$.

1. On note par $\Theta(\sigma)$ la famille de tout les ensembles finis $\Lambda = \{\lambda_1\,,\,\lambda_2\,,\,\ldots,\,\lambda_n\} \subset [a\,,b]$, tels que $\lambda_i \in [x_{i-1}\,,\,x_i\,]$ pour tout $i\ \in \{1, 2, \ldots,\, n\,\}$.
2. On pose $m_i = \inf_{x\in[x_{i-1}\,,x_i]} f(x)$ et $M_i = \sup_{x\in[x_{i-1}\,,x_i]} f(x)$ pour tout $i\ \in \{1, 2, \ldots,\, n\,\}$.
3. On défini les trois sommes suivantes :

$$D_*(f,\sigma) = \sum_{i=1}^{n} m_i\,(x_i - x_{i-1})\ \ ,\ \ D^*(f,\sigma) = \sum_{i=1}^{n} M_i\,(x_i - x_{i-1})$$

et

$$R(f,\sigma\,,\,\Lambda\,) = \sum_{i=1}^{n} f(\lambda_i)\,(x_i - x_{i-1})\quad,\quad \Lambda \in \Theta(\sigma)$$

1. On défini les trois fonctions en escalier φ , ψ et ξ sur $[a\,,\,b]$ par

$$\varphi(x) = m_i\ \ ,\ \ \psi(x) = M_i\ \ ,\ \ \xi(x) = f(\lambda_i\,)\qquad \forall\, x \in]x_{i-1}\,,\,x_i\,[\ \ ,\ \ i = 1,\ldots,n$$

2. Il est clair que pour tout $x \in [a\,,\,b]$: $\varphi(x) \le f(x) \le \psi(x)$.
3. On remarque que

$$\int_a^b \varphi(x)\,dx = D_*(f,\sigma)\ ,\ \int_a^b \psi(x)\,dx = D^*(f,\sigma)\ et\ \int_a^b \xi(x)\,dx = R(f,\sigma\,,\,\Lambda\,)$$

4. Les nombres $D_*(f,\sigma)$ et $D^*(f,\sigma)$ sont appelés <u>sommes de Darboux</u> associées à f relativement à la subdivision σ.
5. Le nombre $R(f,\sigma\,,\,\Lambda\,)$ est appelé <u>somme de Riemann</u> associées à f relativement à la subdivision σ et à la famille $\Lambda \in \Theta(\sigma)$.
6. On a $\lambda_i \in [x_{i-1},\, x_i\,]$. Si l'on choisi $\lambda_i = x_i$ (Resp : $\lambda_i = x_{i-1}$) pour tout $i \in \{1, 2, \ldots,\, n\}$ on trouve la sommes de Riemann à droite notée $R^*(f,\sigma)$ (Resp : à gauche notée $R_*(f,\sigma)$).
7. On pose $m = \inf_{x\in[a,b]} f(x)$, $M = \sup_{x\in[a,b]} f(x)$. Comme $m \le m_i \le f(\lambda_i\,) \le M_i \le M$, et il est clair que pour tout $\sigma \in \Sigma(a,b)$:

$$m(b-a) \le D_*(f,\sigma) \le\ R(f,\sigma\,,\,\Lambda\,)\ \le\ D^*(f,\sigma) \le M(b-a).$$

8. De point de vue géométrique, si f est positive, alors les sommes $D_*(f,\sigma)$, $D^*(f,\sigma)$ et $R(f,\sigma\,,\,\Lambda\,)$

sont les sommes des aires des rectangles de base $x_i - x_{i-1}$ et d'hauteurs m_i , M_i et $f(\lambda_i)$ respectivement.

1. Si on considère une subdivision uniforme σ_n de pas $h_n = \frac{b-a}{n}$ de l'intervalle $[a,b]$, alors :

$$D_*(f,\sigma_n) = h_n \sum_{i=1}^{n} m_i\ \ ,\ \ D^*(f\,,\,\sigma_n) = h_n \sum_{i=1}^{n} M_i\quad et\quad R(f,\sigma_n\,,\,\Lambda\,) = h_n \sum_{i=1}^{n} f(\lambda_i)$$

En particulier, les sommes de Riemann à gauche et à droite s'écrit dans ce cas :

$$R_*(f,\sigma_n) = h_n \sum_{i=1}^{n} f(a+(i-1)h_n) \ et \ R^*(f,\sigma_n) = h_n \sum_{i=1}^{n} f(a+i\,h_n)$$

Exemple 6.5 Calculer la somme de Riemann à droite associée à f relativement à la subdivision uniforme de l'intervalle $[a,b]$ dans les cas suivants :

1) $f(x) = x$, 2) $f(x) = e^x$.

Réponses :

1. $f(x) = x$. On a $R^*(f,\sigma_n) = h_n \sum_{i=1}^{n} f(a+i\,h_n)$ avec $h_n = \frac{b-a}{n}$. Donc

$$R^*(f,\sigma_n) = h_n \sum_{i=1}^{n}(a+i\,h_n) = h_n \sum_{i=1}^{n} a + h_n \sum_{i=1}^{n} i\,h_n = h_n\,n\,a + (h_n)^2 \sum_{i=1}^{n} i\,.$$

Comme $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$, on trouve :

$$R^*(f,\sigma_n) = (b-a)\left(a + \frac{(n+1)(b-a)}{2n}\right)$$

1. $f(x) = e^x$. En utilisant la formule de somme des termes d'une suite géométrique, on obtient

$$R^*(f,\sigma_n) = h_n \sum_{i=1}^{n} e^{a+i\,h_n} = h_n e^a \sum_{i=1}^{n} \left(e^{h_n}\right)^i = h_n e^a\, e^{h_n}\left(\frac{e^{n\,h_n}-1}{e^{h_n}-1}\right)$$

Finalement,

$$R^*(f,\sigma_n) = (e^b - e^a)e^{h_n}\left(\frac{h_n}{e^{h_n}-1}\right) \quad \text{où} \quad h_n = \frac{b-a}{n}\,.$$

6.2 Fonctions intégrables et notion de l'intégrale

6.2.1 Fonctions intégrables au sens de Riemann

Définition 6.6

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction réelle . On dit que la fonction f est intégrable (au sens de Riemann) sur l'intervalle $[a,b]$ si :

$$\forall\ \varepsilon > 0\,,\ \exists\ \phi_\varepsilon\ ,\ \psi_\varepsilon \in \mathcal{E}([a,b]) :\ \varphi_\varepsilon \le f \le \psi_\varepsilon \ \ et \ \int_a^b (\psi_\varepsilon(x) - \phi_\varepsilon(x))\,dx < \varepsilon\,.$$

Autrement dit, la fonction réelle f est dite intégrable sur $[a,b]$ si pour tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver deux fonctions en escalier ϕ_ε , ψ_ε encadrant f et telle que la différence de leurs intégrales (c'est l'aire de la portion colorée dans la figure ci-dessous) ne dépasse pas ε.

Remarque On sait bien que toute fonction en escalier est bornée. Donc d'après la définition 5 , toute fonction intégrable sur un intervalle $[a\ ,\ b]$ est bornée. Par conséquent, une fonction non bornée sur $[a\ ,\ b]$ n'est pas intégrable sur $[a\ ,\ b]$.

La définition 5 est équivalente à la définition suivante :

Définition 6.7

Une fonction réelle et bornée $f : [a\ ,\ b] \to \mathbb{R}$ est dite intégrable sur $[a,b]$ si :

$$\forall\ \varepsilon > 0\,,\ \exists\ \sigma \in \Sigma(a,b)\ :\ D^*(f,\sigma) - D_*(f,\sigma) < \varepsilon\ .$$

Autrement dit, f est dite intégrable sur $[a,b]$ si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une subdivision σ de l'intervalle $[a, b]$ de sorte que la différence entre les sommes de Darboux associées à f relativement à σ est inférieure à ε.

Notation : L'ensemble de toutes les fonctions réelles intégrables (au sens de Riemann) sur l'intervalle $[a, b]$ est noté par $\mathbb{I}([a, b])$.

Théorème 6.1

Toute fonction réelle monotone sur l'intervalle $[a, b]$ est intégrable sur $[a, b]$.

Démonstration Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction réelle monotone sur $[a, b]$. Supposons par exemple que f est croissante sur $[a, b]$. Soit $\sigma = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ une subdivision de $[a, b]$. Alors

$$D_*(f, \sigma) = \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})(x_i - x_{i-1}) \quad et \quad D^*(f,\sigma) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)(x_i - x_{i-1})$$

Donc

$$D^*(f,\sigma) - D_*(f,\sigma) = \sum_{i=1}^{n} (f(x_i) - f(x_{i-1}))(x_i - x_{i-1}) \qquad (1)$$

La relation (1) est vraie pour toute subdivision $\sigma = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ de $[a, b]$.
Soit maintenant > 0, et choisissons une subdivision $\sigma = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ de $[a, b]$ telle que

$$|\sigma| = \sup_{1 \le i \le n} (x_i - x_{i-1}) \le \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)}$$

$$D^*(f,\sigma) - D_*(f,\sigma) \le (f(b) - f(a)) \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) = (b-a)(f(b) - f(a)) \qquad (3)$$

Ainsi, pour ce choix, on trouve d'après la relation (1) :

$$D^*(f,\sigma) - D_*(f,\sigma) \le \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)} \sum_{i=1}^{n} f(x_i) = \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)} (f(b) - f(a)) = \varepsilon$$

Ce qui signifie par définition que f est intégrable sur l'intervalle $[a,b]$. ■

Exemple 6.6 Soit f la fonction réelle définie sur $[0, 2]$ par

$$f(x) = \begin{cases} x & si\ x \in [0, 1[\\ 2 & si \quad x = 1 \\ e^x & si\ x \in]1, 2] \end{cases}$$

Il est clair que f est monotone (elle est croissante) sur $[0, 2]$, donc elle est intégrable sur $[0, 2]$.

Théorème 6.2

Toute fonction réelle continue sur l'intervalle $[a, b]$ est intégrable sur $[a, b]$.

Pour démontrer le Théorème 2 , nous aurons besoin du lemme suivant :

Lemme 6.1

Si f est une fonction continue sur $[a, b]$, alors :

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \eta > 0 : \forall x, x' \in [a,b] : (\left|x - x'\right| < \eta \Longrightarrow |f(x) - f(x')| < \varepsilon.$$

Preuve du Théorème 2 : Soit f une fonction réelle continue sur l'intervalle $[a, b]$. Soit $\varepsilon > 0$.
Alors d'après le lemme 1 on en déduit qu'il existe un $\eta_0 > 0$ (dépend uniquement de ε) tels que :

$$\forall x, x' \in [a,b] : \quad \left(\left|x - x'\right| < \eta_0 \Longrightarrow \left|f(x) - f(x')\right| < \varepsilon \right) \qquad (3)$$

Soit $\sigma = \{x_0\,,\,x_1\,,\,\ldots,\,x_n\}$ une subdivision de l'intervalle $[a\,,\,b]$ telle que

$$|\sigma| = \sup_{1\le i\le n}(x_i - x_{i-1}) \le \frac{\eta_0}{n}$$

La fonction f étant continue sur $[a\,,\,b]$; elle est donc continue sur chaque intervalle partiel $[x_{i-1}\,,\,x_i]$. Donc, sur chaque intervalle $[x_{i-1}\,,\,x_i]$, la fonction f atteint sa borne inférieure et sa borne supérieure. Autrement dit, pour chaque $i \in \{1,2,\ldots,\,n\}$

$$\exists\ \ y_i\ et\ \ z_i \in [x_{i-1}\,,\,x_i]\ :\ m_i = \inf_{x\in[x_{i-1}\,,\,x_i]} f(x) = f(y_i)\quad et\quad M_i = \sup_{x\in[x_{i-1}\,,\,x_i]} f(x) = f(z_i)$$

Ainsi

$$D^*(f,\sigma) - D_*(f,\sigma) = \sum_{i=1}^{n}(f(z_i) - f(y_i))(x_i - x_{i-1}) \le \frac{\eta_0}{n}\sum_{i=1}^{n}\left|f(z_i) - f(y_i)\right| \qquad (4)$$

Or $y_i\ et\ \ z_i \in [x_{i-1}\,,\,x_i]$, la relation (3) nous assure que pour chaque $i \in \{1,2,\ldots,\,n\}$ on a $\left|f(z_i) - f(y_i)\right| < \varepsilon$. Donc la relation (4) nous donne $D^*(f,\sigma) - D_*(f,\sigma) < \eta_0\ \varepsilon$, ce qui montre que f est intégrable sur $[a\,,\,b]$. Le théorème est démontré.

Une autre classe importante des fonction intégrables sur un intervalle fermé et borné $[a\,,\,b]$, est la classe des fonctions continues par morceaux sur $[a\,,\,b]$.

Définition 6.8

Une fonction $f : [a\,,\,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite <u>continue par morceaux</u> sur $[a\,,\,b]$ s'il existe une subdivision $\sigma = \{x_0, x_1, \ldots x_n\}$ de $[a\,,\,b]$, tels que f soit continue sur chaque intervalle ouvert $]x_{k-1}\,,\,x_k[$ et la limite à droite de f au point x_{i-1} et la limite à gauche de f au point x_i existent pour tout $i \in \{1,2,\ldots,\,n\}$.
L'ensemble de toutes les fonctions continues par morceaux sur $[a\,,\,b]$ est noté par $\mathcal{C}_m([a\,,\,b])$.

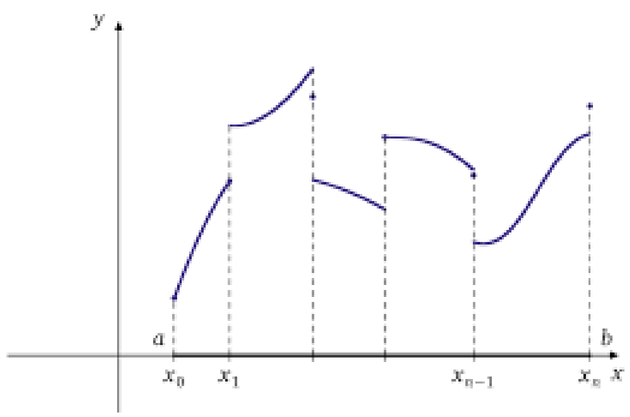


FIGURE 6.1: Fonction continue par morceaux

Il 'est clair que toute fonction continue sur $[a\,,\,b]$ est continue par morceaux sur $[a\,,\,b]$. C'est-à-dire $C([a\,,\,b]) \subset \mathcal{C}_m([a\,,\,b])$.

Exemple 6.7 Soit $x \mapsto E(x)$ la fonction partie entière.
Soit $f : [0\,,\,1] \to \mathbb{R}$ la fonction réelle définie par
$f(x) = (1 - x^2)E(5x)$. Il est clair que $f \in \mathcal{C}_m([0\,,\,1])$
Le graphe de f ci-contre est continu par morceaux.
On admet le résultat suivant

Théorème 6.3

Toute fonction continue par morceaux sur $[a\,,\,b]$ est intégrable sur $[a\,,\,b]$. Autrement dit : $\mathcal{C}_m([a\,,\,b]) \subset \mathrm{I}([a\,,\,b])$.

Exemple 6.8 Soit $\psi \in C([a\ ,b])$ et f est la fonction réelle définie sur $[a,b]$ par $f(x) = \psi(x)E(mx)$, où $m \in \mathbb{N}^*$. Puisque $f \in \mathcal{C}_m([a\ ,\ b])$, on en déduit que f est intégrable sur $[a,b]$.

Remarque Bien que les fonctions monotones, continues et continues par morceaux sur un intervalle $[a,b]$ sont intégrables sur $[a,b]$, il existe d'autre fonctions intégrables qui sont ni monotones ni continues sur $[a,b]$. Il existe aussi des fonctions bornée et non intégrables sur $[a,b]$. Voici les deux exemples classiques suivants :

Exemple 6.9 Soit f la fonction réelle définie sur $[0\ ,\ 1]$ par

$$f(x) = \begin{cases} \sin\left(\frac{1}{x}\right) & si \quad x \in]0\ ,\ 1\ ] \\ 0 & si \quad x = 0 \end{cases}$$

La fonction f n'étant ni continue ni monotone sur $[0\ ,\ 1]$. Cependant, f est intégrable sur $[0\ ,\ 1]$.

En effet, soit $0 < \varepsilon\ < 1$. La fonction f est intégrable sur $[\varepsilon\ ,\ 1]$ puisque elle est continue sur cet intervalle. Donc, il existe une subdivision $\sigma_\varepsilon = \{x_0\ ,\ x_1\ ,\ \ldots,\ x_n\ \}$ de l'intervalle $[\varepsilon\ ,\ 1]$ telle qu'on ait

$$D^*(f,\ \sigma_\varepsilon) - D_*(f,\sigma_\varepsilon) < \varepsilon \qquad (1)$$

Soit $\sigma = \{t_0\ ,\ t_1\ ,\ \ldots t_n\ ,\ t_{n+1}\}$ une subdivision de l'intervalle $[0\ ,\ 1]$, telles que

$$t_0 = 0\ ,\ t_1 = \varepsilon \quad et \quad t_{i+1} = x_i \quad pour \quad i \in \{1,\ldots,\ n\ \}$$

Alors, on a

$$D_*(f,\ \sigma) = \sum_{i=1}^{n+1} m_i\ (t_i - t_{i-1}) = m_1\varepsilon + \ D_*(f,\ \sigma_\varepsilon)$$

Où $m_i = \inf_{x\in[t_{i-1}\ ,\ t_i]} f(x)$. En particulier $m_1 = \inf_{x\in[0\ ,\ \varepsilon]} f(x)$. D'autre part il existe toujours $N \in \mathbb{N}^*$ assez grand de sorte que $= \frac{1}{\frac{3\pi}{2}+2\pi\ N}\ < \varepsilon$. Or $f(\eta) = -1 \leq\ f(x)\ ,\ \ \forall\ x \in [0\ ,\ 1]$, ce qui signifie clairement que $m_1 = -1$. Donc

$$D_*(f,\ \sigma) = -\varepsilon + D_*(f,\ \sigma_\varepsilon) \qquad (2)$$

De la même manière, on peut montrer que

$$D^*(f,\ \sigma) = \varepsilon + D^*(f,\ \sigma_\varepsilon) \qquad (3)$$

De (1) , (2) et (3) on en déduit que

$$D^*(f,\ \sigma) - D_*(f,\ \sigma) = D^*(f,\ \sigma_\varepsilon) - D_*(f,\ \sigma_\varepsilon) + 2\varepsilon\ < 3\ \varepsilon$$

Ce qui montre que f est intégrable sur $[0\ ,\ 1]$.

Exemple 6.10 Soit la fonction μ définie sur l'intervalle $[0\ ,\ 1]$ par :

$$\mu(x) = \begin{cases} 1 & si \quad x \in [0,1] \cap \mathbb{Q} \\ 0 & si\ non \end{cases}$$

Il est clair que la fonction μ est bornée. Cependant μ n'est pas intégrable sur l'intervalle $[0\ ,\ 1]$.

En effet, soit $\sigma = \{\ x_0, x_1, \ldots x_n\ \}$ une subdivision quelconque de l'intervalle $[0\ ,\ 1]$.

On sait bien que dans chaque intervalle partiel $[x_{i-1}\ ,\ x_i]$ il existe une infinité des nombres rationnels et irrationnels. Donc

$$m_i = \inf_{x\in[x_{i-1}\ ,\ x_i]} \mu(x) = 0 \quad et \quad M_i = \sup_{x\in[x_{i-1}\ ,\ x_i]} \mu(x) = 1$$

Ainsi

$$D_*(\mu\ ,\ \sigma) = 0 \quad et \ \ D^*(\mu\ ,\ \sigma) = 1$$

Par conséquent,

$$\exists\ \varepsilon = \frac{1}{2}\ ,\ \ \forall\ \sigma \in \Sigma(0,1)\ \ :\ D^*(\mu\ ,\ \sigma) - D_*(\mu\ ,\sigma) = 1 > \varepsilon \qquad (*)$$

La relation $(*)$ est la négation logique de la définition d'intégrabilité d'une fonction en utilisant les sommes de

Darboux. Donc μ n'est pas intégrable (au sens de Riemann) sur $[0\ ,\ 1]$.

6.2.2 Intégrale d'une fonction bornée

Soit $f\ :\ [a\ ,\ b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction bornée sur l'intervalle $[a\ ,\ b]$. Considérons les deux parties réelles $A_*(f)\quad et \quad A^*(f)$ définies par :

$$A_*(f) = \left\{ \int_a^b \phi(x)\,dx \ \ : \phi \in \mathcal{E}([a\ ,\ b]) \ \ et \ \ f \geq \phi \ \right\}$$

$$A^*(f) = \left\{ \int_a^b \psi(x)\,dx \ \ : \psi \in \mathcal{E}([a\ ,\ b]) \ \ et \ \ f \leq \psi \ \right\}$$

Comme f est bornée sur $[a\ ,\ b]$, alors $m = \inf_{x\in[a,b]} f(x)$ et $M = \sup_{x\in[a,b]} f(x)$ existent. Soient les deux fonctions ϕ_0 et ψ_0 constantes sur $[a, b]$ définie par

$$\phi_0(x) = m \qquad et \quad \psi_0(x) = M \quad \ \forall\ x \in [a, b]$$

Il est clair que $\phi_0\ ,\ \psi_0 \in \mathcal{E}([a\ ,\ b])$ et $\phi_0 \leq f \leq \psi_0$ sur l'intervalle $[a, b]$. Donc $A_*(f)\quad et \quad A^*(f)$ sont non vides. De plus, la partie A_* est majorée par $\int_a^b \psi_0(x)\,dx = M(b-a)$ et la partie A^* est minorée par le nombre $\int_a^b \phi_0(x)\,dx = m(b-a)$. D'après l'axiome de la borne supérieure, on en déduit que les deux nombres réels $I_*(f) = \sup\,(A_*(f)) \quad et \quad I^*(f) = \inf(A^*(f))$ existent et on a $I_*(f) \leq I^*(f)$.

Théorème 6.4

f est intégrable sur $[a\ ,\ b]$ si et seulement si $I_*(f) = I^*(f)$.

Démonstration

1. Supposons que $I_*(f) = I^*(f)$. D'après la caractérisation de la borne supérieure et celle de la borne inférieure, il vient

$\forall\ \varepsilon > 0\ \ \exists\ \phi_\varepsilon\ ,\ \psi_\varepsilon \in \mathcal{E}([a\ ,\ b])\ :\ \phi_\varepsilon \leq\ f \leq \psi_\varepsilon$ et

$$\int_a^b \phi_\varepsilon(x)\,dx\ > I_*(f) - \varepsilon \qquad et \qquad \int_a^b \psi_\varepsilon(x)\,dx < I^*(f) + \varepsilon$$

Donc

$$0 = I^*(f) - I_*(f)\ > \int_a^b\ (\psi_\varepsilon(x) - \phi_\varepsilon(x)\,)\,dx - 2\varepsilon$$

Ainsi $\forall\ \varepsilon > 0\ \ \exists\ \phi_\varepsilon\ ,\ \psi_\varepsilon \in \mathcal{E}([a\ ,\ b])\ :\ \phi_\varepsilon \leq\ f \leq \psi_\varepsilon$ et $\int_a^b\ (\psi_\varepsilon(x) - \phi_\varepsilon(x)\,)\,dx < 2\varepsilon$.
Donc par définition, f est intégrable sur $[a\ ,b]$.

1. Supposons maintenant que f est intégrable sur $[a\ ,b]$. Soit $\ > 0$. Alors il existe une subdivision $\sigma = \{x_0\ ,\ x_1\ ,\ \ldots,\ x_n\}$ de l'intervalle $[a, b]$, telles qu'on ait

$$D^*(f, \sigma) - D_*(f, \sigma) < \varepsilon$$

On défini maintenant, les deux fonctions en escalier $\varphi\ \ ,\ \ \psi$ sur $[a\ ,\ b]$ par

$$\varphi(x) = m_i = \inf_{x\in[x_{i-1},\ x_i]} f(x) \quad , \quad \psi(x) = M_i = \sup_{x\in[x_{i-1},\ x_i]} f(x) \qquad \forall\ x \in]x_{i-1}\ ,\ x_i\ [\ \ ,\quad i = 1, \ldots, n$$

Il est clair que pour tout $x \in [a\ ,\ b] : \varphi(x) \leq f(x) \leq \psi(x)$ et que

$$\int_a^b \varphi(x)\,dx = D_*(f, \sigma), \int_a^b \psi(x)\,dx = D^*(f, \sigma)$$

Donc, d'après la définition des nombres $I^*(f)\ \ et\ I_*(f)$, on en déduit que

$$D_*(f, \sigma) \leq I_*(f) \leq I^*(f) \leq D^*(f, \sigma) \qquad (*)$$

Ce qui donne ainsi :

$$0 \leq I^*(f) - I_*(f) \leq D^*(f,\sigma) - D_*(f,\sigma) < \varepsilon$$

Comme ε est arbitrairement positif, alors la relation $(*)$ signifie que $I^*(f) = I_*(f)$. Le théorème est démontré. ■

Définition 6.9

Soit f une fonction réelle intégrable sur $[a,b]$. L'intégrale de f sur $[a\ ,\ b]$ notée par $\int_a^b f(x)\,dx$ est le nombre réel défini par :

$$\int_a^b f(x)\,dx = I_*(f) = I^*(f)$$

Remarques 12

1. *Dans la notation $\int_a^b f(x)\ dx$, la variable x est une variable muette et on peut la remplacer par une autre variable ; i.e. on peut écrire $\int_a^b f(x)\ dx = \int_a^b f(t)\ dt = \int_a^b f(s)\ ds = \ldots$. C'est comme l'on peut changer l'indice de sommation sans affecter la valeur de la somme*

$$\sum_{k=1}^{N} u_k = \sum_{i=1}^{N} u_i = \sum_{j=1}^{N} u_j = \ldots$$

2. *Si f une fonction réelle intégrable sur $[a,b]$, alors il est clair d'après la relation $(*)$ ci-dessus que pour toute subdivision σ de l'intervalle $[a,b]$ on a*

$$m(b-a) \leq D_*(f,\sigma) \leq \int_a^b f(x)\,dx \ \leq D^*(f,\sigma) \leq M(b-a)$$

où m et M sont les bornes inférieure et supérieure de f sur $[a,b]$ respectivement.

3. *Si la fonction f est continue sur l'intervalle $[a,b]$, le nombre réel $\int_a^b f(x)\,dx$ représente l'aire algébrique de la portion de plan comprise entre les droites d'équations $x = a$, $x = b$, l'axe des abscisses et la courbe de f . (Voir la figure si dessous)*

On admet le résultat suivant,

Théorème 6.5

Soit f une fonction continue par morceaux sur un intervalle $[a,b]$. Alors

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \eta > 0\,,\ \forall\ \sigma \in \Sigma(a,b)\ ,\forall\ \Lambda \in \Theta(\sigma)\quad : |\sigma| < \eta\quad \Longrightarrow \left| R(f,\ \sigma,\Lambda) - \int_a^b f(x)\,dx \right| < \varepsilon$$

Autrement dit, $\forall\ \sigma \in \Sigma(a,b)\ ,\forall\ \Lambda \in \Theta(\sigma)$ alors

$$\lim_{|\sigma|\to 0} R(f,\ \sigma,\Lambda) = \int_a^b f(x)\,dx\,.$$

Corollaire 6.1

Soit f une fonction continue par morceaux sur un intervalle $[a,b]$. Alors

$$\forall\ \sigma \in \Sigma(a,b)\ :\ \lim_{|\sigma|\to 0} R_*(f,\ \sigma) = \lim_{|\sigma|\to 0} R^*(f,\ \sigma) = \int_a^b f(x)\,dx$$

En particulier si σ est une subdivision uniforme de $[a,b]$ de pas $\frac{b-a}{n}$ avec $n \in \mathbb{N}^*$, alors

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to+\infty} R^*(f,\sigma_n) = \lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} f\left(a + i\left(\frac{b-a}{n}\right)\right) \qquad (@)$$

Exemple 6.11 En utilisant la somme de Riemann, calculer :

$$A = \int_a^b x\ dx \quad , \quad B = \int_a^b e^x\ dx\,.$$

<u>**Réponses**</u> :

1. On a déjà calculer la somme de Riemann à droite de la fonction $f\ :\ x \mapsto x$ associée à la subdivision uniforme d'un intervalle fermé borné quelconque $[a,b]$ (voir l'exemple 5).

On a
$$R^*(f,\sigma_n) = (b-a)\left(a+\frac{(n+1)(b-a)}{2n}\right)$$
La fonction f étant continue (donc elle est continue par morceaux) sur $[a,b]$, alors d'après la formule (@) on obtient
$$A = \int_a^b x\,dx = \lim_{n\to+\infty}(b-a)\left(a+\frac{(n+1)(b-a)}{2n}\right) = (b-a)\left(\frac{b-a}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(b^2-a^2\right)$$

1. Pour la fonction $: x \mapsto e^x$, nous avons trouver (voir l'exemple 5) que
$$R^*(f,\sigma_n) = (e^b-e^a)e^{h_n}\left(\frac{h_n}{e^{h_n}-1}\right) \quad \text{où} \quad h_n = \frac{b-a}{n}$$

Donc ; puisque f est continue sur $[a,b]$, on trouve
$$B = \int_a^b e^x\,dx = \lim_{n\to+\infty}(e^b-e^a)e^{h_n}\left(\frac{h_n}{e^{h_n}-1}\right) = e^b-e^a$$
Car $h_n \to 0$ quand $n \to +\infty$ et alors $\lim_{n\to+\infty}\frac{h_n}{e^{h_n}-1} = 1$. (Appliquer la règle de l'Hôpital)

6.3 Propriétés de l'intégrale

On admet les résultats suivants.

6.3.1 Coïncidence de deux intégrales

Théorème 6.6

Soient f et g deux fonctions intégrables sur un intervalle $[a\ ,\ b]$ tels que $f = g$ sur $[a\ ,\ b]$ sauf en un nombre fini de points de $[a\ ,\ b]$. C'est-à-dire :
$$\{x \in [a,\ b] :\ \ f(x) \neq g(x)\} = \left\{s_1\ ,\ s_2,\ \ldots,\ s_p\right\}$$
Où $s_1\ ,\ s_2,\ \ldots,\ s_p \in [a,\ b]$ et p est un entier positif. Alors on a
$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b g(x)\ dx$$

Exemple 6.12 Soient $f\ ,\ g\ : [0,1] \to \mathbb{R}$ deux fonctions réelles définies par
$$f(x) = \begin{cases} x & si\ x \in [0\ ,\ 1[\\ 4 & si\ \ x = 1 \end{cases} \qquad et \qquad g(x) = \begin{cases} x & si\ \ x \in]0,1] \\ 0 & si\ x = 0 \end{cases}$$
Il est clair que pour tout $x \in]0\ ,\ 1[\ f(x) = g(x)$. Comme f et g sont monotones sur $[0,1]$, elles sont intégrables sur $[0,1]$, et on a
$$\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 g(x)\ dx = \int_0^1 x\,dx = \frac{1}{2}$$

6.3.2 Linéarité de l'intégrale

Théorème 6.7

Soient f et g deux fonctions intégrables sur un intervalle $[a\ ,\ b]$. Alors

1. *La fonction $f+g$ est intégrable sur $[a\ ,\ b]$ et on a*
$$\int_a^b (f(x)+g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$
2. *Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, la fonction λf est intégrable sur $[a\ ,\ b]$ et on a*
$$\int_a^b \lambda\, f(x)\ dx = \lambda \int_a^b f(x)\ dx$$

En réunissant les deux points 1) et 2) du théorème 4 , on dit que l'intégrale est un opérateur linéaire. C'est-à-dire , l'intégrale d'une combinaison linéaire de fonctions intégrables sur $[a,b]$ est égale à la combinaison linéaire des intégrales de ces fonctions sur $[a,b]$.

Remarque L'ensemble $\mathrm{I}([a\ ,\ b])$ des fonctions intégrables sur l'intervalle $[a\ ,\ b]$, muni de l'addition fonctionnelle (loi interne) et la multiplication par scalaire (loi externe) est un espace vectoriel réel. De plus l'application $T:\ \mathrm{I}([a\ ,\ b]) \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par
$$T(f) = \int_a^b f(x)\,dx$$
est une application linéaire. (d'après le théorème 6.7) .

6.3.3 Positivité de l'intégrale

Proposition 6.3

Soient f et g deux fonctions intégrables sur un intervalle $[a\ ,\ b]$. Alors

1. $f(x) \geq 0\ \ sur\ \ [a\ ,b] \Longrightarrow\ \int_a^b f(x)\,dx \geq 0$ *(positivité de l'intégrale)*
2. $f(x) \leq g(x)\ \ sur\ \ [a\ ,b] \Longrightarrow\ \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$ *(croissance de l'intégrale)*
3. $\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\ dx \leq (b-a)\ \sup_{a\leq x\leq b}|f(x)|$

Démonstration

1. Si $f \in \mathrm{I}([a\ ,\ b])$ et $f \geq 0$ sur l'intervalle $[a,b]$, alors d'après la définition de l'intégrale, on a
$$\int_a^b f(x)\,dx = I^*(f) = \inf\left\{\int_a^b \psi(x)\,dx\ :\ \ \psi \in \mathcal{E}([a\ ,\ b])\ \ \ et\ 0 \leq\ f \leq \psi\right\} \geq 0$$
2. Si $f(x) \leq g(x)\ \ sur\ \ [a\ ,b]$ alors $h(x) = g(x) - f(x) \geq 0$ sur $[a\ ,b]$. En utilisant la positivité et la linéarité de l'intégrale, il vient
$$\int_a^b g(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b h(x)\,dx\ \geq\ 0$$
3. Pour tout $x \in [a,b]$ on a
$$-|f(x)| \leq f(x) \leq |\,f(x)|$$

L'intégrale étant un opérateur croissant et linéaire, il vient ainsi
$$-\int_a^b |f(x)|\,dx \leq \int_a^b f(x)\,dx\ \leq\ \int_a^b |\,f(x)\,|\,dx \Longleftrightarrow \left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|$$
D'autre part, compte tenue de la croissance de l'intégrale et l'inégalité
$$|\,f(x)| \leq\ \sup_{a\leq x\leq b} |f(x)|$$

nous obtenons par intégration

$$\int_a^b |f(x)| \; dx \leq (b-a) \sup_{a \leq x \leq b} |f(x)|$$

■

6.3.4 Relation de Chasles

Proposition 6.4

Soit f une fonction intégrable sur un intervalle $[a\,,\,b]$. Alors :

1. *Pour tout $\in [a\,,b]$, la fonction f est intégrable sur $[a\,,\,c]$ et sur $[c\,,b]$.*
2. *Pour tout $c \in [a,b]$:*

$$\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\; dx \qquad (\textit{Relation de Chasles})$$

Convention : Soit f une fonction intégrable sur un intervalle $[a\,,\,b]$. On convient que

$$\int_\lambda^\lambda f(x)\,dx = 0 \quad \forall \;\; \lambda \in [a,b]$$

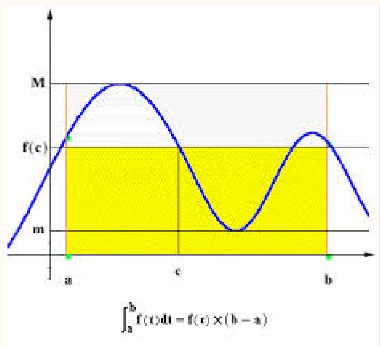
Et que $\int_\alpha^\beta f(x)\,dx = -\int_\beta^\alpha f(x)\,dx \;\;,\;\; \forall\; \alpha\,,\,\beta \in [a,b]$.

6.4 Théorème de la moyenne

Théorème 6.8

Soit $f\;:[a\,,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors il existe une constante $c \in [a,b]$ tels que :

$$\int_a^b f(x)\; dx = (b-a)f(c)$$



Démonstration La fonction f étant continue sur $[a,b]$, elle est bornée et attient ses bornes. Soient

$$m = \min_{x\in[a,b]} f(x) \qquad et \qquad M = \max_{x\in[a,b]} f(x)$$

Donc

$$\forall\; x \in [a,b] \;:\;\; m \leq f(x) \leq M \;\Longrightarrow m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \;\leq M(b-a)$$

Ce qui donne

$$m \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \;\leq M$$

Ainsi, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $c \in [a,b]$ telle que

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \; = f(c)$$

.

■

Définition 6.10

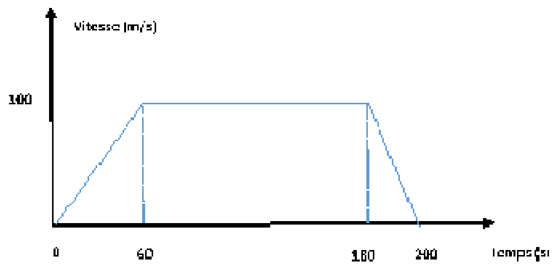
(Valeur moyenne) : Le nombre

$$\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

est appelé la <u>*valeur moyenne*</u> *de la fonction f sur l'intervalle $[a\ ,\ b]$.*

Exemple 6.13

Le graphe ci-contre représente les variations de la vitesse d'un mobile qui se déplace sur un chemin rectiligne.



1. Calculer la distance parcourue par le mobile pendant 200 seconds de son départ.
2. Calculer la valeur moyenne de la vitesse de ce mobile sur l'intervalle temporel $[0\ ,\ 200]$.

<u>**Réponses :**</u>

1) Soit $v\ : [0\ ,200] \to [0\ ,\ +\infty[$ la fonction qui décrit la vitesse du mobile. Alors la distance de parcoure pendant 200 seconds de son départ est

$$d = \int_0^{200} v(t)\ dt$$

Comme v est positive sur $[0\ ,200]$, alors d est égale à l'aire du trapèze $ABCD$ où $A(0,0)$, $B(200\ ,\ 0)$, $C(180\ ,\ 100)$ et $D(60\ ,\ 100)$. Ainsi

$$d = \frac{(AB+DC)\times 100}{2} = 16000\ m = 1,6\ km$$

2) La vitesse moyenne v_m du mobile est alors

$$v_m = \frac{1}{200}\int_0^{200} v(t)\ dt = \frac{1}{200}\ d = 80\ m/s$$

6.5 Intégrales et Primitive

Nous avons vu que le calcul d'une intégrale $\int_a^b f(x)\,dx$ d'une fonction continue sur $[a,b]$ par les sommes de Riemann est laborieux même si f est une simple fonction. Pratiquement le calcul des intégrales se fait par le bais des primitives. Nous allons montrer un résultat fondamental de calcul intégral. Ce résultat affirme que si on connait une primitive F de f alors $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$.

Définition 6.11

Soit $f\ : I\ \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction réelle définie sur un intervalle I . Une fonction $F\ : I\ \longrightarrow \mathbb{R}$ est appelée primitive de la fonction f sur I si :

1. *F est dérivable sur I et*
2. *Pour tout $x \in I$: $F'(x) = f(x)$.*

Exemple 6.14

1. Soit $:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x$. Les fonctions $F_1,\ F_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que $F_1(x) = x^2+1$ et $F_2(x) = x^2-3$ sont deux primitives de f sur $\mathbb{R}$.
2. Les fonction $x \mapsto \sin(x) + c$ où $c \in \mathbb{R}$, sont des primitives de la fonction $x \mapsto \cos(x)$ sur $\mathbb{R}$.

Proposition 6.5

Si une fonction réelle admet une primitive, alors elle possède une infinité de primitives. Deux primitives de même fonction ont pour différence une constante.

Démonstration Soit $F : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une primitive de la fonction $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$. Soit $G : I \longrightarrow \mathbb{R}$ définie sur I par

$$G(x) = F(x) + c\,, \quad \text{où} \quad c \in \mathbb{R}$$

Alors $G'(x) = F'(x) = f(x)\,,\ \forall\ x \in \mathbb{R}$. Donc G est aussi une primitive de . Remarquons que pour chaque choix de la constante $c \in \mathbb{R}$ nous obtenons une primitive de f. Cela signifie que f possède une infinité de primitives . Inversement, si $F\,,\ G\ : I \to \mathbb{R}$ sont deux primitives de la même fonction réelle $f\ : I \to \mathbb{R}$, alors on a

$$(F-G)'(x) = F'(x) - G'(x) = f(x) - f(x) = 0 \ \ \forall x \in I \qquad (*)$$

Comme I est un intervalle, il vient de la relation $(*)$ que la fonction $F - G$ est constante sur I.
D'où $G(x) = F(x) + c\,,\ \forall\ x \in I$, avec $c \in \mathbb{R}$. ■

Théorème 6.9

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction <u>*continue*</u> *sur un intervalle I. Soit $x_0 \in I$. Considérons la fonction $F : I \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :*

$$F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\ dt$$

Alors F est une primitive de f sur l'intervalle I.

Démonstration Soient $x \in I$ et h un réelle proche de 0 de sorte que $x + h \in I$. En utilisant la relation de Chasles, il vient

$$F(x+h) - F(x) = \int_{x_0}^{x+h} f(t)\ dt - \int_{x_0}^{x} f(t)\ dt = \int_{x_0}^{x+h} f(t)\ dt + \int_{x}^{x_0} f(t)\ dt = \int_{x}^{x+h} f(t)\ dt$$

Comme f est continue sur , alors d'après le théorème de la moyenne, on en déduit qu'il existe c compris entre x et $x + h$ telle que

$$F(x+h) - F(x) = \int_{x}^{x+h} f(t)\ dt = f(c)h \Longrightarrow \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(c)$$

Or il clair qu'il existe un $\theta \in [0,1]$ tel que $c = x + \theta h$. Donc $c \longrightarrow x$ quand $h \longrightarrow 0$.
La fonction f étant continue, on obtient alors

$$\lim_{h \to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim_{h \to 0} f(c) = f(x)$$

Par conséquent, F est dérivable sur , et sa dérivée est la fonction f . Donc F est une primitive de f sur I. ■

Théorème 6.10

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction <u>*continue*</u> *sur un intervalle I . Si F est une primitive de f sur I, alors pour tout $a,\ b \in I$ ona :*

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

Démonstration Considérons la fonction $F\ : I \to\ \mathbb{R}$, définie par $G(x) = \int_a^x f(t)\ dt$. Alors d'après le théorème 7, la fonction G est une primitive de f sur . De plus, il est clair que

$$G(b) = \int_a^b f(x)\ dx \quad et \quad G(a) = 0.$$

Soit maintenant F une autre primitive quelconque de f sur I. Donc il existe une constante réelle c telle que $F(x) = G(x) + c$ sur . Ainsi $F(a) = G(a) + c = c$ et alors $F(b) = G(b) + F(a)$.

Donc
$$\int_a^b f(x)\ dx = G(b) = F(b) - F(a).$$
Le théorème est démontré. ∎

Remarque Le théorème 7 est un résultat important en analyse mathématique, notamment en calcul intégral et différentiel. La formule permet de calculer une intégrale en connaissant au moins une primitive de la fonction intégrant.

Corollaire 6.2

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur un intervalle I. Soient $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{R}$. Alors, l'unique primitive F de la fonction f qui vérifie la condition $F(x_0) = y_0$ est définie par
$$F(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t)\ dt$$

Démonstration On pose $G(x) = \int_{x_0}^x f(t)\ dt$ pour tout $x \in I$. D'après le théorème 6 , G est une primitive de f sur I et elle vérifiée $G(x_0) = 0$. Donc $F(x) = y_0 + G(x)$ et $F'(x) = G'(x) = f(x)\ \ \forall x \in I.$
Cela signifie que F est une primitive de f vérifiant $(x_0) = y_0$.
Montrons maintenant, l'unicité de F. Supposons qu'il existe une autre primitive H de f sur I vérifiant la même condition $(x_0) = y_0$. Alors pour tout $x \in I$ on a d'après le théorème 7
$$\int_{x_0}^x f(t)\ dt = H(x) - H(x_0) = F(x) - F(x_0) \Longrightarrow H(x) - F(x) = y_0 - y_0 = 0 \ \Longrightarrow H(x) = F(x).$$
Cela montre l'unicité de F. ∎

Exemple 6.15 Chercher la primitive de $x \longmapsto \cos(x)$ qui prenne la valeur 5 au point $\frac{\pi}{2}$.

Réponse : Soit F la primitive cherchée. On a
$$F(x) = 5 + \int_{\frac{\pi}{2}}^x \cos(t)\ dt$$
Comme $t \mapsto \sin(t)$ est une primitive de $t \mapsto \cos(t)$ sur $\mathbb{R}$, on trouve, ainsi
$$F(x) = 5 + \sin(x) - \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = \ 4 + \sin(x)\ \ .$$

Remarque La fonction logarithme népérien $x \mapsto \ln(x)$ est définie rigoureusement par
$$\forall\ x \in]0, +\infty[\ \ :\ \ \ln(x) = \int_1^x \frac{1}{t}\ dt$$
C'est-à-dire que la fonction $x \mapsto \ln(x)$ est la seule primitive de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $]0, +\infty[$ et vérifiée la condition $\ln(1)\ = 0$.

Notations :

1. On note par $\int f(x)dx$ une primitive générale de f. Ainsi, si F étant une primitive de f alors
$$\int f(x)dx\ = F(x) + c\ ;\quad \text{où}\quad c \in \mathbb{R}\,.$$
La notation $\int f(x)dx$ est appelée intégrale indéfinie de f.
2. $\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b\ = F(b) - F(a)$. Cette notation est appelée intégrale définie de f entre a et b.

6.6 Primitives des fonctions usuelles

Le tableau ci-dessous regroupe les primitives des fonction usuelles. Ces primitive se déterminent par une lecture inverse de la dérivation. Notons que ce tableau est très important pour les calcules ultérieurs des primitives des fonctions élémentaires.

Fonction $f(x) =$	**Primitive** $\int f(x)\,dx =$	**Domaine**
x^n , $n \in \mathbb{N}$	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + c$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{x^m}$, $m \in \mathbb{N}$, $m \neq 1$	$\frac{x^{-m+1}}{-m+1} + c = -\frac{1}{(m-1)x^{m-1}} + c$	$\mathbb{R}^*$
x^α , $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq -1$	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c$	$]0,+\infty[$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x} + c$	$]0,+\infty[$
$\sqrt{x}$	$\frac{2}{3}\,x\sqrt{x} + c$	$]0,+\infty[$
$\frac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert + c$	$\mathbb{R}^*$
e^x	$e^x + c$	$\mathbb{R}$
$sh(x)$	$ch(x) + c$	$\mathbb{R}$
$ch(x)$	$sh(x) + c$	$\mathbb{R}$
$\cos(x)$	$\sin(x) + c$	$\mathbb{R}$
$\sin(x)$	$-\cos(x) + c$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$	$\tan(x) + c$	$\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \ : k \in \mathbb{Z}\right\}$
$\frac{1}{\sin^2(x)} = 1 + \cot an^2(x)$	$-\cot an(x) + c$	$\mathbb{R} \setminus \{k\pi \ : k \in \mathbb{Z}\}$
$\frac{1}{x^2+1}$	$Arctan(x)$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$Arcsin(x) + c$	$]-1\,,\,1[$
$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$	$Argsh(x) + c = \ln(x + \sqrt{x^2+1}) + c$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$Argch(x) + c = \ln(x + \sqrt{x^2-1}) + c$	$]1\,,\,+\infty[$

6.7 Procédés généraux de calcul d'intégrales

6.7.1 Opérations sur les primitives

Par une lecture inverse de la dérivation, on peut facilement montrer la proposition suivante :

Proposition 6.6

Si f et g sont deux fonctions réelles possédant comme primitives F et G respectivement sur un certain intervalle I , alors pour tout $x \in I$ et pour tout α , $\beta \in \mathbb{R}$ on a

$$\int (\alpha\, f(x) + \beta\, g(x))\; dx = \alpha \int f(x)\,dx + \beta \int g(x)\,dx = \alpha\, F(x) + \beta\, G(x) + c$$

Et alors

$$\int_a^b (\alpha\, f(x) + \beta\, g(x))\; dx = [\alpha\, F(x) + \beta\, G(x)]_a^b = \alpha\,(F(b) - F(a)) + \beta(G(b) - G(a))$$

.

Exemple 6.16 Calculer les intégrales suivantes :

$$\int_0^1 (x^4 - 2x^3 - 1)\; dx \quad , \quad \int_{\pi/3}^{\pi/2} 2\sin(x) \; + 5\cos(x) \;\; dx \; , \; \int_0^1 \frac{4}{x^2+1}\; dx$$

Réponses :

1. En utilisant la linéarité de l'intégrale, on voit qu'une primitive d'un polynôme est un polynôme obtenu en intégrant chaque monôme. On a alors

$$\int_0^1 (x^4 - 2x^3 - 1)\; dx = \left[\frac{x^5}{5} - \frac{1}{2}x^4 - x\right]_0^1 = \frac{1}{5} - \frac{1}{2} - 1 = -\frac{13}{10}$$

2. On trouve facilement
$$\int_{\pi/3}^{\pi/2} 2\sin(x) + 5\cos(x) \quad dx = [-2\cos(x) + 5\sin(x)]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} = 6 - \frac{5\sqrt{3}}{2}$$
3. Il est clair que
$$\int_0^1 \frac{4}{x^2+1}\, dx = 4\int_0^1 \frac{1}{x^2+1}\, dx = 4[Arctan(x)]_0^1 = 4\left(\frac{\pi}{4} - 0\right) = \pi$$

Remarque On peut intégrer toute fonction qui est la dérivée d'une fonction connue. Mais il existe des fonctions élémentaires qui ne sont pas la dérivée d'aucune fonction élémentaire, comme par exemple :
$$e^{-x^2} \;,\; \frac{\sin(x)}{x} \;,\; \frac{e^x}{x}$$
Cela signifie simplement que la primitive est une fonction nouvelle, n'appartenant pas à un catalogue des fonctions élémentaires bien connues.

6.7.2 Intégration par parties

Théorème 6.11

Soient u et v deux fonctions continûment dérivable sur un intervalle I . On a :
$$\int u'(x)v(x)\; dx = u(x)v(x) - \int u(x)v'(x)dx \tag{6.1}$$
Si $a \in I$ et $b \in I$ alors on a :
$$\int_a^b u'(x)v(x)\; dx \; = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)dx = u(b)v(b) - u(a)v(a) - \int_a^b u(x)v'(x)dx \tag{6.2}$$

Démonstration On a : $(uv)' = u'v + uv' \implies u'v = (uv)' - uv'$, ce qui donne
$$\int u'(x)v(x)dx = \int (uv)'(x)dx - \int (uv')(x) = u(x)v(x) - \int u(x)v'(x)\; dx$$
Ceci montre la formule (6.1). L'autre formule (6.2) résulte directement de (6.1). ■

Remarque Les formules (6.1) et (6.2) dites formules d'intégration par parties (abrégé en IPP); permettent de pallier l'absence d'une formule simple pour $\int u'(x)v(x)dx$ ou de $\int_a^b u(x)v'(x)dx$.

Exemple 6.17 Calculer : $\int x\sin(x)\; dx$ et $\int_0^1 x^2\, e^{-x}\, dx$

Réponses :

1. On utilise IPP . Soit
$$\begin{cases} u = x \\ v' = \sin(x) \end{cases} \implies \begin{cases} u' = 1 \\ v = -\cos(x) \end{cases}$$

Donc
$$\int x\sin(x)\; dx \; = -x\cos(x) - \int -\cos(x)\, dx = -x\cos(x) + \sin(x) + c \;, \quad c \in \mathbb{R}.$$

1. On pose $I = \int_0^1 x^2\, e^{-x}\, dx$. On utilise IPP . Soit :
$$\begin{cases} u = x^2 \\ v' = e^{-x} \end{cases} \implies \begin{cases} u' = 2x \\ v = -e^{-x} \end{cases}$$

Ainsi,
$$I = \left[-x^2\, e^{-x}\right]_0^1 + 2\int_0^1 x\, e^{-x}\; dx = -e^{-1} + 2I_1 \quad avec \quad I_1 = \int_0^1 x\, e^{-x}\; dx\,.$$

Calculons maintenant l'intégrale I_1 en utilisant encore une fois IPP . Soit :

$$\begin{cases} u = x \\ v' = e^{-x} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} u' = 1 \\ v = -e^{-x} \end{cases}$$

Donc

$$I_1 = [-x\,e^{-x}]_0^1 + \int_0^1 e^{-x}\;dx = -e^{-1} + [-\,e^{-x}]_0^1 = 1 - 2e^{-1}\,.$$

Finalement, on obtient $I = 2 - 5\,e^{-1}$.

6.7.3 Changement de variable

A) ***<u>Méthode de changement de variable pour les intégrales indéfinies</u>*** :

Proposition 6.7 (Première formule de changement de variable)

Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$, $\phi\;: I \to J$ une application dérivable et $f : J \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Si F est une primitive de f sur , alors $F \circ \phi$ est une primitive de $(f \circ \phi) \times \phi'$ sur I . On note

$$\int f(\phi(x))\,\phi'(x)\;dx = \int f(t)\,dt = F(t) + c = F(\phi(x) + c \quad \text{où} \quad t = \phi(x)$$

et on dit que l'on a effectué le changement de variable $t = \phi(x)$.

Démonstration La fonction F étant une primitive de f sur J , elle est dérivable sur J et sa dérivée est f . Puisque ϕ est dérivable sur , la fonction composée $F \circ \phi$ est dérivable su I et sa dérivée est

$$(F \circ \phi)'(x) = F'(\phi(x))\,\phi'(x) = f(\phi(x))\,\phi'(x)$$

Ce qui signifie que $F \circ \phi$ est une primitive de $(f \circ \phi) \times \phi'$ sur I . ■

De la proposition 5 on tire la méthode suivante :

<u>Méthode</u> : Soit à calculer l'intégrale indéfinie (i.e. primitive)

$$\int f(x)\,dx \qquad\qquad (*)$$

Si on remarque que $(x) = \phi'(x)\;\; g(\;\phi(x))$, alors on pose $t = \phi(x)$.

Ainsi :

1. On a : $\frac{dt}{dx} = \phi'(x) \Longrightarrow dt = \phi'(x)\,dx$ et alors l'expression $f(x)\,dx$ se remplace par $g(t)\,dt$
2. On calcule $\int g(t)\,dt = G(t) + c$
3. Revenons à l'ancienne variable , en remplaçant $t = \phi(x)$, on obtient :

$$\int f(x)\,dx = \int g(t)\,dt = G(t) + c = G(\phi(x)) + c, \quad c \in \mathbb{R}\,.$$

Exemple 6.18 Calculer : $\int \frac{e^x}{e^{2x}+1}\;dx$, $\int \frac{(\ln x\;)^{2020}}{x}\;dx$.

<u>Réponses</u> :

1. On pose $= e^x$, $x \in \mathbb{R}$. Donc $dt = e^x\;dx$. Ainsi pour tout $\in \mathbb{R}$, on a
$$\int \frac{e^x}{e^{2x}+1}\;dx = \int \frac{1}{t^2+1}\;dt = Arctan(t) + c = Arctan(e^x) + c\,, \quad \text{où} \quad c \in \mathbb{R}.$$
2. On pose $= \ln x$, où $x > 0$. Donc $dt = \frac{1}{x}\;dx$. Ainsi pour tout > 0 , on a
$$\int \frac{(\ln x\;)^{2020}}{x}\;dx \;\;= \int t^{2020}\;dt = \frac{t^{2021}}{2021}\;\; + c = \frac{(\ln x\;)^{2021}}{2021} + c\,, \quad \text{où} \quad c \in \mathbb{R}.$$

Proposition 6.8 (Seconde formule de changement de variable)

Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$, $\phi : I \to J$ une application bijective dont l'application réciproque $\phi^{-1} : J \to I$ est continue et $f : J \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur J. On suppose que ϕ est dérivable sur I et que sa dérivée ϕ' ne s'annule pas sur . Si H est une primitive de $(f \circ \phi) \times \phi'$ sur , alors $H \circ \phi^{-1}$ est une primitive de f sur J. On note

$$\int f(t)\,dt = \int f(\phi(x))\,\phi'(x)\;dx = H(x) + c = H\left(\phi^{-1}(t)\right) + c$$

et on dit que l'on a effectué le changement de variable $x = \phi^{-1}(t) \iff t = \phi(x)$.

Démonstration La fonction H étant une primitive de $(f \circ \phi) \times \phi'$ sur I, elle est dérivable sur I et sa dérivée est $(f \circ \phi) \times \phi'$. Puisque ϕ est dérivable sur , et sa dérivée ϕ' ne s'annule pas sur I, alors l'application réciproque ϕ^{-1} est dérivable sur J et

$$\forall\; x \in J \;\; : \left(\phi^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{\phi'(\phi^{-1}(x))}$$

Ainsi, la fonction composée $H \circ \phi^{-1}$ est dérivable su J et sa dérivée est

$$\left(H \circ \phi^{-1}\right)'(x) = H'\left(\phi^{-1}(x)\right)\left(\phi^{-1}\right)'(x) = \frac{f\left(\phi\left(\phi^{-1}(x)\right)\right)\phi'\left(\phi^{-1}(x)\right)}{\phi'(\phi^{-1}(x))} = \;\; f(x)$$

Ce qui signifie que $H \circ \phi^{-1}$ est une primitive de f sur I. ■

De la proposition 6 on tire la méthode suivante :

Méthode : Soit à calculer l'intégrale indéfinie (i.e. primitive)

$$\int f(t)\,dt \qquad\qquad (*)$$

Si on remarque que lorsqu' on pose $t = \phi(x)$, et ϕ est bijective, la fonction $g : x \mapsto f(\phi(x))\;\phi'(x)$ a une primitive remarquable alors on procède comme suit

1. On a : $\frac{dt}{dx} = \phi'(x) \implies dt = \phi'(x)\,dx$ et alors l'expression $f(t)\,dt$ se remplace par $g(x)\,dx$
2. On calcule $\int g(x)\,dx = G(x) + c$
3. Revenons à l'ancienne variable, en remplaçant $x = \phi^{-1}(t)$, on obtient :

$$\int f(t)\,dt = \int g(x)\,dx = G(x) + c = G\left(\phi^{-1}(t)\right) + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Exemple 6.19 Calculer $\int \sqrt{1-x^2}\;\;dx$.

Réponse : La fonction $x \mapsto \sqrt{1-x^2}$ est définie et continue sur $[-1\;,\;1]$. Considérons le changement de variable $= \sin(t)$. Donc $t = Arcsin(x)$ et $t \in \left[-\frac{\pi}{2}\;,\;\frac{\pi}{2}\right]$. De plus $dx = \cos(t)\;\;dt$ et $\sqrt{1-x^2} = \cos(t)$.

Ainsi

$$\int \sqrt{1-x^2}\;\;dx = \int \cos^2(t)\;\;dt$$

La méthode classique pour trouver une primitive de $t \mapsto \cos^2(t)$ consiste à utiliser la formule trigonométrique $\cos^2(t) = \frac{1}{2}(1+\cos(2t))$.

Donc,

$$\int \sqrt{1-x^2}\;\;dx = \int \cos^2(t)\;\;dt = \int \frac{1}{2}(1+\cos(2t))\;\;dt = \frac{t}{2} + \frac{1}{4}\sin(2t) + c = \frac{t}{2} + \frac{1}{2}\sin(t)\cos(t)\;+c$$

Finalement,

$$\int \sqrt{1-x^2}\;\;dx = \frac{1}{2}Arcsin(x) + \frac{1}{2}\,x\,\sqrt{1-x^2} + c\;\;,\quad c \in \mathbb{R}.$$

Application 1 :

Proposition 6.9

Soit $u\ : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur l'intervalle I . Alors :

1. $\int u'(x)\cos(\,u(x)\,)\,dx = \sin(\,u(x)) + c\,,\quad x \in I\,,\ \ c \in \mathbb{R}.$
2. $\int u'(x)\sin(\,u(x)\,)\,dx = -\cos(\,u(x)) + c\,,\quad x \in I,\ \ c \in \mathbb{R}\,.$
3. $\int \frac{u'(x)}{u(x)}\,dx = \ln|u(x)|\,+c\,,$ *si* $u(x) \neq 0$ *sur* I , $\ c \in \mathbb{R}.$
4. $\int \frac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}\,dx = 2\sqrt{u(x)} + c\,,$ *si* $u(x) > 0$ *sur* I , $\ c \in \mathbb{R}.$
5. $\int u'(x)\ (u(x))^{\alpha}\ dx = \frac{1}{\alpha+1}(u(x))^{\alpha+1} + c\,, \alpha \in \mathbb{R},\ \alpha \neq -1,\ u(x) > 0$ *sur* I , $\ c \in \mathbb{R}.$

Démonstration Dans chaque cas, on considère le changement de variable $t = u(x)$, ensuite on utilise les primitives des fonctions usuelles. ■

Application 2 :

Proposition 6.10

1. $\int \frac{1}{x^2+a^2}\,dx = \frac{1}{a}\ Arctan\left(\frac{x}{a}\right) + c\,,\quad a > 0\,,\ c \in \mathbb{R}\,,\ \ x \in \mathbb{R}$
2. $\int \frac{1}{x^2-a^2}\,dx = \frac{1}{2a}\ \ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|\ + c\,,\quad a \neq 0\,,\ c \in \mathbb{R},\ \ x \neq \pm a$
3. $\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx =\ Arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + c,\quad a > 0\,,\ c \in \mathbb{R},\ \ x \in]-a\,,\ a[.$
4. $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}\,dx =\ Argsh\ \left(\frac{x}{a}\right) + c = \ln(x + \sqrt{x^2+a^2})\ + c\,,\quad a > 0\,,\ c \in \mathbb{R},\ x \in \mathbb{R}\,.$
5. $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}\,dx =\ Argch\ \left(\frac{x}{a}\right) + c = \ln(x + \sqrt{x^2-a^2})\,,\quad a > 0\,,\ c \in \mathbb{R},\ x > a\,.$

Démonstration Dans chaque cas, on considère le changement de variable $t = \frac{x}{a}$, ensuite on utilise les primitives des fonctions usuelles. ■

Remarque Dans le calcul des intégrales indéfinies (i.e. les primitives) on utilise directement les résultats des propositions 6 et 7. Par exemple

$$\int \frac{1}{x^2+3}\,dx = \frac{1}{\sqrt{3}}\,Arctan\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right) + c\,,\quad c \in \mathbb{R}\,.$$

B) ***Méthode de changement de variable pour les intégrales définies*** :

Théorème 6.12

(Changement de variable pour une intégrale définie)

Soit ϕ une application de classe C^1 sur l'intervalle $[a\,,\ b]$ et f une fonction continue sur l'intervalle fermé et borné $\phi([a,b])$; on a

$$\int_a^b f(\,\phi(x))\,\phi'(x)\,dx = \int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(t)\ dt\ ,\quad (\ t = \phi(x)\,).$$

On dit que l'on effectue le changement de variable $t = \phi(x)$.

Démonstration On pose $J = \phi([a,b])$. Il est clair que J est un intervalle fermé et borné puisque il est l'mage de l'intervalle $[a,b]$ par l'application continue ϕ. Comme f est continue sur , elle est intégrable au sens de Riemann sur J et elle admet une primitive F sur $[a,b]$. Donc

$$\int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(t)\ dt\ = F(\phi(b)) - F(\phi(a)) \qquad (1)$$

D'autre part, comme ϕ est de classe C^1 sur $[a,b]$, la dérivée ϕ' est définie et continue sur $[a,b]$. Donc la fonction $(f \circ \phi) \times \phi'$ est continue sur $[a,b]$. Ainsi elle est intégrable sur $[a,b]$. De plus, on sait que $F \circ \phi$ est une primitive de $(f \circ \phi) \times \phi'$ sur $[a,b]$. Il vient alors

$$\int_a^b f(\,\phi(x))\,\phi'(x)\,dx = F \circ \phi(b) - F \circ \phi(a) = F(\phi(b)) - F(\phi(a)) \qquad (2)$$

De (**??**) et (**??**) on en déduit que

$$\int_a^b f(\phi(x))\phi'(x)dx = \int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(t)\ dt \quad .$$

■

Remarque La formule de changement de variable pour les intégrales définie peut être utilisée dans les deux sens :

1. Si l'on veut calculer $I = \int_a^b g(y)dy$ et on remarque que $g(y) = f(\phi(y))\phi'(y)$ sur l'intervalle $[a, b]$, alors le changement de variable $t = \phi(y)$ permet d'en déduire que $I = \int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(t)\ dt$.
2. Si l'on souhaite calculer $J = \int_\alpha^\beta f(t)dt$, alors le changement de variable $t = \phi(y)$ (où ϕ est une fonction donnée ou à déterminée) nous amène à calculer $J = \int_a^b f(\phi(y))\phi'(y)\ dy$.

Exemple 6.20 Calculer

$$A = \int_0^{\pi/2} \cos(x)\ e^{\sin(x)}\quad dx\ , B = \int_0^R \sqrt{R^2 - x^2}\ dx\ (R > 0), C = \int_0^\pi \frac{\cos(x)}{2 + \sin(x)}\ dx$$

Réponse :

1. Posons $t = \sin(x)$ alors $\in \sin\left(\left[0\ , \frac{\pi}{2}\right]\right) = [\sin(\ 0), \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\ ] = [0\ ,\ 1]$. De plus $= \cos(x)\ dx$.

Donc

$$A = \int_0^1 e^t\ \ dt = \left[e^t\right]_0^1 = e - 1\ \ .$$

1. Posons $x = R\sin(t)$. On a $x = 0 = R\ \sin(0)$ et $x = R = R\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$. De plus $= R\cos(t)\ dt$.

Comme $\sqrt{R^2 - x^2} = R\ \cos(t)$, il vient alors que

$$B = \int_0^{\frac{\pi}{2}} R^2\cos^2(t)\ dt = \frac{R^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1 + \cos(2t)dt = \frac{R^2}{2}\left[t + \frac{1}{4}\sin(2t)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi R^2}{8}$$

1. On pose $t = \sin(x)$. Donc $dt = \cos(x)\ dx$. Ainsi

$$C = \int_{\sin(0)}^{\sin(\pi)} \frac{1}{2 + t}\ dt = \int_0^0 \frac{1}{2 + t}\ dt = 0$$

<u>**Application 1 :**</u>

Proposition 6.11

Soit $\alpha > 0$, et soit $f\ : [-\alpha\ ,\ \alpha\ ] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue . Alors

1. f *est impaire* $\Longrightarrow \int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)dx = 0$.
2. f *est paire* $\Longrightarrow \int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)dx = 2\ \int_0^{\alpha} f(x)dx$.

Démonstration Soit f une fonction continue sur $[-\alpha\ ,\ \alpha\ ]$ (où $\alpha > 0$) .

1 . Supposons que f est impaire et posons $= \int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)dx$. Considérons le changement de variable $x = -t = \phi(t)$. Donc $dx = -dt$. Il vient ainsi

$$I = \int_{\phi(-\alpha)}^{\phi(\alpha)} f(-t)(-dt) = \int_\alpha^{-\alpha} -f(t)(-dt) = \int_\alpha^{-\alpha} f(t)dt = -I \quad \Longrightarrow \quad I = 0\ .$$

2 . Supposons que f est paire et posons $J = \int_0^{\alpha} f(x)dx$. Considérons le changement de variable $x = -t = \phi(t)$. Donc $dx = -dt$. Il vient alors

$$J = \int_{\phi(0)}^{\phi(\alpha)} f(-t)(-dt) = \int_0^{-\alpha} f(t)(-dt) = -\int_0^{-\alpha} f(t)\ dt = \int_{-\alpha}^0 f(t)dt$$

En utilisant maintenant la relation de Chasles, on trouve

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)dx = \int_0^{\alpha} f(x)dx + \int_{-\alpha}^0 f(x)dx = 2J = 2\ \int_0^{\alpha} f(x)dx$$

■

Application 2 :

Proposition 6.12

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction continue et* $T-périodique$ *, alors :*

$$\int_{a+T}^{b+T} f(x)dx = \int_a^b f(x)dx \ , \quad \forall\ a\ ,\ b \in \mathbb{R}$$

et

$$\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_b^{b+T} f(x)\ dx\ , \ \forall\ a\ ,\ b \in \mathbb{R}$$

En particulier :

$$\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_0^T f(x)\ dx\ , \ \forall\ a\ \in \mathbb{R}$$

Démonstration Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et $T-périodique$. Soient $,\ b \in \mathbb{R}$.

1. Posons $I = \int_a^b f(x)dx$ et soit $t = x+T$. Donc $dx = dt$ et comme $f(x+T) = f(x)$, on en déduit que

$$I = \int_a^b f(x+T)dx = \int_{a+T}^{b+T} f(t)\ dt$$

2. Posons $A = \int_a^{a+T} f(x)dx$, $B = \int_b^{b+T} f(x)\ dx$. En utilisant la relation de Chasles, on obtient

$$\int_{a+T}^{b+T} f(t)\ dt = \int_{a+T}^{a} f(t)\ dt + \int_a^b f(t)\ dt + \int_b^{b+T} f(t)\ dt = -A + \int_a^b f(x)dx\ + B$$

Donc, d'après le résultat précédent, il vient

$$B - A = \int_{a+T}^{b+T} f(x)dx\ - \int_a^b f(x)dx = 0 \implies A = B\ .$$

1. Il suffit de prendre $b = 0$ dans la relation $A = B$.

■

6.8 Intégration de certaines expressions contenant le trinôme

Soient a , b , c , A , B des nombres réels tel que $a \neq 0$ et $A \neq 0$.

Soient :

$$I_1 = \int \frac{1}{ax^2+bx+c}\,dx \quad , \quad I_2 = \int \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}\,dx$$

$$I_3 = \int \frac{1}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx \quad , \quad I_4 = \int \frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx$$

Nous allons appliquer la méthode de changement de variable pour calculer les intégrales I_k , $k = 1,2,3,4$.

Rappelons le principe suivant :

Principe : Forme canonique d'un trinôme :

Soit $P(x) = ax^2+bx+c$, $a \neq 0$ et soit $\Delta = b^2-4ac$.

Alors la forme canonique du trinôme $P(x)$ est :

$$P(x) = a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right) \qquad (c)$$

On pose $t = x + \frac{b}{2a}$, et soit

$$k = \begin{cases} \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} & si\ \ \Delta \geq 0 \\ \frac{\sqrt{-\Delta}}{2a} & si\ \ \Delta < 0 \end{cases}$$

Donc

$$k^2 = \begin{cases} \frac{\Delta}{4a^2} & si \ \ \Delta \geq 0 \\ -\frac{\Delta}{4a^2} & si \ \ \Delta < 0 \end{cases}$$

Par conséquence :

$$P(x) = \begin{cases} a\left(t^2 - k^2\right) & si \ \Delta > 0 \\ a\,t^2 & si \quad \Delta = 0 \\ a\left(t^2 + k^2\right) & si \quad \Delta < 0 \end{cases}$$

D'autre part : selon le signe de Δ on a :

<u>*Premier cas*</u> : $\Delta < 0$, alors $\forall x \in \mathbb{R}$: $P(x) \neq 0$ et $signe(P(x)) = signe\ (a)$. Dans ce cas, les intégrales I_k , $k = 1, 2, 3, 4$ sont définies sur $\mathbb{R}$ (I_3 et I_4 ont un sens que si $a > 0$).

<u>*Deuxième cas*</u> : $\Delta = 0$, alors $P(x)$ possède une racine double $x_0 = -\frac{b}{2a}$, et on a

$$\forall x \in \mathbb{R} : P(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \quad et \quad signe(P(x)) = signe(a)$$

Dans ce cas, les intégrales I_k , $k = 1, 2, 3, 4$ sont définies sur $\mathbb{R} \setminus \{x_0\}$ (I_3 et I_4 ont un sens que si $a > 0$).

<u>*Troisième cas*</u> : $\Delta > 0$, alors $P(x)$ possède deux racines réelles distincts, x_1 et x_2 ($x_1 < x_2$) . Dans ce cas on a $\forall x \in \mathbb{R} : P(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$, et

1. $signe(\ P(x)\ ) = signe(\ a)$ si $x \in]-\infty\ ,\ x_1[$ ou $x \in]x_2\ ,\ +\infty[$.
2. $signe(\ P(x)\ ) = signe(-a)$ si $x \in]\ x_1\ ,\ x_2[$.

Par conséquent : si $\Delta > 0$, alors :

1. Les intégrales I_1 et I_2 sont définies sur $]-\infty\ ,\ x_1[$ ou $]x_2\ ,\ +\infty[$.
2. Les intégrales I_3 et I_3 sont définies sur :
3. $]-\infty\ ,\ x_1[$ ou $]x_2\ ,\ +\infty[$ si > 0 .
4. $]x_1\ ,\ x_2[$ si $a < 0$.

<u>***Calcul de l'intégrale I_1***</u> :

$$I_1 = \int \frac{1}{ax^2 + bx + c}\,dx$$

On pose $t = x + \frac{b}{2a} \Longrightarrow dt = dx$, donc d'après ce qui précède, on en déduit que

$$I_1 = \int \frac{1}{a(t^2 \pm k^2)}\,dt = \frac{1}{a} \int \frac{1}{t^2 \pm k^2}\,dt$$

D'après la proposition 7, on en déduit :

$$I_1 = \begin{cases} \frac{1}{ak}\,Arctan\left(\frac{t}{k}\right) + c & si \ \ \Delta < 0 \\ -\frac{1}{at} + c & si \quad \Delta = 0\ (\ k = 0) \\ \frac{1}{2ak}\ln\left|\frac{t-k}{t+k}\right| + c & si \quad \Delta > 0 \end{cases} \qquad \text{où } \ c \in \mathbb{R}\,.$$

Finalement, en remplaçant $t = x + \frac{b}{2a}$, on trouve I_1 en fonction de x .

<u>Notons que, pour calculer pratiquement</u> l'intégrale I_1 dans le cas où $\Delta > 0$, on utiliser la décomposition en éléments simples suivante :

$$\frac{1}{ax^2 + bx + c} = \frac{1}{a}\left(\frac{\alpha}{x - x_1} + \frac{\beta}{x - x_2}\right)$$

où α , β sont deux nombres réels à déterminés. En suite on intègre les éléments simples et on déduit l'intégrale cherchée.

Exemple 6.21 Calculer : $F_1(x) = \int \frac{1}{x^2+x+1}\,dx$, $F_2(x) = \int \frac{1}{x^2-3x+2}\,dx$.

<u>**Réponses**</u> :

1. Calculons $F_1(x)$. Le discriminant du trinôme $x^2 + x + 1$ est $\Delta = -3 < 0$. La forme canonique du ce

trinôme s'écrit alors :

$$x^2+x+1=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}$$

Posons $=x+\frac{1}{2}$. Donc $=dt$, et alors pour tout $x\in\mathbb{R}$

$$F_1(x)=\int\frac{1}{t^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}\,dt=\frac{2}{\sqrt{3}}Arctan\left(\frac{2t}{\sqrt{3}}\right)+c=\frac{2}{\sqrt{3}}Arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)+c\ ;\quad c\in\mathbb{R}.$$

1. Calculons maintenant $F_2(x)$. Le discriminant du trinôme x^2-3x+2 est $\Delta=1>0$. La forme canonique du trinôme x^2-3x+2 s'écrit ainsi

$$x^2-3x+2=\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{1}{4}=(x-2)(x-1)$$

Posons $=x-\frac{3}{2}$. Donc $=dt$. Ainsi, pour tout $x\in\mathbb{R}\setminus\{1,2\}$ on a

$$F_2(x)=\int\frac{1}{t^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2}\,dt=\ln\left|\frac{t-\frac{1}{2}}{t+\frac{1}{2}}\right|+c=\ln\left|\frac{x-2}{x-1}\right|+c\ ;\quad c\in\mathbb{R}\,.$$

Autre méthode pour calculer $F_2(x)$: Comme l'on a $x^2-3x+2=(x-2)(x-1)$; on décompose la fraction $\frac{1}{x^2-3x+2}$ sous la forme

$$\frac{1}{x^2-3x+2}=\frac{a}{x-1}+\frac{b}{x-2}$$

Par un calcul simple, on obtient $a=-1$ et $=1$. Donc pour tout $x\in\mathbb{R}\setminus\{1,2\}$ on a

$$F_2(x)=\int\left(\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-1}\right)dx=\ln\left|\frac{x-2}{x-1}\right|+c\ ;\quad c\in\mathbb{R}\,.$$

Calcul de l'intégrale I_2 :

$$I_2=\int\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}\,dx\quad,\quad a\neq 0\ et\ A\neq 0$$

Premier cas : $\Delta<0$: Dans ce cas en écrit I_2 sous la forme :

$$I_2=\int\frac{\frac{A}{2a}(2a\,x+b)+\left(B-\frac{A\,b}{2a}\right)}{ax^2+bx+c}\,dx$$

Posons $p=\frac{A}{2a}$ et $q=B-\frac{A\,b}{2a}$, alors il vient que :

$$I_2=p\int\frac{2ax+b}{ax^2+bx+c}\,dx+q\ I_1$$

Ainsi :

$$I_2=\ln\left|ax^2+bx+c\right|\ +q\ I_1$$

Deuxième cas : $\Delta=0$. Dans ce cas, $ax^2+bx+c=a(x-x_0)^2$ où $x_0=-\frac{b}{2a}$. On utilise ensuite la décomposition suivante :

$$\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}=\frac{Ax+B}{a(x-x_0)^2}=\frac{1}{a}\left(\frac{\alpha}{x-x_0}+\frac{\beta}{(x-x_0)^2}\right),\quad x\neq x_0$$

Et puis , on intègre la forme décomposée.

troisième cas : $\Delta>0$. Dans ce cas, $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$ où x_1 , x_2 sont les racine distincts du trinôme ax^2+bx+c. Par la décomposition :

$$\frac{Ax+B}{a(x-x_1)(x-x_2)}=\frac{1}{a}\left(\frac{\alpha}{x-x_1}+\frac{\beta}{x-x_2}\right)$$

On calcule simplement I_2 .

Exemple 6.22 Calculer : $G_1(x)=\int\frac{x-3}{x^2+x+1}\,dx$, $G_2(x)=\int\frac{5x+1}{x^2-4x+4}\,dx$, $G_3(x)=\int\frac{x-3}{x^2-3x+2}$

Réponses :

1. Calcul de $G_1(x)$: Le discriminant du trinôme x^2+x+1 est négatif. On procède ainsi, comme suit

$$\frac{x-3}{x^2+x+1} = \frac{\frac{1}{2}(2x+1)-\frac{1}{2}-3}{x^2+x+1} = \frac{1}{2}\left(\frac{2x+1}{x^2+x+1}\right)-\frac{7}{2}\left(\frac{1}{x^2+x+1}\right), \quad x\in\mathbb{R}.$$

Donc

$$G_1(x) = \frac{1}{2}\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}\,dx - \frac{7}{2}\int \frac{1}{x^2+x+1}\,dx = \frac{1}{2}\ln\left(x^2+x+1\right)-\frac{7}{2}F_1(x)+c.$$

Où $F_1(x)=\int \frac{1}{x^2+x+1}\,dx$ est déjà calculée dans l'exemple 21.
Finalement, on trouve pour tout $x\in\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} G_1(x) &= \frac{1}{2}\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}\,dx - \frac{7}{2}\int \frac{1}{x^2+x+1}\,dx \\ &= \frac{1}{2}\ln\left(x^2+x+1\right)-\frac{7}{\sqrt{3}}Arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)+c. \quad c\in\mathbb{R} \end{aligned}$$

1. Calcul de $G_2(x)$: Le discriminant du trinôme x^2-4x+4 est nul. La solution double de ce trinôme est 2 . On a alors $x^2-4x+4=(x-2)^2$. On cherche d'abord la décomposition :

$$f(x) := \frac{5x+1}{x^2-4x+4} = \frac{a}{x-2}+\frac{b}{(x-2)^2}, \quad x\neq 2$$

Il est clair maintenant que $b=\lim_{x\to 2}(x-2)^2 f(x)=\lim_{x\to 2} 5x+1=11$. De plus, en prenant $x=3$, on trouve $16=f(3)=a+b \implies a=5$. Ainsi, pour tout $x\neq 2$, on a

$$\begin{aligned} G_2(x) &= \int\left(\frac{5}{x-2}+\frac{11}{(x-2)^2}\right)dx \\ &= 5\int \frac{1}{x-2}\,dx + 11\int \frac{1}{(x-2)^2}\,dx = 5\ln|x-2|-\frac{11}{x-2}+c \ . \ c\in\mathbb{R} \end{aligned}$$

1. Calcul de $G_3(x)$: Le trinôme x^2-3x+2 admet deux racines distincts : 1 et 2 . Donc, la fraction $g(x) := \frac{x-3}{x^2-3x+2}$ se décompose comme suit : $g(x)=\frac{a}{x-1}+\frac{b}{x-2}$. On a

$$a=\lim_{x\to 1}(x-1)g(x)=\lim_{x\to 1}\frac{x-3}{x-2} = 2 \quad et \quad b=\lim_{x\to 2}(x-2)g(x)=\lim_{x\to 1}\frac{x-3}{x-1} = -1$$

Donc, pour tout $x\in\mathbb{R}\setminus\{1,2\}$ on a :

$$G_3(x)=\int\left(\frac{2}{x-1}-\frac{1}{x-2}\right)dx = 2\ln|x-1|-\ln|x-2|+c \ , \quad c\in\mathbb{R}.$$

<u>Calcul de l'intégrale</u> I_3 :

$$I_3=\int \frac{1}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx \quad , \quad a\neq 0 \ \ et \ \ \Delta\neq 0.$$

Pour que la fonction $x\longmapsto \frac{1}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ soit bien définie, il faut que $P(x)=ax^2+bx+c>0$.
On distingue alors, trois cas :
<u>Premier cas</u> : $a>0$ *et* $\Delta<0$: Dans ce cas $P(x)>0$, $\forall x\in\mathbb{R}$, et $P(x)=a\left(t^2+k^2\right)$ où $t=x+\frac{b}{2a}$ et $k=\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}$.
Donc, pour tout $x\in\mathbb{R}$, on a

$$I_3=\frac{1}{\sqrt{a}}\int \frac{1}{\sqrt{t^2+k^2}}\,dt = \frac{1}{\sqrt{a}}Argsh\left(\frac{t}{k}\right)+c = \frac{1}{\sqrt{a}}\ln\left(\frac{t}{k}+\sqrt{\frac{t^2}{k^2}+1}\right), \quad c\in\mathbb{R}.$$

D'où

$$I_3=\frac{1}{\sqrt{a}}\ln\left(x+\frac{b}{2a}+\sqrt{x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}}\right) \quad +C, \quad x\in\mathbb{R} \ , C\in\mathbb{R}.$$

<u>Troisième cas</u> : $a<0$ *et* $\Delta>0$: Alors, $P(x)>0$ sur $]x_1,x_2[$ où $x_1<x_2$ sont les racines de $P(x)$. Dans ce cas, on a $P(x)=a(k^2-t^2)$ avec $t=x+\frac{b}{2a}$ et $=\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}$.
Ainsi, pour tout $x\in]x_1,x_2[$ on trouve

$$I_3=\frac{1}{\sqrt{-a}}\int \frac{1}{\sqrt{t^2-k^2}}\,dt = \frac{1}{\sqrt{-a}}Arcsin\left(\frac{t}{k}\right)+C = \frac{1}{\sqrt{-a}}Arcsin\left(\frac{2ax+b}{\sqrt{\Delta}}\right)+C \ , \ C\in\mathbb{R}.$$

Exemple 6.23 Calculer :

$$H_1(x) = \int \frac{1}{\sqrt{x^2+x+1}}\,dx, H_2(x) = \int \frac{1}{\sqrt{x^2-3x+2}}\,dx, H_3(x) = \int \frac{1}{\sqrt{-x^2+4x+2}}dx$$

Réponses :

1. Calcul de $H_1(x)$: Comme on a déjà vu, le discriminant du trinôme x^2+x+1 est négatif et on a $x^2+x+1 = \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$. Donc, H_3 est bien définie sur $\mathbb{R}$.

On pose $= x+\frac{1}{2}$, alors $dx = dt$ et

$$H_1(x) = \int \frac{1}{\sqrt{t^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}}\,dt = Argsh\left(\frac{2t}{\sqrt{3}}\right)+c = Argsh\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)+c\ , \quad c \in \mathbb{R}.$$

Ou de manière équivalente :

$$H_1(x) = \ln(\ 2x+1+2\sqrt{x^2+x+1}\ ) + C\,, \quad C \in \mathbb{R}.$$

1. Calcul de $H_2(x)$: Le trinôme $P(x) = x^2-3x+2$ a un discriminant positif. Les deux racines de ce trinôme sont 1 et 2 et on a : $P(x) = \left(x-\frac{3}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$. Maintenant, il est clair que H_2 est bien définie sur $]-\infty\,,\ 1[$ ou $]2\,,\ +\infty[$.

Posons $t = x-\frac{3}{2}$ pour > 2 . Alors, $dx = dt$ et :

$$H_2(x) = \int \frac{1}{\sqrt{t^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2}}\,dt\ = Argch(2t)+c = Argch(2x-3)+c\,, \quad c \in \mathbb{R}.$$

D'où $H_2(x) = \ln\left(2x-3+2\sqrt{x^2-3x+2}\ \right)+C\,,\ x > 2\,,\ C \in \mathbb{R}$.

1. Calcul de $H_3(x)$: Le discriminant du trinôme $-x^2+4x+2$ est positif . Les deux racines de ce trinôme sont $2+\sqrt{6}$ et $2-\sqrt{6}$. Donc la fonction H_3 est bien définie sur $]2-\sqrt{6}\,,\ 2+\sqrt{6}[$.

De plus, on a pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$-x^2+4x+2 = -\left(x^2-4x-2\right) = 6-(x-2)^2.$$

Soit $= x-2$, alors $dx = dt$. Ainsi, pour tout $x \in]2-\sqrt{6}\,,\ 2+\sqrt{6}[$ on a

$$H_3(x) = \int \frac{1}{\sqrt{6-t^2}}\,dt = Arcsin\left(\frac{t}{\sqrt{6}}\right)+C = \ Arcsin\left(\frac{x-2}{\sqrt{6}}\right)+C\,, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Calcul de l'intégrale $\boldsymbol{I_4}$:

$$I_4 = \int \frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx \quad , \quad a \neq 0\,,\ A \neq 0\,.$$

Dans ce cas on écrit l'intégrale I_4 comme suit

$$I_4 = \int \frac{\frac{A}{2a}\ (\ 2a\,x+b)+(B-\frac{Ab}{2a}\ )}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\ dx$$

Posons $p = \frac{A}{2a}$ et $q = B-\frac{A\,b}{2a}$, alors il vient que :

$$I_4 = p\int \frac{2ax+b}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx + q\ I_3$$

Ainsi : $I_4 = 2p\ \sqrt{ax^2+bx+c}\ + q\ I_3 + c\,, \quad c \in \mathbb{R}$.

Exemple 6.24 Calculer :

$$Q_1(x) = \int \frac{x+2}{\sqrt{x^2+x+1}}\,dx,\ Q_2(x) = \int \frac{x+1}{\sqrt{x^2-3x+2}}\,dx\,,\ Q_3(x) = \int \frac{3x+1}{\sqrt{-x^2+4x+2}}$$

Réponses :

1. Calcul de $Q_1(x)$: On a pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$Q_1(x) = \frac{1}{2}\int \frac{2x+4}{\sqrt{x^2+x+1}}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+x+1}}\,dx + \frac{3}{2}\int \frac{1}{\sqrt{x^2+x+1}}\,dx$$

Donc,

$$Q_1(x) = \sqrt{x^2+x+1} + \frac{3}{2} H_1(x)$$

Où $H_1(x) = \int \frac{1}{\sqrt{x^2+x+1}} dx$ est déjà calculée dans l'exemple 23.
Finalement, pour tout $\in \mathbb{R}$, on a

$$Q_1(x) = \sqrt{x^2+x+1} + \frac{3}{2} \ln\left(2x+1+2\sqrt{x^2+x+1}\right) + C\,, \quad C \in \mathbb{R}.$$

1. Vérifier que pour tout $x > 2$:

$$Q_2(x) = \sqrt{x^2-3x+2} + \frac{5}{2} \ln\left(2x-3+2\sqrt{x^2-3x+2}\right) + C\,, \quad C \in \mathbb{R}\,.$$

2. Vérifier que pour tout $x \in]2-\sqrt{6}\,,\, 2+\sqrt{6}[$

$$Q_3(x) = -3\sqrt{-x^2+4x+2} + 7\, Arcsin\left(\frac{x-2}{\sqrt{6}}\right) + C\,, \quad C \in \mathbb{R}.$$

6.9 Intégration des fractions rationnelles

Définition 6.12

Une fraction rationnelle est le quotient de deux polynômes (le polynôme du dénominateur n'étant pas le polynôme nul) .

Nous admettrons la proposition suivante :

Proposition 6.13

Pour toute fraction rationnelle $F = \frac{A}{B}$ il existe deux polynômes uniques Q et R telle que :

$$F = Q + \frac{R}{B}\,, \quad \textit{et } \deg(R) < \deg(B)$$

Le polynôme Q s'appelle la partie entière de la fraction rationnelle . Il est clair que si $\deg(A) < \deg(B)$ alors Q est le polynôme nul .

6.9.1 Décomposition en éléments simples d'une fraction rationnelle

On rappel ici quelques notions importantes concernant la décomposition en éléments simples d'une fraction rationnelle. Pour plus de détailles, voir le cours d'algèbre.

Définition 6.13

(éléments simples)

1. *On appelle élément simple de première espèce, une fraction rationnelle de la forme $\frac{\alpha}{(x-a)^p}$ où a et $\alpha \in \mathbb{R}$, $p \in \mathbb{N}^*$.*
2. *On appelle élément simple de deuxième espèce, une fraction rationnelle de la forme $\frac{\beta x+\gamma}{(x^2+bx+c)^q}$ où $\beta\,,\,\gamma \in \mathbb{R}$, $q \in \mathbb{N}^*$ et b , c des réels tels que x^2+bx+c soit un trinôme tel que son discriminant $\Delta = b^2-4c < 0$.*

On admet le théorème de décomposition en éléments simples d'une fraction rationnelle suivant :

Théorème 6.13

Soit $F = \frac{A}{B}$ une fraction rationnelle. On suppose que le polynôme B s'écrit sous la forme

$$B(x) = (x-a_1)^{p_1}(x-a_2)^{p_2}\dots(x-a_r)^{p_r}\left(x^2+b_1x+c_1\right)^{q_1}\left(x^2+b_2x+c_2\right)^{q_2}\dots\left(x^2+b_sx+c_s\right)^{q_s}$$

où les trinômes $x^2+b_jx+c_j$ sont tous irréductibles : i.e. $b_j^2-4c_j<0$.
Alors on peut écrire de façon unique :

$$F(x)=Q(x)+\sum_{i=1}^{r}\left(\sum_{k_i=1}^{p}\frac{\alpha_{k_i}}{(x-a_i)^{k_i}}\right)+\sum_{j=1}^{s}\left(\sum_{k_j=1}^{q}\frac{\beta_{k_j}x+\gamma_{k_j}}{\left(x^2+b_jx+c_j\right)^{k_j}}\right)$$

Où Q est un polynôme (la partie entière de F) et les autres éléments de cette décomposition sont tous des éléments simples de première ou deuxième espèce.

Exemple 6.25 Soit $F(x)=\frac{x^4+2x^3-x^2+3}{(x+1)^2\,(x^2+x+1)^2}$, alors la fraction rationnelle F se décompose comme suit :

$$F(x)=\frac{a}{x+1}+\frac{b}{(x+1)^2}+\frac{c\,x+d}{(x^2+x+1)}+\frac{f\,x+g}{(x^2+x+1)^2}$$

Où $a, b,\ c, d,\ f,\ g$ sont des réels à déterminés . Voir le cours d'algèbre comment calculer ces nombres.
Pour cet exemple, les calculs nous donne :

$$a=6\,, b=1\ \ ,\ c=-6\,,\ d=0\ \ ,\ f=-6\,,\ g=-4\,.$$

6.9.2 Intégration des éléments simples

1. Cas des éléments simple de première espèce : on a

$$\int\frac{\alpha}{(x-a)^p}\,dx=\begin{cases}\alpha\ln|x-a| & si\quad p=1\\ \left(\frac{\alpha}{1-p}\right)\frac{1}{(x-a)^{p-1}} & si\quad p\geq 2\end{cases}$$

2. Cas des éléments simple de deuxième espèce :

$$w_q=\int\frac{\beta x+\gamma}{(x^2+bx+c)^q}\,dx$$

Le cas où $q=1$ est déjà étudié . Supposons désormais que ≥ 2 .
On a :

$$w_q=\int\frac{\frac{\beta}{2}(2x+b)+\left(\gamma-\frac{\beta b}{2}\right)}{(x^2+bx+c)^q}\,dx=\frac{\beta}{2}\int\frac{2x+b}{(x^2+bx+c)^q}dx+\left(\gamma-\frac{\beta b}{2}\right)\int\frac{1}{(x^2+bx+c)^q}\,dx$$

D'autre part , si on pose $u=x^2+bx+c \implies du=(2x+b)\ dx$ et on a alors :

$$\int\frac{2x+b}{(x^2+bx+c)^q}\,dx=\int\frac{1}{u^q}\,du=-\frac{1}{(q-1)\,u^{q-1}}+C=-\frac{1}{(q-1)\,(x^2+bx+c)^{q-1}}+C$$

Maintenant, indiquons comment calculer l'intégrale

$$S_q=\int\frac{1}{(x^2+bx+c)^q}\,dx$$

En écrit le trinôme x^2+bx+c sous la forme canonique

$$x^2+bx+c=\left(x+\frac{b}{2}\right)^2+k^2$$

En effectuant le changement de variable $t=x+\frac{b}{2}$, on obtient ainsi :

$$S_q=\int\frac{1}{(t^2+k^2)^q}\,dt$$

Par intégration par parties, on trouve une relation de récurrence entre S_{q-1} et S_q
et alors de proche en proche le calcul de S_q se ramène au calcul de S_1 .

Exemple 6.26 Calculer

$$F(x)=\int\frac{x^4+2x^3-x^2+3}{(x+1)^2\,(x^2+x+1)^2}\,dx$$

Réponse : Soit $f(x) = \frac{x^4+2x^3-x^2+3}{(x+1)^2\,(x^2+x+1)^2}$, où $x \neq -1$. La décomposition de $f(x)$ en éléments simples est

$$f(x) = \frac{6}{x+1} + \frac{1}{(x+1)^2} - \frac{6\,x}{x^2+x+1} - \frac{6\,x+4}{(x^2+x+1)^2}$$

Donc

$$F(x) = \int \frac{6}{x+1}dx + \int \frac{1}{(x+1)^2}dx - \int \frac{6\,x}{x^2+x+1}\,dx - \int \frac{6\,x+4}{(x^2+x+1)^2}\,dx$$

D'autre part, il est clair que $\int \frac{6}{x+1}dx = 6\ln|x+1| + c$, $x \neq -1$ et $\int \frac{1}{(x+1)^2}\,dx = -\frac{1}{x+1} + c$, $x \neq -1$.
Soient maintenant
$I_1(x) = \int \frac{6x}{x^2+x+1}\,dx$, $I_2(x) = \int \frac{6x+4}{(x^2+x+1\,)^2}\,dx$, $J_1 = \int \frac{1}{x^2+x+1}\,dx$ et $J_2 = \int \frac{1}{(x^2+x+1\,)^2}\,dx$.
On a $I_1(x) = 3\int \frac{2x+1-1}{x^2+x+1}\,dx = 3\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}\,dx - 3J_1(x) = 3\ln\left(x^2+x+1\right) - 3J_1(x)$.
Comme on a déjà calculé $J_1(x) = \frac{2}{\sqrt{3}}\,Arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + c$, il vient alors,

$$I_1(x) = 3\ln\left(x^2+x+1\right) - 2\sqrt{3}\,Arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + c\,,\quad c \in \mathbb{R}\,.$$

En suite, $I_2(x) = 3\int \frac{2x+4/3}{(x^2+x+1\,)^2}\,dx = 3\int \frac{2x+1}{(x^2+x+1\,)^2}\,dx + J_2(x) = -\frac{3}{x^2+x+1} + J_2(x)$.
Il reste à calculer $J_2(x)$. Pour cela, on fait intégration par parties de $J_1(x)$:
On pose d'abord, $t = x - \frac{1}{2}$. Donc, $J_1(x) = \int \frac{1}{t^2+3/4}\,dt$ et $J_2(x) = \int \frac{1}{(t^2+\frac{3}{4})^2}\,dt$

$$\begin{cases} u' = 1 \\ v = \frac{1}{t^2+3/4} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} u = t \\ v' = \frac{-2t}{(t^2+\frac{3}{4})^2} \end{cases}$$

Ainsi, $J_1(x) = \frac{t}{t^2+3/4} + \int \frac{2t^2}{(t^2+\frac{3}{4})^2}\,dt = \frac{t}{t^2+3/4} + 2\int \frac{t^2+\frac{3}{4}-\frac{3}{4}}{(t^2+\frac{3}{4})^2}\,dt = \frac{t}{t^2+3/4} + 2\,J_1(x) - \frac{3}{2}\,J_2(x)$
Donc, $J_2(x) = \frac{2t}{3(t^2+\frac{3}{4})} + \frac{2}{3}\,J_1(x) = \frac{2x+1}{3(x^2+x+1)} + \frac{4}{3\sqrt{3}}\,Arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + c$. Par conséquent,

$$I_2(x) = \frac{2x-8}{3(x^2+x+1)} + \frac{4\sqrt{3}}{9}\,Arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + c\ ,\quad c \in \mathbb{R}.$$

Finalement, on trouve pour tout $x \neq -1$:

$$F(x) = 6\ln|x+1| - \frac{1}{x+1} - 3\ln\left(x^2+x+1\right) - \frac{2x-8}{3(x^2+x+1)} + \frac{14\sqrt{3}}{9}Arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right),\quad C \in \mathbb{R}\,.$$

6.10 Intégration de certaines classes de fonctions trigonométriques

6.10.1 Intégrale de type : $\int R(sin\;x\,,\;cos\;x)\,dx$

Soit $R(x,y)$ une fonction rationnelle de deux variables. Considérons l'intégrale indéfinie

$$\int R(\sin x, \cos x)\;dx$$

Dans le cas général, nous utilisons le changement de variable $t = \tan\frac{x}{2}$.
On a donc : $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$, $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$ et $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$.
Ainsi, on obtient :

$$\int R(\sin x, \cos x)\;dx \;=\; \underbrace{\int R\left(\frac{2t}{1+t^2}\,,\,\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2dt}{1+t^2}}_{Intégrale\ de\ fonction\ rationnelle}$$

Exemple 6.27 Calculer $\int \frac{1}{\sin x}\,dx$.

<u>Réponse</u> : Soit $F(x)=\int \frac{1}{\sin x}\,dx$. La fonction $x\mapsto \frac{1}{\sin x}$ est continue sur chaque intervalle de forme

$$I_k=]\,k\pi\,,\,(k+1)\pi[\;\;,\quad k\in\mathbb{Z}\,.$$

Donc, F est bien définie sur chaque intervalle I_k , $k\in\mathbb{Z}$.
On pose $t=\tan\frac{x}{2}$, donc, $\sin x=\frac{2t}{t^2+1}$ et $dx=\frac{2\,dt}{t^2+1}$. Il vient alors que pour tout $x\in I_k$; $k\in\mathbb{Z}$:

$$\int\frac{1}{\sin x}\,dx=\int\frac{t^2+1}{2t}\,\frac{2dt}{t^2+1}=\int\frac{1}{t}\,dt=\ln|t|+C=\ln\left|tan\frac{x}{2}\right|+C\,,\quad C\in\mathbb{R}\,.$$

Remarque Le changement de variable $t=\tan\frac{x}{2}$ conduit fréquemment à des fonctions rationnelle trop compliquées. Pour cette raison, nous utilisons d'autres changements remarquables.

<u>Cas remarquables</u> : (Règles de Bioche) Soit $f(x)=R(\sin x,\cos x)$

1. Si $f(-x)=-f(x)$, on considère le changement : $t=\cos x$.
2. Si $f(\pi-x)=-f(x)$, on considère le changement : $t=\sin x$.
3. Si $f(\pi+x)=f(x)$ alors on considère le changement : $t=\tan x$.

Remarque Si : $t=\tan x$ alors :

$$\cos^2x=\frac{1}{1+\tan^2x}=\frac{1}{1+t^2}\quad,\ \sin^2x=\frac{t^2}{1+t^2}\quad et\ \ dx=\frac{dt}{1+t^2}$$

Exemple 6.28 Calculer $A(x)=\int\frac{\cos^3x}{2+\sin x}\,dx$, $B(x)=\int\frac{sin^2x}{3+2cos^2x}\,dx$ avec $x\in\left]-\frac{\pi}{2}\,,\frac{\pi}{2}\right[$

<u>Réponses</u> :

1. Calcul de $A(x)$: Soit $f(x)=\frac{\cos^3x}{2+\sin x}$. Remarquons que f est continue sur $\mathbb{R}$ ce qui signifie que A est bien définie sur $\mathbb{R}$. De plus, on a $(\pi-x)=-f(x)$, $\forall x\in\mathbb{R}$. On considère alors le changement de variable $t=\sin x$. Donc, $dt=\cos x\ \ dx$ et alors :

$$A(x)=\int\frac{(\cos^2x\,)\cos x}{2+\sin x}\,dx=\int\frac{(1-\sin^2x\,)\cos x}{2+\sin x}\,dx=\int\frac{1-t^2}{2+t}\,dt$$

La décomposition en éléments simple de la fraction $\frac{1-t^2}{t+2}$ est

$$\frac{1-t^2}{t+2}=-t+2-\frac{3}{t+2}$$

Donc, pour tout $\in\mathbb{R}$, on obtient

$$A(x)=-\frac{t^2}{2}+2t-3\ln|t+2|+C=-\frac{1}{2}\sin^2x\ +2\sin x-3\ln(\sin x+2)+C\,,\quad C\in\mathbb{R}\,.$$

1. Calcul de $B(x)$: Il est clair que B est bien définie sur $\left]-\frac{\pi}{2}\,,\frac{\pi}{2}\right[$, puisque la fonction

$x\mapsto g(x):=\frac{sin^2x}{3+2cos^2x}$ est continue sur $\left]-\frac{\pi}{2}\,,\frac{\pi}{2}\right[$. On considère le changement de variable $t=\tan x$, où $x\in\left]-\frac{\pi}{2}\,,\frac{\pi}{2}\right[$. Donc, $dx=\frac{dt}{t^2+1}$, $\sin^2x=\frac{t^2}{1+t^2}$, $\cos^2x=\frac{1}{1+t^2}$.
Ainsi, $g(x)=\frac{t^2}{3t^2+5}$. Il vient alors

$$B(x)=\int\frac{t^2}{(3t^2+5)(t^2+1)}\,dt$$

On pose $h(z)=\frac{z}{(3z+5)(z+1)}$. En décomposant $h(z)$ en éléments simples, on trouve

$$h(z)=-\frac{1}{2(z+1)}+\frac{5}{2(3z+5)}$$

Donc, $\frac{t^2}{(3t^2+5)(t^2+1)}=h\left(t^2\right)=-\frac{1}{2(t^2+1)}+\frac{5}{2(3t^2+5)}$. Par suite, il vient

$$B(x)=\int-\frac{1}{2(t^2+1)}+\frac{5}{2(3t^2+5)}\;dt=-\frac{1}{2}\int\frac{1}{t^2+1}dt+\frac{5}{6}\int\frac{1}{t^2+\frac{5}{3}}\;dt$$

Finalement, pour tout $\in\left]-\frac{\pi}{2}\,,\frac{\pi}{2}\right[$, on a

$$B(x)=-\frac{1}{2}Arctan(t)+\frac{\sqrt{15}}{6}\,Arctan\left(\frac{\sqrt{15}t}{5}\right)+C=-\frac{1}{2}\,x+\frac{\sqrt{15}}{6}\,Arctan\left(\frac{\sqrt{15}\tan x}{5}\right)+C\,,\quad C\in\mathbb{R}\,.$$

6.10.2 Intégrale de type : $\int \cos^p(x)\sin^q(x)\,dx$, p , $q \in \mathbb{Z}$

Premier cas : p ou q est positif et impair

Supposons pour fixer les idées que : $\boldsymbol{p = 2m+1}$, $\boldsymbol{m} \in \mathbb{N}$

Alors : $\int \cos^{2m+1}(x)\sin^q(x)\,dx = \int \cos(x)\,(1-\sin x)^m \sin^q(x)\,dx$

On pose $t = \sin x \implies dt = \cos x\,dx$, par suite on obtient

$$\int \cos^{2m+1}(x)\sin^q(x)\,dx = \int \left(1-t^2\right)^m t^q\,dt$$

Deuxième cas : p et q sont positifs et pairs p = 2n , q = 2m , n et m∈ℕ

Dans ce cas, on utilise les formules :

$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x)$ et $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x)$ (T)

Ainsi :

$$\cos^{2n}(x)\sin^{2m}(x) = \left(\cos^2 x\right)^n\left(\sin^2 x\right)^m = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+m}(1+\cos 2x)^n(1-\cos 2x)^m$$

En effectuant les développements des puissances indiquées, on obtient une expression de puissances paires et impaires de $\cos 2x$. Les termes contenant des puissances impaires peuvent être intégrés comme nous l'avons indiqué dans le cas a).

Pour les termes contenant des puissances paires, nous appliquons successivement la formule (T) afin d'abaisser le degré de ces puissances. En procède de cette manière, on arrive finalement à des termes de la forme $\int \cos(\omega\, x)\,dx$ que l'on intègre facilement.

Exemple 6.29 Calculer $F(x) = \int \sin^3 x \cos^4 x\,dx$, $G(x) = \int \sin^2 x\cos^4 x\,dx$.

Réponses :

1. Il est clair que F est bien définie sur ℝ. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$F(x) = \int \sin x\,(1-\cos^2 x)\cos^4 x\,dx$$

On pose $= \cos x$. Donc, $dt = -\sin x\,dx$ et alors

$$F(x) = \int -\left(1-t^2\right)t^4\,dt = \int \left(t^6 - t^4\right)dt = \frac{t^7}{7} - \frac{t^5}{5} + C = \frac{\cos^7 x}{7} - \frac{\cos^5 x}{5} + C,\quad C \in \mathbb{R}.$$

1. La fonction G est définie sur ℝ . D'autre part, pour tout $\in \mathbb{R}$, on a

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x) \quad et \quad \sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x)$$

Ainsi

$$\sin^2 x\cos^4 x = \frac{1}{4}(1-\cos^2 2x)(1+cos 2x) = \frac{1}{4}(1+\cos 2x - \cos^2 2x - \cos 2x\ \cos^2 2x)$$

Or, $\cos^2 2x = \frac{1}{2}(1+\cos 4x)$ et $\cos 2x\ \cos^2 2x = \cos 2x\,(1-\sin^2 2x) = \cos 2x - \cos 2x\sin^2 2x$,

Il vient alors

$$\sin^2 x\cos^4 x = \frac{1}{4}(1-\cos^2 2x)(1+cos 2x) = \frac{1}{8} - \frac{1}{8}\cos 4x + \frac{1}{4}\cos 2x\sin^2 2x$$

Finalement, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$G(x) = \int \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{8}\cos 4x + \frac{1}{4}\cos 2x\sin^2 2x\right)dx = \frac{x}{8} - \frac{1}{32}\sin 4x + \frac{1}{24}\sin^3 2x + C,\quad C \in \mathbb{R}.$$

6.10.3 Intégrale de type : $\int \cos(ax)\sin(bx)\,dx$ et d'autres similaires

Il s'agit ici d'intégrales de forme :

$$\int \cos(ax)\cos(bx)\,dx,\ \int \sin(ax)\cos(bx)\,dx,\ \int \sin(ax)\sin(bx)\,dx \quad , a \neq b$$

On peut les calculer en utilisant les formules trigonométriques suivantes :

$$\cos(ax)\cos(bx) = \frac{1}{2}\left(\cos(a+b)x + \cos(a-b)x\right)$$

$$\sin(ax)\sin(bx) = \frac{1}{2}\left(\cos(a-b)x - \cos(a+b)x\right)$$

$$\sin(ax)\cos(bx) = \frac{1}{2}\left(\sin(a+b)x + \sin(a-b)x\right)$$

Exemple 6.30 Calculer $I(x) = \int \cos(2x)\sin(3x)\,dx$.

Réponse :

Il est clair que la fonction I est définie sur $\mathbb{R}$. D'autre part, pour tout $\in \mathbb{R}$, on a

$$\cos(2x)\sin(3x) = \frac{1}{2}(\sin 5x + \sin x)$$

Donc, pour tout $\in \mathbb{R}$, on trouve

$$I(x) = \int \frac{1}{2}(\sin 5x + \sin x)\,dx = -\frac{1}{10}\cos 5x - \frac{1}{2}\cos x + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Exercices

Exercice 80 1. *En utilisant les sommes de Riemann calculer les limites des suites suivantes*

$$(1) \quad a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\sqrt{n-k}}{n^{\frac{3}{2}}} \qquad (2) \quad b_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \cos^2\left(\frac{\pi k}{n}\right)$$

2. *Montrer par deux méthodes différentes que :*

$$\lim_{n \to +\infty} \int_0^{\frac{2\pi}{n}} \frac{\cos^3(x)}{1+x^2}\, dx = 0$$

3. *Montrer que* $\left|\int_0^1 \frac{\cos(nx)}{1+x}\, dx\right| \leq \ln 2.$

4. *Montrer que* $\left|\int_1^{\sqrt{3}} \frac{e^{-x}\sin(x)}{1+x^2}\, dx\right| \leq \frac{\pi}{12e}.$

Exercice 81 *Calculer les primitives suivantes (Fractions rationnelles) :*

$$\int \frac{1}{x^3+1}\, dx, \qquad \int \frac{5x-3}{(x-1)^2(x^2-2x+5)}\, dx$$

Exercice 82 *En utilisant l'intégration par parties, calculer les les intégrales indéfinies suivantes :*

$$\int \ln(1+x^2)\, dx, \quad \int \frac{Arc\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\, dx, \quad \int x\cos^2 x\, dx, \quad \int \frac{x\, Arc\tan x}{(1+x^2)^2}\, dx,$$

$$\int \cos(ax)\, e^{-bx}\, dx, \quad a, b \neq 0, \quad \int \ln(x+\sqrt{1+x^2})\, dx.$$

Exercice 83 *En utilisant la méthode de changement de variable, calculer les intégrales indéfinies suivantes :*

$$\int x\, a^{x^2}\, dx \quad , \quad \int 5^x e^x\, dx \quad , \quad \int \sqrt{R^2-x^2}\, dx, \quad \int \frac{x}{4+3x^4}\, dx, \quad \int \frac{1}{\sqrt{b^2-a^2x^2}}\, dx \quad a>0,\ b>0.$$

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{5-x^2}}\, dx, \quad \int \frac{x}{\sqrt{a^2+x^4}}\, dx \quad \int \frac{\cos x}{\sqrt{6+\sin^2 x}}\, dx, \quad \int \frac{Arc\cos x - x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx, \quad \int \frac{1}{4\cos^2 x + 3\sin^2 x}\, dx$$

$$\int \frac{1}{ch(x)}\, dx \quad \int \frac{\cos^3 x}{\sin^4 x}\, dx, \quad \int (\sin 2x)\sqrt{3+\cos^2 x}\, dx, \quad \int \frac{\sqrt{1+\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\, dx, \quad \int (\cos x)^5\, dx, \quad n \in \mathbb{N}$$

Exercice 84 *Calculer les intégrales définies suivantes :*

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\sin x \cos x}\, dx, \quad \int_1^2 \sqrt{-x^2+2x+2}\, dx, \quad \int_0^{2\pi} \sin^2(x)\, e^{-x}\, dx, \quad \int_0^1 \frac{3x+2}{\sqrt{x^2+x+1}}\, dx$$

$$\int_2^3 \frac{x-1}{\sqrt{x^2+4x-5}}\, dx, \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(3x)\sin(5x)\, dx, \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^6(x)\, dx$$

Exercice 85 *Soient*

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{2\cos x+5\sin x}\,dx \quad et \quad J=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{2\cos x+5\sin x}\,dx$$

1. *Calculer* $5I+2J$ *et* $-2I+5J$.
2. *Déduire la valeur de* I *et de* J.

Exercice 86 *Calculer :*

$$\int \frac{2x^4+1}{x^3(x^2+x+1)}\,dx,\quad \int \frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x}\,dx \quad \int \frac{x^3-6}{x^4+6x^2+8}\,dx,\quad \int \frac{3(x^4+2x^2+2)}{(x^3-1)(x^2+2x+2)}\,dx$$

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^4}\,dx\,,\quad \int_0^1 \frac{1}{1+ch^2x}\,dx,\quad \int_0^x \frac{1}{sh(t)+2ch(t)}\,dt,\quad \int_0^x \frac{ch(3t)}{1+sh(t)}\,dt,\quad \int_0^x sh^6(t)\,dt \quad x>0,$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{(2+\cos x)^2}\,dx,\quad \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{1+\cos x+\cos 2x}\,dx,\quad \int_0^x \frac{1}{a^2+b^2-(a^2-b^2)\cos t}\,dt,\quad a,b\in\mathbb{R}^*,\ x\in]0,\pi[$$

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{2\pi}{3}} \frac{1}{\sin^4 t}\,dt,\quad \int_0^x \frac{\sin t+\sin^3 t}{\cos 2t}\,dt,\ \ x\in]0,\pi/4[\quad \int_{\frac{\pi}{4}}^{\alpha} \frac{\cos^3 t+\cos^5 t}{\sin^2 t+\sin^4 t}\,dt,\ \ \alpha\in]0,\pi[$$

$$\int_2^x \frac{1}{\sqrt{t-1}+\sqrt{t+1}}\,dt,\ \ x>1,\quad \int_1^x \frac{1}{(2t+1)^{2/3}-(2t-1)^{1/2}}\,dt,\ \ x>0,\quad \int_a^b \sqrt{(x-a)(b-x)}\,dx$$

$$\int \sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}\,dx,\quad \int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}\,dx,\quad \int \frac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt[3]{x})^2}\,dx,\quad \int_3^x \frac{3t+4}{\sqrt{-t^2+6t-8}}\,dt,\ \ x\in]3,4[$$

Exercice 87 *On définit pour tout* $n\in\mathbb{N}$ *:*

$$W_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,dx$$

1. *Vérifier que* W_n *est bien défini.*
2. *Montrer que* $W_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\,dx$.
3. *Montrer que la suite* $(W_n)_{n\geq 0}$ *est décroissante . Déduire la convergence de la suite* $(W_n)_{n\geq 0}$.
4. *Montrer que pour tout* $n\geq 2$ *:* $nW_n=(n-1)W_{n-2}$.
5. *Calculer* W_0, W_1 *et déduire* W_n *en fonction de* n.
6. (a). *Montrer que* W_n *est équivalent à* W_{n+1} *quand* $n\longrightarrow+\infty$.
   (b). *On pose* $u_n=(n+1)W_nW_{n+1}$ *pour tout* $n\geq 0$. *Que peut-on déduire de la suite* (u_n) *?*
   (c). *On déduire que* $W_n\sim\sqrt{\frac{\pi}{2n}}$ *quand* $n\longrightarrow+\infty$.
7. *On suppose connu l'équivalence* $n!\sim C\sqrt{n}\left(\frac{e}{n}\right)^n$. *Montrer à l'aide des questions précédentes que* $C=\sqrt{2\pi}$.

Bibliographie

[1] K. Allab, Elements d'Analyse, O.P.U., Alger (1984).

[2] C. Baba-Hamed, K. Benhabib, Analyse I : Rappel de Cours et Exercices avec Solutions, O.P.U., Alger (1988),

[3] S. Balac, F. Sturm, Algèbre et analyse : Cours de mathématiques de première année avec exercices corrigés. 2^e édition, Presses Polytechniques et universitaires Romandes (2014).

[4] B. Calvo, J. Doyen, A. Calvo et F. Boschet, Exercices D'analyse : 1^{er}cycle scientifique, $1^{ère}$année préparation aux grandes écoles, Armand Colin, Paris (1977).

[5] J. Dixmier, Cours de Mathématiques du Premier Cycle, Bordas, Paris (1976),

[6] J.-M. Monier, Analyse : PCSI-PTSI (cours, méthodes et exercices corrigés), Dunod, Paris (2007),

[7] Séries d'exercices de T. D. et Sujets d'examens réalisés à l'Ecole Supérieure en Sciences Appliquées E.S.S.A de Tlemcen.