



Mémoire de fin d'étude

Pour l'obtention du diplôme de Master

Filière : automatique
Spécialité : automatique

Présenté par : RABEHI Mohammed Rida
BERKOUNE Ali Abdessetar

Thème

***Modélisation et commande non
linéaire d'un pendule inversé rotatif***

Soutenu publiquement, le 11/07/2021, devant le jury composé de :

| | | | |
|------------------------------|-----------------------------------|---------------|-------------------------|
| M MERAD Lotfi | Professeur | ESSA. Tlemcen | Président |
| M ARICHI Fayssal | Maître de conférences classe B | ESSA. Tlemcen | Directeur de mémoire |
| M MOKHTARI Mohamed Rida | Maître de conférences classe A | ESSA. Tlemcen | Co-Directeur de mémoire |
| M ABDI Sidi Mohammed ELAmine | Maître de conférences classe B | ESSA. Tlemcen | Examineur 1 |
| Mme GHOUALI Amel | Maître de conférences classe B | ESSA. Tlemcen | Examineur 2 |

Année universitaire : 2020 /2021

Remerciement

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ
الحمد لله الذي بنعمته تتم الصالحات.

Nous remercions le dieu, le tout puissant, pour nous avoir donné, le courage, la patience, la volonté et la force nécessaires pour accomplir ce modeste travail.

*En guise de reconnaissance, je tiens à témoigner mes sincères remerciements à toutes les personnes qui ont contribué de près ou de loin à l'élaboration de ce modeste travail. Nos sincères gratitudee à Monsieur **MOKHTARI Mohammed Rida** pour la qualité de son enseignement, ses conseils et son intérêt incontestable qu'il a porté à notre projet.*

*Nous remercions notre encadreur Monsieur **ARICHI Fayssal** pour ses nombreux conseils, encouragements, sa disponibilité, et relectures et corrections de notre travail.*

*Nous tenons notamment, à adresser l'expression de notre sincère reconnaissance aux membres du jury ici présent de xamen Monsieur **MERAD Lotfi**, Monsieur **ABDI Sedi Mohamed** et Madame **BEJAOUI Amal**, pour l'intérêt qu'ils ont porté à ce travail.*

Nous tenant à remercier nos familles de nous avoir soutenu, nous ne serons jamais assez reconnaissants envers nos parents qui ont toujours tout mis en oeuvre pour qu'on s'épanouisse dans tous ce qu'on entreprend.

*Nous n'oublions pas de remercier nos amis en particulier **Ziani Kerarti AbdelKarim Zakaria** et **TEBBAL Riadh Abdelhalim**, et dans l'impossibilité de citer tous les noms, nos sincères remerciements vont à tous ceux et celles, qui de près ou de loin, ont permis par leurs conseils et leurs compétences la réalisation de ce mémoire*

Rida & Ali.

Dédicaces

À mes chers parents, pour tous leurs sacrifices, leur amour, leur tendresse, leur soutien et leurs prières tout au long de mes études.

*À toute ma famille pour leur soutien et leurs encouragements permanents tout au long de mon parcours, à mon amis **Lakhal Sadnia** qui n'à pas pu venir aujourd'hui, et à tout ceux qui me sont chers.*

Que ce travail soit l'accomplissement de vos vœux tant allégués, et le fruit de votre soutien, Merci d'être toujours là pour moi.

*À mon petit frère **Zoheir**, et ma grande soeur **Yasmina**.*

Rida

À mes chers parents, pour tous leurs sacrifices, leur amour, leur tendresse, leur soutien et leurs prières tout au long de mes études.

À toute ma famille pour leur soutien et leurs encouragements.

*À mon ami **Chawki***

*À ma chère soeur **Imane** et mon frère **Mohammed**.*

*À la petite **Dania**.*

Ali

Résumé

Dans ce projet, nous nous sommes intéressés à la synthèse des deux types de commandes non linéaires pour un pendule inversé rotatif qui représente un système non linéaire et sous-actionné. La première est basée sur l'approche de modes glissants, son principe est de définir une surface de glissement vers laquelle doit converger le système. La deuxième est une commande hybrides dite "swing up" composée de deux commande, une commande non linéaire obtenue en utilisant un contrôle d'énergie qui est basé sur le principe de balancer le pendule vers la zone de linéarité et une commande linéaire par retour d'état pour stabiliser le pendule dans la zone de linéarité. Nous avons appliqué la commande swing up la maquette de pendule inversé rotatif de type Quanser disponible au niveau de notre établissement ESSAT.

Mots-Clés : Système non linéaire, le contrôle mode glissant, Swing up, LQR, La commutation entre les deux commandes, Pendule Inversé Rotatif

Abstract

In this project, we are interested in the synthesis of two types of nonlinear controls for a rotating inverted pendulum which represents a nonlinear and underactuated system. The first one is based on the sliding mode approach, its principle is to define a sliding surface towards which the system must converge. The second is a hybrid control called "swing up" composed of two controls, a nonlinear control obtained by using an energy control which is based on the principle of swinging the pendulum towards the linearity zone and a linear control by state feedback to stabilize the pendulum in the linearity zone. We have applied the swing control up the Quanser type rotating inverted pendulum model available at our institution ESSAT .

Key- Words : Nonlinear system, sliding mode control, Swing_up, LQR, Switching between the two controls, Rotary Inverted Pendulum

ملخص

في هذا المشروع، نحن مهتمون بتركيب نوعين من عناصر التحكم غير الخطية لبندول مقلوب دوار والذي يمثل نظاماً غير خطي وقليل التشغيل، يعتمد الأول على نهج أوضاع الانزلاق، ومبدأه هو تحديد السطح الانزلاق الذي يجب أن يتقارب فيه النظام. والثاني هو محرك هجين يسمى swing up ويتألف من عنصرين تحكم، وهو عنصر تحكم غير خطي يتم الحصول عليه باستخدام عنصر تحكم في الطاقة يعتمد على مبدأ تارجح البندول نحو منطقة الخطية والتحكم الخطي عن طريق التغذية المرتدة للحالة لتحقيق الاستقرار البندول في المنطقة الخطية. طبقنا أمر التارجح لأعلى على نموذج البندول المقلوب الدوار من نوع Quanser المتاح في مؤسسة ESSAT الخاصة بنا.

كلمات المفتاحية: النظام غير الخطي، التحكم في الوضع الانزلاقي، التارجح لأعلى، LQR، التبديل بين عنصري التحكم، بندول دوار مقلوب.

GLOSSAIRE

Acronymes

| | |
|----------------|---------------------------------|
| EC | Énergie Cinétique |
| EO | Électro optique |
| EP | Énergie Potentielle |
| LQR | linéaire quadratique régulateur |
| PIR | Pendule Inverse Rotatif |
| Sat | Saturation |
| SIMO | Single Input Multiple Output |
| V _m | Voltage moteur |

Symboles

| | |
|----------|---|
| α | Angle de pendule |
| arctan | Arc tangente |
| η_g | Rendement des engrenages |
| η_m | Rendement du moteur |
| θ | Angle de bras |
| B_p | coefficient de viscosité d'amortissement du pendule |
| B_r | coefficient de viscosité d'amortissement du bras |
| g | Gravité |
| J_p | Moment d'inertie du pendule de son centre de masse |
| J_r | Moment d'inertie du bras de son centre de masse |
| k_g | Constante des engrenages |
| k_m | Constante de la f.e.m |
| k_t | Constante du couple moteur |
| L_p | Longueur de bras |

L_r Longueur de bras
 m_p Masse du pendule
 R_m Résistance d'induit du moteur

Table des matières

| | |
|--|------------|
| Remerciement | I |
| Dédicace | II |
| Résumé | III |
| Glossaire | IV |
| 1 Introduction Générale | 2 |
| 1.1 Pendule simple : | 4 |
| 1.2 Pendule inversé rotatif : | 4 |
| 1.3 Intérêt de l'étude d'un pendule inversé : | 5 |
| 1.3.1 Domaine de la Robotique : | 5 |
| 1.3.2 Domaine de l'aérospatiale : | 6 |
| 1.4 Propriétés du pendule inversé : | 7 |
| 1.5 Conclusion | 7 |
| 2 Modélisation du pendule inversé rotatif | 8 |
| 2.1 Introduction : | 9 |
| 2.2 Modèle mathématique du PIR : | 9 |
| 2.3 Représentation d'état | 12 |
| 2.4 Conclusion | 13 |
| 3 La commande par mode glissant | 14 |
| 3.1 Introduction | 15 |
| 3.2 Pourquoi la commande non-linéaires ? | 15 |
| 3.3 La commande par mode glissant | 16 |
| 3.3.1 Définition du mode glissant : | 16 |
| 3.3.2 Historique : | 17 |
| 3.4 Principe de la commande par mode glissant | 17 |
| 3.5 Théorie de la commande par mode glissant | 18 |
| 3.6 Régime glissant idéal | 18 |
| 3.7 Régime glissant réel | 19 |
| 3.8 Types de commutation des systèmes à structure variable : | 19 |
| 3.8.1 Structure par commutation au niveau de l'organe de commande | 19 |
| 3.8.2 Structure par commutation au niveau d'une contre réaction d'état | 20 |
| 3.8.3 Structure commutation au niveau de l'organe de commande avec commande équivalente. | 20 |
| 3.9 Explication du phénomène du glissement | 21 |
| 3.10 Conception de l'algorithme de commande par mode de glissement | 21 |
| 3.11 Théorie de Lyapunov | 21 |
| 3.12 Stabilité au sens de Lyapunov | 22 |
| 3.13 Fonction de Lyapunov (conditions de convergence) | 22 |
| 3.14 Phénomène du CHATTERING (réticence) | 22 |
| 3.15 Élimination du phénomène de chattering | 23 |
| 3.16 Choix de surface de glissement | 25 |

| | | |
|----------|--|-----------|
| 3.17 | Définition des grandeurs de commande : | 26 |
| 3.18 | Avantages de la commande par mode glissant : | 26 |
| 3.19 | Commandabilité du système non-linéaire | 26 |
| 3.20 | Application de la commande par mode glissant | 27 |
| 3.20.1 | Paramètres de simulation : | 28 |
| 3.21 | Résultats de simulation de la commande par mode glissant sous Matlab : | 29 |
| 3.22 | Conclusion | 30 |
| 4 | commande Swing UP : étude expérimentale | 31 |
| 4.1 | Introduction | 32 |
| 4.2 | Commande Swinge Up par contrôle d'énergie | 32 |
| 4.3 | Résultats de simulations | 34 |
| 4.4 | Présentation de la maquette Quanser QUBE-Servo 2 | 35 |
| 4.5 | Principales caractéristiques du QUBE-Servo : | 35 |
| 4.6 | Composants matériels : | 36 |
| 4.7 | Applications de la commande sur la maquette : | 37 |
| 4.7.1 | Contrôle de l'énergie (Swing_up) : | 37 |
| 4.7.2 | Résultats expérimentaux : | 38 |
| 4.7.3 | Teste de robustesse : | 39 |
| 4.8 | Conclusion | 40 |
| | Conclusion Générale | 41 |
| | Bibliographie | 44 |
| | Annexes | |

Table des figures

| | | |
|------|---|----|
| 1.1 | Pendule simple[22]. | 4 |
| 1.2 | Pendule inversé rotatif [2]. | 4 |
| 1.3 | Exemple de joué robot [1]. | 5 |
| 1.4 | Le Nbot et le legwey [22]. | 5 |
| 1.5 | Exemple du principe de fonctionnement du Segway [22]. | 6 |
| 1.7 | Pendule gyroscopique inversé [19]. | 7 |
| 2.1 | Modèle Pendule Inversé Rotatif[14]. | 9 |
| 2.2 | Représentation d'état matricielle | 13 |
| 3.1 | Schématisation du mode de glissement dans le plan de phase [5] | 17 |
| 3.2 | Convergence du système glissant[25]. | 18 |
| 3.3 | Glissement idéal[5]. | 18 |
| 3.4 | Glissement réel[5] | 19 |
| 3.5 | Structure de régulation par commutation au niveau de l'organe de commande | 19 |
| 3.6 | Structure de régulation par commutation au niveau de la contre-réaction d'état. | 20 |
| 3.7 | Structure de régulation par ajout de la commande équivalente. | 20 |
| 3.8 | Démonstration du mode de glissement. | 21 |
| 3.9 | phénomène de réticence | 23 |
| 3.10 | La fonction Sign | 24 |
| 3.11 | La fonction Sat | 24 |
| 3.12 | La fonction SMOOTH | 25 |
| 3.13 | La fonction Arctang | 25 |
| 3.14 | Évolution de l'angle de bras et de pendule par la commande mode glissant | 29 |
| 3.15 | Évolution de la tension délivrée au système avec commande mode glissant | 29 |
| 4.1 | Évolution de l'angle de bras et de pendule par la commande switch | 34 |
| 4.2 | Évolution de voltage du moteur | 34 |
| 4.3 | Quanser QUBE-Servo | 35 |
| 4.4 | Composants QUBE-Servo | 36 |
| 4.5 | Stabilisation du pendule avec la commande switch | 38 |
| 4.6 | Stabilisation de l'angle de bras avec la commande switch | 38 |
| 4.7 | Énergie de pendule | 38 |
| 4.8 | Voltage de moteur | 38 |
| 4.9 | Évolution du pendule avec des perturbations | 39 |
| 4.10 | Évolution du bras avec perturbations | 39 |
| 4.11 | Évolution de l'énergie de pendule avec les perturbations | 39 |
| 4.12 | Évolution du voltage de moteur avec les perturbations | 39 |

Liste des tableaux

- 3.1 Valeurs du contrôleur utilisé 28
- 4.1 Valeurs du contrôleur utilisé 37
- 4.2 Valeurs du contrôleur swing_up 37
- 3 paramètres du système 46

CHAPITRE

1

INTRODUCTION GÉNÉRALE

Dans le domaine de l'automatique réputé d'être celui de l'analyse et de la commande des systèmes dynamiques et l'étude des systèmes non linéaires qui constitué un champ de recherche et investigations très riches. Ceci peut se comprendre par le fait que le monde réel n'est peuplé que d'objets non linéaires dont la maîtrise ne se satisfait pas toujours avec simplifications ou des approximations qui sont souvent consistant à imposer l'hypothèse de linéarité. Cette tendance assez généralisée au début de l'automatique trouvait son intérêt dans le fait que la théorie de l'analyse et de la commande dans le cadre des systèmes dynamiques linéaires a fait de rapides progrès jusqu'à sa maturité que l'on peut situer aux années quatre-vingt avec des avancées significatives dans l'utilisation de la représentation d'état pour les systèmes multi-variables surpassant alors les méthodes fréquentielles très performantes, dans un cadre un peu restrictif, mono variable.

Dans le domaine non linéaire, il y a eu des progrès importants qui ont été faits dans le traitement algébrique des problèmes de commande. Sans vouloir en faire une liste exhaustive, on peut néanmoins citer quelques approches significatives dans cette voie, en commençant par celles qui se basent sur des concepts et méthodes en géométrie différentielles telles celles de linéarisations entrée-état ainsi que linéarisations entrée-sortie (Isidori) qui par difféomorphisme (transformations non linéaires régulières) visent à établir des classe d'équivalence entre représentations non linéaires et représentations linéaires.

Le sujet de la commande non linéaire traite de l'analyse et de la conception des systèmes de commande non linéaires, c'est-à-dire de systèmes de commande contenant au moins un composant non linéaire. Dans notre étude, nous avons un système très intéressant et fortement non linéaire à étudier, il s'agit du pendule inversé rotatif. Le travail est organisé de la manière suivante :

Dans le premier chapitre nous déterminons le modèle mathématique du système pendule inversé rotatif par l'application du formalisme d'Euler-Lagrange, et nous procédèrent à sa représentation d'état.

Le deuxième chapitre portera sur la synthèse de loi de commande par mode glissant, qui est une commande non linéaire. Son objectif est de stabiliser le pendule au tours de son point d'équilibre instable. Et pour finir, dans le quatrième chapitre, nous allons synthétiser la commande swing Up par contrôle d'énergie, qui est aussi une commandes non linéaire, avec but ramener le pendule au tour de la position d'équilibre instable, et avec un contrôle par switch, le stabiliser au tours de son point d'équilibre instable. En suite, tester cette commande sur la maquette de PIR de type Quanser QUBE-Servo2, et voir l'étendu des capacité de cette commande en terme de rapidité et robustesse.

1.1 Pendule simple :

Grâce à la force de rappel due à la gravité, lorsqu'un pendule est déplacé latéralement de sa position d'équilibre, il peut être ramené encore à cette position d'équilibre.

Lorsqu'il est relâché, cette force de rappel combinée avec la masse du pendule le fait osciller d'avant en arrière autour de la position d'équilibre. Les pendules sont utilisés dans les instruments scientifiques comme les accéléromètres, les sismomètres et les pendules horloges. Dans les conditions idéales (où les forces perturbantes comme le frottement, l'amortissement et la résistance de l'air sont éliminées), la période d'un pendule reste constante voilà son utilité à capter le temps précisément dans une horloge.

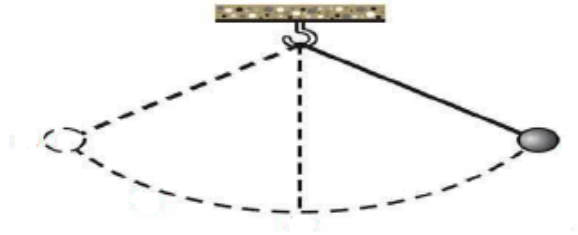


FIGURE 1.1 : Pendule simple[22].

1.2 Pendule inversé rotatif :

Le pendule inversé rotatif est un type de pendule dont la position d'équilibre est instable parce qu'il est maintenu verticalement par rapport au point d'équilibre d'un pendule simple et faisant un angle de 180° avec ce dernier. Il s'agit d'un système SIMO (Single Input Multiple Output) ce qui signifie Une Entrée à Plusieurs Sorties. Ce système est non linéaire et instable.

Il existe plusieurs types de pendule inversé (pendule inversé rotatif, sur chariot, double pendule inversé...ext).

Notre mémoire va se concentrer sur l'étude du pendule inversé rotatif, comme il est voir dans la figure(1.2).



FIGURE 1.2 : Pendule inversé rotatif [2].

1.3 Intérêt de l'étude d'un pendule inversé :

L'étude du pendule inversé se présente comme une initiation et un bon apprentissage pour les étudiants en Automatique et en Robotique parce que cela fait intervenir beaucoup de notions intéressantes pour eux :

la programmation, l'automatisation, la mécanique et l'électronique. Le bébé après son premier pas de marche joue comme un double pendule inversé dont les deux axes de rotation fondamentaux qui sont les hanches et les chevilles. Lorsqu'il est en position de debout, ses articulations de corps travaillent sans s'arrêter pour le maintenir en équilibre.

L'étude du pendule inverse est devenu très importante non seulement pour l'industrie, mais aussi pour différentes autres disciplines. L'exemple le plus évident de ce système est l'homme lui-même qui est considéré comme un double pendule inversé, dont les deux axes de rotations sont les chevilles et les hanches qui travaillent sans cesse pour le maintenir debout. L'étude de ce modèle par exemple, est au centre de l'industrie de conception de prothèses et de robotique tout particulièrement les robots humanoïdes.

Quelques applications réelles dans des domaines variés basées sur le concept du pendule inversé sont présentées dans les sections suivantes.

1.3.1 Domaine de la Robotique :

La robotique utilise ce type de concept dans leur principe de commande. Le robot auto-balancé est constitué d'une plate forme solidaire de deux roues. L'axe des roues est perpendiculaire à l'axe de déplacement du robot et le principe du contrôle de position est basé sur le pendule inversé. La figure de voiture qui se transforme en robot se balançant sur deux roues, il s'agit d'un jouet pour les enfants qui utilise le principe du pendule inversé pour se tenir debout, exposant ainsi un spectacle intéressant. À droite nous avons un robot auto balancé et assez stable pour servir les boissons comme un serveur humain. Nbot, qui est représenté sur la figure (1.4) est un



FIGURE 1.3 : Exemple de joué robot [1].

robot d'équilibrage à deux roues construit par David. P Anderson, ce robot utilise un capteur inertiel disponible dans le commerce et positionne l'information à partir du codeur du moteur pour équilibrer le système[9]. Steven Hassenplug a construit avec succès un robot d'équilibrage appelé Legway (figure (1.4) à droite)) en utilisant le kit de robotisation LEGO Mindstorms. Deux capteurs détecteurs de proximité électro-optique (EOPD) ont été utilisés pour fournir l'angle d'inclinaison du robot au contrôleur qui est programmé dans BrickOS, un langage de programmation similaire à C / C ++.



FIGURE 1.4 : Le Nbot et le legway [22].

Le principe du pendule inversé a également inspiré de nombreux moyen de transport récents comme le Segway, la gyro-roue qui est facilement piloter par de simple balancement en avant pour avancer

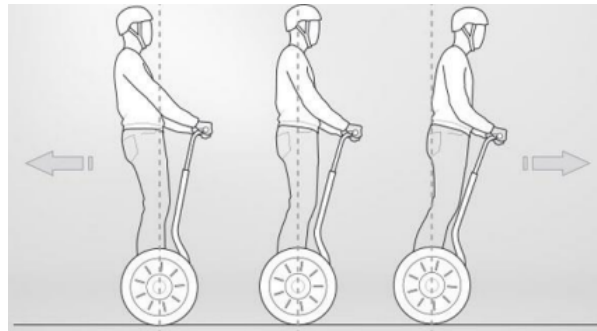
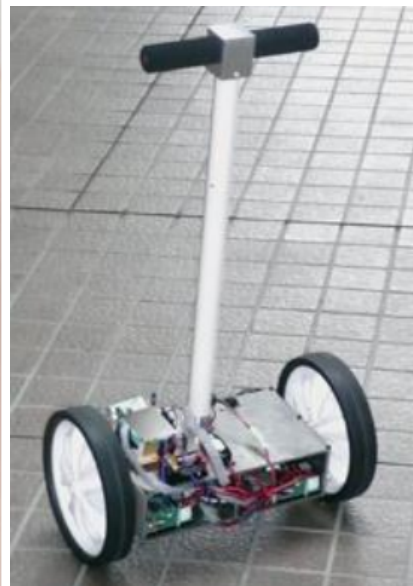


FIGURE 1.5 : Exemple du principe de fonctionnement du Segway [22].

Voici quelques exemples de robot à pendule inversé : On peut retrouver ces robots dans la vie quotidienne dans l'utilisation des appareils électroménagers ou dans les appareils tels que les segways : Le Transporteur Personnel Segway est un gyropode (véhicule monoplace à deux roues où le conducteur se trouve debout). L'utilisateur est maintenu en équilibre grâce au modèle du pendule inversé.



(a) robot wheelie [12].



(b) robot segway [12].

Le système de stabilisation d'une fusée ou encore d'un missile (lors du décollage ou du début de la propulsion) est également une application directe du pendule inversé. Enfin, il existe d'autres éléments que nous retrouvons dans la vie de tous les jours, tel que le système tonique postural (c'est à dire le système qui contrôle l'équilibre de l'être humain). Plus généralement nous pouvons généraliser ce modèle aux corps qui subissent un état d'équilibre instable.

1.3.2 Domaine de l'aérospatiale :

Dans ce domaine l'étude des pendules inversés a une grande importance, par exemple pour commander et stabiliser l'attitude du satellite, le lancement des fusés...etc.

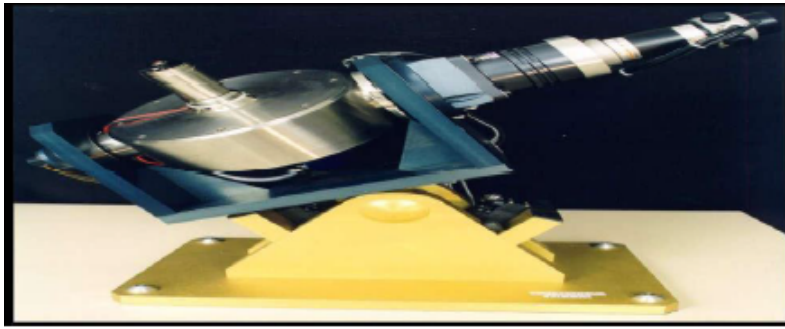


FIGURE 1.7 : Pendule gyroscopique inversé [19].

1.4 Propriétés du pendule inversé :

- La non-linéarité
- Système holonome
- L'instabilité en boucle ouverte
- Système sous-actionné

1.5 Conclusion

Après avoir défini et donné les caractéristiques d'un pendule inversé, nous pouvons conclure que c'est un dispositif important dans le domaine de l'automatique et pas mal d'autres domaines pour tester les algorithmes de contrôle. Le chapitre suivant est consacré à l'obtention d'un modèle mathématique du système.

CHAPITRE

2

MODÉLISATION DU PENDULE INVERSÉ
ROTATIF

2.1 Introduction :

Ce chapitre présente la modélisation du Pendule Inversé Rotatif sur lequel est portée notre travail. Dans la première partie, nous utilisons le formalisme de Lagrange pour trouver un modèle non linéaire sous forme d'équations différentielles et l'exprimer sous forme d'une représentation d'état. Puis nous présentons une linéarisation du modèle non linéaire autour de son point d'équilibre instable, ce qui est imposé par la complexité du système. Pour prouver l'efficacité de ce travail, nous fournissons une simulation qui montre clairement l'instabilité du système dans la dernière partie.

2.2 Modèle mathématique du PIR :

Le RIP est constitué d'un bras dans le plan horizontal qui est actionné par un moteur électrique. Au bout de ce bras horizontal, un second bras est attaché et est libre de tourner dans le plan vertical (les plans de rotation des deux bras sont perpendiculaires). A l'aide d'un contrôleur, il est possible de maintenir le bras vertical en équilibre instable. Ce genre de système est surtout utilisé dans un contexte universitaire pour tester différents types de contrôleurs et montrer le potentiel de la théorie du contrôle.

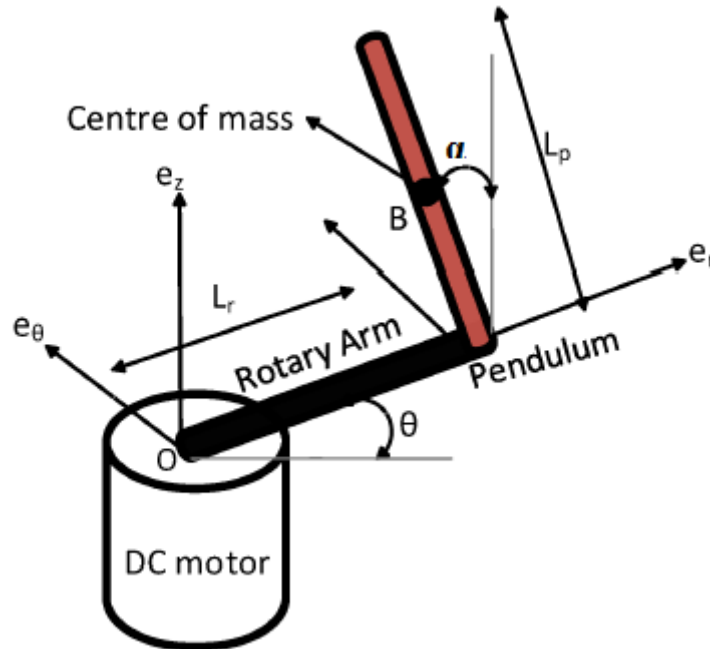


FIGURE 2.1 : Modèle Pendule Inversé Rotatif[14].

Pour le modèle dynamique de notre pendule, nous nous basons sur le formalisme d'EULER-LAGRANGE qui nous fournit les équations différentielles qui décrivent l'évolution du système en fonction des forces extérieures. Les paramètres de la maquette sont fournis par le constructeur dans le databook, et sont très précis car c'est une solution de laboratoire. Les valeurs des paramètres sont données dans l'annexe (tableau 3).

Ce système à deux degrés de liberté donc il est décrit par deux coordonnées généralisées (α, θ) avec α est l'angle du pendule, θ est l'angle du bras.

Dans cette modélisation, on va utiliser la méthode d'EULER-LAGRANGE qui est basée sur les énergies cinétique et potentiel. L'équation de LAGRANGE est :

$$L = E_c - E_p \quad (2.1)$$

où L est le Lagrangien, E_c l'énergie cinétique et E_p l'énergie potentielle du système. Pour la tige (arm) l'énergie cinétique rationnel et potentielle sont données par :

- Le bras :

$$\begin{cases} E_{P1} = 0 \\ E_{C1} = \frac{1}{2} J_r \dot{\theta}^2 \end{cases} \quad (2.2)$$

- Le pendule :

$$\begin{cases} E_{P2} = \frac{1}{2} m_p g L_p \cos \alpha \\ E_{C2} = \frac{1}{2} m_p \dot{P}^2 + \frac{1}{2} J_p \dot{\alpha}^2 \end{cases} \quad (2.3)$$

- L'énergie cinétique totale :

$$\begin{aligned} E_C &= E_{C1} + E_{C2} \\ E_C &= \frac{1}{2} J_r \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m_p \dot{P}^2 + \frac{1}{2} J_p \dot{\alpha}^2 \end{aligned} \quad (2.4)$$

- L'énergie potentielle totale :

$$\begin{aligned} E_P &= E_{P1} + E_{P2} \\ E_P &= \frac{1}{2} m_p g L_p \cos \alpha \end{aligned} \quad (2.5)$$

Avec P est la position du centre de masse donnée par les équations suivantes :

$$\begin{cases} P_x = L_r \cos \theta + \frac{1}{2} L_p \sin \alpha \sin \theta \\ P_y = L_r \sin \theta - \frac{1}{2} L_p \sin \alpha \cos \theta \\ P_z = L_p \cos \alpha \end{cases} \quad (2.6)$$

On dérive pour obtenir l'équation de Lagrange

$$\begin{cases} \dot{P}_x = -L_r \dot{\theta} \sin \theta + \frac{1}{2} L_p (\dot{\alpha} \cos \alpha \sin \theta + \dot{\theta} \cos \theta \sin \alpha) \\ \dot{P}_y = L_r \dot{\theta} \cos \theta - \frac{1}{2} L_p (\dot{\alpha} \cos \alpha \cos \theta - \dot{\theta} \sin \theta \sin \alpha) \\ \dot{P}_z = -\frac{1}{2} L_p \dot{\alpha} \sin \alpha \end{cases} \quad (2.7)$$

On a :

$$\dot{P}^2 = \dot{P}_x^2 + \dot{P}_y^2 + \dot{P}_z^2 \quad (2.8)$$

Alors en remplaçant dans 2.4 on trouve

$$E_C = \frac{1}{2} \left(J_r + m_p L_r^2 + \frac{1}{4} m_p L_p^2 \sin^2 \alpha \right) \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} \left(J_p + \frac{1}{4} m_p L_p^2 \right) \dot{\alpha}^2 - \frac{1}{2} m_p L_r L_p \cos \alpha \dot{\theta} \dot{\alpha} \quad (2.9)$$

Alors L devient :

$$L = \frac{1}{2} \left(J_r + m_p L_r^2 + \frac{1}{4} m_p L_p^2 \sin^2 \alpha \right) \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} \left(J_p + \frac{1}{4} m_p L_p^2 \right) \dot{\alpha}^2 - \frac{1}{2} m_p L_r L_p \cos \alpha \dot{\theta} \dot{\alpha} - \frac{1}{2} m_p g L_p \cos \alpha \quad (2.10)$$

Pour aboutir à des équations différentielles, nous utilisons la formule d'Euler-Lagrange.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{dL}{d\dot{x}} \right) - \frac{dL}{dx} = Q \quad (2.11)$$

Avec Q est la force extérieure (comme le frottement) et x est une coordonnée généralisée. Pour un système à n degrés de liberté, on trouve n équations.

Dans le cas du PIR possédant deux degrés de liberté, décrit donc par deux coordonnées généralisées on a deux équations :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \left(\frac{dL}{d\dot{\theta}} \right) - \frac{dL}{d\theta} = Q_1 \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{dL}{d\dot{\alpha}} \right) - \frac{dL}{d\alpha} = Q_2 \end{cases} \quad (2.12)$$

On trouve alors deux forces extérieures, une force en relation avec θ donc c'est la force appliquée à la tige (couple du moteur et frottement) notée Q_1 et une force de frottement en relation avec α notée Q_2 [14].

$$\begin{cases} Q_1 = \tau - B_r \dot{\theta} \\ Q_2 = -B_p \dot{\alpha} \end{cases} \quad (2.13)$$

Avec B_r , B_p sont les coefficients des frottements visqueux du bras et du pendule respectivement et τ représente le moment du couple appliqué à la tige rotative généré par le servomoteur, il est donné par :

$$\tau = \frac{\eta_g \eta_m K_g K_t (V_m - K_g K_m \dot{\theta})}{R_m} \quad (2.14)$$

On arrive finalement à établir deux équations différentielles qui décrivent le mouvement du système :

$$\begin{aligned} \ddot{\theta} \left(J_r + m_p L_r^2 + \frac{1}{4} m_p L_p^2 \sin^2 \alpha \right) + \ddot{\alpha} \left(-\frac{1}{2} m_p L_r L_p \cos \alpha \right) + \dot{\alpha} \dot{\theta} \left(\frac{1}{2} m_p L_p^2 \sin \alpha \cos \alpha \right) + \\ \ddot{\alpha}^2 \left(\frac{1}{2} m_p L_r L_p \sin \alpha \right) = Q_1 \\ \ddot{\theta} \left(-\frac{1}{2} m_p L_r L_p \cos \alpha \right) + \ddot{\alpha} \left(J_p + \frac{1}{4} m_p L_p^2 \right) + \dot{\theta}^2 \left(-\frac{1}{4} m_p L_p^2 \sin \alpha \cos \alpha \right) - \frac{1}{2} m_p g L_p \sin \alpha = Q_2 \end{aligned}$$

Le modèle est écrit sous forme d'un système de deux équations à deux inconnues :

$$\begin{cases} a \ddot{\theta} + b \ddot{\alpha} = c \\ a_1 \dot{\theta} + b_1 \dot{\alpha} = c_1 \end{cases} \quad (2.15)$$

Avec :

- $a = \left(J_r + m_p L_r^2 + \frac{1}{4} m_p L_p^2 \sin^2 \alpha \right)$
- $a_1 = \left(-\frac{1}{2} m_p L_r L_p \cos \alpha \right)$
- $b = \left(-\frac{1}{2} m_p L_r L_p \cos \alpha \right)$
- $b_1 = \left(J_p + \frac{1}{4} m_p L_p^2 \right)$
- $c = \tau - B_r \dot{\theta} - \left[\dot{\alpha} \dot{\theta} \left(\frac{1}{2} m_p L_p^2 \sin \alpha \cos \alpha \right) + \dot{\alpha}^2 \left(\frac{1}{2} m_p L_r L_p \sin \alpha \right) \right]$
- $c_1 = -B_p \dot{\alpha} - \left[\dot{\theta}^2 \left(-\frac{1}{4} m_p L_p^2 \sin \alpha \cos \alpha \right) - \frac{1}{2} m_p g L_p \sin \alpha \right]$

Pour résoudre le système 2.15 on utilise la méthode de Cramer afin de tirer $\ddot{\alpha}$ et $\ddot{\theta}$:

$$\begin{aligned} \ddot{\theta} &= \frac{\begin{vmatrix} a & c \\ a_1 & c_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}} = \frac{ac_1 - a_1c}{ab_1 - a_1b} = \frac{\det 1}{\det} \\ \ddot{\alpha} &= \frac{\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & c \\ a_1 & c_1 \end{vmatrix}} = \frac{bc_1 - b_1c}{ac_1 - a_1c} = \frac{\det 1}{\det} \end{aligned} \quad (2.16)$$

$$\det = (J_r + m_p L_r^2) \left(J_p + \frac{1}{2} m_p L_p^2 \right) + \frac{1}{4} m_p L_p^2 \sin^2 \alpha \left(J_p + \frac{1}{4} m_p L_p^2 \right) + \frac{1}{4} (m_p L_r L_p \cos \alpha)^2$$

$$\begin{aligned} \det 1 &= \left[\tau - B_r \dot{\theta} - \left(\frac{1}{2} m_p L_p^2 \sin \alpha \cos \alpha \right) \dot{\alpha} \dot{\theta} - \left(\frac{1}{2} m_p L_r \sin \alpha \right) \dot{\alpha}^2 \right] \left(J_p + \frac{1}{4} m_p L_p^2 \right) \times \\ &\quad - \left[-B_p \dot{\alpha} + \left(\frac{1}{4} m_p L_p^2 \sin \alpha \cos \alpha \right) \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m_p g L_p \sin \alpha \right] \left(-\frac{1}{2} m_p L_r L_p \cos \alpha \right) \end{aligned} \quad (2.17)$$

$$\begin{aligned} \det 2 = & \left[-B_p \dot{\alpha} + \left(\frac{1}{4} m_p L_p^2 \sin \alpha \cos \alpha \right) \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m_p g L_p \sin \alpha \right] \left(J_r + m_p L_p^2 + \frac{1}{4} m_p L_p^2 \sin^2 \alpha \right) \\ & - \left[\tau - B_r \dot{\theta} - \left(\frac{1}{2} m_p L_p^2 \sin \alpha \cos \alpha \right) \dot{\alpha} \dot{\theta} - \left(\frac{1}{2} m_p L_r \sin \alpha \right) \dot{\alpha}^2 \right] \left(-\frac{1}{2} m_p L_r L_p \cos \alpha \right) \end{aligned} \quad (2.18)$$

Alors

$$\begin{aligned} \ddot{\theta} = & \left[\tau - B_r \dot{\theta} - \left(\frac{1}{2} m_p L_p^2 \sin \alpha \cos \alpha \right) \dot{\alpha} \dot{\theta} - \left(\frac{1}{2} m_p L_r \sin \alpha \right) \dot{\alpha}^2 \right] \frac{(J_p + \frac{1}{4} m_p L_p^2)}{\det} \\ & - \left[-B_p \dot{\alpha} + \left(\frac{1}{4} m_p L_p^2 \sin \alpha \cos \alpha \right) \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m_p g L_p \sin \alpha \right] \frac{(-\frac{1}{2} m_p L_r L_p \cos \alpha)}{\det} \end{aligned} \quad (2.19)$$

$$\begin{aligned} \ddot{\alpha} = & \left[-B_p \dot{\alpha} + \left(\frac{1}{4} m_p L_p^2 \sin \alpha \cos \alpha \right) \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m_p g L_p \sin \alpha \right] \frac{(J_r + m_p L_p^2 + \frac{1}{4} m_p L_p^2 \sin^2 \alpha)}{\det} \\ & - \left[\tau - B_r \dot{\theta} - \left(\frac{1}{2} m_p L_p^2 \sin \alpha \cos \alpha \right) \dot{\alpha} \dot{\theta} - \left(\frac{1}{2} m_p L_r \sin \alpha \right) \dot{\alpha}^2 \right] \frac{(-\frac{1}{2} m_p L_r L_p \cos \alpha)}{\det} \end{aligned} \quad (2.20)$$

Le mouvement du système est assuré par un servomoteur, alors l'entrée est la tension délivrée au moteur. Pour expliciter l'application la tension dans notre système il est nécessaire d'avoir recours à la formule du couple moteur est donnée comme suit :

$$\tau = \frac{\eta_g \eta_m K_g K_t (V_m - K_g K_m \dot{\theta})}{R_m} \Rightarrow \tau = \frac{\eta_g \eta_m K_g K_t}{R_m} V_m - \frac{\eta_g \eta_m K_m K_t K_g^2}{R_m} \dot{\theta} \quad (2.21)$$

2.3 Représentation d'état

Généralement la présentation des systèmes dynamiques en automatique seffectue par une représentation dans l'espace détat, parce que la représentation d'état permet de connaître le comportement interne du système ainsi que son comportement externe. Cette dernière décrit le système entier à travers un ensemble de significations physiques, ces quantités sont appelées variables d'état. D'une manière générale, l'évolution d'un système linéaire dans l'espace détat est donnée :

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases} \quad (2.22)$$

Avec x est le vecteur détat, $u \in R^m$ est le vecteur dentrée et $y \in R^p$ est le vecteur de sortie. $A \in R^{nm}$: Matrice détat. $B \in R^{nm}$: Matrice dentrée. $C \in R^{np}$: Matrice de sortie. $D \in R^{nm}$: Matrice de transfert direct (ou couplage) entrée/sortie. Il est rare que la sortie du système soit directement reliée a son entrée. On a donc très souvent $D = 0$.

- La représentation d'état parfaitement adaptée à l'étude d'un système multi-variables.
- La représentation d'état permet d'accéder a la connaissance de variables internes.

Représentation d'état matricielle est représenté comme suit (fig 2.2) :

On choisit souvent comme variables d'états, des éléments du système susceptibles d'être des réservoirs d'énergie. Dans le cas du PIR le vecteur d'état est pris donc :

$$x = (x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4)^T = (\theta \ \alpha \ \dot{\theta} \ \dot{\alpha})^T$$

La représentation d'état est donnée par :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_3 \\ \dot{x}_2 = x_4 \\ \dot{x}_3 = f_1(x) + g_1(x)u \\ \dot{x}_4 = f_2(x) + g_2(x)u \end{cases} \quad (2.23)$$

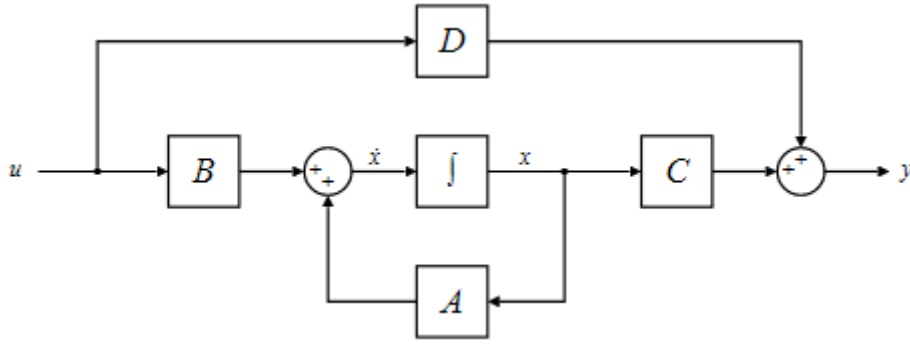


FIGURE 2.2 : Représentation d'état matricielle

Avec u est la commande appliquée au système donnée par :

$$u = \tau = \frac{\eta_g \eta_m K_g K_t (V_m - K_g K_m \dot{\theta})}{R_m} \Rightarrow \tau = \frac{\eta_g \eta_m K_g K_t}{R_m} V_m - \frac{\eta_g \eta_m K_m K_t K_g^2}{R_m} \dot{\theta}$$

et les fonctions $f_1(x)$, $f_2(x)$, $g_1(x)$ et $g_2(x)$ sont données comme suites :

$$f_1(x) = \left[-\frac{\eta_g \eta_m K_m K_t K_g^2}{R_m} x_3 - B_r x_3 - \left(\frac{1}{2} m_p L_p^2 \sin x_2 \cos x_2 \right) x_4 x_3 - \left(\frac{1}{2} m_p L_r \sin x_2 \right) x_4^2 \right] \frac{(J_p + \frac{1}{4} m_p L_p^2)}{\det} - \left[-B_p x_3 + \left(\frac{1}{4} m_p L_p^2 \sin x_2 \cos x_2 \right) x_3^2 + \frac{1}{2} m_p g L_p \sin x_2 \right] \frac{(\frac{1}{2} m_p L_r L_p \cos x_2)}{\det} \quad (2.24)$$

$$g_1(x) = \frac{(J_p + \frac{1}{4} m_p L_p^2)}{\det} * z$$

$$f_2(x) = \left[-B_p x_4 + \left(\frac{1}{4} m_p L_p^2 \sin x_2 \cos x_2 \right) x_3^2 + \frac{1}{2} m_p g L_p \sin x_2 \right] \frac{(J_r + m_p L_p^2 + \frac{1}{4} m_p L_p^2 \sin^2 x_2)}{\det} - \left[-\frac{\eta_g \eta_m K_m K_t K_g^2}{R_m} x_3 - B_r x_3 - \left(\frac{1}{2} m_p L_p^2 \sin x_2 \cos x_2 \right) x_4 x_3 - \left(\frac{1}{2} m_p L_r \sin x_2 \right) x_4^2 \right] \frac{(-\frac{1}{2} m_p L_r L_p \cos x_2)}{\det} \quad (2.25)$$

$$g_2(x) = \frac{(-\frac{1}{2} m_p L_r L_p \cos x_2)}{\det} * z$$

Avec :

$$\det = (J_r + m_p L_r^2) \left(J_p + \frac{1}{2} m_p L_p^2 \right) + \frac{1}{4} m_p L_p^2 \sin^2 x_2 \left(J_p + \frac{1}{4} m_p L_p^2 \right) + \frac{1}{4} (m_p L_p L_r \cos x_2)^2$$

2.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons traité la modélisation du pendule inversé rotatif. Dans la première partie, nous avons utilisé le formalisme de Lagrange pour trouver un modèle non linéaire sous forme d'équations différentielles et l'exprimer sous forme d'une représentation d'état.

Dans le chapitre suivant nous allons établir une loi de commande non linéaire à ce système.

CHAPITRE

3

LA COMMANDE PAR MODE GLISSANT

3.1 Introduction

Au cours des dernières années, la commande en mode glissant a connu un développement considérable . Ceci est principalement dû à la convergence rapide et temps d'erreur limité et robustesse élevée par rapport aux erreurs de modélisation et certains types d'interférences externes. Cependant, tous ces aspects positifs ne doivent pas masquer certains inconvénients. Le contrôle du mode glissant n'est pas continu, ce qui fait que toutes les fréquences doivent être contrôlées par le système[11]. Deuxièmement, dans la plupart des cas, l'algorithme de contrôle interfère directement avec l'actionneur.

En pratique, tous les processus physiques présentent des non linéarités, seulement si le contrôleur est basé sur un modèle linéarisé autour d'un point de fonctionnement, lorsque l'état du système s'écarte de ce point de fonctionnement normal, des dérives importantes ou même des instabilités peuvent être observées. En plus, la technique de linéarisations à prouvé son efficacité avec une large gamme de systèmes, il existe en revanche certains cas où l'utilisation de la technique de linéarisations ne peut pas atteindre les objectifs désirés. Afin de rendre les contrôleurs efficaces dans ces situations, il faut employer des lois de commandes qui tiennent compte du caractère non linéaire du processus. D'autre part, en saisissent la nature approximative des modèles représentant et les dynamiques des systèmes réels, les approches de commande doivent inclure des contraintes robustesse vis-à-vis où incertitudes du modèle.

Dans ce chapitre, Nous avons choisit de synthétiser un contrôleur par surface de glissement pour le système de pendule inversé rotatif, car il ne requiert pas que le système soit linéarisable. A causé de ces caractère non linéaire et le sous-actionnement de ce système, la commande utilisée doit accomplir deux taches : stabiliser la partie non actionnée en sa position d'équilibre instable, et la partie actionnée en une position finale désirée partant de conditions initiales proches ou lointaines du point d'équilibre. Réaliser ces deux objectifs par une seule commande constitue un défi sérieux, même avec les commandes non linéaires les plus établies. Dans ce chapitre, après une brève introduction à la commande par mode glissant, nous proposons de l'utiliser sous forme hiérarchique afin de stabiliser le pendule inversé rotatif.

La commande par mode glissant, qui appartient à une sorte de système de commande à structure variable, est une commande à rétroaction non linéaire dont la structure est intentionnellement modifiée pour obtenir les performances souhaitées. Parce que la commande en mode glissant est moins sensible aux variations des paramètres des systèmes. On peut envisager d'utiliser la commande en mode glissant, pour mettre en œuvre le contrôle des systèmes sous-actionnés. Cependant, la conception d'une surface commune en mode glissant pour les systèmes sous-actionnés n'est pas appropriée[24]. Les systèmes sous-actionnés comprenant généralement plusieurs sous-systèmes et les variables d'état n'ayant pas de relation différentielle évidente entre eux, les paramètres de la surface commun en mode glissant ne peu pas être obtenus directement en fonction de la condition de Hurwitz.

3.2 Pourquoi la commande non-linéaires ?

La commande non linéaire est un sujet d'actualité, avec une variété de méthodes puissantes et une longue histoire d'applications industrielles réussies, il est donc naturel de se demander pour quoi tant de chercheurs et de concepteurs, issus de domaines aussi vastes tel que le contrôle des avions et des vaisseaux spatiaux, la robotique, le contrôle des processus et le génie biomédical, ont récemment montre un intérêt actif pour le développement et l'application des méthodes de contrôle non linéaire. De nombreuses raisons peuvent être citées pour expliquer cet intérêt[24] :

* Amélioration des systèmes de contrôle existants :

Les méthodes de contrôle linéaire sont valides uniquement au voisinage du point de fonctionnement. Lorsque la plage de fonctionnement est grande, un régulateur linéaire est susceptible de fonctionner très mal ou d'être instable, car les non-linéarités du système ne peuvent pas être correctement compensées.

Par contre, Les contrôleurs non linéaires peuvent traiter directement les non-linéarités dans le cas d'un fonctionnement à grande échelle.

* **Analyse des non-linéarités dures "hard non linéarités" :**

Le contrôle linéaire exige que le modelé du système soit linéarisable. Cependant, il existe des non-linéarités qui ne permettent pas une approximation linéaire. Ces non-linéarités dites "dures" par exemple l'hystérésis, c'est pour cela que des techniques d'analyse non linéaires ont été développées pour assurer les performances du système en présence de ces non-linéarités. Étant donné qu'ils provoquent souvent des instabilités ou des cycles limites, leurs effets doivent être prévus et correctement compensés.

* **Faire face aux incertitudes des modelés :**

Les régulateurs linéaires nécessitent la connaissance des paramètres du modelé du système. Cependant, de nombreuses modélisations impliquent des incertitudes dans les paramètres du modelé. Cela peut être dû à une lente variation temporelle des paramètres, ou à un changement brusque des paramètres (par exemple, des paramètres inertiels d'un robot lorsqu'un nouvel objet est saisi). Un contrôleur linéaire basé sur des valeurs inexactes peut présenter une dégradation des performances, voire une instabilité. Deux classes de contrôleurs non linéaires sont prévues à cet effet : les contrôleurs robustes et les contrôleurs adaptatifs.

* **Simplicité de conception :**

Les bons modelés de contrôle non linéaire peuvent être plus simples et plus intuitifs que les contrôleurs linéaires. Ce résultat a priori paradoxal vient du fait que les conceptions de contrôleurs non linéaires sont souvent profondément ancrées dans la physique des systèmes.

Le sujet de la commande non linéaire est un domaine important en automatique. L'apprentissage des techniques de base de l'analyse et de la conception de la commande non linéaire peut améliorer la capacité d'un ingénieur en automatique à traiter efficacement les problèmes pratiques de commande. Il permet également de mieux comprendre le monde réel, qui est intrinsèquement et non linéaire. Les techniques du contrôle non linéaire ont bénéficié du progrès de la technologie informatique à savoir la puissance et vitesse des calculateurs.

3.3 La commande par mode glissant

3.3.1 Définition du mode glissant :

La commande de mode glissant est essentiellement une commande non linéaire, basée sur la commutation de fonctions des variables d'état, utilisé pour créer diverses surfaces ou hypersurfaces glissement, son but est de forcer la dynamique du système à correspondre à la dynamique définie de l'équation de l'hypersurface. Lorsque l'état reste sur l'hypersurface, le système dans un état glissant. de cette manière, ses caractéristiques dynamiques ne seront pas affectées par les interférences externes, et les paramètres peuvent être déterminés tant que les conditions de l'état glissant sont assurées.

Dans la pratique, l'utilisation de cette technologie de contrôle a longtemps fait l'objet de oscillations liées à la commutation de commandes appelées chattering, et peuvent se produire dans la quantité contrôlée. Il existe différentes manières de réduire ce phénomène, dont l'une est de remplacer Symbole de fonction pour une approximation continue près de la surface de glissement (Fonction saturation ou Sigmoide).

1. Synthétiser une surface $S(x, t)$, telle que toutes les trajectoires du système obéissent à un comportement désiré de poursuite, de régulation et de stabilité.
2. Déterminer une loi de commande (commutation) $U(x, t)$ qui est capable d'attirer toutes les trajectoires d'état vers la surface de glissement et les maintenir sur cette surface.

3.3.2 Historique :

Une attention considérable a été concentrée ces deux dernières décennies sur la commande des systèmes non linéaires à dynamique incertaine et souvent sujet aux perturbations et aux variations paramétriques. La théorie des systèmes à structure variable et les modes glissants associés a fait l'objet d'études détaillées au cours des quarante dernières années. Des contrôleurs à structure variable ont fait leur application dans la littérature soviétique (Emelyanov 1967, Utkin 1974), et ont été largement identifiés comme une approche potentielle à ce problème. Des recherches sur la commande à structure variable ont été menées par Decarlo et Hung, l'action de commande force la trajectoire de système à intercepter l'espace d'état intitulé surface de glissement [7]. Les trajectoires du système sont alors confondues avec la surface de glissement durant l'utilisation des commandes à une grande vitesse de commutation. L'avantage saillant de la commande à structure variable avec le mode glissant, est la robustesse contre les changements de paramètres ou les différents types de perturbations.

3.4 Principe de la commande par mode glissant

La commande par mode glissant consiste à concevoir de la loi de commande qui puisse guider le vecteur d'état $X(t)$ d'un système donné vers une hypersurface $S(x)=0$, communément appelé surface de glissement ou de commutation. Une fois ce sous-espace d'état atteint, le vecteur d'état possédera alors une dynamique stable qui dépendra directement du choix de la surface de glissement, et qui fera en sorte que le vecteur d'état glisse sur l'hypersurface jusqu'à atteindre le point d'équilibre.

L'avantage d'obtenir un tel comportement est double, d'un côté, on a une réduction de l'ordre du système, et d'autre part, le régime glissant est insensible aux perturbations intervenant dans les mêmes équations que les entrées. La figure (3.1) schématise ce processus dans le plan de phase, c'est-à-dire dans le cas où le système est d'ordre deux [5]. Ainsi nous pouvons constater que la commande par mode glissant est divisée en deux étapes : dans la première phase, le vecteur d'état doit atteindre la surface de glissement. Dans la deuxième phase, et après avoir atteint la surface de glissement, le vecteur d'état doit glisser sur cette surface jusqu'à atteindre le point d'équilibre, nous parlons alors de mode glissement. Donc la conception de la commande par mode de glissant est divisée en deux parties distinctes :

1. Premièrement, il faut choisir adéquatement la surface de glissement pour y assurer la convergence du vecteur d'état vers le point d'équilibre.
2. Deuxièmement, il faut concevoir la loi de commande de telle manière que le vecteur d'état puisse atteindre la surface de glissement et y glisser.

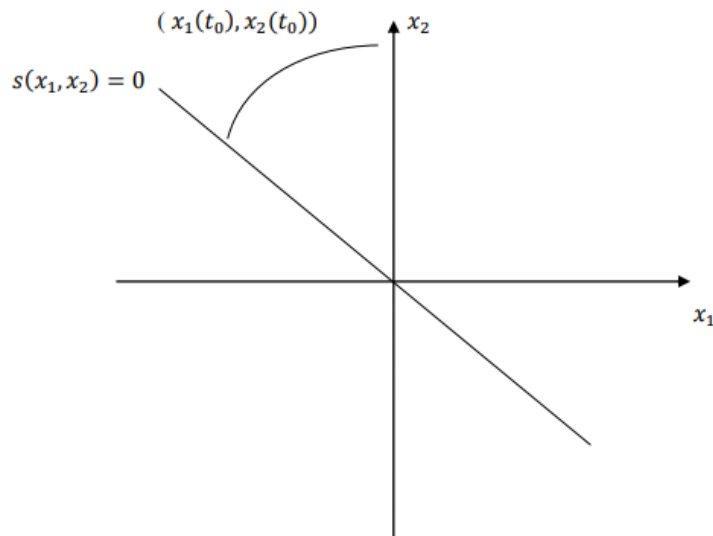


FIGURE 3.1 : Schématisation du mode de glissement dans le plan de phase [5]

3.5 Théorie de la commande par mode glissant

La théorie des systèmes à structure variable (sliding mode), est une technique de commande non linéaire, elle est caractérisée par la discontinuité de la commande aux passages par une surface de commutation appelée surface de glissement[15]. La technique des modes glissants consiste à amener la trajectoire d'état d'un système vers la surface de glissement et de la faire commuter à l'aide d'une commutation appropriée autour de celle-ci jusqu'au point d'équilibre. En résumé, une commande par régime glissant est divisée en deux parties :

1. Détermination l'espace d'état telle qu'une fois que le système se trouve dans cette région, il ait le comportement désiré
2. Définition d'une loi de commande qui conduit le système jusqu'à cette région de l'espace d'état.

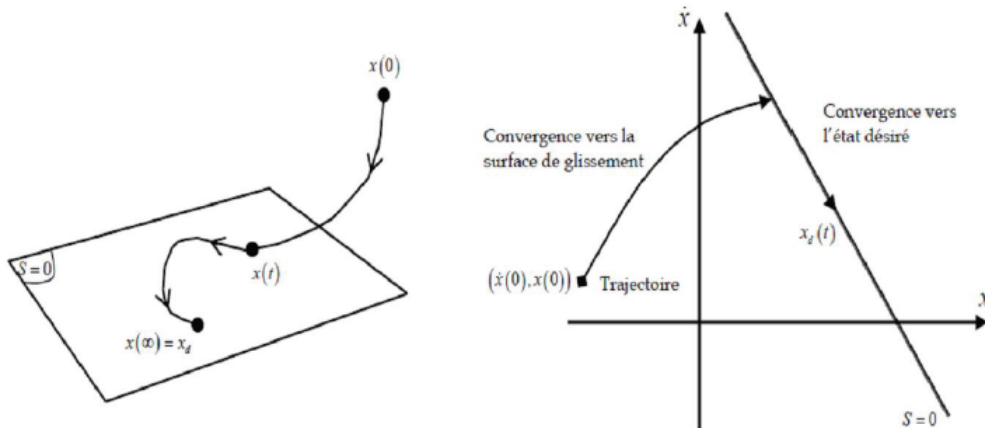


FIGURE 3.2 : Convergence du système glissant[25].

3.6 Régime glissant idéal

En théorie, l'organe de commutation est supposé insensible aux bruits, et la trajectoire en régime glissant décrit parfaitement l'équation $S(x) = 0$. Le régime glissant idéal à une oscillation de fréquence infinie et d'amplitude nulle, le point représentatif de l'évolution du système glisse parfaitement sur l'hypersurface de commutation S , comme montré sur la figure(3.3) :

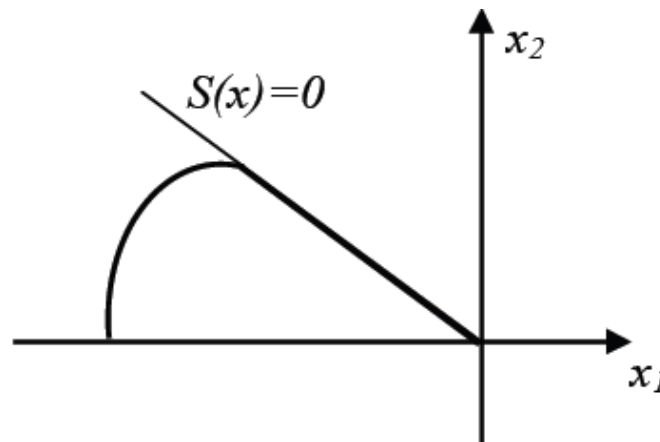


FIGURE 3.3 : Glissement idéal[5].

3.7 Régime glissant réel

En pratique l'organe de commutation est réalisé à partir de relais qui présente des imperfections comme les retards de commutations, dans ce cas, la trajectoire de phase du régime glissant reste au voisinage de la surface de commutation donnant naissance à des oscillations indésirables qui éliminent la précision du système et néanmoins sa stabilité, comme il est illustré dans la figure (3.4) :

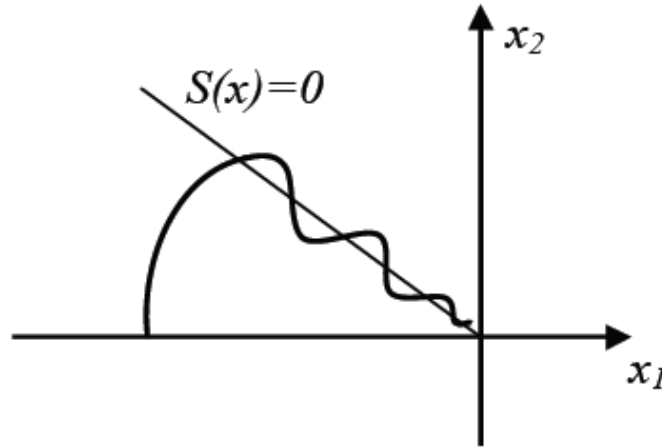


FIGURE 3.4 : Glissement réel[5]

3.8 Types de commutation des systèmes à structure variable :

Dans les systèmes à structure variable utilisant la commande par mode glissant, on peut trouver trois configurations de base pour la synthèse des différentes lois de commandes. La première correspond à la structure la plus simple, appelée structure par commutation au niveau de l'organe de commande. La deuxième structure fait intervenir la commutation au niveau d'une contre-réaction d'état. Et enfin, la dernière structure est une structure par commutation au niveau de l'organe de commande avec ajout de la commande équivalent.

3.8.1 Structure par commutation au niveau de l'organe de commande

Le schéma d'une structure par commutation au niveau de l'organe de commande est donné par la figure (3.5). Cette structure de commande est la plus classique et la plus utilisée. Elle correspond au fonctionnement tout ou rien des interrupteurs de puissance associés dans une grande majorité d'applications aux variateurs de vitesse[26]. Elle a été utilisée pour la commande des moteurs pas à pas.

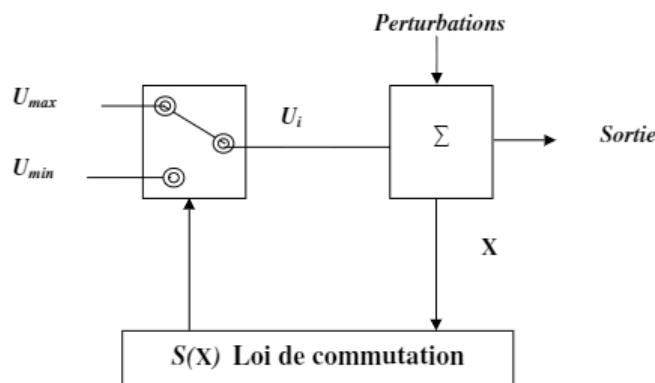


FIGURE 3.5 : Structure de régulation par commutation au niveau de l'organe de commande

3.8.2 Structure par commutation au niveau d'une contre réaction d'état

Le schéma d'une telle structure est représenté sur la figure (3.6), c'est la structure la moins exigeante au niveau de la sollicitation de la commande. Elle s'appuie sur la commande par contre réaction d'état classique où le réglage de la dynamique du système est réalisé par les gains de réglage. La non linéarité provient de la commutation entre les gains[26], donc on crée une commutation au niveau de la dynamique du système.

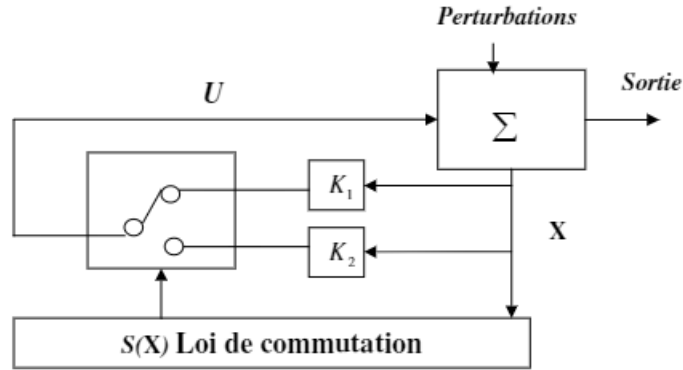


FIGURE 3.6 : Structure de régulation par commutation au niveau de la contre-réaction d'état.

3.8.3 Structure commutation au niveau de l'organe de commande avec commande équivalente.

Une telle structure dont le principe est montré sur la figure(3.7) présente un avantage réel. Elle permet de pré-positionner l'état futur du système grâce à la commande équivalente qui n'est rien d'autre que la valeur désirée du système en régime permanent[28]. L'organe de commande est beaucoup moins sollicité, mais on est plus dépendant des variations paramétriques du fait de l'expression de cette commande équivalente.

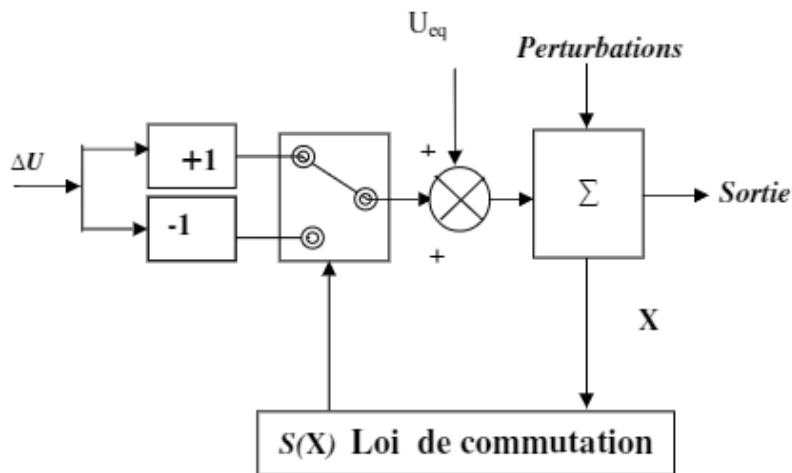


FIGURE 3.7 : Structure de régulation par ajout de la commande équivalente.

Nous avons choisi de baser notre étude sur ce type de configuration, une telle structure de par sa constitution est très simple et permet de moins solliciter la commande. Il semble en effet naturel d'ajouter la commande équivalente pour pré-positionner le système dans un état désiré permanent et stable et de jouer ensuite sur le terme de commutation pour assurer la convergence vers cet état et pour y rester ensuite.

3.9 Explication du phénomène du glissement

Le mode de glissement existe lorsque les commutations ont lieu continûment entre U_{max} et U_{min} . Ce phénomène est démontré à l'aide de la figure (3.8) pour un système à régler du deuxième ordre avec les deux grandeurs d'état X_{s1} et X_{s2} .

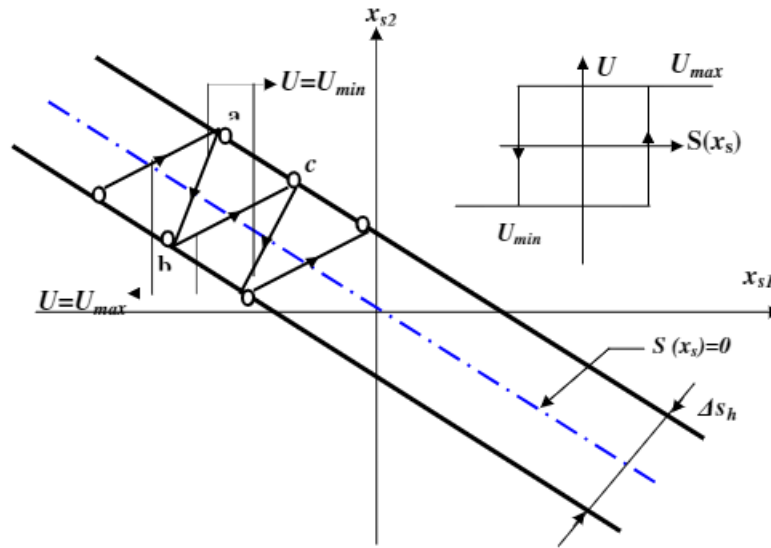


FIGURE 3.8 : Démonstration du mode de glissement.

3.10 Conception de l'algorithme de commande par mode de glissement

La conception de la commande par mode de glissant prend en compte les problèmes de stabilité et de bonnes performances de façon systématique dans son approche. Qui s'effectue principalement en trois étapes complémentaires définies par :

- Choix des surfaces de glissement.
- Définition des conditions d'existence et de convergence du régime glissant.
- Détermination de la loi de commande. La technique de mode glissant consiste à amener la trajectoire d'état d'un système vers une surface de glissement et de la faire commuter à l'aide d'une logique de commutation appropriée autour de celle-ci jusqu'au point d'équilibre.

3.11 Théorie de Lyapunov

La théorie de base de Lyapunov comprend deux méthodes introduites par Lyapunov, la méthode indirecte et la méthode directe.

- La méthode indirecte, ou méthode de linéarisations, affirme que les propriétés de stabilité d'un système non linéaire au voisinage immédiat d'un point d'équilibre sont essentiellement les mêmes que celles de son approximation linéarisée. La méthode fournit une justification théorique à l'utilisation du contrôle linéaire pour les systèmes physiques, qui sont toujours intrinsèquement non linéaires.
- La méthode directe est un outil puissant pour l'analyse des systèmes non linéaires, et c'est pourquoi l'analyse dite de Lyapunov fait souvent référence à la méthode directe. La méthode directe est une généralisation des concepts énergétiques associés à un système mécanique : le mouvement d'un système mécanique est stable si son énergie mécanique totale diminue continuellement. En d'autres termes, le système est stable, si son énergie diminue et s'il est à l'équilibre minimum[23].

En utilisant la méthode directe pour analyser la stabilité d'un système non linéaire, l'idée est de construire une fonction énergétique scalaire (une fonction de Lyapunov) pour le système, et de voir si elle diminue. La puissance de cette méthode vient de sa généralité : elle est applicable à tous les types de systèmes de contrôle, qu'ils soient variables ou non dans le temps, de dimension finie ou à dimension infinie. Inversement, la limite de la méthode réside dans le fait qu'il est souvent difficile de trouver une fonction de Lyapunov pour un système.

3.12 Stabilité au sens de Lyapunov

Bien que la méthode directe de Lyapunov soit à l'origine une méthode d'analyse de stabilité, elle peut être utilisée pour d'autres problèmes de contrôle non linéaire. Une application importante est la conception de contrôleurs non linéaires.

L'idée est de formuler d'une manière ou d'une autre une fonction scalaire positive des états du système, puis de choisir une loi de contrôle pour faire diminuer cette fonction [13]. Un système de contrôle non-linéaire ainsi conçu sera garanti d'être stable. Une telle approche de conception a été utilisée pour résoudre de nombreux problèmes de conception complexes, par exemple en robotique et en contrôle adaptatif. La méthode directe peut également être utilisée pour estimer la performance d'un système de contrôle et étudier sa robustesse.

Théorème 3.12.1

soit $x^* = 0$ un point d'équilibre et $D \in \mathbb{R}$ contenant $x^* = 0$ s'il existe une fonction V de classe C^1 telle que :

$$V(0) = 0 \text{ et } V(x) > 0 \text{ dans } D \setminus \{0\}$$

$$\dot{V}(x) \leq 0 \text{ dans } D$$

De plus, si

$$\dot{V}(x) < 0 \text{ dans } D \setminus \{0\}$$

alors $x^* = 0$ est asymptotiquement stable [6].

3.13 Fonction de Lyapunov (conditions de convergence)

C'est une fonction scalaire positive utilisée pour garantir la stabilité des systèmes.

Nous devons choisir la loi de commutation qui fera d'croître cette fonction.

Nous prenons la fonction de Lyapunov comme suite :

$$V(x) = \frac{1}{2} S^2(x)$$

Sa dérivée devient :

$$\dot{V}(x) = S(x)\dot{S}(x)$$

Pour que V décroisse il suffit d'assurer que sa dérivée est négative, ceci dit : $S(x)\dot{S}(x) < 0$ Cette équation montre que le carré de la distance vers la surface [20], mesuré par $S^2(x)$, diminue tout le temps, contraignant la trajectoire du système à se diriger vers la surface des deux cotés. Cette condition suppose un régime glissant idéal [25].

3.14 Phénomène du CHATTERING (réticence)

En pratique, la commande discontinue peut exciter les dynamiques de hautes fréquences non modélisées, entraînant l'apparition de ce qu'on appelle la réticence ou broutement connu en anglais sous le nom de Chattering et se caractérise par de fortes oscillations autour de la surface.

Ce phénomène de réticence apparaît car la commutation de la commande ne se fait pas à

une fréquence infinie a cause des imperfections physiques (les retards, limitation physique) des actionneurs etc.

Ce phénomène expliqué dans la figure (3.9) Pendant les premières années de son apparition, la commande par modes glissants a été entravée par ce phénomène qui peut provoquer une détérioration anticipée de l'organe de commande[24], augmenter la consommation de l'énergie et voire engendrer l'instabilité du système en excitant les dynamiques hautes fréquences non considérées dans la modélisation.

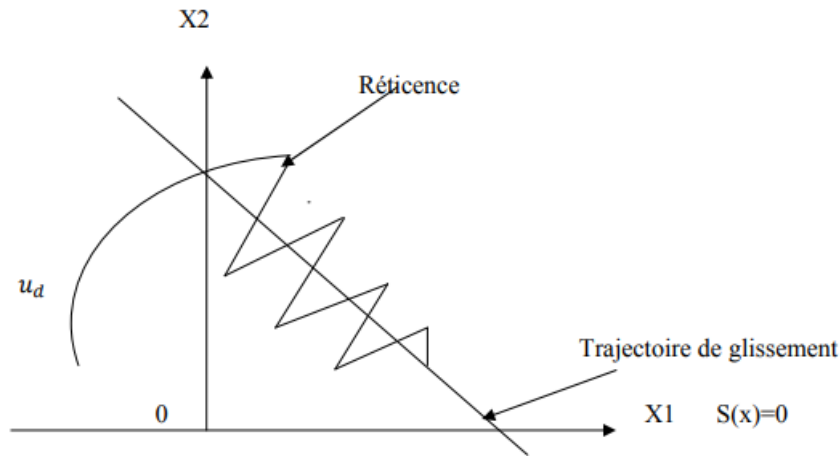


FIGURE 3.9 : phénomène de réticence

Au début du développement de la commande par mode glissant le chattering était le principal obstacle à la mise en œuvre du contrôle. Le chattering est un phénomène nocif car il conduit à une faible précision de contrôle, usure des pièces mécaniques en mouvement et chaleur élevée, donc pertes dans les circuits de puissance.

Il peut être causé par des dynamiques rapides du système qui ont été négligées lors de la modélisation. La deuxième raison qui provoque ce phénomène est l'utilisation de contrôleurs numériques.

3.15 Élimination du phénomène de chattering

Plusieurs solutions ont été proposées pour réduire et éliminer ce phénomène, comme la solution de couche limite, mode glissant flou, mode glissant d'ordre supérieur, etc... [10]

La façon la plus simple pour exprimer la commande discontinue est l'utilisation de la fonction signe :

- Fonction signe :

$$sign(s) = \begin{cases} +1 & \text{si } s > 0 \\ -1 & \text{si } s < 0 \\ 0 & \text{si } s = 0 \end{cases}$$

Avec K est un gain positif.

La fonction Sign (voir la figure (3.10)) :

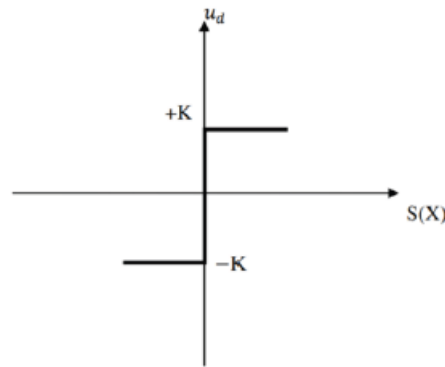


FIGURE 3.10 : La fonction Sign
:

La fonction signe peut être remplacée par plusieurs fonctions comme la commande adoucie, la commande intégrale, la commande SAT... Etc.

1. Commande SAT :

La commande avec la fonction "SAT" (saturation) est l'une des plus utilisées

$$Sat(s) = \begin{cases} 1 & si \quad s > \mu \\ -1 & si \quad s < -\mu \\ \frac{s}{\mu} & si \quad |s| < \mu \end{cases}$$

Graphiquement, la fonction "SAT" est donnée dans la figure(3.11) :

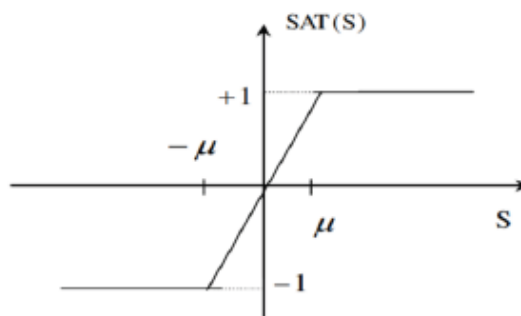


FIGURE 3.11 : La fonction Sat

2. La fonction SMOOTH :

On peut aussi remplacer la fonction "signe" par la fonction "SMOOTH" . On donne ci-dessous un exemple de ce type de fonction la figure(3.12)

$$Smooth(S) = \frac{S}{|S| + \mu}$$

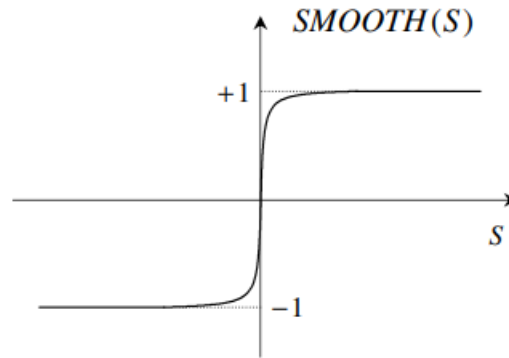


FIGURE 3.12 : La fonction SMOOTH

3. La fonction arctan :

$$y = \arctan(x) = \tan(y) = x \text{ et } \frac{-\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$$

La fonction "arctan" présentée dans la figure (3.13) est définie comme suite :

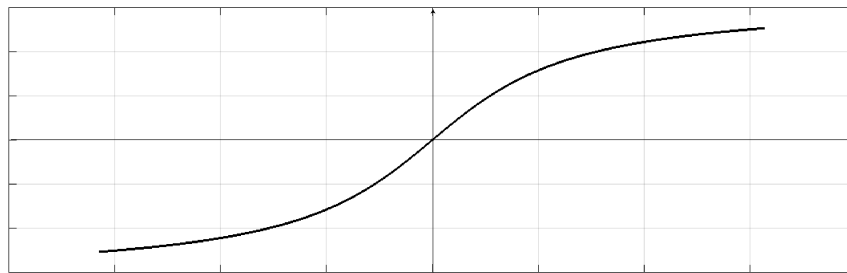


FIGURE 3.13 : La fonction Arctang

3.16 Choix de surface de glissement

La surface de glissement est déterminée sur la base du système et des performances désirées, pour un système non linéaire :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) + g(x)U \\ y = h(x) \end{cases}$$

La forme de l'équation générale pour la surface de glissement[27], proposée par

$$s(x) = \left[\frac{\partial}{\partial t} + \lambda_x \right]^{r-1} e(x)$$

Avec

1. $e(x) = x_{ref} - x$: écart de la variable à régler.
2. r : degré relatif associé au système.
3. λ_x : Constante positive qui interprète la bande passante du contrôle désiré[4].

3.17 Définition des grandeurs de commande :

Comme il a été vu précédemment, la surface de glissement se détermine en fonction du système et des performances désirées, indépendamment de la commande, et l'obtention du régime glissant supposerait la commande discontinue. De ce fait, si cette commande est indispensable, elle n'empêche nullement, au contraire, qu'une partie continue lui soit adjointe pour diminuer l'amplitude de la discontinuité. Par conséquent, la structure d'un contrôleur comporte deux parties, une première concernant la linéarisation exacte et une deuxième stabilisante. Cette dernière est très importante dans la technique de commande par modes de glissement, car elle est utilisée pour rejeter les perturbations extérieures. Nous posons donc :

$$U = U_{eq} + U_d$$

$U_{eq}(t)$ Correspond à la commande équivalente proposée par Filippov et Utkin[26]. Cette commande est considérée comme la plus directe et la plus simple. Elle est calculée en reconnaissant que le comportement du système durant le mode de glissement

$U_d(t)$: est un terme introduit pour satisfaire la condition de convergence suivant :

$S(x) \dot{S}(x) < 0$, Il détermine ainsi le comportement dynamique du système durant le mode de convergence. Donc cette commande est garanti l'attractivité de la variable à contrôler vers la surface de glissement. Le terme u_d est donné par :

$$U_d = -K \cdot \sin g(s(x))$$

3.18 Avantages de la commande par mode glissant :

Cette commande présente les caractéristiques suivantes :

- La réponse du système est insensible et robuste aux variations de certains paramètres et aux effets troubles de la charge, et perturbations ;
- Il suffit de connaître une borne pour U, ce qui simplifie le réglage ;
- Le choix de la surface de commutation est assez libre.
- La commande est adoucie par la présence de la commande équivalente, celle-ci peut être supprimée au prix d'une augmentation de U.

3.19 Commandabilité du système non-linéaire

Pour cette partie, nous allons calculer la commandabilité du système non-linéaire pendule inversé rotatif et qui peut se mettre sous la forme affine en la commande :

$$\dot{x} = f(x) + g(x) \tag{3.1}$$

La commandabilité d'un système non-linéaire peut être vérifiée en calculant le rang de la matrice C donnée par :

$$C_{fg} = \begin{bmatrix} g(x) & ad_f g(x) & \dots & ad_f^{n-1} g(x) \end{bmatrix}$$

Avec : n la dimension du système. $ad_f g$ est le crochet de Lie des champs de vecteurs f(x) et g(x) défini par :

$$[f, g](x) = ad_f g(x) = \frac{\partial g}{\partial x} f(x) - \frac{\partial f}{\partial x} g(x)$$

où $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial g}{\partial x}$ sont respectivement les jacobienne de f et g. Après calcul nous trouvons que Rang(C) = 4, donc les colonnes de C sont linéairement indépendantes, ce qui implique que notre système est commandable.

3.20 Application de la commande par mode glissant

La commande par mode glissant comprend deux étapes :

1. Définir la surface de glissement
2. Synthétiser la loi de commande qui permet aux trajectoires de la boucle fermée de se rapprocher de la surface de glissement définie auparavant.

Nous allons dans cette partie synthétiser une loi de commande par mode glissant établie par le modèle non linéaire : Pour cela nous choisissons surface de glissement définie dans l'espace d'état par :

$$\begin{aligned} S_1 &= \dot{e}_1 + \lambda_1 e_1 \\ S_2 &= \dot{e}_2 + \lambda_2 e_2 \end{aligned} \quad (3.2)$$

ou e est l'erreur $e = x - x_d$; $x_d = [0 \quad x_2^* \quad 0 \quad x_4^*]$

Donc les surfaces deviennent :

$$\begin{aligned} S_1 &= \dot{x}_1 + \lambda_1 x_1 \\ S_2 &= \dot{x}_2 + \lambda_2 x_2 \end{aligned} \quad (3.3)$$

λ_1 et λ_2 sont des gains strictement positifs, pour forcé la surface de glissement au zero.

Notre système peut être vu comme une combinaison de deux systèmes de forme canonique :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_3 \\ \dot{x}_2 = x_4 \\ \dot{x}_3 = f_1(x) + g_1(x)u \\ \dot{x}_4 = f_2(x) + g_2(x)u \end{cases} \quad (3.4)$$

Nous allons combiner entre les deux surfaces par une surface générale de système de la forme suivante[27] :

$$S = S_1 + \lambda_2 S_2 \quad (3.5)$$

λ_3 est un gain positive qui a un effet sur la commande de pendule. Pour assurer la stabilité on va considérer la fonction de Lyapunov suivante :

$$V(x) = \frac{1}{2} S^2(x)$$

sa dérive soit comme suite :

$$\dot{V}(x) = S(x)\dot{S}(x)$$

pour que notre système soit stable, il faut que :

$$S(x)\dot{S}(x) < 0$$

$$\dot{V}(x) = S(x)\dot{S}(x)$$

$$\begin{aligned} S(x)\dot{S}(x) &= (S_1 + \lambda_3 S_2) (\dot{S}_1 + \lambda_3 \dot{S}_2) \\ &= (x_2 + \lambda_1 x_1 + \lambda_3 (x_4 + \lambda_2 x_3)) (\dot{x}_2 + \lambda_1 x_2 + \lambda_3 (\dot{x}_4 + \lambda_2 x_4)) \\ &= (x_2 + \lambda_1 x_1 + \lambda_3 (x_4 + \lambda_2 x_3)) (f_1 + g_1 u + \lambda_1 x_3 + \lambda_3 (f_2 + g_2 u + \lambda_2 x_4)) \end{aligned} \quad (3.6)$$

donc la commande U_{eq} est donné par :

$$U_{eq} = (g_1 \text{sign}(S_1) + \lambda_3 g_2 \text{sign}(S_2))^{-1} (-(f_1 + \lambda_1 x_2) \text{sign}(S_1) - \lambda_3 (f_2 + \lambda_2 x_4) \text{sign}(S_2))$$

finalement la commande U doit s'écrire :

$$U = U_{eq} + U_d$$

$$U_d = -K \text{sign}(S)$$

Avec K un paramètre suffisamment grand de sorte à ce que la commande soit suffisamment robuste pour ne pas être perturbée par ce qui n'est pas connu dans le modèle du pendule.

Lorsque le système est en régime de glissement, les discontinuités de la commande peuvent entraîner un phénomène de broutement, également appelé "chattering" en anglais, qui se traduit par de fortes oscillations du système autour de la surface de glissement. Pour atténuer ce phénomène, nous avons utilisé une approximation de la fonction "sign" au voisinage de zéro, qui est la fonction "saturation"[16], la commande U_d devient donc :

$$U_d = -K \text{sat}_{\Phi}(S) = \begin{cases} \frac{S}{\Phi} & \text{si } \left| \frac{s}{\phi} \right| \leq 1 \\ \text{sign}(S) & \text{si } \left| \frac{s}{\phi} \right| > 1 \end{cases}$$

La commande U de mode glissant est composée de deux commandes U_{eq} et U_d , la première commande est calculée de telle sorte à ramener le système de point initial quelconque x_0 vers la surface $S = 0$ c-a-d pour que l'état de système atteigne l'état désiré alors l'erreur sera nul $e = x - x_d = 0$. Et la deuxième commande est une commande discontinue, son rôle c'est de maintenir le système sur la surface $S=0$.

Finalement l'expression générale de la commande par mode glissant est :

la commande U_d devient donc :

$$U = (g_1 \text{sign}(S_1) + \lambda_3 g_2 \text{sign}(S_2)^{-1})((f_1 + \lambda_1 x_2) \text{sign}(S_1) - \lambda_3 (f_2 + \lambda_2 x_4) \text{sign}(S_2)) - K \text{sat} \left(\frac{s}{\Phi} \right)$$

Remarque 3.20.1

Nous avons utilisé la fonction signe dans la conception de la commande. Nous remarquons que la discontinuité de la fonction signe provoque le phénomène de chattering, et donc pour le réduire on va remplacer la fonction sign par une fonction plus lisse qui est l'arc-tangente. pour une meilleure atténuation du phénomène de chattering.

alors la commande U_{eq} devient :

$$U = (g_1 \text{sign}(S_1) + \lambda_3 g_2 \text{sign}(S_2)^{-1})(-(f_1 + \lambda_1 x_2) \text{sign}(S_1) - \lambda_3 (f_2 + \lambda_2 x_4) \text{sign}(S_2)) - K \arctan(s)$$

la fonction arctan force la surface de glissement vers une zone autour de zéro,

3.20.1 Paramètres de simulation :

| Paramètre | Valeur |
|-------------|--------|
| α | 0.3 |
| λ_1 | 0.2 |
| Φ | 0.5 |
| λ_2 | 0.7 |
| λ_3 | 3 |

TABLE 3.1 : Valeurs du contrôleur utilisé

3.21 Résultats de simulation de la commande par mode glissant sous Matlab :

Le résultat de simulation d'une réponse du système en utilisant la commande par mode glissant pour la stabilisation du pendule est donné par la figure (3.14) :

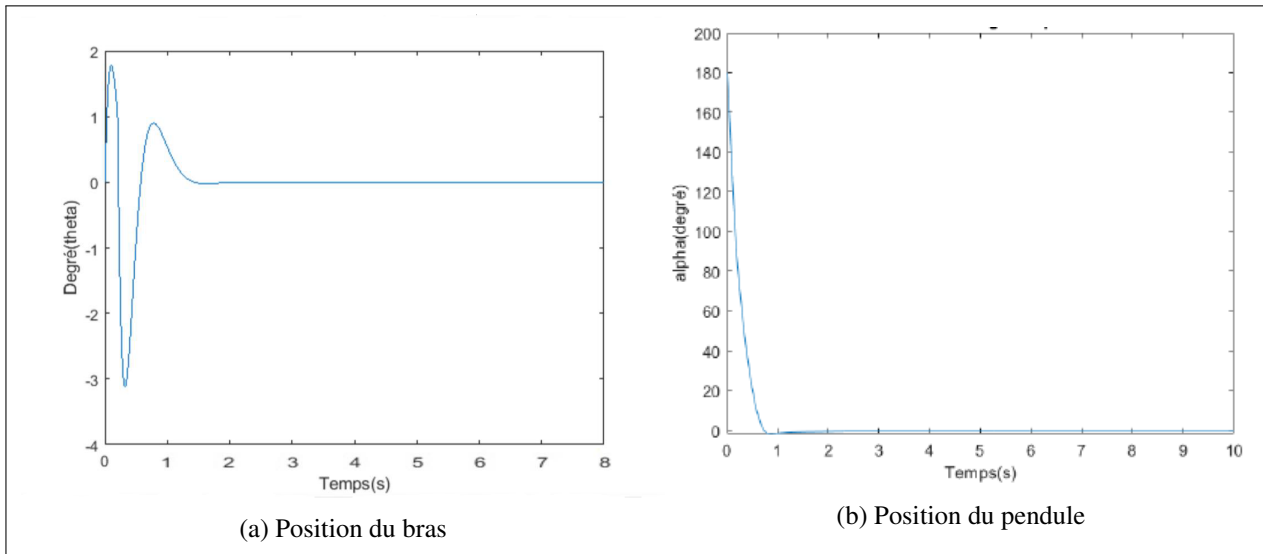


FIGURE 3.14 : Évolution de l'angle de bras et de pendule par la commande mode glissant

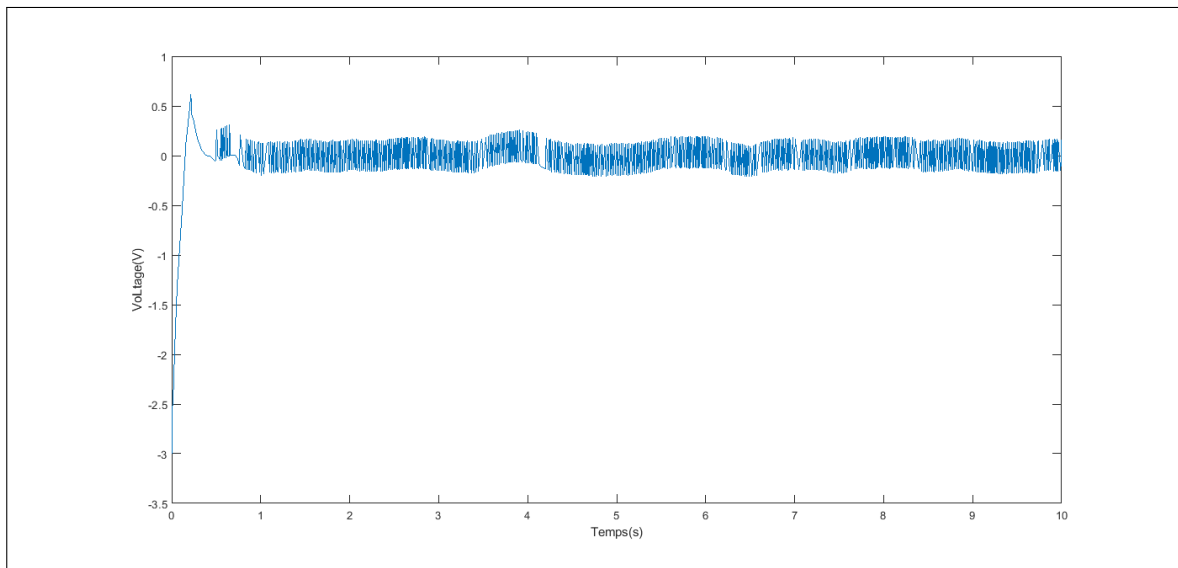


FIGURE 3.15 : Évolution de la tension délivrée au système avec commande mode glissant

En utilisant le logiciel MATLAB, nous avons obtenue les résultats de la simulation comme dans les figures (3.14a), (3.14b), et (3.15). La tension appliquée au système est dans la plage applicable(c-à-d ne dépassent pas les 24v). Le pendule inversé atteinse sa la position voulu qui est supposée être au sommet en un temps très court. Nous remarquons que malgré un changement de paramètres assez important, la commande arrive à faire converger le pendule vers la zone de linéarité très rapidement. Ce qui démontre la robustesse paramétrique du mode glissant.

3.22 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté une loi de commande non linéaire pour le contrôle du pendule rotatif inversé, qui est le mode glissant. Son approche consiste à trouver une surface de glissement vers laquelle doit converger le système, Le but de cette commande est d'amener le pendule dans sa position d'équilibre instable et le stabiliser. Cette commande à prouvé sont efficacité en terme de rapidité, robustesse et précision, avec des résultats très satisfaisant.

CHAPITRE

4

**COMMANDE SWING UP : ÉTUDE
EXPRÉMENTALE**

4.1 Introduction

Ce chapitre est consacré à la synthèse d'une commande non linéaire dite "swing up" composée de deux commandes. La première est une commande non linéaire obtenue en utilisant un contrôle d'énergie qui est basé sur le principe de balancer le pendule vert la zone de linéarité et la deuxième est une commande linéaire par retour d'état pour stabiliser le pendule dans la zone de linéarité. Nous allons appliquer la commande proposée en temps réel sur la maquette du PIR de type Quanser QUBE-Servo 2.

4.2 Commande Swinge Up par contrôle d'énergie

Le Swing up est une commande basée sur le contrôle d'énergie. Le principe de cette approche est d'utiliser l'énergie total du système afin de générer un mouvement de balancement de telle sorte que le pendule puisse entrer dans la zone de linéarité et commuter en suite vers une autres commande linéaire stabilisante (retour d'état par exemple)

L'équation du mouvement pour le pendule peut être redéfinie par :

$$J_2\ddot{\alpha} - m_2gl_2\sin(\alpha) + m_2l_2u\cos(\alpha) = 0 \quad (4.1)$$

Où u est l'accélération du bras où de la base du pendule. Ce modèle est obtenu en admettant les hypothèses suivantes :

- Pas de frottements.
- Le pendule est un corps rigide.
- Pas de limitation sur l'accélération du bras.

L'énergie totale du pendule est :

$$E = \frac{1}{2}J_2\dot{\alpha}^2 + m_2gl_2(\cos(\alpha) - 1) \quad (4.2)$$

Elle est définie pour être nulle quand le pendule est dans la position verticale haute. Le modèle obtenu dans l'équation (4.2) à quatre paramètres : le moment de l'inertie J , la masse m , la longueur l , et l'accélération de la gravité g . Introduisons l'accélération maximum du bras :

$$\max|u| = u_{max} = ng = \alpha$$

Avec $n = \frac{u_{max}}{g}$: l'accélération maximale normalisée.

Une façon de balancer le pendule à la position haute est de lui donner une énergie qui correspond à la position verticale.

$$E = \frac{1}{2}J_2\dot{\alpha}^2 + m_2gl_2(\cos(\alpha) - 1) = 0 \quad (4.3)$$

Lorsque le pendule entre dans la zone de linéarité autour de l'équilibre instable, une stratégie différente est employée pour attraper le pendule. Une telle méthode peut être employée même s'il y a une erreur dans le contrôle de l'énergie de sorte que l'énergie ne soit pas suffisante pour traverser l'équilibre désiré.

Pour effectuer le contrôle d'énergie il est nécessaire de comprendre comment l'énergie est influencée par l'accélération du bras[8].

Le calcul de la dérivée de E par rapport au temps nous donne :

$$\frac{dE}{dt} = \dot{E} = \dot{\alpha}(J_2\dot{\alpha} - m_2gl_2\sin\alpha) \quad (4.4)$$

$$\sin\alpha = \frac{-1}{m_2gl_2}(-J_2\dot{\alpha} - m_2l_2u\cos(\alpha)) \Rightarrow \dot{E} = -m_2l_2u\dot{\alpha}\cos(\alpha) \quad (4.5)$$

Le régulateur calcule donc l'énergie du pendule en tout temps et la compare à l'énergie désirée. Si l'énergie est suffisante, il ne fait rien, sinon il l'augmente.

C'est à dire lorsque le pendule balance vers le bas, le bras ne doit pas bouger pour ne pas le freiner, une fois qu'il dépasse la position de l'équilibre stable le bras doit le booster vers le haut.

Le signe de u sera le même que celui du couple. Donc pour augmenter l'énergie du système, il faut que l'accélération de pivot u soit positive quand la valeur de $\alpha \cos(\alpha)$ est négative[18], et donc toujours $(\frac{dE}{dt}) > 0$.

Une stratégie de commande est facilement obtenue par la méthode de Lyapunov[21]. On prend l'équation de Lyapunov suivante :

$$V = \frac{1}{2}(E - E_0)^2 \quad (4.6)$$

où E_0 est l'énergie désirée et elle est égale à $E_0 = 2m_2gl_2$.

On à $V > 0$, est il faut que $\dot{V} < 0$ pour que E converge vers E_0 , donc pour ce là :

$$\dot{V} = (E - E_0)\dot{E} \quad (4.7)$$

$$\Rightarrow \dot{V} = -(E - E_0)(m_2l_2u\dot{\alpha} \cos \alpha) \quad (4.8)$$

Donc on pose :

$$u = H(E - E_0)\dot{\alpha} \cos \alpha \quad (4.9)$$

H : gain pour assurer la rapidité de la commande.

On trouve la dérivée de fonction de lyapunov en remplaçant aussi la dérivée d'énergie et la commande u :

$$\frac{dV}{dt} = (E - E_0)\dot{E} = -m_2l_2H((E - E_0)\dot{\alpha} \cos \alpha)^2 \quad (4.10)$$

La fonction de Lyapunov diminue quand $\alpha \neq 0$ et $\cos(\alpha) \neq 0$. Pour éviter que l'énergie soit nulle lorsque $\alpha = \pm \frac{\pi}{2}$, et pour que l'énergie soit changée le plus vite possible il faut que la commande u ait une amplitude considérable[3], ceci est obtenu avec l'équation suivante :

$$u = \alpha \text{sign}((E - E_0)\dot{\alpha} \cos \alpha) \quad (4.11)$$

La commande Sign nous pose un problème de chattering et de discontinuité au niveau de 0, pour éviter ce problème on utilise la commande suivante :

$$u = \text{sat}_\alpha(H(E - E_0)\text{sign}(\dot{\alpha} \cos \alpha)) \quad (4.12)$$

Où sat est une fonction linéaire qui est saturée en $\alpha = \max|u| = u_{\max}$.

Pour convertir l'accélération du pivot qui est la commande du système vers la commande réelle qui est la tension du moteur V_m :

$$V_m = \frac{\tau R_m}{\eta_g K_g \eta_m k_t} + K_g k_m \dot{\theta} \quad (4.13)$$

$$\tau = m_1 l_1 u \quad (4.14)$$

on remplace τ par son expression donnée dans l'équation(4.14), on trouve :

$$V_m = \frac{m_1 l_1 u R_m}{\eta_g K_g \eta_m k_t} + K_g k_m \dot{\theta} \quad (4.15)$$

La commande global est une combinaison de deux commandes, la première est la commande non-linéaire qui nous assure le swing-up vers la zone ± 10 , la deuxième commande qui est une commande par retour d'état $u = -Hx$, avec H le gain obtenu par la commande LQR, qui intervient à l'aide d'un switch qui nous assurons la stabilisation de pendule à sa position verticale. la Commande finale devient :

$$u = \begin{cases} H(\alpha_d - \alpha) & |\theta| < 10^\circ \\ \text{sat}_\alpha(k(E - E_0)\text{sign}(\dot{\theta} \cos \alpha)) & \text{sinon} \end{cases} \quad (4.16)$$

4.3 Résultats de simulations

Le résultat de simulation du système en utilisant la commande swing up pour la stabilisation du pendule est donné par la figure (4.1) :

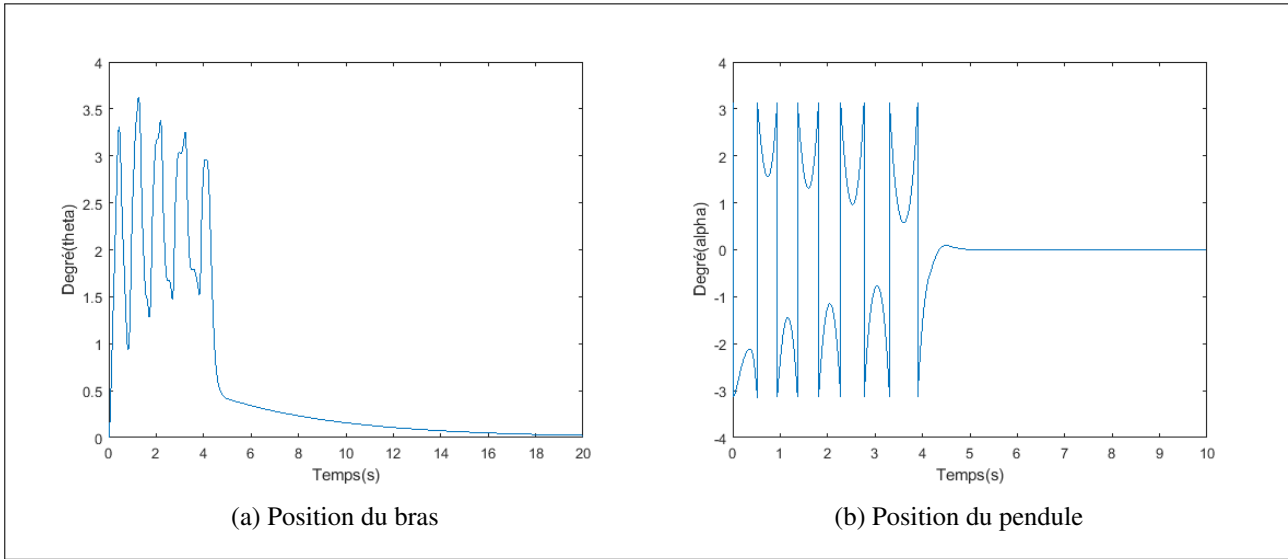


FIGURE 4.1 : Évolution de l'angle de bras et de pendule par la commande switch

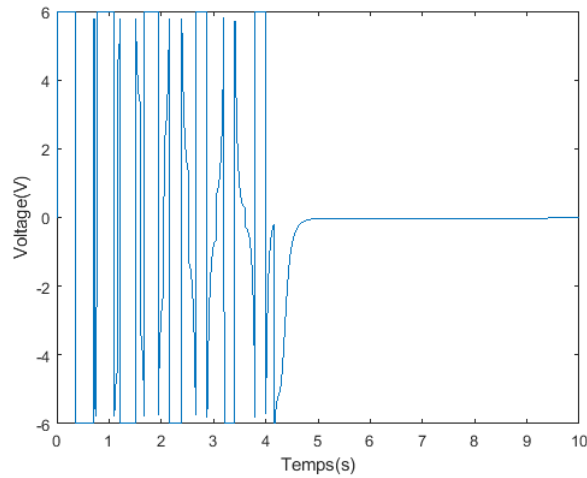


FIGURE 4.2 : Évolution de voltage du moteur

Nous remarquons à partir de la figure(4.1a) qui représente la position du bras que le bras fait des aller retour pendant quelques secondes afin de balancer le pendule, avant qu'il atteignent sa position désirée. La figure (4.1) montre que le pendule oscille pendant 4s, et sa stabilise à son point d'équilibre instable lorsqu'il entre dans la zone de linéarité grâce à la commande par retour d'état. Nous remarquons également dans la figure(4.2) une augmentation de la quantité d'énergie consommé lors de balancement qu'elle ne dépasse pas les 10V.

4.4 Présentation de la maquette Quanser QUBE-Servo 2

Le Quanser QUBE-Servo, illustré à la Figure(4.3), est un système servo rotatif compact qui peut être utilisé pour effectuer une variété d'expériences classiques basées sur l'asservissement et le pendule inversé. Le QUBE-Servo se décline en trois versions : l'interface USB, l'interface d'E/S directes et l'interface NI myRIO. L'interface USB QUBE-Servo a son propre amplificateur de puissance intégré et dispositif d'acquisition de données. L'interface QUBE-Servo Direct I/O dispose également d'un amplificateur intégré mais permet à un périphérique d'acquisition de données externe (DAQ) d'interface avec ses E/S. Le QUBE-Servo L'interface myRIO possède également un amplificateur intégré et permet une connexion directe au port d'extension NI myRIO (MXP) connecteur.

Pour toutes les versions, le système est entraîné à l'aide d'un moteur à courant continu brossé 18 V à entraînement direct logé dans un solide cadre en aluminium. Deux modules complémentaires sont fournis avec le système : un disque inertiel et un pendule rotatif. Les modules peuvent être facilement fixé ou interchangeable à l'aide d'aimants montés sur le connecteur du module QUBE-Servo. Unique les codeurs rotatifs sont utilisés pour mesurer la position angulaire du moteur à courant continu et du pendule.



FIGURE 4.3 : Quanser QUBE-Servo

4.5 Principales caractéristiques du QUBE-Servo :

- Système d'asservissement rotatif compact et complet
- Moteur DC à balais à entraînement direct 18 V
- Encodeurs montés sur moteur DC et pendule
- Amplificateur PWM intégré
- Dispositif d'acquisition de données USB (DAQ) intégré (uniquement pour l'interface USB QUBE-Servo)
- Module de disque inertiel
- Module pendulaire rotatif

4.6 Composants matériels :

Les principaux composants de QUBE-Servo - pour les interfaces USB, Direct I/O et NI myRIO - sont énumérés dans le tableau(4.1). Les composants de l'interface USB de QUBE-Servo sont identifiés sur la Figure(4.4a)[17], les composants de l'interface Direct I/O de QUBE-Servo Direct I/O sont présentés sur la Figure(4.4b), et les composants de l'interface QUBE-Servo myRIO sont présentés sur la Figure(4.4c) .

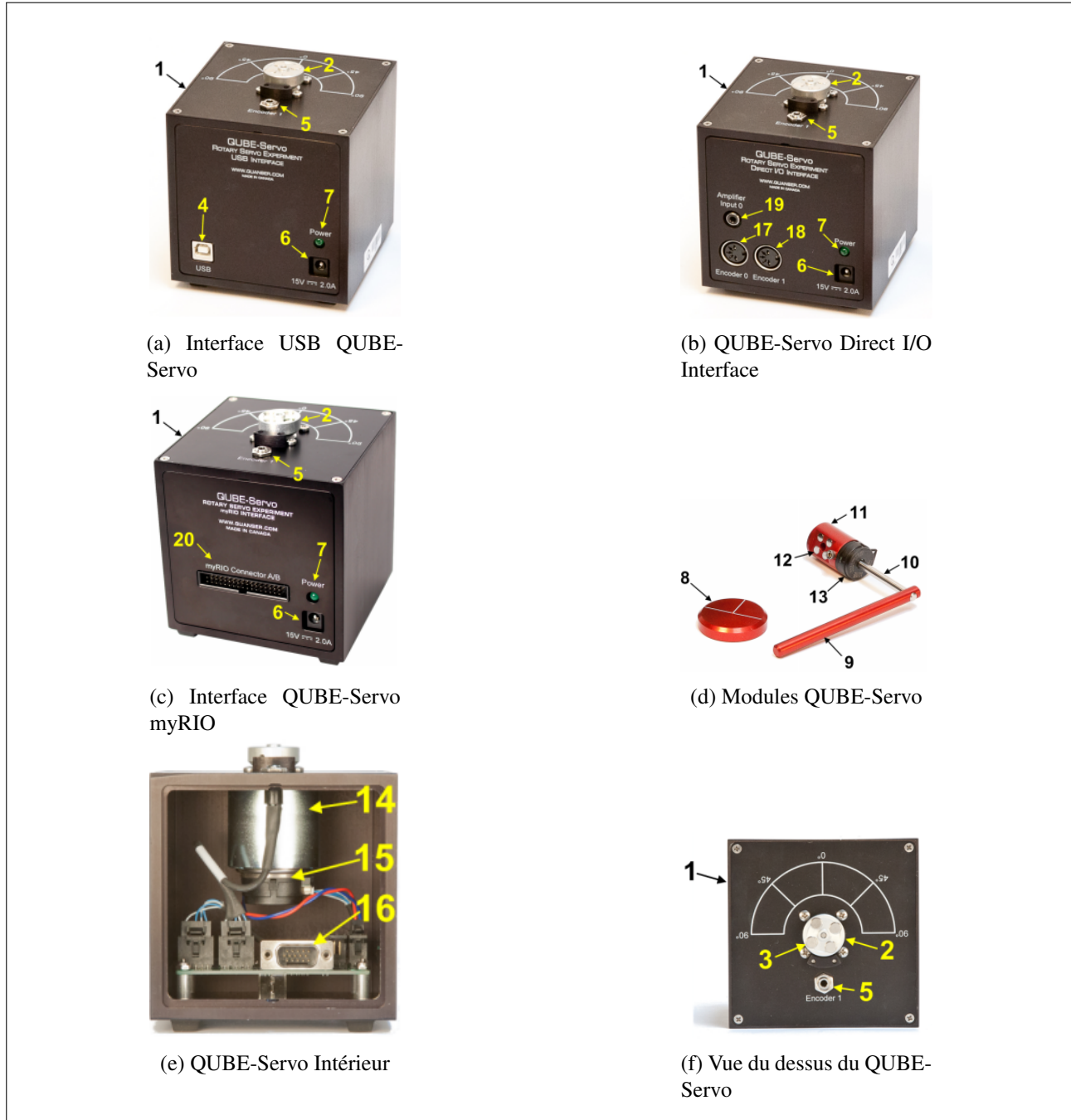


FIGURE 4.4 : Composants QUBE-Servo

| Numéro | Nom de composante |
|--------|--|
| 1 | <i>chassie aluminium</i> |
| 2 | <i>Connecteur de module</i> |
| 3 | <i>Aimants de connecteur de module</i> |
| 4 | <i>Connecteur DAQ USB</i> |
| 5 | <i>Connecteur codeur module</i> |
| 6 | <i>Connecteur d'alimentation</i> |
| 7 | <i>LED d'alimentation</i> |
| 8 | <i>Disque inertiel</i> |
| 9 | <i>Liaison pendulaire</i> |
| 10 | <i>Tige de bras rotatif</i> |
| 11 | <i>Moyeu bras rotatif</i> |
| 12 | <i>Aimant pendulaire rotatifs</i> |
| 13 | <i>Encodeur pendulaire</i> |
| 14 | <i>Moteur DC</i> |
| 15 | <i>Codeurmoteur</i> |
| 16 | <i>Carte DAQ/amplificateur QUBE – Servo</i> |
| 17 | <i>Connecteur de l'encodeur 0</i> |
| 18 | <i>Connecteur encodeur 1</i> |
| 19 | <i>Connecteur d'entre 0 de l'amplificateur</i> |
| 20 | <i>Connecteur NI my RIO MXP</i> |

TABLE 4.1 : Valeurs du contrôleur utilisé

4.7 Applications de la commande sur la maquette :

4.7.1 Contrôle de l'énergie (Swing_up) :

La commande global est donnée comme suite :

$$u(s) = \begin{cases} u_{LQR} & \text{si } |\alpha| - \pi \leq 10^\circ \\ u_{swing_up} & \text{sinon} \end{cases}$$

Après le lancement sur Simulink. On a exécuté le fichier script, chargé les paramètres du pendule utilisés par le modèle, et après quelques réglages des paramètres de contrôle du swing-up (les blocs Constant ainsi que les gains connectés aux entrées du Swing-Up sous-système de contrôle) sont donnée comme suit :

et réglés le gain K obtenue par la commande LQR pour assuré la stabilité dans la zone des $\pm|10^\circ|$ après la commutation entre les deux commandes, et fixe les paramètres lorsque le pendule est équilibré (c'est-à-dire complètement inversé en position verticale). Nous fessent pivoter manuellement le pendule à différents niveaux et examinez l'angle et l'énergie du pendule.

| Paramètre | Valeur |
|-----------|---------------------------|
| μ | 50 <i>m/s/J</i> |
| E_r | 3.4 |
| u_{max} | 10 <i>m s²</i> |

TABLE 4.2 : Valeurs du contrôleur swing_up

4.7.2 Résultats expérimentaux :

Les résultats expérimentaux sont résumés dans les figures ci-dessous :

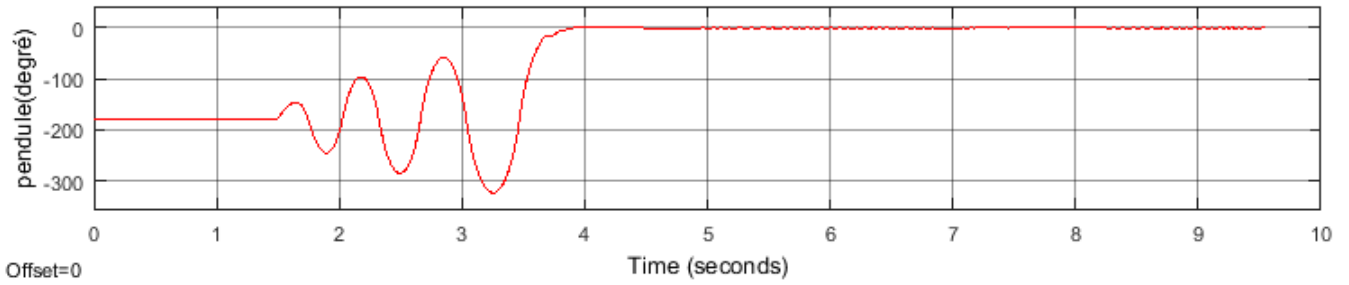


FIGURE 4.5 : Stabilisation du pendule avec la commande switch

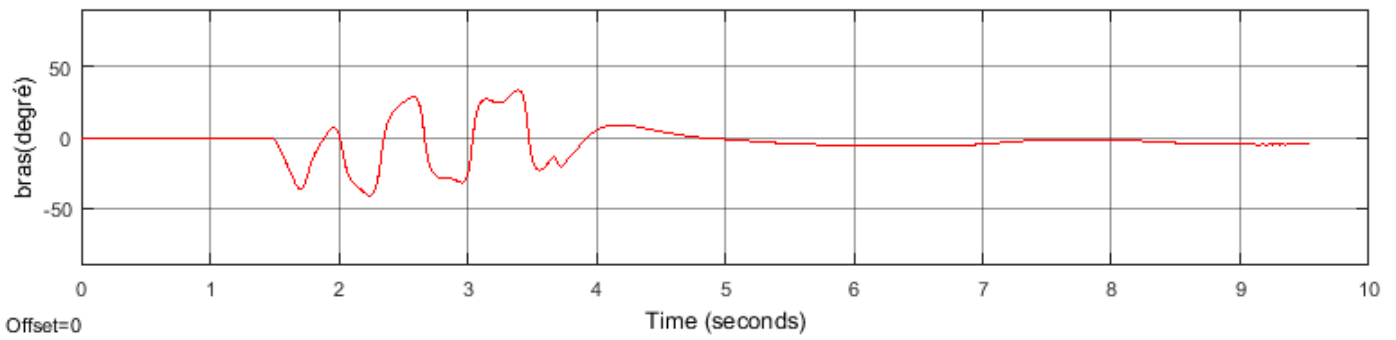


FIGURE 4.6 : Stabilisation de l'angle de bras avec la commande switch

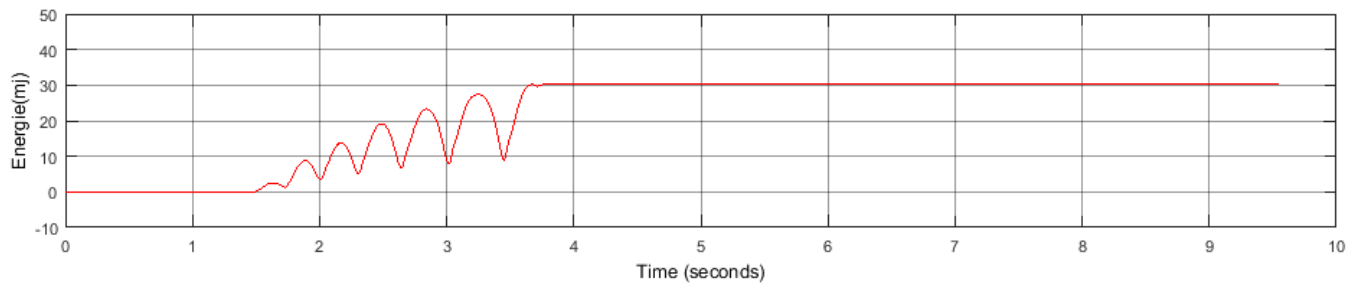


FIGURE 4.7 : Énergie de pendule

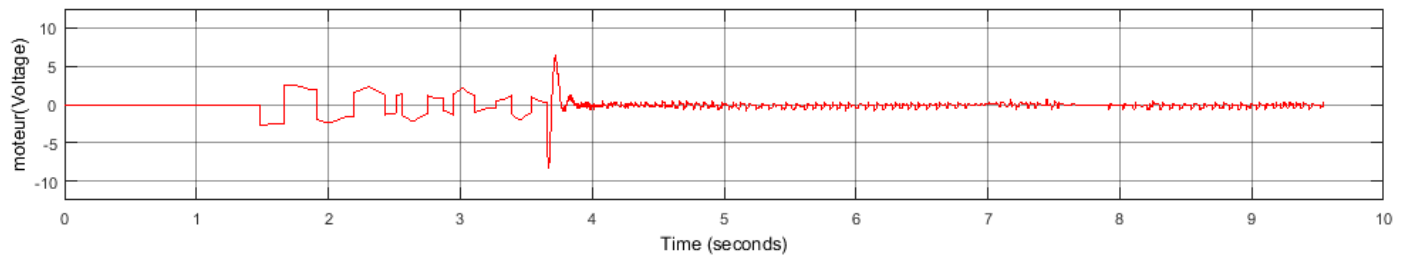


FIGURE 4.8 : Voltage de moteur

4.7.3 Teste de robustesse :

Une fois que le pendule est stable, nous appliquèrent doucement des perturbations avec notre main pour tester la robustesse de notre commande.

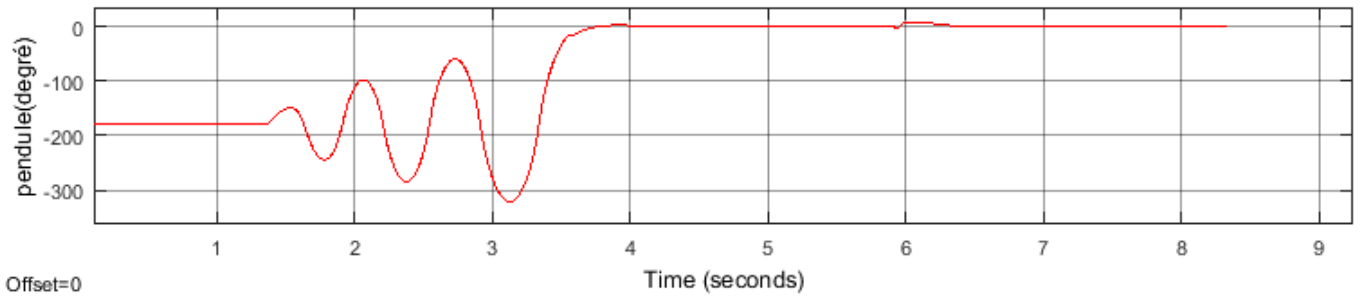


FIGURE 4.9 : Évolution du pendule avec des perturbations

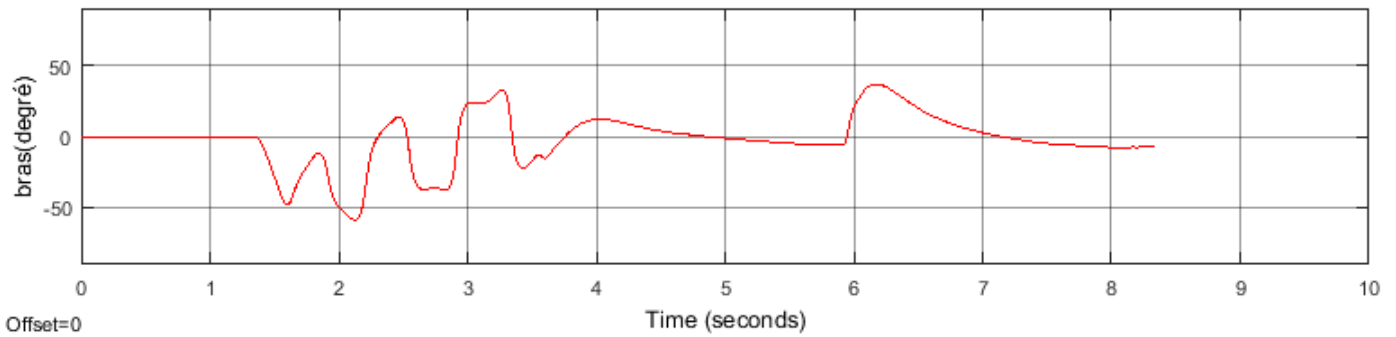


FIGURE 4.10 : Évolution du bras avec perturbations

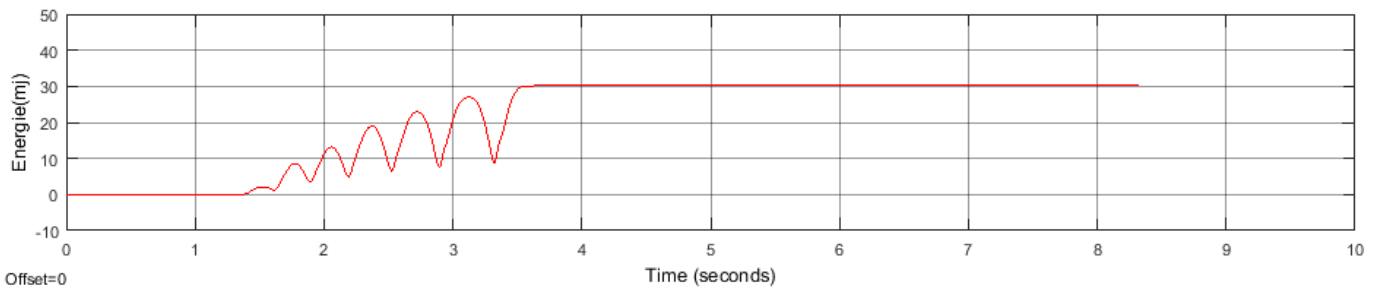


FIGURE 4.11 : Évolution de l'énergie de pendule avec les perturbations

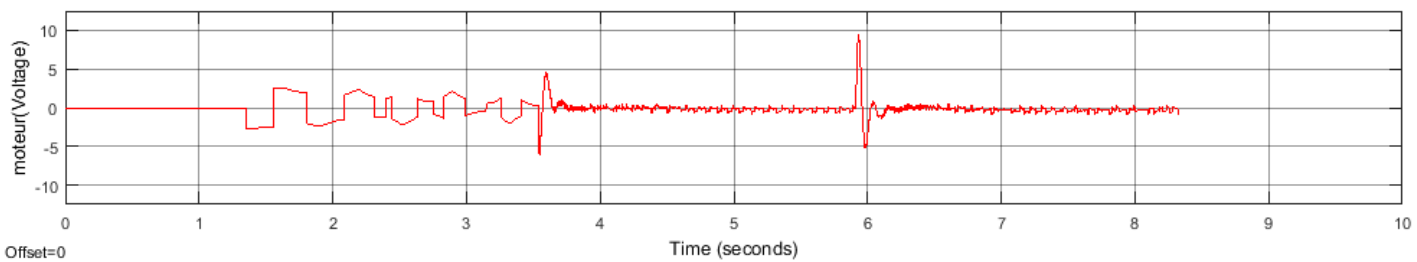


FIGURE 4.12 : Évolution du voltage de moteur avec les perturbations

On observe que le bras fait des aller retours pour que le pendule commence à se balancer pendant quelques secondes avant de se stabiliser à la position verticale haute, nous remarquons aussi que la commutation vers la commande par retour d'état est complètement imperceptible.

Plus la consigne sur l'énergie est grande, plus le pendule converge rapidement vers la zone de linéarité, sans dépasser la valeur critique de 1 joule, car cela va impliquer une vitesse de rentrée dans la zone de linéarité trop grande, et la commande par retour d'état ne pourra pas rattraper le pendule.

4.8 Conclusion

Dans ce chapitre, premièrement nous avons présentée une loi de commande qui est le swing up par contrôle d'énergie, elle est calculée à partir de la fonction de Lyapunov qui fait intervenir l'énergie du système, dans le but est d'amener le pendule à la zone de linéarité. Deuxièmement on a implémenté notre commande sur la maquette de PIR de type Quanser QUBE-Servo2, et tester l'étendue de ces capacités en terme de rapidité et robustesse.

CONCLUSION GÉNÉRALE

La non linéarité est la particularité, en mathématiques, des systèmes dont le comportement n'est pas linéaire. Les systèmes non linéaires sont très intéressants à étudier, car le monde est peuplé par des systèmes de nature non linéaires. Certains systèmes non linéaires sont également sous-actionnés. Le pendule inversé rotatif représente un système non-linéaire, sous-actionné à dynamique instable, il représente un moyen pratique à faible coût pour tester différentes lois de commandes.

Ce travail a porté sur la modélisation et la synthèse des commandes non linéaires en temps réel d'un pendule inversé rotatif, disponible au niveau de notre établissement ESSAT. Le but est de maintenir le pendule inversé rotatif à sa position d'équilibre verticale (position haute). La modélisation du système a été faite en utilisant le formalisme de Lagrange pour trouver un modèle non linéaire sous forme d'équations différentielles et l'exprimer sous forme d'une représentation d'état. Nous avons proposé deux types de commandes non linéaires pour stabiliser le pendule, la première est basée sur l'approche de modes glissants, son principe est de définir une surface de glissement vers laquelle doit converger le système et la deuxième est une commande dite swing up composée d'une commande non linéaire obtenue en utilisant un contrôle dénergie basé sur le principe de balancer le pendule vers la zone de linéarité et une commande linéaire stabilisante. Les résultats des simulations et expérimentaux montrent l'efficacité des commandes proposées.

Comme perspectives, nous pouvons proposer d'autres lois de commandes non linéaires telles que la commande adaptative, la commande floue, backstepping,

BIBLIOGRAPHIE

- [1] 01net.com. Gyrofast hoverboard 700w : la fiche technique complète.
- [2] Jamilu Kamilu Adamu, Mukhtar Fatihu Hamza, and Abdulbasid Ismail Isa. Performance comparisons of hybrid fuzzy-lqr and hybrid pid-lqr controllers on stabilizing double rotary inverted pendulum. *Journal of Applied Materials and Technology*, 1(2) :71–80, 2020.
- [3] Karl Johan Åström and Katsuhisa Furuta. Swinging up a pendulum by energy control. *IFAC proceedings volumes*, 29(1) :1919–1924, 1996.
- [4] Oscar Barambones, Aitor J Garrido, and Francisco Javier Maseda. A robust field oriented control of induction motor with flux observer and speed adaptation. In *EFTA 2003. 2003 IEEE Conference on Emerging Technologies and Factory Automation. Proceedings (Cat. No. 03TH8696)*, volume 1, pages 245–252. IEEE, 2003.
- [5] Fares Boudjema. *Commande par mode de glissement. Application aux convertisseurs électriques*. PhD thesis, Toulouse 3, 1991.
- [6] Chaio-Shiung Chen and Wen-Liang Chen. Robust model reference adaptive control of nonlinear systems using fuzzy systems. *International journal of systems science*, 27(12) :1435–1442, 1996.
- [7] Thierry Floquet. *Contributions à la commande par modes glissants d'ordre supérieur*. PhD thesis, Lille 1, 2000.
- [8] Katsuhisa Furuta, M Yamakita, and S Kobayashi. Swing-up control of inverted pendulum using pseudo-state feedback. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part I : Journal of Systems and Control Engineering*, 206(4) :263–269, 1992.
- [9] Nor Maniha Abdul Ghani, Faradila Naim, and Tan Piow Yon. Two wheels balancing robot with line following capability. *World Academy of Science, Engineering and Technology*, 55(7) :634–638, 2011.
- [10] Alexis Girin. *Contribution à la commande non linéaire d'un système électropneumatique pour une utilisation aéronautique : application sur un benchmark dédié*. PhD thesis, Ecole Centrale de Nantes (ECN), 2007.
- [11] Graham Clifford Goodwin, Stefan F Graebe, Mario E Salgado, et al. *Control system design*, volume 240. Prentice hall New Jersey, 2001.
- [12] WANG HAoPNG, CHRISTIAN VASSEUR VLADAN KONCAR, and AFzAL CHAMROO. Modélisation et commande d'un pendule inversé sur un robot xy par l'asservissement visuel.
- [13] Boris Kalitine. Sur le théoreme de la stabilité non asymptotique dans la méthode directe de lyapunov. *Comptes Rendus Mathématique*, 338(2) :163–166, 2004.
- [14] Abhishek Kathpal and Ashish Singla. Simmechanics based modeling, simulation and real-time control of rotary inverted pendulum. In *2017 11th International Conference on Intelligent Systems and Control (ISCO)*, pages 166–172. IEEE, 2017.

- [15] Mébarka Kercha. *Commande par mode de glissement dun moteur pas à pas à aimant Permanent*. PhD thesis, Université de Batna 2, 2005.
- [16] Mojtaba Ahmadih Khanesar, Mohammad Teshnehlab, and Mahdi Aliyari Shoorehdeli. Sliding mode control of rotary inverted pendulum. In *2007 Mediterranean Conference on Control & Automation*, pages 1–6. IEEE, 2007.
- [17] Nitya Krishnan. *Estimation and Control of the Nonlinear Rotary Inverted Pendulum : Theory and Hardware Implementation*. PhD thesis, San Diego State University, 2019.
- [18] Shailaja Kurode, Asif Chalanga, and B Bandyopadhyay. Swing-up and stabilization of rotary inverted pendulum using sliding modes. *IFAC Proceedings Volumes*, 44(1) :10685–10690, 2011.
- [19] Chourouk El Biad-Samy Lafnoune and Ahmed CHEMORI. *Commande robuste par mode glissant dun système mécanique sous-actionné*. 2014.
- [20] Zhiwen Ma, Trillion Zheng, Xiaojie You, et al. A new sliding-mode current controller for field oriented controlled induction motor drives. In *31st Annual Conference of IEEE Industrial Electronics Society, 2005. IECON 2005.*, pages 6–pp. IEEE, 2005.
- [21] Park Mun-Soo and Chwa Dongkyoung. Swing-up and stabilization control of inverted-pendulum systems via coupled sliding-mode control method. *IEEE transactions on industrial electronics*, 56(9) :3541–3555, 2009.
- [22] Rich Chi Ooi. Balancing a two-wheeled autonomous robot. *University of Western Australia*, 3, 2003.
- [23] Hassan Saoud. *Étude des problèmes unilatéraux : analyse de récession, stabilité de Lyapunov et applications en électronique et en mécanique*. PhD thesis, Limoges, 2009.
- [24] Jean-Jacques E Slotine, Weiping Li, et al. *Applied nonlinear control*, volume 199. Prentice hall Englewood Cliffs, NJ, 1991.
- [25] Mohammed Chakib Sosse Alaoui. *Commande et observateur par modes glissants dun système de pompage et dun bras manipulateur*. 2009.
- [26] Vadim Utkin. Variable structure systems with sliding modes. *IEEE Transactions on Automatic control*, 22(2) :212–222, 1977.
- [27] W Wang, J Yi, D Zhao, and D Liu. Design of a stable sliding-mode controller for a class of second-order underactuated systems. *IEE Proceedings-Control Theory and Applications*, 151(6) :683–690, 2004.
- [28] Djamila Zehar. *Commande par mode glissant des systèmes sous actionnés*. PhD thesis, 2019.

Annexes

| Symboles | Paramètres | Valeurs | unité |
|----------|---|-----------|-------------------|
| η_g | Rendement des engrenages | 0.9 | - |
| η_m | Rendement du moteur | 0.69 | - |
| k_t | Constante du couple moteur | 0.007683 | N.m/A |
| k_g | Constante des engrenages | 70 | - |
| k_m | Constante de la f.e.m | 0.0076777 | V.s/rad |
| R_m | Résistance d'induit du moteur | 2.6 | Ω |
| m_p | Masse du pendule | 0.127 | Kg |
| L_r | Longueur de bras | 0.2159 | m |
| L_p | Longueur de pendule | 0.33655 | m |
| J_r | Moment d'inertie du bras de son centre de masse | 0.0009983 | Kg.m ² |
| J_p | Moment d'inertie du pendule de son centre de masse | 0.0012 | Kg.m ² |
| B_r | coefficient de viscosité d'amortissement du bras | 0.0024 | N.m.s/rad |
| B_p | coefficient de viscosité d'amortissement du pendule | 0.0024 | N.m.s/rad |
| g | Gravité | 9.81 | Kg.m ² |

TABLE 3 : paramètres du système