



Mémoire de fin d'étude

Pour l'obtention du diplôme d'Ingénieur

Filière : automatique
Spécialité : automatique

Présenté par : **BERKOUNE Ali Abdessetar**
RABEHI Mohammed Rida

Thème

***Modélisation et commande en temps réel
d'un pendule inversé rotatif:
Approche linéaire***

Soutenu publiquement, le /07/2021, devant le jury composé de :

M MERAD Lotfi	Professeur	ESSA. Tlemcen	Président
M ARICHI Fayssal	Maître de conférences classe B	ESSA. Tlemcen	Directeur de mémoire
M MOKHTARI Mohamed Rida	Maître de conférences classe A	ESSA. Tlemcen	Co-Directeur de mémoire
M ABDI Sidi Mohammed ELAmine	Maître de conférences classe B	ESSA. Tlemcen	Examineur 1
Mme GHOUALI Amel	Maître de conférences classe B	ESSA. Tlemcen	Examineur 2

Année universitaire : 2020 /2021

Remerciement

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ
الحمد لله الذي بنعمته تتم الصالحات.

Nous remercions le dieu, le tout puissant, pour nous avoir donné, le courage, la patience, la volonté et la force nécessaires pour accomplir ce modeste travail.

*En guise de reconnaissance, je tiens à témoigner mes sincères remerciements à toutes les personnes qui ont contribué de près ou de loin au à l'élaboration de ce modeste travail. Nos sincères gratitudee à Monsieur **MOKHTARI Mohammed Rida** pour la qualité de son enseignement, ses conseils et son intérêt incontestable qu'il à porté a notre projet.*

*Nous remercions notre encadreur Monsieur **ARICHI Fayssal** pour ses nombreux conseils, encouragements, sa disponibilité, et relectures et corrections de notre travaille.*

*Nous tenons notamment, à adresser l'expression de notre sincère reconnaissance aux membres du jury ici présent d'examen Monsieur **MERAD Lotfi**, Madame **BEJAOUI Amel** et Monsieur **ABDI Sedi Mohamed**, pour l'intérêt qu'ils ont porté à ce travail.*

Nous tenant à remercier nos familles de nous avoir soutenu, nous ne serons jamais assez reconnaissants envers nos parents qui ont toujours tout mis en oeuvre pour qu'on s'épanouisse dans tous ce qu'on entreprend.

*Nous n'oublions pas de remercier nos amis en particulier **Ziani Kerarti AbdelKarim Zakaria** et **TEBBAL Riadh Abdelhalim**, et dans l'impossibilité de citer tous les noms, nos sincères remerciements vont à tous ceux et celles, qui de près ou de loin, ont permis par leurs conseils et leurs compétences la réalisation de ce mémoire*

Rida & Ali.

Dédicaces

À mes chers parents, pour tous leurs sacrifices, leur amour, leur tendresse, leur soutien et leurs prières tout au long de mes études.

*À mon petit frère **Zoheir**, et ma grande soeur **Yasmina**.*

*À toute ma famille pour leur soutien et leurs encouragements permanents tout au long de mon parcours, à mon amis **Lakhal Sadnia** qui n'à pas pu venir aujourd'hui, et à tout ceux qui me sont chers.*

Que ce travail soit l'accomplissement de vos vœux tant allégués, et le fruit de votre soutien, Merci d'être toujours là pour moi.

Rida

À mes chers parents, pour tous leurs sacrifices, leur amour, leur tendresse, leur soutien et leurs prières tout au long de mes études.

À toute ma famille pour leur soutien et leurs encouragements.

*À ma chère soeur **Imane**, et mon frère **Mohammed**.*

*À la petite **Dania**.*

Ali

Résumé

Le travail de ce mémoire porte sur la modélisation et la synthèse de lois de commandes linéaires pour un pendule inversé rotatif disponible au niveau de notre établissement ESSAT. Avec sa dynamique instable et fortement non linéaire, le pendule inversé rotatif représente un système très intéressant à étudier, et captivent pour le test de nouvelles lois de commandes. Le but de ces commandes est de maintenir le pendule à sa position d'équilibre haute lorsque le pendule est manuellement placé autour de sa position d'équilibre instable. Dans un premier temps, nous avons donné un modèle mathématique non linéaire sous forme d'équations différentielles et sous forme d'une représentation d'état. Nous avons présenté par la suite une linéarisation du modèle obtenu autour du point d'équilibre instable. Finalement, nous avons synthétisé trois types des commandes linéarisées, à savoir, le placement de pôles, linéaire quadratique régulateur (LQR), et contrôle proportionnelle intégrale dérivée (PID).

Mots-Clés : Système non linéaire, Pendule inversé rotatif, Commandes linéaires, modélisation mathématique.

Abstract

The work of this thesis concerns the modeling and synthesis of linear control laws for a rotating inverted pendulum available at our ESSAT facility. With its unstable and highly nonlinear dynamics, the rotating inverted pendulum represents a very interesting system to study, and is an attractive one for testing new control laws. The goal of these controls is to maintain the pendulum at its high equilibrium position when the pendulum is manually placed around its unstable equilibrium position. In a first step, we have given a non-linear mathematical model in the form of differential equations and in the form of a state representation. We then presented a linearization of the model obtained around the unstable equilibrium point. Finally, we have synthesized three types of linearized controls, namely, pole placement, linear quadratic regulator (LQR), and proportional integral derivative (PID) control.

Key- Words : Nonlinear system, Inverted rotating pendulum, Linear controls, mathematical modeling.

ملخص

يركز عمل هذه الأطروحة على نمذجة وتوليف قوانين التحكم الخطي لبدول دوار مقلوب متاح في مؤسسة ESSAT الخاصة بنا. مع ديناميكياته غير المستقرة وغير الخطية بقوة ، يمثل البندول الدوار المقلوب نظامًا مثيّرًا للاهتمام للغاية للدراسة ، وبأسر لاختبار قوانين التحكم الجديدة. الغرض من هذه الضوابط هو الحفاظ على البندول في موضع توازنه العالي عندما يتم وضع البندول يدويًا حول موضع توازنه غير المستقر. أولاً ، قدمنا نموذجًا رياضيًا غير خطي في شكل معادلات تفاضلية وفي شكل تمثيل الحالة. قدمنا لاحقًا نموذجًا خطيًا تم الحصول عليه حول نقطة التوازن غير المستقرة. أخيرًا ، قمنا بتجميع ثلاثة أنواع من عناصر التحكم الخطية ، وهي وضع القطب ، والمنظم الخطي التربيعي (LQR) ، والتحكم الاشتقاقي المتكامل النسبي (PID).

كلمات المفتاحية: النظام غير الخطي، البندول الدوار المقلوب، أدوات التحكم الخطية، النمذجة الرياضية.

GLOSSAIRE

Acronymes

- EC Énergie cinétique
EP Énergie Potentiel
LQR Linéaire quadratique régulateur
PID Proportionnelle Intégrale dérivé

Symboles

- α Angle de pendule
 θ Angle de bras
 B_p Coefficient de viscosité d'amortissement du pendule
 B_r Coefficient de viscosité d'amortissement du bras
 g Gravité
 J_p Moment d'inertie du pendule de son centre de masse
 J_r Moment d'inertie du bras de son centre de masse
 K_d Gain Dérive
 k_g Constante des engrenages
 K_i Gain Intégral
 k_m Constante de la f.e.m
 K_p Gain Proportionnelle
 k_t Constante du couple moteur
 L_p Longueur de bras
 L_r Longueur de bras
 m_p Masse du pendule
 R_m Résistance d'induit du moteur
R L'ensemble des nombres réels

Z L'ensemble des nombres entiers relatifs
 η_g Rendement des engrenages
 η_m Rendement du moteur

Table des matières

Remerciement	I
Dédicace	II
Résumé	III
Glossaire	IV
Introduction Générale	1
1 Aperçu général sur les pendules	3
1.1 Introduction	4
1.2 Types de pendules	4
1.3 Quelques applications du pendule inversé	9
1.4 Conclusion	10
2 Modélisation du pendule inversé rotatif	11
2.1 Introduction :	12
2.2 Modèle mathématique du PIR :	12
2.3 Représentation d'état	15
2.4 Linéarisation du système :	16
2.4.1 Les points d'équilibres	17
2.4.2 Linéarisation du système autour de point d'équilibre :	17
2.5 Résultats de simulations	18
3 Commandes linéaires	20
3.1 Introduction :	21
3.2 Commandabilité du système	21
3.2.1 Étude de la commandabilité du PIR :	21
3.3 Commande par placement de pôles :	22
3.3.1 Cahier de charge :	22
3.3.2 Détermination des pôles :	23
3.3.3 Résultat de simulation :	23
3.4 Commande LQR (Linear Quadratic Regulator)	24
3.4.1 Détermination de la matrice Q	26
3.4.2 Résultats du simulation	26
3.5 Régulateur Proportionnelle Intégrale Dérivée (PID)	28
3.5.1 Principe de fonctionnement :	30
3.5.1.1 Action proportionnelle P :	30
3.5.1.2 Action Intégrale I :	31
3.5.1.3 Action dérivé D :	31
3.5.2 Choix des paramètres :	31
3.5.3 Méthode d'approximations successives :	31
3.5.4 Application du PID :	31
3.6 Comparaison entre les trois commandes :	33

3.7	Conclusion	35
4	Implémentation expérimentale de les commandes sur la maquette QUBE-Servo 2	36
4.1	Présentation du Pendule Inversé Rotatif	37
4.2	Composants du Pendule Inversé Rotatif (RIP)	37
4.3	Modèle linéaire de PIR	38
4.4	Simulation de modèle	38
4.5	Implantation des commandes sur la maquette	39
4.5.1	Placement de pôle	39
4.5.1.1	Test de robustesse	40
4.5.2	Commande LQR	41
4.5.3	Résultats obtenus	41
4.5.3.1	Test de robustesse	42
4.5.4	Commande PD	43
4.5.4.1	Résultat de l'essai sur la maquette	44
4.5.4.2	Test de robustesse	45
4.6	Conclusion	46
	Conclusion Générale	48
	Bibliographie	51
	Annexes	

Table des figures

1.1	Pendule sphérique [15].	4
1.2	Pendule cycloïdal[13].	4
1.3	Pendule torsion [8].	5
1.4	Exemple illustrative[6].	5
1.5	Schéma du principe d'un pendule inversé classique[16].	6
1.6	Schéma du principe d'un double pendule inversé en cascade[17].	6
1.7	Schéma du principe d'un double pendule inversé parallèle[17].	7
1.8	Photo de pendule inversé stabilisé par volant d'inertie[11].	7
1.9	Schéma du principe d'un pendule inversé stabilisé par volant d'inertie[11]	8
1.10	Photo de pendule inversé sur deux roues, (b) : son schéma de principe[11].	8
1.11	Pendule inversé rotatif[1].	9
1.12	Honda Riding Assist 2019[7].	9
1.13	(a) : IBOT en position deux roues, (b) : IBOT en position descente escaliers[4].	10
1.14	Segway[7].	10
1.15	hoverboard [7].	10
2.1	Modèle Pendule Inversé Rotatif[1].	12
2.2	Représentation d'état matricielle	16
2.3	Angle du pendule	19
2.4	Comparaison entre le système linéaire et non linéaire	19
3.1	Schématique du concept de la commande par retour d'état	22
3.2	Évolution de l'angle du bras avec la commande par placement de pôles.	23
3.3	Évolution de l'angle du pendule avec la commande par placement de pôles.	24
3.4	Évolution de la tension délivrée avec la commande par placement de pôles.	24
3.5	Schéma fonctionnel pour la réalisation de LQR	25
3.6	Évolution de theta par la commande LQR	26
3.7	Évolution de alpha par la commande LQR	27
3.8	Évolution de u par la commande LQR	27
3.9	Structure série d'un régulateur PID	29
3.10	Structure parallèle d'un régulateur PID.	29
3.11	Structure mixte d'un régulateur PID.	30
3.12	Structure de régulation par PID en cascade	32
3.13	La position du pendule	32
3.14	La position du bras	33
3.15	l'évolution de la commande	33
3.16	Évolution de l'angle du pendule avec les trois commandes	34
3.17	Évolution de l'angle du bras avec les trois commandes	34
3.18	Figure 1 Tension délivrée au système pour les trois commandes	34
4.1	Maquette du pendule rotatif Quanser	37
4.2	Composants du pendule rotatif Quanser	37
4.3	Réponse indicielle du système pendulaire	38
4.4	Évolution de l'angle du bras sur la maquette avec la commande placement de pôle	39
4.5	Évolution de l'angle du pendule sur la maquette avec la commande placement de pôle	39

4.6	Évolution du voltage du moteur avec la commande placement de pôle	39
4.7	Évolution du l'angle de bras sur la maquette avec des perturbations	40
4.8	Évolution du l'angle de pendule sur la maquette avec des perturbations	40
4.9	Évolution du voltage du moteur avec des perturbations	40
4.10	Évolution du l'angle de bras sur la maquette	41
4.11	Évolution du l'angle de pendule sur la maquette	41
4.12	Évolution du voltage du moteur sur la maquette	42
4.13	Évolution du l'angle de bras sur la maquette avec des perturbations	42
4.14	Évolution de l'angle du pendule sur la maquette avec des perturbations	42
4.15	Évolution du voltage du moteur avec des perturbations	43
4.16	Schéma fonctionnel de la commande de balance PD pour pendule rotatif	43
4.17	Évolution de l'angle du bras sur la maquette avec la commande PD	44
4.18	Évolution de l'angle du pendule sur la maquette	44
4.19	Évolution du voltage du moteur de la maquette	44
4.20	Évolution du l'angle de bras sur la maquette avec des perturbations	45
4.21	Évolution du l'angle pendule sur la maquette avec des perturbations	45
4.22	Évolution du voltage du moteur de la maquette avec des perturbations	45

INTORDUCION GÉNÉRALE

LES systèmes automatisés n'ont cessé d'évoluer entraînant inévitablement des structures de commandes de plus en plus complexes.

L'automatique est l'art de modéliser, d'analyser puis de commander les systèmes. C'est aussi celui d'identifier les systèmes dynamiques de traiter l'information et de prendre des décisions. Conçu pour minimiser l'intervention humaine et accomplir des tâches difficiles ou qui nécessitent des efforts au-delà de leurs capacités physique.

Dans le domaine scientifique et celui de l'enseignement, l'automatique a souvent recours à des cas d'études particuliers, qui sont représentatifs de grandes classes d'applications. De plus, avec l'expérience, la connaissance de ces cas s'est affinée et ils fournissent aujourd'hui une base idéale pour comparer de façon valable les avantages et les inconvénients d'approches différentes. Le pendule inversé est l'un de ces cas typique qui occupe une place importante dans l'industrie, étant un système fortement non linéaire, couplé et instable, il représente un benchmark idéal pour étudier de nouvelles commandes.

Il existe plusieurs types de pendule inversé, qu'on va présenter plus tard, mais celui qui nous intéresse le plus c'est le pendule de Furuta ou pendule inverse rotatif. Ce dernier consiste en un bras dans le plan horizontal qui est actionné par un moteur à courant continu. Au bout de ce bras horizontal, un second bras est attaché, libre de tourner dans le plan vertical (les plans de rotation des deux bras sont perpendiculaires). A l'aide d'un contrôleur, il est possible de maintenir le bras vertical en équilibre instable. Le but derrière ce projet est de faire en sorte que le pendule se stabilise autour de son point d'équilibre instable.

Le travail est organisé de la manière suivante :

Dans le premier chapitre, nous présentons quelques types de pendules notamment les pendules inversés ainsi que leur domaines d'applications pour illustrer l'objectif principale de l'étude du pendule inversé.

Le deuxième chapitre est consacré à la modélisation du pendule inversé rotatif sur lequel nous orientons notre travail. Nous utilisons dans la première partie le formalisme de Lagrange pour obtenir un modèle mathématique non linéaire sous forme d'équations différentielles et sous forme d'une représentation d'état. Nous présentons par la suite une linéarisation autour du point d'équilibre, imposée implicitement par la complexité du système.

Dans le troisième chapitre, nous nous intéressons à la synthèse de quelques types de commandes linéaires. Il s'agit de la commande par placement de pôles, la commande linéaire quadratique LQR, et la commande par un contrôleur proportionnel-intégral-dérivé (PID).

Et pour finir, dans le quatrième chapitre, nous allons appliquer les trois commandes qu'on a synthétisé au par avant, sur la maquette de Quanser QUBE-Servo qui est une maquette de pendule inversé rotatif, afin de tester les performances et robustesse des trois commandes.

CHAPITRE

1

APERÇU GÉNÉRAL SUR LES PENDULES

1.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous présentons dans un premier temps quelques types des pendules notamment les pendules inversés. Nous nous intéressons par la suite à la représentation de quelques exemples de systèmes réels inspirés et basés sur le principe des pendules inversés.

1.2 Types de pendules

- **Pendule simple :**

Il s'agit d'une petite masse accrochée à l'extrémité d'un fil (ou d'une tige) inextensible de masse négligeable. Écartée de sa position d'équilibre, puis relâchée, il oscille grâce à la force de gravité. Lorsque la masse accrochée n'est plus suffisamment petite et/ou si la tige qui la relie à l'axe de rotation n'est pas de masse négligeable, on doit tenir compte du moment d'inertie de l'ensemble. Un tel pendule est appelé pendule pesant (ou pendule pesant composé pour le distinguer du pendule simple).

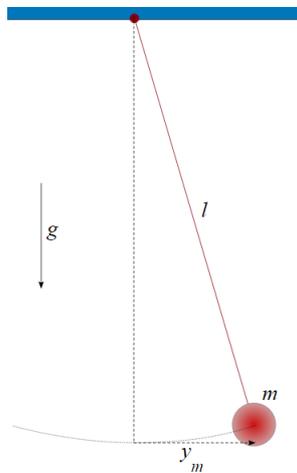


FIGURE 1.1: Pendule sphérique [15].

- **Pendule cycloïdal :**

Ce pendule est le seul pendule rigoureusement isochrone. Il est constitué d'une masse suspendue à un fil, mais astreinte à se mouvoir le long d'une cycloïde. Pour cela le fil est encadré à son point d'attache de deux portions de cycloïde, profitant d'une propriété mathématique de cette courbe : elle est sa propre développée.

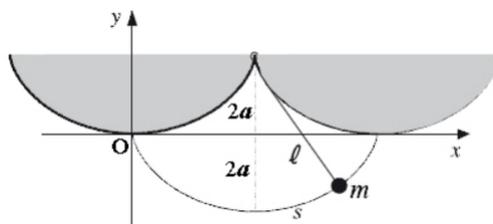


FIGURE 1.2: Pendule cycloïdal[13].

- **Pendule de torsion :**

Il est constitué d'une barre horizontale, suspendue à un fil métallique vertical. La barre oscille dans un plan horizontal. Ceci est dû au fil qui, par sa torsion, exerce un couple de rappel qui tend à ramener le pendule vers sa position d'équilibre. Cette oscillateur est harmonique.

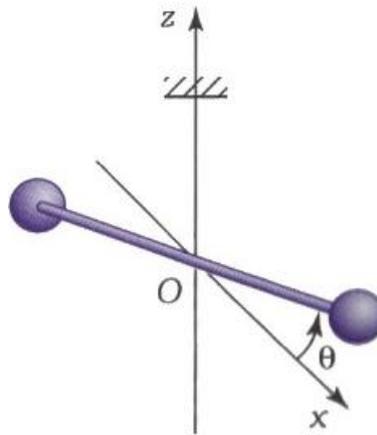


FIGURE 1.3: Pendule torsion [8].

- **Pendule inversée :**

Souvenez-vous quand vous étiez petit et que vous essayiez de tenir en équilibre une tige sur votre doigt. Vous deviez en permanence ajuster la position de votre main pour stabiliser la tige. Le pendule inversé fait la même chose,...



FIGURE 1.4: Exemple illustrative[6].

Avant d'aller plus loin sur les pendules inversés, on doit commencer par définir ce type de systèmes. En effet, un pendule inversé n'est qu'une tige posée en position d'équilibre instable (verticale à 180°) sur une base qui peut être fixe ou mobile. La dynamique non linéaire et instable de ce système physique a fait de lui un système très intéressant et largement étudié dans la communauté des automaticiens, ce qui explique l'existence de plusieurs aspects et formes de pendules inversés.

On peut trouver divers types de pendules inversés tels que :

- * **Pendule inversé classique :**

Ce système mécanique consiste en un chariot de masse M qui peut se déplacer horizontalement et librement sur un rail de guidage en supportant une tige de masse m libre en

rotation autour d'un pivot. L'application d'une force $f(t)$ va provoquer le déplacement du chariot et la déviation du pendule d'un angle $\theta(t)$ par rapport à la verticale. Ceci constitue un système mécanique sous-actionné à deux degrés de liberté et un seul actionneur. Dans le cas de stabilisation d'un tel système, le but de la commande serait de ramener le pendule à partir d'une position initiale à sa position d'équilibre instable et le maintenir autour de cette position.

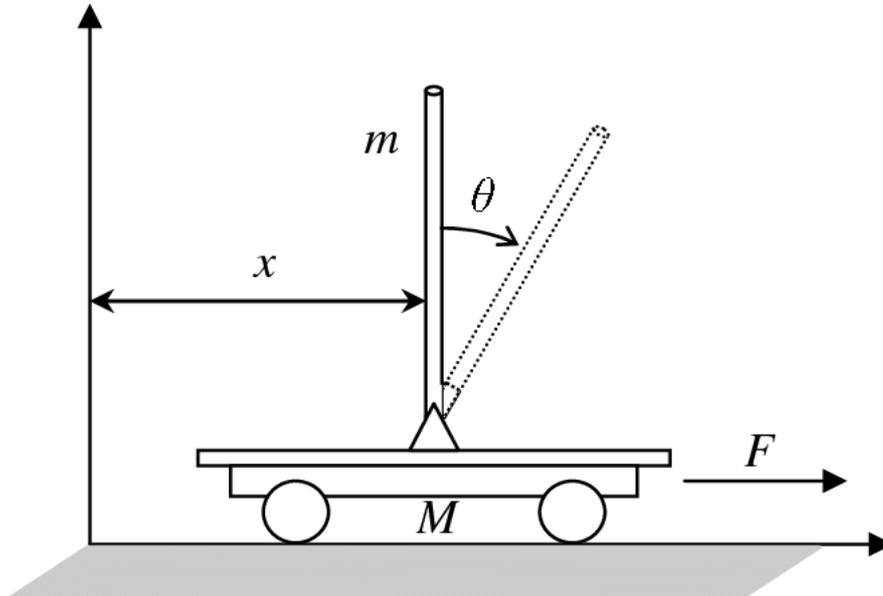


FIGURE 1.5: Schéma du principe d'un pendule inversé classique[16].

* **Le double pendule inversé :**

Pour ce type, on peut distinguer deux architectures différentes :

- o En cascade :

Il a le même principe que le pendule simple, la seule différence réside dans le fait qu'il dispose de deux tiges en rotation libre. L'une tourne autour du pivot à la base, d'un angle $\theta_1(t)$ et l'autre avec l'angle $\theta_2(t)$ autour de la deuxième articulation entre les deux tiges. Le but de la commande pour ce système consiste à stabiliser les deux tiges autour de la verticale et les maintenir autour de ce point d'équilibre instable.

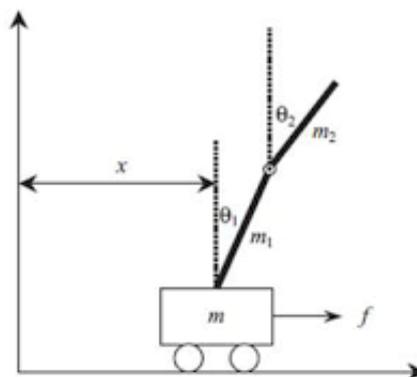


FIGURE 1.6: Schéma du principe d'un double pendule inversé en cascade[17].

- En parallèle :

Dans ce cas, le chariot supporte deux tiges indépendantes : une tige L de longueur l_L et une autre B de longueur l_B , les deux en rotation libre. Le déplacement $x(t)$ de la base va engendrer une déviation d'un angle θ_L par rapport à la verticale sur la première tige et d'un angle θ_B par rapport à la verticale sur la deuxième tige.

Le but de la commande consiste à stabiliser les deux tiges autour de la verticale au point d'équilibre instable et les maintenir même dans le cas de présence de perturbations externes.

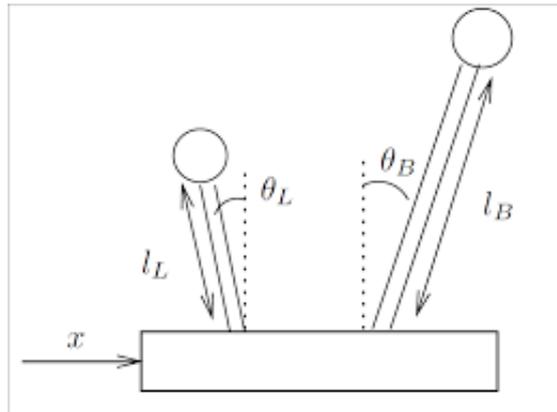


FIGURE 1.7: Schéma du principe d'un double pendule inversé parallèle[17].

* **Pendule inversé stabilisé par volant d'inertie :**

C'est un système composé de deux corps mécaniques : un pendule inversé en rotation libre autour d'un pivot lié au bâti et un volant actionné (roue d'inertie) dont le centre de masse coïncide avec l'extrémité du pendule. Le principe de fonctionnement de ce système est basé sur le mouvement de rotation du volant d'inertie qui provoque, par les effets dynamiques qu'il induit, la rotation de pendule. Le but de la commande consiste à stabiliser le pendule autour de la verticale au point d'équilibre instable et le maintenir dans cet état.

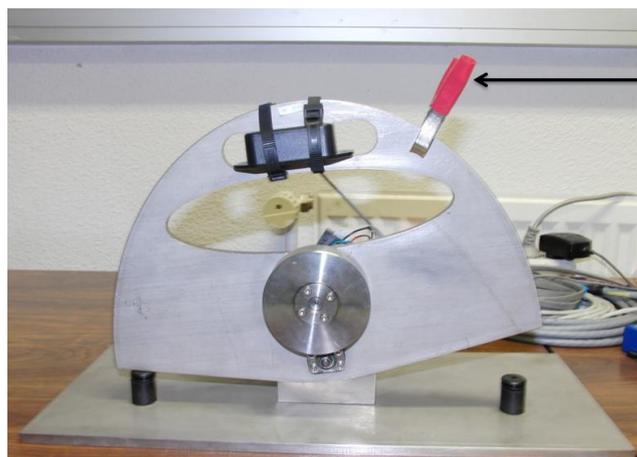


FIGURE 1.8: Photo de pendule inversé stabilisé par volant d'inertie[11].

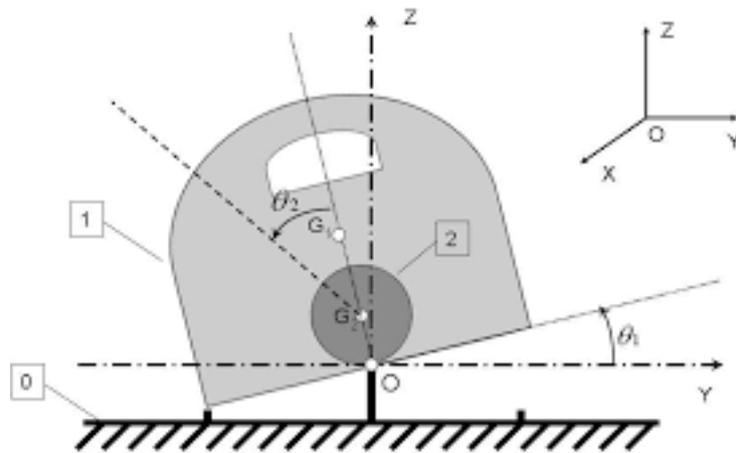


FIGURE 1.9: Schéma du principe d'un pendule inversé stabilisé par volant d'inertie[11].

* **Pendule inversé sur deux roues :**

Le pendule inversé sur deux roues est considéré comme un prototype académique largement étudié dans le domaine de l'automatique. Comme son nom l'indique, il est constitué d'une base mobile (l'essieu et les deux roues) surmontée d'un pendule inversé en rotation libre au tour d'un pivot (articulation passive) entre l'essieu et la tige du pendule. L'angle d'inclinaison du pendule par rapport à la verticale est notée ψ .

Le principe de fonctionnement du système est très simple en théorie : quand le pendule penche vers l'avant, la partie mobile doit le rattraper en effectuant un mouvement vers l'avant et vis versa. La difficulté réside dans le réglage de l'intensité de réaction des roues afin d'agir face à l'angle que fait le pendule avec la verticale.

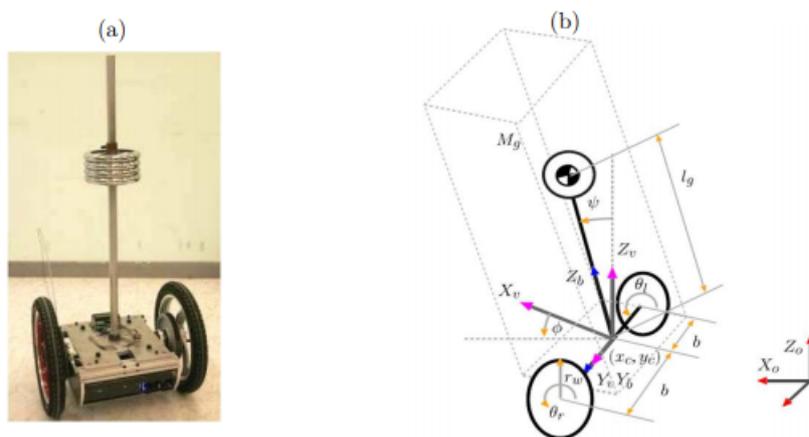


FIGURE 1.10: Photo de pendule inversé sur deux roues, (b) : son schéma de principe[11].

* **Pendule inversé rotatif :**

Ce pendule est composé d'un bras actionné en rotation dans le plan horizontale, à son extrémité vient s'ajouter un pendule inversé monté en équilibre instable. La rotation infinie du bras assure la stabilisation et le maintien du pendule autour de la verticale au point d'équilibre instable[3].



FIGURE 1.11: Pendule inversé rotatif[1].

1.3 Quelques applications du pendule inversé

Dans le domaine du transport basée sur l'étude des pendules inversés, on trouve le "Honda Riding Assist", il s'agit d'une moto d'apparence classique, mais qui s'auto équilibre dans les phases critiques (arrêt et basse vitesse). Dépourvue de béquille, conçue pour rester droite à l'arrêt, et pour aider les conducteurs dans les courbes, elle arrive à se maintenir grâce au mouvement de sa fourche.



FIGURE 1.12: Honda Riding Assist 2019[7].

Domaine médicale, IBOT, un fauteuil roulant électrique automatisé, qui fonctionne en se basent sur le principe du pendules inversé. C'est un appareil équipé de quatre roues motrices qui est capable d'aider des personnes avec des problèmes de mobilité, de ce déplacer en s'assurent un déplacement sur différents types de terrains (trottoirs, escaliers, gravier, etc) en tout faciliter. Et comme application réussite du principe de ce pendule inversé, on peut citer le Segway et le Hoverboard. C'est deux là sont des moyens de transport électrique et individuelle.



FIGURE 1.13: (a) : IBOT en position deux roues, (b) : IBOT en position descente escaliers[4].



FIGURE 1.14: Segway[7].



FIGURE 1.15: hoverboard [7].

1.4 Conclusion

Nous avons présenté dans ce chapitre quelques types de pendules ainsi que leur domaines d'applications.

Dans la suite de ce travail, l'étude se portera sur le pendule inversé rotatif qui représente un système mécanique très intéressant à cause de sa nature sous-actionnée et sa dynamique non linéaire et instable.

CHAPITRE

2

MODÉLISATION DU PENDULE INVERSÉ
ROTATIF

2.1 Introduction :

Ce chapitre présente la modélisation du Pendule Inversé Rotatif (PIR) sur lequel est portera notre travail. Dans la première partie, nous utilisons le formalisme de Lagrange pour trouver un modèle non linéaire sous forme d'équations différentielles et l'exprimer sous forme d'une représentation d'état. Puis nous présentons une linéarisation du modèle non linéaire autour de son point d'équilibre instable, ce qui est imposé par la complexité du système. Pour prouver l'efficacité de ce travail, nous fournissons une simulation qui montre clairement l'instabilité du système dans la dernière partie.

2.2 Modèle mathématique du PIR :

Le RIP est constitué d'un bras dans le plan horizontal qui est actionné par un moteur électrique. Au bout de ce bras horizontal, un second bras est attaché et est libre de tourner dans le plan vertical (les plans de rotation des deux bras sont perpendiculaires). A l'aide d'un contrôleur, il est possible de maintenir le bras vertical en équilibre instable. Ce genre de système est surtout utilisé dans un contexte universitaire pour tester différents types de contrôleurs et montrer le potentiel de la théorie du contrôle.

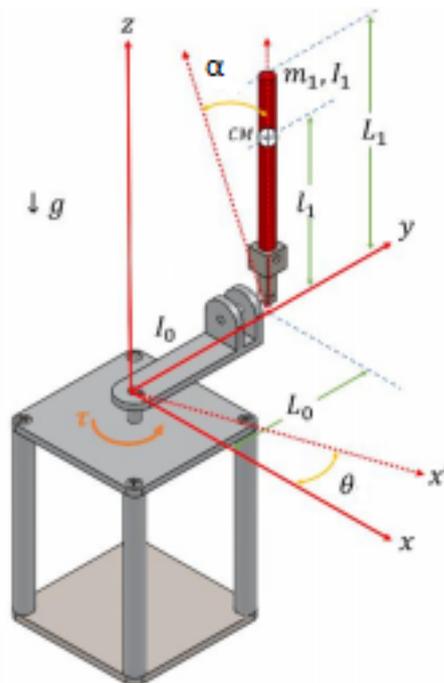


FIGURE 2.1: Modèle Pendule Inversé Rotatif[1].

Pour le modèle dynamique de notre pendule, nous nous basons sur le formalisme d'EULER-LAGRANGE qui nous fournit les équations différentielles qui décrivent l'évolution du système en fonction des forces extérieures. Les paramètres de la maquette sont fournis par le constructeur dans le databook, et sont très précis car c'est une solution de laboratoire. Les valeurs des paramètres sont données dans l'annexe (tableau 1).

Ce système à deux degrés de liberté donc il est décrit par deux coordonnées généralisées (α, θ) avec α est l'angle du pendule, θ est l'angle du bras.

Dans cette modélisation on va utiliser la méthode de EULER-LAGRANGE qui est basée sur les énergies cinétique et potentiel. L'équation de LAGRANGE est :

$$L = E_c - E_p \quad (2.1)$$

Où L est le Lagrangien, E_c l'énergie cinétique et E_p l'énergie potentielle du système. les énergies cinétique rotationnelle et potentielle sont données par :

- Le bras :

$$\begin{cases} E_{P1} = 0 \\ E_{C1} = \frac{1}{2} J_r \dot{\theta}^2 \end{cases} \quad (2.2)$$

- Le pendule :

$$\begin{cases} E_{P2} = \frac{1}{2} m_p g L_p \cos \alpha \\ E_{C2} = \frac{1}{2} m_p \dot{P}^2 + \frac{1}{2} J_p \dot{\alpha}^2 \end{cases} \quad (2.3)$$

- L'énergie cinétique totale :

$$\begin{aligned} E_C &= E_{C1} + E_{C2} \\ E_C &= \frac{1}{2} J_r \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m_p \dot{P}^2 + \frac{1}{2} J_p \dot{\alpha}^2 \end{aligned} \quad (2.4)$$

- L'énergie potentielle totale :

$$\begin{aligned} E_P &= E_{P1} + E_{P2} \\ E_p &= \frac{1}{2} m_p g L_p \cos \alpha \end{aligned} \quad (2.5)$$

Avec P est la position du centre de masse donnée par les équations suivantes :

$$\begin{cases} P_x = L_r \cos \theta + \frac{1}{2} L_p \sin \alpha \sin \theta \\ P_y = L_r \sin \theta - \frac{1}{2} L_p \sin \alpha \cos \theta \\ P_z = L_p \cos \alpha \end{cases} \quad (2.6)$$

On dérive pour obtenir l'équation de Lagrange

$$\begin{cases} \dot{P}_x = -L_r \dot{\theta} \sin \theta + \frac{1}{2} L_p (\dot{\alpha} \cos \alpha \sin \theta + \dot{\theta} \cos \theta \sin \alpha) \\ \dot{P}_y = L_r \dot{\theta} \cos \theta - \frac{1}{2} L_p (\dot{\alpha} \cos \alpha \cos \theta - \dot{\theta} \sin \theta \sin \alpha) \\ \dot{P}_z = -\frac{1}{2} L_p \dot{\alpha} \sin \alpha \end{cases} \quad (2.7)$$

On a :

$$\dot{P}^2 = \dot{P}_x^2 + \dot{P}_y^2 + \dot{P}_z^2 \quad (2.8)$$

Alors en remplaçant dans 2.4, on trouve :

$$E_c = \frac{1}{2} \left(J_r + m_p L_r^2 + \frac{1}{4} m_p L_p^2 \sin^2 \alpha \right) \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} \left(J_p + \frac{1}{4} m_p L_p^2 \right) \dot{\alpha}^2 - \frac{1}{2} m_p L_r L_p \cos \alpha \dot{\theta} \dot{\alpha} \quad (2.9)$$

Alors L devient :

$$L = \frac{1}{2} \left(J_r + m_p L_r^2 + \frac{1}{4} m_p L_p^2 \sin^2 \alpha \right) \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} \left(J_p + \frac{1}{4} m_p L_p^2 \right) \dot{\alpha}^2 - \frac{1}{2} m_p L_r L_p \cos \alpha \dot{\theta} \dot{\alpha} - \frac{1}{2} m_p g L_p \cos \alpha \quad (2.10)$$

Pour aboutir à des équations différentielles, nous utilisons la formule d'Euler-Lagrange.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{dL}{dx} \right) - \frac{dL}{dx} = Q \quad (2.11)$$

Avec Q est la force extérieure (comme le frottement) et x est une coordonnée généralisée. Pour un système à n degrés de liberté, on trouve n équations.

Dans le cas du PIR possédant deux degrés de liberté, décrit donc par deux coordonnées généralisées :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \left(\frac{dL}{d\dot{\theta}} \right) - \frac{dL}{d\theta} = Q_1 \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{dL}{d\dot{\alpha}} \right) - \frac{dL}{d\alpha} = Q_2 \end{cases} \quad (2.12)$$

On trouve alors deux forces extérieures, une force en relation avec θ donc c'est la force appliquée à la tige (couple du moteur et frottement) notée Q_1 et une force de frottement en relation avec α notée Q_2 [9].

$$\begin{cases} Q_1 = \tau - B_r \dot{\theta} \\ Q_2 = -B_p \dot{\alpha} \end{cases} \quad (2.13)$$

Avec B_r, B_p sont les coefficients des frottements visqueux du bras et du pendule respectivement et τ représente le moment du couple appliqué à la tige rotative généré par le servomoteur, il est donné par :

$$\tau = \frac{\eta_g \eta_m K_g K_t (V_m - K_g K_m \dot{\theta})}{R_m} \quad (2.14)$$

Finalement, les équations différentielles qui décrivent le mouvement du système sont données comme suites :

$$\begin{aligned} \ddot{\theta} \left(J_r + m_p L_r^2 + \frac{1}{4} m_p L_p^2 \sin^2 \alpha \right) + \ddot{\alpha} \left(-\frac{1}{2} m_p L_r L_p \cos \alpha \right) + \dot{\alpha} \dot{\theta} \left(\frac{1}{2} m_p L_p^2 \sin \alpha \cos \alpha \right) + \\ \dot{\alpha}^2 \left(\frac{1}{2} m_p L_r L_p \sin \alpha \right) = Q_1 \\ \ddot{\theta} \left(-\frac{1}{2} m_p L_r L_p \cos \alpha \right) + \ddot{\alpha} \left(J_p + \frac{1}{4} m_p L_p^2 \right) + \dot{\theta}^2 \left(-\frac{1}{4} m_p L_p^2 \sin \alpha \cos \alpha \right) - \frac{1}{2} m_p g L_p \sin \alpha = Q_2 \end{aligned}$$

Le modèle est écrit sous forme d'un système de deux équations à deux inconnues :

$$\begin{cases} a\ddot{\theta} + b\ddot{\alpha} = c \\ a_1\dot{\theta} + b_1\dot{\alpha} = c_1 \end{cases} \quad (2.15)$$

Avec :

- $a = \left(J_r + m_p L_r^2 + \frac{1}{4} m_p L_p^2 \sin^2 \alpha \right)$
- $a_1 = \left(-\frac{1}{2} m_p L_r L_p \cos \alpha \right)$
- $b = \left(-\frac{1}{2} m_p L_r L_p \cos \alpha \right)$
- $b_1 = \left(J_p + \frac{1}{4} m_p L_p^2 \right)$
- $c = \tau - B_r \dot{\theta} - \left[\dot{\alpha} \dot{\theta} \left(\frac{1}{2} m_p L_p^2 \sin \alpha \cos \alpha \right) + \dot{\alpha}^2 \left(\frac{1}{2} m_p L_r L_p \sin \alpha \right) \right]$
- $c_1 = -B_p \dot{\alpha} - \left[\dot{\theta}^2 \left(-\frac{1}{4} m_p L_p^2 \sin \alpha \cos \alpha \right) - \frac{1}{2} m_p g L_p \sin \alpha \right]$

Pour résoudre le système 2.15 on utilise la méthode de Cramer afin de tirer $\ddot{\alpha}$ et $\dot{\theta}$:

$$\begin{aligned} \dot{\theta} &= \frac{\begin{vmatrix} a & c \\ a_1 & c_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}} = \frac{ac_1 - a_1c}{ab_1 - a_1b} = \frac{det1}{det} \\ \ddot{\alpha} &= \frac{\begin{vmatrix} a & b \\ b_1 & c_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}} = \frac{bc_1 - b_1c}{ab_1 - a_1b} = \frac{det2}{det} \end{aligned} \quad (2.16)$$

$$det = \left(J_r + m_p L_r^2 \right) \left(J_p + \frac{1}{2} m_p L_p^2 \right) + \frac{1}{4} m_p L_p^2 \sin^2 \alpha \left(J_p + \frac{1}{4} m_p L_p^2 \right) + \frac{1}{4} (m_p L_p L_r \cos \alpha)^2$$

$$\begin{aligned} det1 = & \left[\tau - B_r \dot{\theta} - \left(\frac{1}{2} m_p L_p^2 \sin \alpha \cos \alpha \right) \dot{\alpha} \dot{\theta} - \left(\frac{1}{2} m_p L_r \sin \alpha \right) \dot{\alpha}^2 \right] \left(J_p + \frac{1}{4} m_p L_p^2 \right) \times \\ & - \left[-B_p \dot{\alpha} + \left(\frac{1}{4} m_p L_p^2 \sin \alpha \cos \alpha \right) \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m_p g L_p \sin \alpha \right] \left(-\frac{1}{2} m_p L_r L_p \cos \alpha \right) \end{aligned} \quad (2.17)$$

$$\begin{aligned} det2 = & \left[-B_p \dot{\alpha} + \left(\frac{1}{4} m_p L_p^2 \sin \alpha \cos \alpha \right) \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m_p g L_p \sin \alpha \right] \left(J_r + m_p L_p^2 + \frac{1}{4} m_p L_p^2 \sin \alpha^2 \right) \\ & - \left[\tau - B_r \dot{\theta} - \left(\frac{1}{2} m_p L_p^2 \sin \alpha \cos \alpha \right) \dot{\alpha} \dot{\theta} - \left(\frac{1}{2} m_p L_r \sin \alpha \right) \dot{\alpha}^2 \right] \left(-\frac{1}{2} m_p L_r L_p \cos \alpha \right) \end{aligned} \quad (2.18)$$

Alors

$$\begin{aligned} \ddot{\theta} = & \left[\tau - B_r \dot{\theta} - \left(\frac{1}{2} m_p L_p^2 \sin \alpha \cos \alpha \right) \dot{\alpha} \dot{\theta} - \left(\frac{1}{2} m_p L_r \sin \alpha \right) \dot{\alpha}^2 \right] \frac{\left(J_p + \frac{1}{4} m_p L_p^2 \right)}{det} \\ & - \left[-B_p \dot{\alpha} + \left(\frac{1}{4} m_p L_p^2 \sin \alpha \cos \alpha \right) \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m_p g L_p \sin \alpha \right] \frac{\left(-\frac{1}{2} m_p L_r L_p \cos \alpha \right)}{det} \end{aligned} \quad (2.19)$$

$$\begin{aligned} \ddot{\alpha} = & \left[-B_p \dot{\alpha} + \left(\frac{1}{4} m_p L_p^2 \sin \alpha \cos \alpha \right) \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m_p g L_p \sin \alpha \right] \frac{\left(J_r + m_p L_p^2 + \frac{1}{4} m_p L_p^2 \sin \alpha^2 \right)}{det} \\ & - \left[\tau - B_r \dot{\theta} - \left(\frac{1}{2} m_p L_p^2 \sin \alpha \cos \alpha \right) \dot{\alpha} \dot{\theta} - \left(\frac{1}{2} m_p L_r \sin \alpha \right) \dot{\alpha}^2 \right] \frac{\left(-\frac{1}{2} m_p L_r L_p \cos \alpha \right)}{det} \end{aligned} \quad (2.20)$$

Le mouvement du système est assuré par un servomoteur, alors l'entrée est la tension délivrée au moteur. Pour expliciter l'application de la tension dans notre système, il est nécessaire d'avoir recours à la formule du couple moteur est donnée comme suit :

$$\tau = \frac{\eta_g \eta_m K_g K_t (V_m - K_g K_m \dot{\theta})}{R_m} \Rightarrow \tau = \frac{\eta_g \eta_m K_g K_t}{R_m} V_m - \frac{\eta_g \eta_m K_m K_t K_g^2}{R_m} \dot{\theta} \quad (2.21)$$

2.3 Représentation d'état

Généralement la présentation des systèmes dynamiques en automatique s'effectue par une représentation dans l'espace d'état, parce que la représentation d'état permet de connaître le comportement interne du système ainsi que son comportement externe. Cette dernière décrit le système entier à travers un ensemble de significations physiques, ces quantités sont appelées variables d'état. D'une manière générale, l'évolution d'un système linéaire dans l'espace d'état est donnée :

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases} \quad (2.22)$$

Avec x est le vecteur d'état, $u \in R^m$ est le vecteur d'entrée et $y \in R^p$ est le vecteur de sortie. $A \in R^{nm}$: Matrice d'état. $B \in R^{nm}$: Matrice d'entrée. $C \in R^{np}$: Matrice de sortie. $D \in R^{nm}$: Matrice de transfert direct (ou couplage) entrée/sortie. Il est rare que la sortie du système soit directement reliée à son entrée. On a donc très souvent $D = 0$.

- La représentation d'état parfaitement adaptée a l'étude d'un système multi-variables.
- La représentation d'état permet d'accéder a la connaissance de variables internes.

Représentation d'état matricielle est représenté comme suit (fig 2.2) :

On choisit souvent comme variables d'états, des éléments du système susceptibles d'être des réservoirs d'énergie. Dans le cas du PIR le vecteur d'état est pris donc :

$$x = (x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4)^T = (\theta \ \alpha \ \dot{\theta} \ \dot{\alpha})^T$$

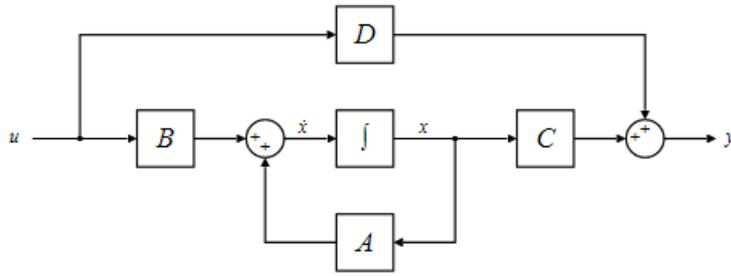


FIGURE 2.2: Représentation d'état matricielle

La représentation d'état est donnée par :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_3 \\ \dot{x}_2 = x_4 \\ \dot{x}_3 = f_1(x) + g_1(x)u \\ \dot{x}_4 = f_2(x) + g_2(x)u \end{cases} \quad (2.23)$$

Avec u est la commande appliquée au système donnée par :

$$u = \tau = \frac{\eta_g \eta_m K_g K_t (V_m - K_g K_m \dot{\theta})}{R_m} \Rightarrow \tau = \frac{\eta_g \eta_m K_g K_t}{R_m} V_m - \frac{\eta_g \eta_m K_m K_t K_g^2}{R_m} \dot{\theta}$$

et les fonctions $f_1(x)$; $f_2(x)$; $g_1(x)$ et $g_2(x)$ sont données comme suites :

$$f_1(x) = \left[-\frac{\eta_g \eta_m K_m K_t K_g^2}{R_m} x_3 - B_r x_3 - \left(\frac{1}{2} m_p L_p^2 \sin x_2 \cos x_2 \right) x_4 x_3 - \left(\frac{1}{2} m_p L_r \sin x_2 \right) x_4^2 \right] \frac{(J_p + \frac{1}{4} m_p L_p^2)}{\det} - \left[-B_p x_3 + \left(\frac{1}{4} m_p L_p^2 \sin x_2 \cos x_2 \right) x_3^2 + \frac{1}{2} m_p g L_p \sin x_2 \right] \frac{(\frac{1}{2} m_p L_r L_p \cos x_2)}{\det} \quad (2.24)$$

$$g_1(x) = \frac{J_p + \frac{1}{4} m_p L_p^2}{\det} * z$$

$$f_2(x) = \left[-B_p x_4 + \left(\frac{1}{4} m_p L_p^2 \sin x_2 \cos x_2 \right) x_3^2 + \frac{1}{2} m_p g L_p \sin x_2 \right] \frac{(J_r + m_p L_p^2 + \frac{1}{4} m_p L_p^2 \sin^2 x_2)}{\det} - \left[-\frac{\eta_g \eta_m K_m K_t K_g^2}{R_m} x_3 - B_r x_3 - \left(\frac{1}{2} m_p L_p^2 \sin x_2 \cos x_2 \right) x_4 x_3 - \left(\frac{1}{2} m_p L_r \sin x_2 \right) x_4^2 \right] \frac{(-\frac{1}{2} m_p L_r L_p \cos x_2)}{\det} \quad (2.25)$$

$$g_2(x) = \frac{-\frac{1}{2} m_p L_r L_p \cos x_2}{\det} * z$$

Avec :

$$\det = (J_r + m_p L_r^2) \left(J_p + \frac{1}{2} m_p L_p^2 \right) + \frac{1}{4} m_p L_p^2 \sin^2 x_2 \left(J_p + \frac{1}{4} m_p L_p^2 \right) + \frac{1}{4} (m_p L_p L_r \cos x_2)^2$$

2.4 Linéarisation du système :

Le modèle du PIR est trop complexe, non linéaire et sous actionné car il possède une seule entrée u (la tension délivrée au moteur) dans le but de commander deux sorties (la stabilisation de la tige et du pendule). Il est alors évident que la commande du système est relativement difficile. Alors, une linéarisation du système autour de ses points d'équilibre est nécessaire.

2.4.1 Les points d'équilibres

Les points d'équilibre sont les points correspondants à $\dot{x} = 0$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 0 \\ \dot{x}_2 = 0 \\ \dot{x}_3 = 0 \\ \dot{x}_4 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \\ f_1(x) = 0 \\ f_2(x) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \dot{\theta} = 0 \\ \dot{\alpha} = 0 \\ f_1(x) = 0 \\ f_2(x) = 0 \end{cases} \quad (2.26)$$

On injecte les valeurs d'équilibre $\dot{\theta} = 0; \dot{\alpha} = 0; \tau = 0$ dans les équations de $\ddot{\alpha}$ et $\ddot{\theta}$ données auparavant et on trouve :

$$\begin{cases} \dot{\theta} = 0 \\ \dot{\alpha} = 0 \\ \frac{1}{2}m_p g L_p \sin \alpha \left(\frac{1}{2}m_p L_r L_p^2 \cos \alpha \right) = 0 \\ \sin \alpha (J_r + m_p L_p^2 \sin^2 \alpha) = 0 \end{cases} \quad (2.27)$$

La résolution de système donne $\alpha = k\pi$ avec $k \in Z$ et $\theta \in R$. Physiquement il n'existe que deux cas $\alpha = 0$ et $\alpha = \pi$

alors l'ensemble des points d'équilibre de ce système est donné par $\{x_1 = (\theta \ \pi \ 0 \ 0); x_2 = (\theta \ 0 \ 0 \ 0)\}$. Intuitivement, on peut déduire que le premier point d'équilibre est stable (correspondant à la position du pendule en bas) tandis que le deuxième est instable (correspondant à la position du pendule en haut). Cette déduction peut être confirmée mathématiquement de la procédure suivante :

1. Linéarisation du système autour de chaque point d'équilibre.
2. Calcul des valeurs propres de chaque système linéarisé.
3. Discussion de la stabilité selon le signe de la partie réelle des valeurs propres selon le théorème suivant :

Soit $\{\lambda_0, \dots, \lambda_n\}$ l'ensemble des valeurs propres du système :

- a si $\forall i \in [0, n]$.
- b $Re(\lambda_i) < 0$ alors le point d'équilibre est globalement asymptotiquement stable.
- c $Re(\lambda_i) \leq 0$ alors le point d'équilibre est stable mais n'est pas asymptotiquement stable.
- d Si $\exists i$ tq $Re(\lambda_i) > 0$ alors le point d'équilibre est instable.

Il est inutile d'étudier le système autour d'un point d'équilibre stable alors on va focaliser le travail sur le deuxième point $x = (\theta, 0, 0, 0)$.

2.4.2 Linéarisation du système autour de point d'équilibre :

Le système linéarisé s'écrit sous la forme :

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases} \quad (2.28)$$

Pour obtenir cette forme en utilise la formule de Taylor-Young donnée comme suite :

$$f(x) = (x - a)f'(a) + \frac{(x - a)^2}{2!}f''(a) + \dots + \frac{(x - a)^n}{n!}f^{(n)}(a) + (x - a)^n \epsilon(x) \quad (2.29)$$

En utilisant le développement de premier ordre, on obtient :

$$f(x) \approx f(a) + f'(a)(x - a)$$

Avec :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{df_1}{dx_1} & \frac{df_1}{dx_2} & \frac{df_1}{dx_3} & \frac{df_1}{dx_4} \\ \frac{df_2}{dx_1} & \frac{df_2}{dx_2} & \frac{df_2}{dx_3} & \frac{df_2}{dx_4} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{dx_3}{du} \\ \frac{dx_4}{du} \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{(\frac{1}{2}m_p g L_p)(\frac{1}{2}m_p L_p L_r)}{De} & \frac{(-B_r - K_g K_m Z)(J_p + \frac{1}{4}m_p L_p^2)}{De} & \frac{B_p(-\frac{1}{2}m_p L_p L_r)}{De} \\ 0 & \frac{(\frac{1}{2}m_p g L_p)(J_r + m_p L_p^2)}{De} & \frac{(B_r - K_g K_m Z)(-\frac{1}{2}m_p L_r L_p)}{De} & \frac{-B_p(J_r + m_p L_p^2)}{De} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{Z(J_p + \frac{1}{4}m_p L_p^2)}{De} \\ \frac{(\frac{1}{2}m_p L_r L_p)Z}{De} \end{bmatrix}$$

Avec :

$$De = J_p J_r + J_p m_p L_r^2 + \frac{1}{4} J_r m_p L_p^2$$

et

$$Z = \frac{n_g n_m K_g K_t}{R_m}$$

On prend les positions (θ, α) comme sorties alors :

En utilisant les valeurs données précédemment, le système s'écrit :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 81.4973 & -0.9687 & -0.9317 \\ 0 & -122.0674 & 0.9317 & -1.3955 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 403.6269 \\ 388.2133 \end{bmatrix}$$

On prend les positions (θ, α) comme sorties alors :

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

et

$$D = 0$$

2.5 Résultats de simulations

La simulation du système est importante en raison de sa conception et réalisation expérimentale. Nous avons simulé le modèle linéarisé du pendule autour de son point d'équilibre instable $(\theta, 0, 0, 0)$. Ce point a donné un modèle linéaire avec une valeur propre à partie réelle positive donc un système instable. Le point d'équilibre pris est un point d'équilibre dit répulsif donc le fait de lancer le pendule de n'importe quelle condition initiale il ne voit que le $(\theta, 0, 0, 0)$ mais celui la est instable et répulsif (dans sa zone de linéarité) alors il pousse le pendule vers le bas et ainsi de suite il fait un tour ensuite 2 tours jus qu'une infinité, ce qui explique l'allure obtenue par la simulation . Donc ce modèle a besoin d'une commande pour le stabiliser.

La figure 2.3 représente le comportement non linéaire de angle du bras avec la condition initiale $x = (0, 0, 0, 0)$.

Nous avons remarqué sur la figure 2.3 que le modèle revient à 180 (pendule vers le bas). Partez d'une condition initiale à 0 (en haut) compatible avec le comportement réel du pendule, il revient toujours à un point d'équilibre stable sous l'action de la gravité, Il revient toujours à un point d'équilibre stable sous l'action de la gravité, donc le pendule converge vers sa position d'équilibre stable.

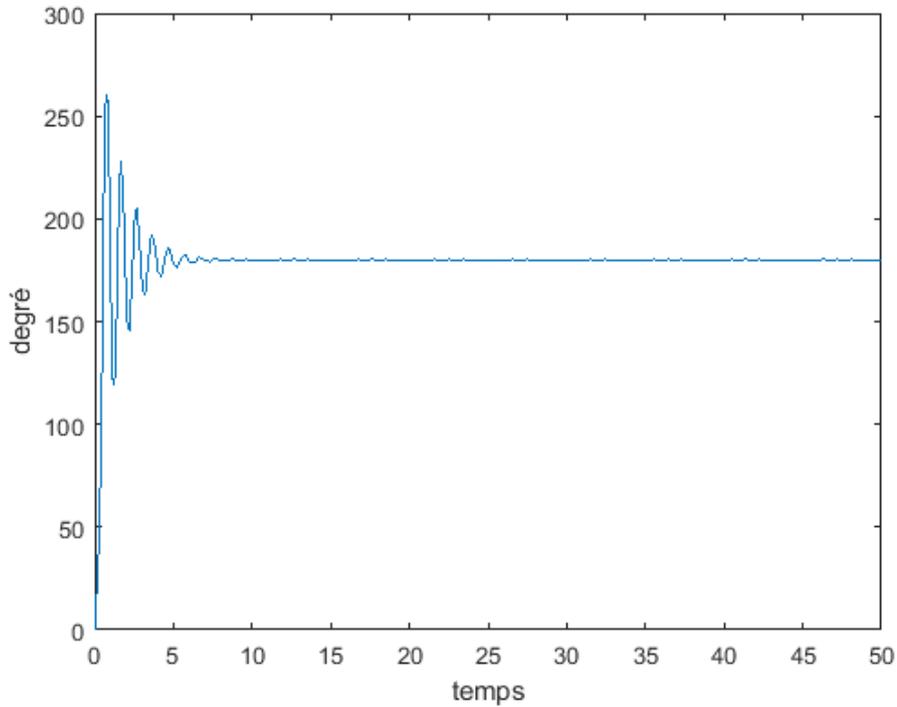


FIGURE 2.3: Angle du pendule

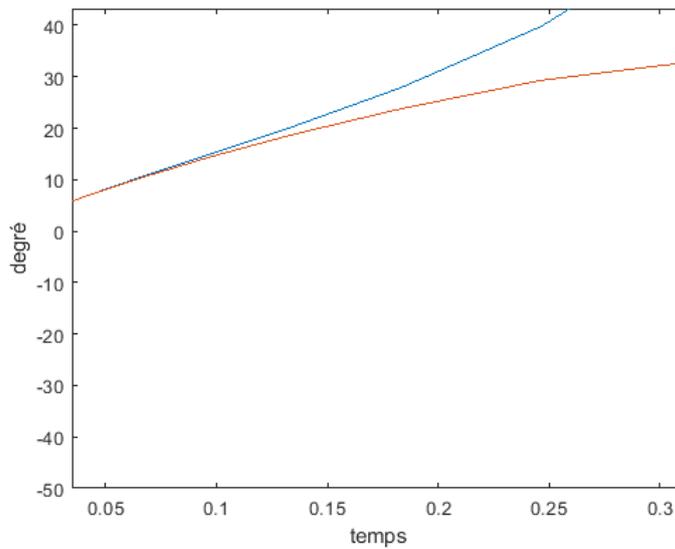


FIGURE 2.4: Comparaison entre le système linéaire et non linéaire

On remarque que dans la zone $-10 < \alpha < 10$ le système linéaire et non-linéaire se comportent de la même façon, donc on déduit que cet intervalle est celui de linéarité et montre que le comportement obtenu en simulant deux modèles simultanément temps. La figure(2.4) représente le comportement linéaire et non linéaire en même temps du système.

CHAPITRE

3

COMMANDES LINÉAIRES

3.1 Introduction :

Les premières approches de commande des systèmes non linéaires consistent à linéariser les équations de la dynamique autour d'un point de fonctionnement, puis appliquer les techniques de commande classique sur la base du modèle linéaire obtenu. L'utilisation de cette technique est l'une des solutions les plus connues et les plus efficaces. Ce chapitre traite la commande linéaire du pendule inversé rotatif, qui permettra de le stabiliser autour de son point d'équilibre instable. Pour concevoir une telle commande il faut respecter les contraintes énergétiques, et devant toutes incertitudes présentés dans le modèles et toutes perturbations, on doit assurer une certaine robustesse. Pour la premier partie, on vas utiliser la commande par placement de pôles en suite la commande LQR et on termine par la commande PID classique pour stabiliser le PIR. Avant toutes choses, on doit calculer la commandabilité du système.

3.2 Commandabilité du système

Le forçement de la trajectoire du système pour une convergence vers une trajectoire référence est ce que l'on appelle la commande du système :

Définition :

Un système linéaire donné sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases} \quad (3.1)$$

est complètement commandable, si et seulement si pour tout état initial $x(t_0) = x_0$ et tout état x_f , il existe une commande $u(t)$ sur $[t_0, t_f]$ et un temps fini $t_f > t_0$, qui permet au système de passer de l'état x_0 à l'état $x(t_f) = x_f$.

Théorème : Les assertions suivantes sont équivalentes :

- i) (A, B) est commandable.
- ii) La matrice de commandabilité $C = [B \ AB \ A^2B \dots \ A^{n-1}B]$ est de rang complet.
- iii) La matrice $(A - \lambda IB)$ est de rang complet $\forall \lambda \in \mathbb{C}$.
- iv) Les valeurs propres de $(A + BF)$ peuvent être arbitrairement choisies par un choix judicieux de F .

3.2.1 Étude de la commandabilité du PIR :

Les matrices d'état du PIR sont données comme suites :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 81.4973 & -0.9687 & -0.9317 \\ 0 & -122.0674 & 0.9317 & -1.3955 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 403.6269 \\ 388.2133 \end{bmatrix}$$

La matrice de commandabilité est :

$$C = [B \ AB \ A^2B \dots \ A^{n-1}B]$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 400 & -750 & 32520 \\ 0 & 390 & -170 & -47860 \\ 400 & -750 & 32520 & -420 \\ 390 & -170 & -47860 & 117310 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \text{rang}C = 4$$

$\text{Rang}(C) = 4$, donc le système est complètement commandable.

3.3 Commande par placement de pôles :

Une stratégie de commande est le placement de pôles par retour d'état qui permet d'imposer la dynamique du système en boucle fermée.

Le principe de la commande par retour d'état est d'utiliser les variables d'état en contre réaction pour but d'améliorer les performances du processus et de garantir au moins la stabilisation d'un système linéaire invariant. Elle nécessite la connaissance de toutes les variables d'état. Prenant le système linéaire 3.1, avec $x \in R^n$, $u \in R^m$, et $y \in R^p$. Les composantes du vecteur d'état $x(t)$ sont accessibles, et u est donnée par la loi suivante :

$$u = \beta v - Kx$$

où $v \in R^m$ est la consigne, $K \in R^{m \times n}$ et $\beta \in R^{m \times m}$ sont des matrices constantes. La figure suivante présente une représentation schématique de ce concept.

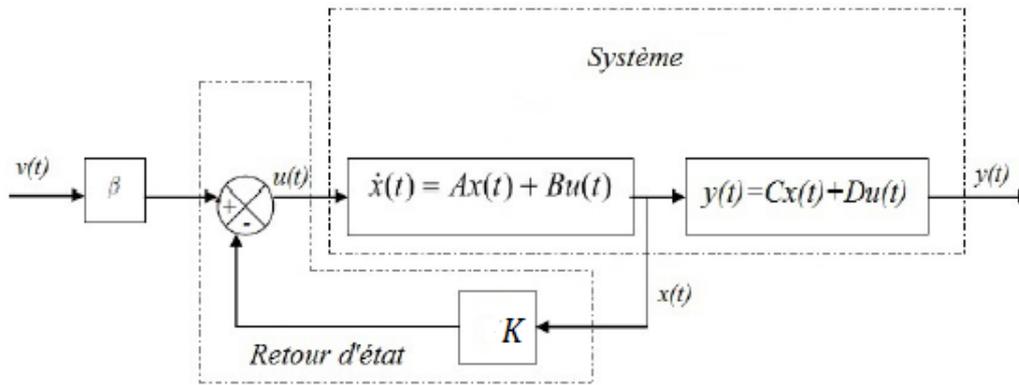


FIGURE 3.1: Schématisation du concept de la commande par retour d'état

Où K , est une matrice qui est déterminé de telle sorte que le spectre $(A - BK)$ soit égal au spectre désiré, $\beta = -(C(A - BK)^{-1}B)^{-1}$.

3.3.1 Cahier de charge :

Pour pouvoir choisir les pôles désirés il faut imposer un cahier de charge, qui est définie comme suit :

- Déviation maximale du pendule $|\alpha| < 11^\circ$: pour rester dans la zone de linéarité.
- La pulsation propre $\omega_n = 4 \text{ rad}$, pour avoir un temps de réponse inférieur à 2s.
- Voltage maximale $|V_m| < 24V$: imposé par le matériel disponible.
- Le coefficient d'amortissement : $\xi = 0.7$
- $0 < \xi < 1$: régime oscillatoire amorti : les amplitudes des oscillations décroissent au fil du temps et leur rapidité dépend de la valeur de ξ . Généralement on prend $\xi = 0.7$ parce qu'au-delà de cette valeur, le temps de réponse augmente rapidement.

3.3.2 Détermination des pôles :

Le PIR est un système d'ordre quatre, donc il possède quatre pôles, leur placement va ce faire comme suite :

On places deux pôles réels négatifs suffisamment loin à gauche pour qu'il soient insignifiants, on choisira -40 pour P_3 et -30 pour P_4 .

Les deux autre seront choisi de telle sorte à satisfaire le cahier de charge [10], on vas les calculer avec les formules suivant :

$$P_1 = -\sigma + j\omega_d$$

$$P_2 = -\sigma - j\omega_d$$

Où $\sigma = \xi\omega_n$ et $\omega_d = \omega_n\sqrt{1 - \xi^2}$

Après calculs, on trouve : $P_1 = -2.8000 + j2.8566$, $P_2 = -2.8000 - j2.8566$

$P_3 = -30$, $P_4 = -40$. et : $K = [0.2373 \quad 3.3069 \quad 0.0650 \quad 0.1210]$

3.3.3 Résultat de simulation :

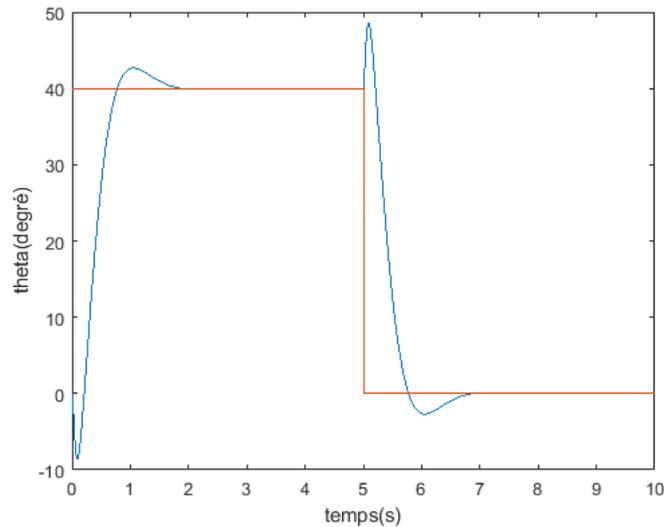


FIGURE 3.2: Évolution de l'angle du bras avec la commande par placement de pôles.

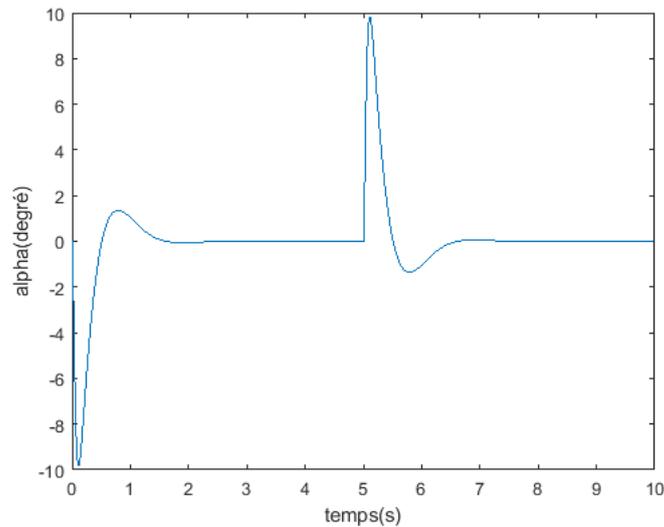


FIGURE 3.3: Évolution de l'angle du pendule avec la commande par placement de pôles.

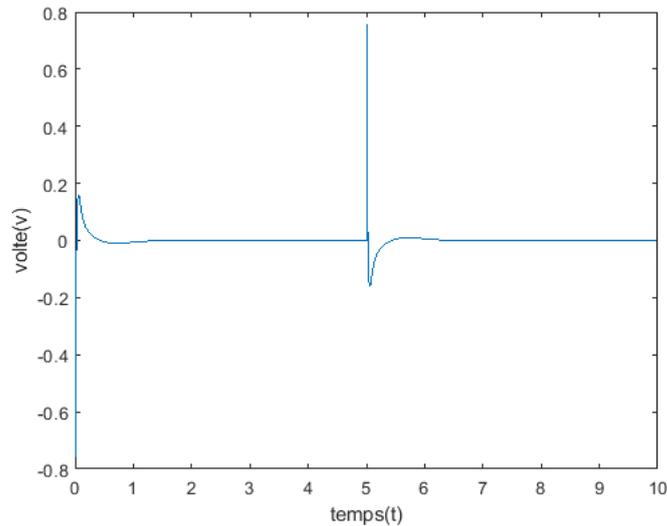


FIGURE 3.4: Évolution de la tension délivrée avec la commande par placement de pôles.

La Figure 3.2 représente le résultat de la commande de l'angle du bras pour un signal carré d'amplitude égale à 40° . La Figure 3.3 donne le résultat de la commande de l'angle du pendule, on remarque que la condition de la déviation maximal est respecté $|\alpha| < 10^\circ$.

La figure 3.4 montre que la tension délivrée au système ne dépasse pas les 24V comme il est indiqué dans le cahier de charge. On déduit des figures 3.2 et 3.3, que notre système est un système à non minimum de phase (c'est-à-dire qu'il possède un zéro positif). A partir de la figure 3.3 et la figure 3.4, on constate que la commande par retour d'état assure bien l'objectif de stabilisation du PIR.

3.4 Commande LQR (Linear Quadratic Regulator)

Le régulateur linéaire quadratique (LQR : Linear-Quadratic-Regulator) est une loi de commande optimale en boucle fermée qui permet d'assurer les performances désirées. Notez qu'il y a deux points d'équilibre pour les pendules inversés, 180° (stable) et 0° (instable). La figure 3.5 montre un diagramme schématique du système avec linéarisation et un régulateur K. Où K, est un gain mi-

minimisée obtenue en résolvant une équation algébrique de Riccati :

$$x^T S + SA - SBR^{-1}B^T S + Q = 0 \quad (3.2)$$

Ce gain est appelé gain LQ-optimal, basé sur une matrice de pondération des efforts Q et une matrice de pénalité d'état R. La commande optimale peut être obtenue en réglant les deux paramètres (R et Q). Ces deux paramètres équilibrent l'importance de l'entrée et de l'état dans la fonction de coût qui doit être optimisée. Pour un système à temps continu la loi de retour d'état minimise la fonction de coût quadratique, qui s'exprime sous la forme suivant :

$$J = \int_0^{\infty} (x^T Q x + u^T R u) dt \quad (3.3)$$

et les valeurs propres de la boucle fermée $e = eig(A - B * K)$

Notez que

$$K = R^{-1}B^T S$$

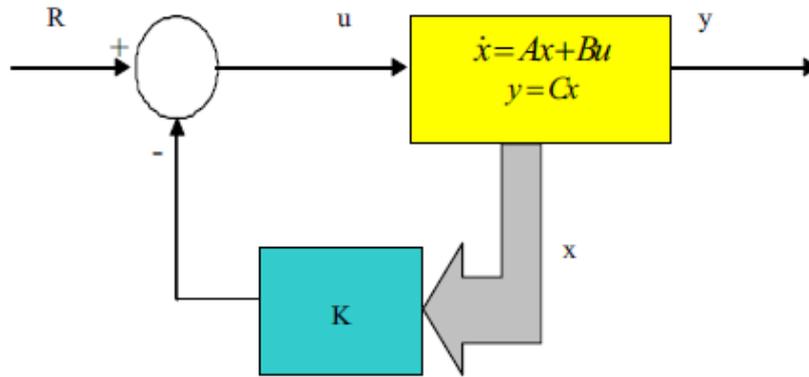


FIGURE 3.5: Schéma fonctionnel pour la réalisation de LQR

Afin de concevoir la commande LQR, nous avons besoin des paramètres de la matrice A et B et des matrices de pondération Q et R. Ainsi, la loi de commande optimale associée au problème de commande optimale quadratique lorsque le critère de performance est donné par l'équation :

$$u(t) = -kx(t)$$

Cette forme est celle d'un retour d'état. La commande Matlab lqr renvoie un ensemble de gains calculés sur la base des matrices A et B et les matrices de conception Q et R. Ici, Q et R sont des paramètres de pondération qui pénalisent certains états ou entrées de commande. Dans la conception, les paramètres de pondération du contrôleur optimal de retour d'état sont choisis comme suit :

$$Q = \begin{bmatrix} q1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} R = 1 \quad (3.4)$$

Ensuite, nous faisons varier q1 et q2 dans un intervalle que nous allons définir et tenir R à 1, sachant que q1 est principalement associée à 1 et q2 à 2. Nous pouvons alors choisir la variable d'état sur laquelle la commande met plus d'accent en augmentant le paramètre qi associé.

3.4.1 Détermination de la matrice Q

Le problème de cette commande est qu'il n'existe pas de méthode pour la détermination des éléments de la matrice Q et R, en effet la méthode dite essais-erreur reste la plus évidente. Dans le but de déterminer la meilleure combinaison, nous avons utilisé cette méthode, puis comparé les résultats pour chaque combinaison, afin de choisir la meilleure combinaison. La détermination des gains sur MATLAB est faite avec l'instruction suivante :

$$K = lqr(A, B, Q, 1);$$

[14], puis simuler sous Simulink le comportement du système linéarisé au quel nous appliquons la commande LQR pour des conditions initiales faibles afin de justifier l'utilisation de la commande linéaire. Dans cette conception, la matrice de gain du contrôleur K du système linéarisé est donnée comme suit :

$$k = [-1.7321 \quad 15.5653 \quad -0.9450 \quad 2.4509]$$

Ici, la matrice diagonale sélectionnée Q est avec des valeurs de q1, q2, q3 et q4, qui sont respectivement 3, 1, 1 et 1. Les valeurs diagonales sont sélectionnées selon la méthode itérative. On constate que les valeurs diagonales de q1 et q2 sont plus sensibles que les autres. Les performances de sortie sont testées en fonction sur quatre valeurs différentes de la matrice Q[2]. Les cas de test sont comme suit :

3.4.2 Résultats du simulation

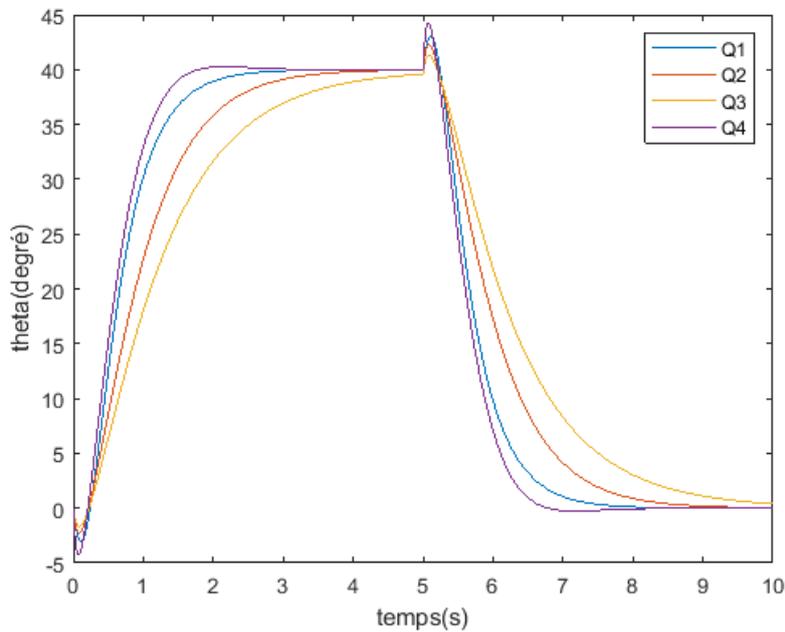


FIGURE 3.6: Évolution de theta par la commande LQR

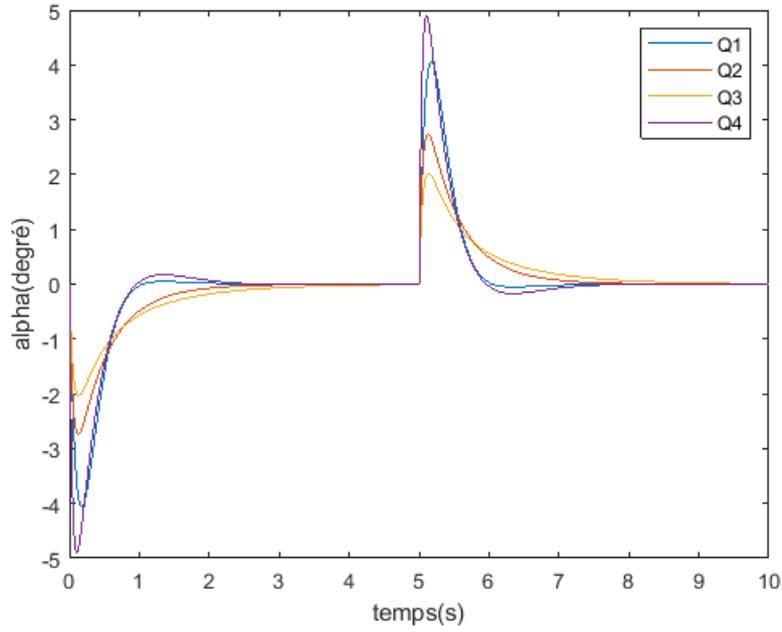


FIGURE 3.7: Évolution de alpha par la commande LQR

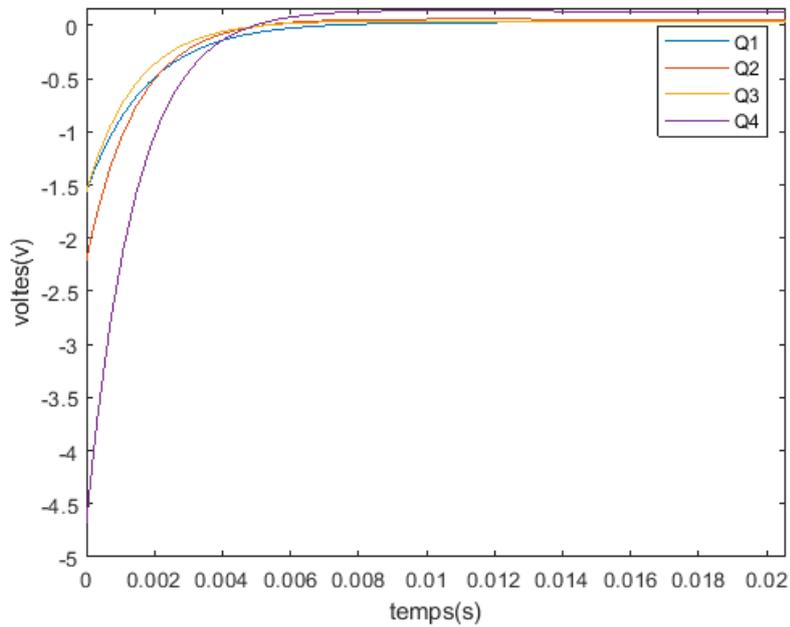


FIGURE 3.8: Évolution de u par la commande LQR

Les performances de sortie sont testées sur la base de quatre valeurs différentes de la matrice Q. Les cas de test sont les suivants :

$$Q = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad R = 1 \quad (3.5)$$

Pour le choix des paramètres : On à fixer la matrice R et varier la matrice Q quatre fois, en suite on à choisis la matrice Q qui nous donne le résultat le plus optimal, c'est-à-dire qui nous permet d'avoir moins de consommation d'énergie pour un système robuste et rapide. Un phénomène important qui s'est produit qui est la déviation de l'angle du pendule vers le coté opposé puis la remontée vers zéro, c'est due principalement au zéro instable (système à phase non minimale). Notons aussi que, quelle que soit la méthode employée pour la conception d'un régulateur, le trial and erreur sont inévitables. Dans le cas de la commande linéaire quadratique, avec un minimum d'expérience, le trial and erreur convergent très rapidement.

3.5 Régulateur Proportionnelle Intégrale Dérivée (PID)

Le correcteur PID est un organe de contrôle permettant d'effectuer une régulation en boucle fermée d'un système industrielle. Certainement la structure de commande la plus couramment utilisée dans l'industrie. Il s'est en effet imposée dans 90% des architectures de commande, dont la plupart ne sont constituées que des actions proportionnelle et intégrale. La prévalence de cette approche vient, au-delà de sa simplicité, des performances qu'elle offre aux systèmes pilotés, quel que soit leur domaine d'application.

L'idée centrale de ce type de régulateur est délivrer un signal de commande à partir de la différence entre une consigne y_{ref} et une mesure y . Soit e l'écart entre y_{ref} et y défini par $e = y_{ref} - y$.

Le régulateur PID classique est constitué d'une action proportionnelle P, d'une action intégrale I et d'une action dérivée D. Les combinaisons possibles entre ces actions permettent de donner trois structures de la commande PID à savoir : la structure série, la structure parallèle et la structure mixte. Chacune des structures présente des avantages par rapport aux autres. Dans la suite, nous allons présenter ces trois structures et les principaux différences entre elles.

- PID à structure série :

Dans la structure série, les trois actions P,I et D sont associées en série, c'est-à-dire le signal de l'erreur subit à trois transformations successives.

Dans cette structure le signal de commande $u(t)$ est défini par :

$$u(t) = \alpha K_p e(t) + \frac{K_p}{T_i} \int_0^{\infty} e(\tau) dt + T_d K_p \frac{de(t)}{dt} \quad (3.6)$$

Où :

$$\alpha = \frac{T_i + T_d}{T_i}$$

En appliquant la transformée de Laplace à $u(t)$, on obtient la fonction de transfert $C(p)$ du régulateur PID série :

$$C(p) = \frac{U(p)}{E(p)} = K_p \left(1 + \frac{1}{T_i} p\right) (1 + T_d p) \quad (3.7)$$

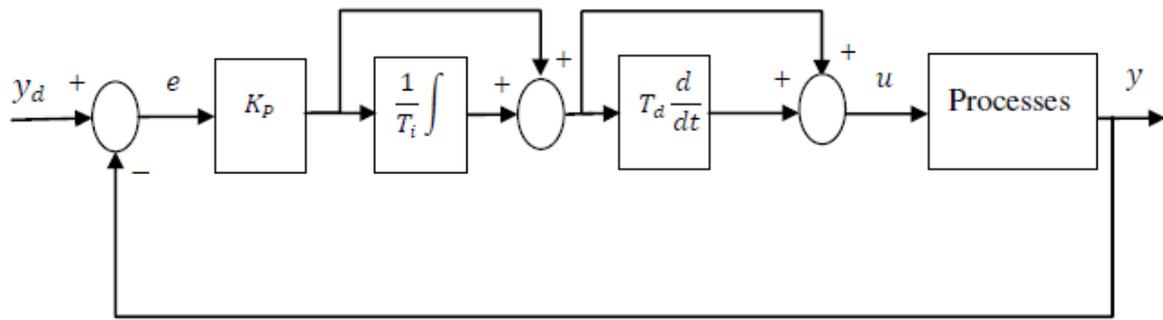


FIGURE 3.9: Structure série d'un régulateur PID

- PID à structure parallèle :
 Dans la structure parallèle, les trois actions P, I et D sont associées en parallèle, comme illustré par la figure 3.9 :

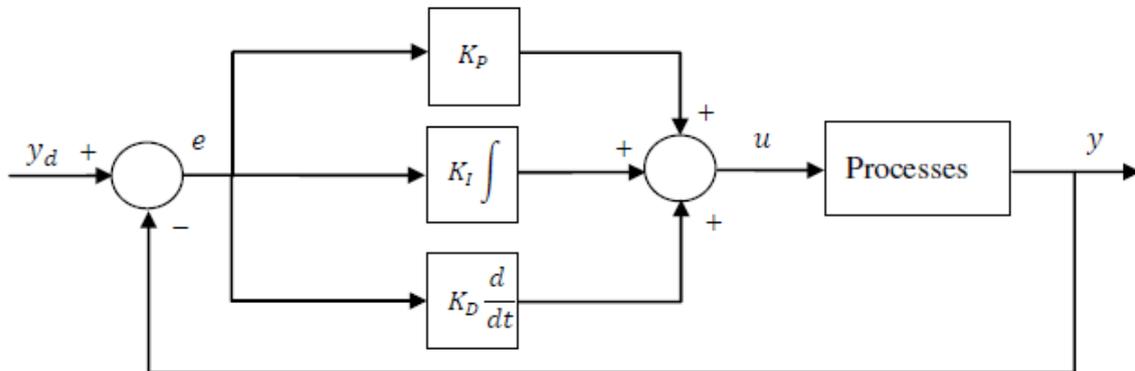


FIGURE 3.10: Structure parallèle d'un régulateur PID.

Dans cette structure le signal de commande $u(t)$ donné est défini par :

$$u(t) = K_p e(t) + K_i \int_0^{\infty} e(\tau) dt + K_d \frac{de(t)}{dt} \quad (3.8)$$

En appliquant la transformée de Laplace à $u(t)$, on obtient la fonction de transfert $C(p)$ du régulateur PID parallèle :

$$C(p) = \frac{U(p)}{E(p)} = K_p + \frac{K_i}{p} + K_d p \quad (3.9)$$

- PID à structure mixte :
 Dans la structure mixte, les deux actions I et D sont associées en parallèle, et leur somme est multipliée par l'action P, comme illustré par la figure 3.11 :

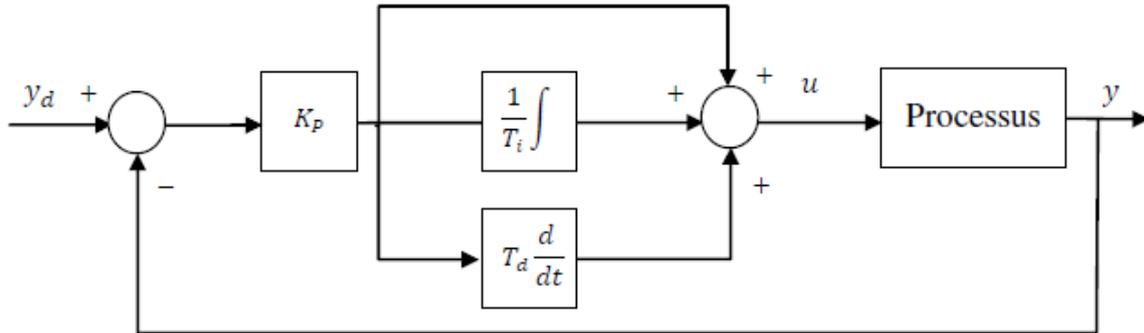


FIGURE 3.11: Structure mixte d'un régulateur PID.

Dans cette structure le signal de commande $u(t)$ est donné par :

$$u(t) = K_p(e(t) + \frac{1}{T_i} \int_0^{\infty} e(\tau)dt + T_d \frac{de(t)}{dt}) \quad (3.10)$$

En appliquant la transformée de Laplace à $u(t)$, on obtient la fonction de transfert $C(p)$ du régulateur PID mixte :

$$C(p) = \frac{U(p)}{E(p)} = K_p(1 + \frac{1}{T_i p} + T_d p) \quad (3.11)$$

La principale différence entre ces trois structures concerne l'effet des gains de réglage K_p , K_i et K_D avec $K_i = \frac{K_p}{T_i}$ et $K_d = K_p T_d$.

Sur le comportement du régulateur, on remarque que contrairement aux deux structures série et mixte. Où les trois actions sont couplées entre elles, dans la structure parallèle les trois actions sont découplées entre elles complètement, c'est-à-dire, la modification du gain proportionnel K_p ne modifie que l'action proportionnelle, tandis que, dans les deux autres structures (série et mixte), la modification du gain proportionnel K_p va modifier simultanément les trois actions (proportionnelle, intégrale et dérivée).

3.5.1 Principe de fonctionnement :

Le signal de commande est donc la somme de termes : un terme proportionnel à l'erreur, un autre proportionnel à l'intégral de l'erreur et le dernier proportionnel à la dérivée de l'erreur. La partie proportionnelle est considérée comme action de commande basée sur le présent, et la partie intégrale basée sur le passé, et la dernière partie qui est la dérivée est basée sur le futur. On va voir le rôle de chaque action pour bien illustrer leur fonctionnalité :

3.5.1.1 Action proportionnelle P :

La composante proportionnelle ne dépend que de la différence entre le point de consigne et la variable de processus (sortie). Cette différence est appelée terme d'erreur. Le gain proportionnel K_p détermine le rapport entre la réponse de sortie et le signal d'erreur. Par exemple, si le terme d'erreur a un 10, un gain proportionnel de 5 produirait une réponse proportionnelle de 50. En général, l'augmentation du gain proportionnel augmentera la vitesse de réponse du système de commande. Cependant, si le gain proportionnel est trop important, la variable de processus commencera à osciller. Si on augmente K_p , les oscillations deviendront plus grandes et le système deviendra instable et peut même osciller hors de contrôle.

3.5.1.2 Action Intégrale I :

La composante intégrale va intégrer le terme d'erreur en fonction du temps, pour avoir une erreur statique égale à zéro. Un phénomène appelé enroulement intégral (Wind up) résulte lorsque l'action intégrale sature le contrôleur qui conduira le signal d'erreur vers zéro.

3.5.1.3 Action dérivé D :

La composante dérivée entraîne une diminution de la sortie si la variable de processus augmente rapidement. La réponse dérivée est proportionnelle au taux de changement de la variable de processus. En augmentant le paramètre de gain dérivé K_d , le système de commande réagira plus fortement aux modifications du terme d'erreur et augmentera la vitesse de la réponse globale du système de commande. La plupart des systèmes de contrôle utilisent un très faible gain dérivé (K_d), car la réponse dérivée est très sensible au bruit dans le signal de variable de processus. Si le signal de retour du capteur est bruyant ou si le débit de la boucle de contrôle est trop lent, la réponse dérivée peut rendre le système de contrôle instable[5].

3.5.2 Choix des paramètres :

Le choix des gains K_p , K_i et K_d , se fait de manière à adapter la commande u aux exigences du système en boucle fermée. Cependant, il n'existe pas une unique méthode pour déterminer ces paramètres et il est donc nécessaire de réaliser des compromis entre durée du régime transitoire, dépassement, erreur statique et robustesse. Le tableau suivant indique le comportement de la boucle fermée lorsque les paramètres augmentent indépendamment les uns des autres :

Paramètre	Temps de montée	Temps de stabilisation	Dépassement	Erreur statique
K_p	diminue	augmente	augmente	diminue
K_i	diminue	augmente	augmente	annule
K_d	-	diminue	diminue	-

3.5.3 Méthode d'approximations successives :

On a choisis la méthode d'approximations successives qui est une méthode basée sur les essais pour obtenir les valeurs des gains. On suite la procédure qui consiste à mettre le système en boucle fermée puis on règle successivement l'action proportionnelle, l'action intégrale et enfin l'action dérivée :

1. En premier lieu on annule l'action intégrale et dérivée en mettant $T_i = \infty$ et $T_d = 0$, puis on augmente K_p jusqu'à avoir la réponse la plus rapide avec un amortissement maximum .
2. On diminue T_i pour annuler l'erreur statique et avoir la réponse la plus rapide avec un amortissement maximum et un écart minimum.
3. On augmente T_d jusqu'à avoir la réponse optimale.

C'est une méthode simple et très utilisée. Toutefois, son application devient longue sur les processus à grande inertie[12].

3.5.4 Application du PID :

Il existe de nombreuses variantes de la structure de régulation par PID de base qui permettent d'améliorer sensiblement les performances de la commande. L'une d'entre elles consiste à utiliser une structure de régulation dite en cascade se basant sur l'utilisation de deux régulateurs PID. Cette architecture de commande est applicable sur les systèmes composés de deux sous-systèmes en série, dont le premier est plus rapide que le second. comme le montre la figure 3.12, une structure de régulation en cascade est constituée d'une boucle externe et d'une autre interne, la sortie du régulateur de la boucle externe servant de référence au régulateur de la boucle interne. Pour le PIR, le correcteur lié à la dynamique de rotation du bras génère alors une référence en orientation que le

correcteur lié à la dynamique de rotation doit impérativement suivre. Il est important de remarquer que le gain proportionnel, le gain intégral et le gain dérivé des deux régulateurs peuvent être très différents. Une propriété très appréciable d'une telle structure de commande est son efficacité vis-à-vis

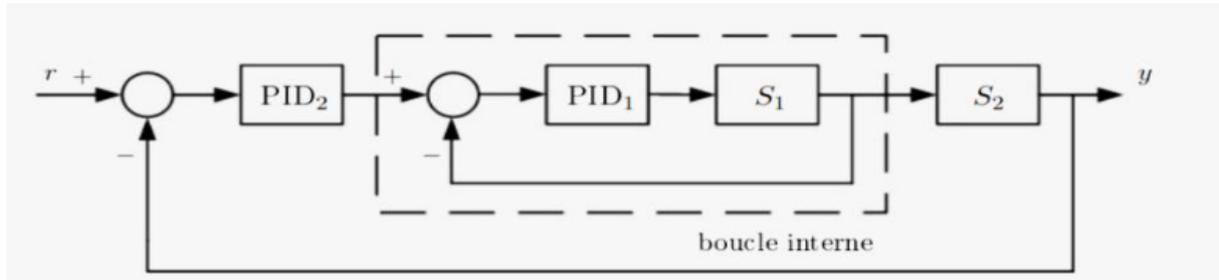


FIGURE 3.12: Structure de régulation par PID en cascade

de potentielles perturbations affectant le système, notamment au niveau du sous-système S_1 . En effet, dans le cas d'une régulation classique, il faudrait que l'effet de cette perturbation altère la sortie du second sous-système avant que le correcteur ne réagisse. Dans le cas d'une régulation en cascade, la perturbation est directement compensée par le correcteur PID_1 , évitant ainsi une perte de temps et de performance.

Pour notre système on va utiliser un régulateur PD à la place du PID parce-que le système présente un intégrateur en lui-même.

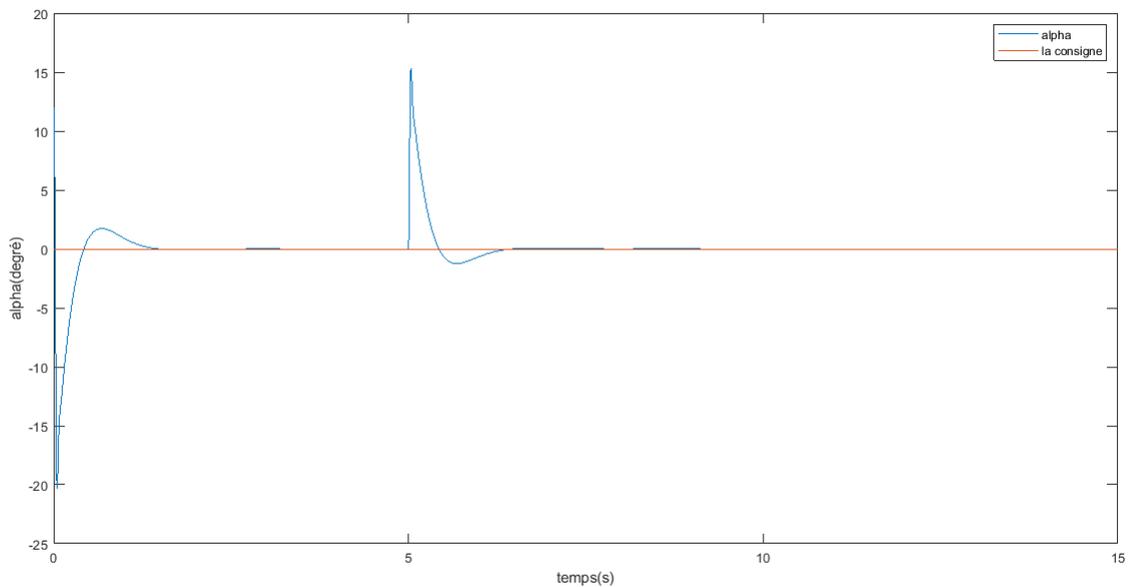


FIGURE 3.13: La position du pendule

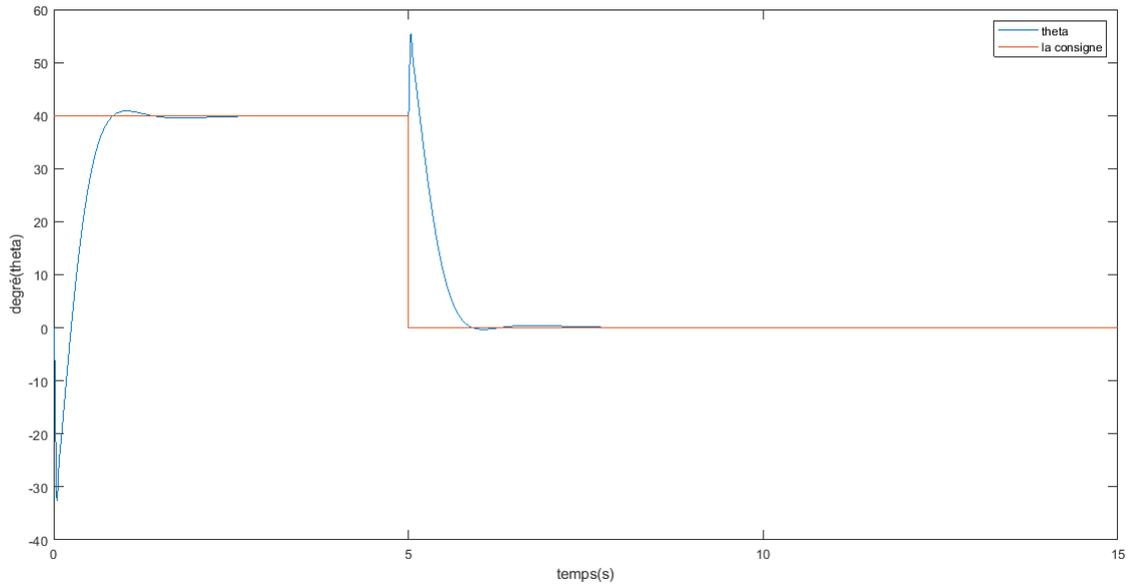


FIGURE 3.14: La position du bras

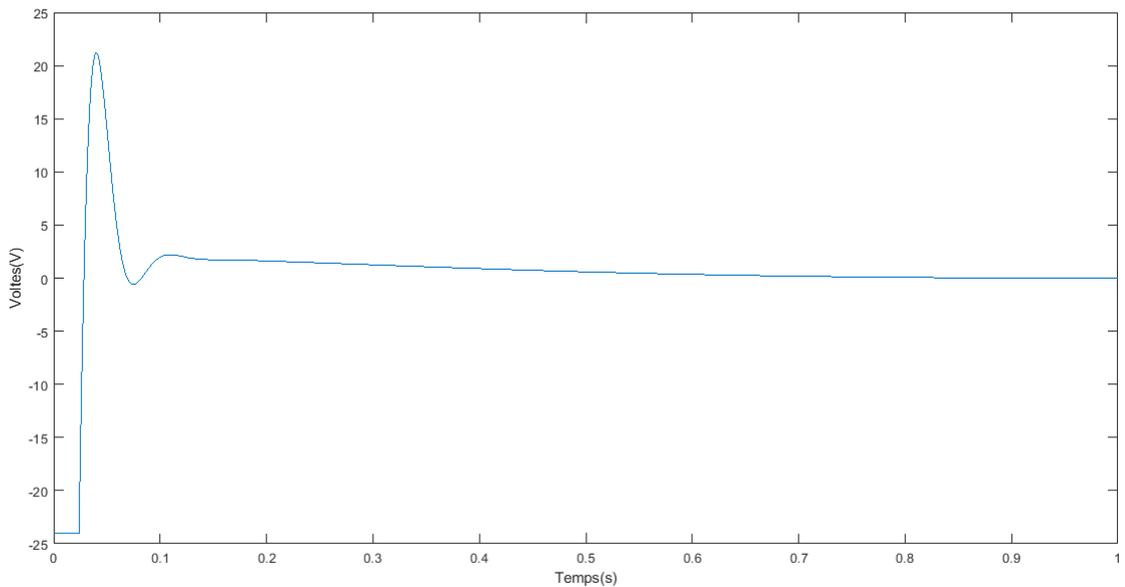


FIGURE 3.15: l'évolution de la commande

- Le régulateur PID nous a permis d'obtenir un système stable avec :
 - Erreur statique nulle.
 - Angle du pendule dans la zone de linéarité $-10deg < \alpha < 10deg$
 - $V_{max} < 24V$ ne dépasse pas la tension nominale du moteur

3.6 Comparaison entre les trois commandes :

Dans cette section, nous allons comparer les trois commandes présentées précédemment. Les résultats des simulation sont représentés dans les figures suivantes :

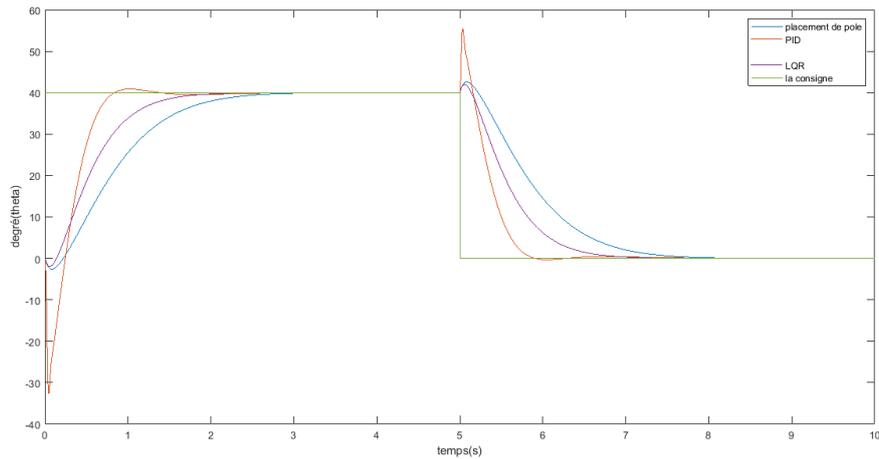


FIGURE 3.16: Évolution de l'angle du pendule avec les trois commandes

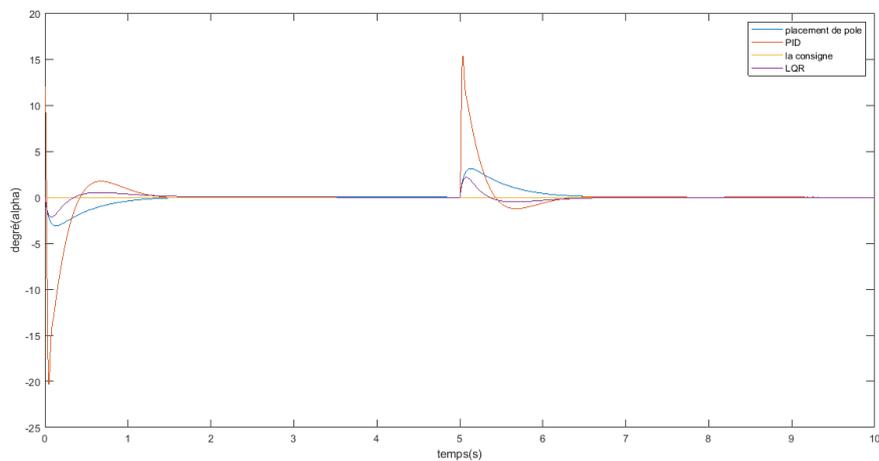


FIGURE 3.17: Évolution de l'angle du bras avec les trois commandes

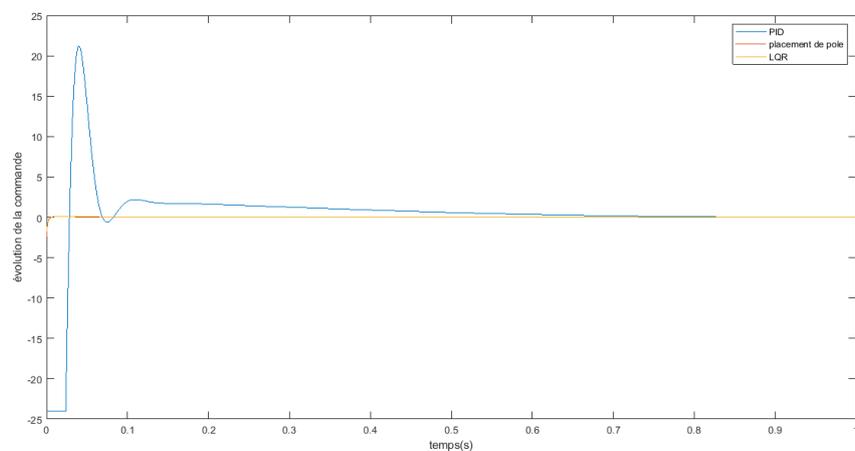


FIGURE 3.18: Figure 1 Tension délivrée au système pour les trois commandes

On remarque que le système converge bien vers la position d'équilibre instable et garde sa stabilité avec une erreur statique nulle que ce soit avec la commande PID, RE ou LQR, la différence réside dans le temps de convergence et l'énergie dissipée. En terme de rapidité, le correcteur PID donne la réponse la plus lente pour la stabilisation du bras, et de même pour la commande par placement de pôles, tandis que la commande LQR est la plus rapide entre les trois pour la correction de l'angle du bras. Cependant, pour la stabilisation du pendule. En terme d'énergie la tension maximale atteinte par les trois commandes est :

1. La commande PID : $|U_{max}|=24 \text{ V}$
2. La commande RE : $|U_{max}|=2.38 \text{ V}$
3. La commande LQR : $|U_{max}|=1.70 \text{ V}$

On remarque bien que la commande LQR est la plus optimal en terme de consommation d'énergie, suivie de placement de pôles, et dernièrement le régulateur PID qui consomme le plus, afin de stabiliser le pendule.

3.7 Conclusion

Nous avons présenté dans ce chapitre trois types des commandes linéaires dans le but de stabiliser le PIR autour de son point d'équilibre instable. Nous avons constaté que les trois commandes ont réussi à atteindre l'objectif désiré. Pour cela, nous avons fait une comparaison entre elles pour trouver la commande la plus performante. Nous avons remarqué que le correcteur linéaire quadratique a donné de meilleurs résultats en termes d'énergie, tandis que le correcteur PID est le plus rapide en stabilisation du pendule.

CHAPITRE

4

IMPLÉMENTATION EXPÉRIMENTALE
DE LES COMMANDES SUR LA
MAQUETTE QUBE-SERVO 2

4.1 Présentation du Pendule Inversé Rotatif

Le PIR considéré dans le cadre de ce travail est de type Quanser QUBE-Servo 2 disponible au niveau de notre établissement (ESSAT), appelé pendule de Furuta est un système classique en automatique. Il est largement utilisé pour tester les types de commandes parce qu'il représente un système multivariable non linéaire et sous-actionné. Le Quanser QUBE-Servo 2 est une plate-forme de servomoteur portable et entièrement intégrée conçue spécifiquement pour l'enseignement des concepts de commandes. Le système est équipé d'un moteur à courant continu brossé à entraînement, direct de haute qualité, un seul encodeur, d'un système d'acquisition de données interne et d'un amplificateur. La sélection de l'un des trois panneaux d'interface QFLEX 2, nous permet de connecter l'unité à un PC via USB, un périphérique embarqué NI myRIO et d'autres micro contrôleurs tels qu'un Arduino ou un Raspberry Pi en utilisant le protocole SPI.



FIGURE 4.1: Maquette du pendule rotatif Quanser

4.2 Composants du Pendule Inversé Rotatif (RIP)

Le PIR de type QUANSER est composé d'un moteur SVR02, qui entraîne un bras disposant à son extrémité un pendule (tige) lié l'un à l'autre par une liaison pivot. Ce système possède deux capteurs, une roue codeuse chacune. Les différents éléments du pendule sont décrits par la figure 4.15.



FIGURE 4.2: Composants du pendule rotatif Quanser

Le module de pendule inversé rotatif est fixé au SRV02 charge l'engrenage par deux vis à oreilles. Le bras pendulaire est fixé au corps du module par une vis de réglage. L'expérience du PIR est un

exemple classique de façon dont l'utilisation du contrôleur peut être utiliser pour stabiliser un système. Le pendule inversé est également un modèle précis dans le tangage et lacet d'une fusée en vol et peut être utilisé comme un référence pour de nombreuses méthodologies de contrôle.

4.3 Modèle linéaire de PIR

Représentation d'état du pendule rotatif QUBE-Servo sera changé par rapport a notre représentation d'état (Les valeurs des matrices A et B seront un peu d'efférent de nos matrices)

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 149.2751 & -0.0104 & 0 \\ 0 & 261.6091 & -0.0103 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 49.7275 \\ 49.1493 \end{bmatrix}$$

4.4 Simulation de modèle

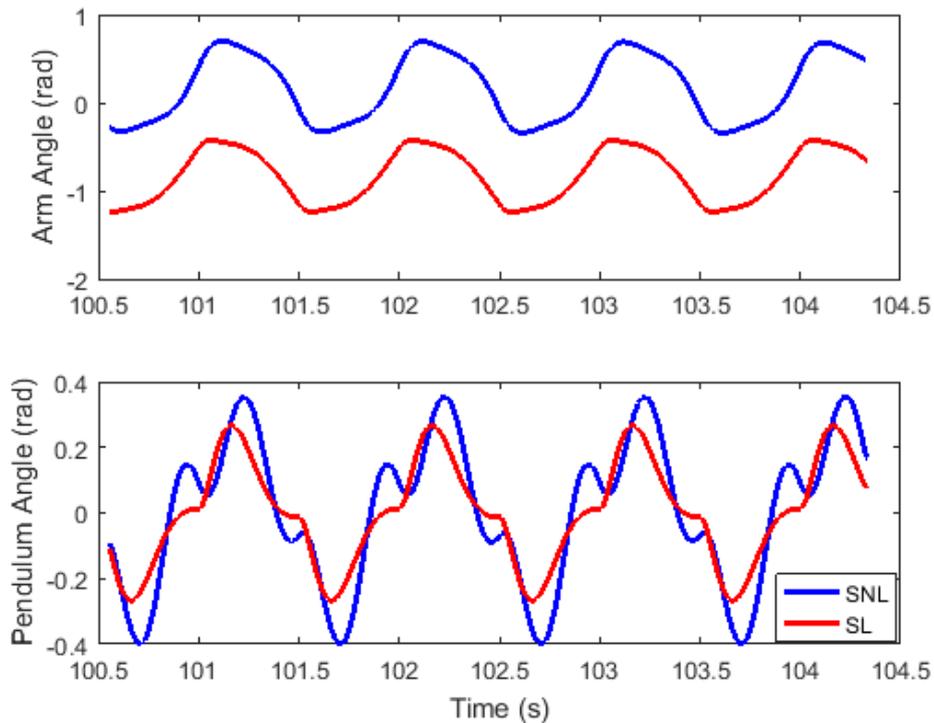


FIGURE 4.3: Réponse indicielle du système pendulaire

La figure 4.3 représente notre système sans utilisation de régulateur.

4.5 Implantation des commandes sur la maquette

Pour appliquer les commandes linéaires sur le PIR, le pendule doit être manuellement placé autour de sa position d'équilibre instable (zone de linéarité). Les valeurs des paramètres des commandes utilisés sont réadapter par rapport au système de la maquette

4.5.1 Placement de pôle

Le gain K utilisé dans cette partie est : $K = [-3.3890 \quad 41.4686 \quad -1.3826 \quad 2.9368]$

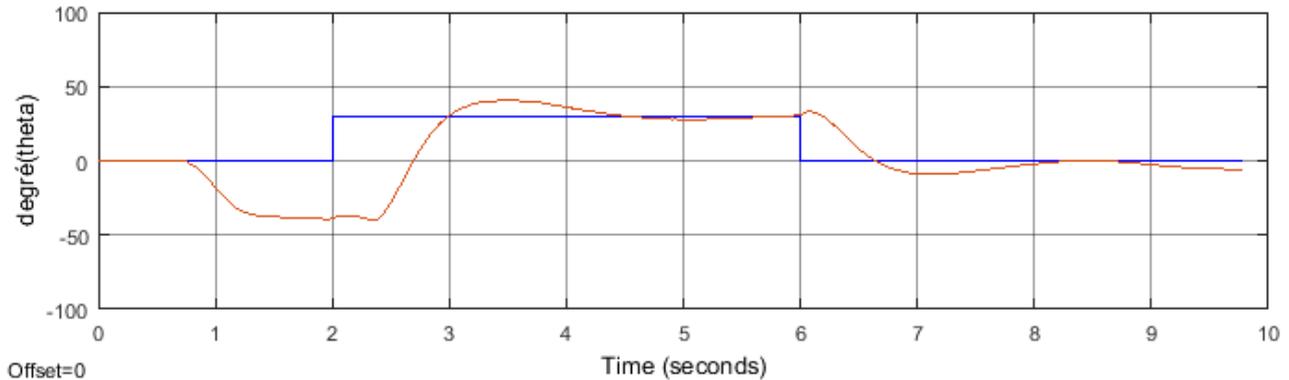


FIGURE 4.4: Évolution de l'angle du bras sur la maquette avec la commande placement de pôle

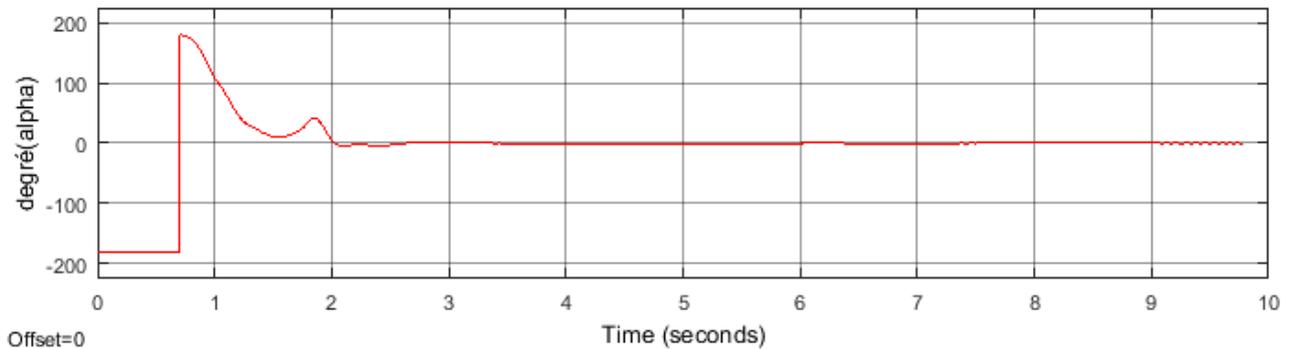


FIGURE 4.5: Évolution de l'angle du pendule sur la maquette avec la commande placement de pôle

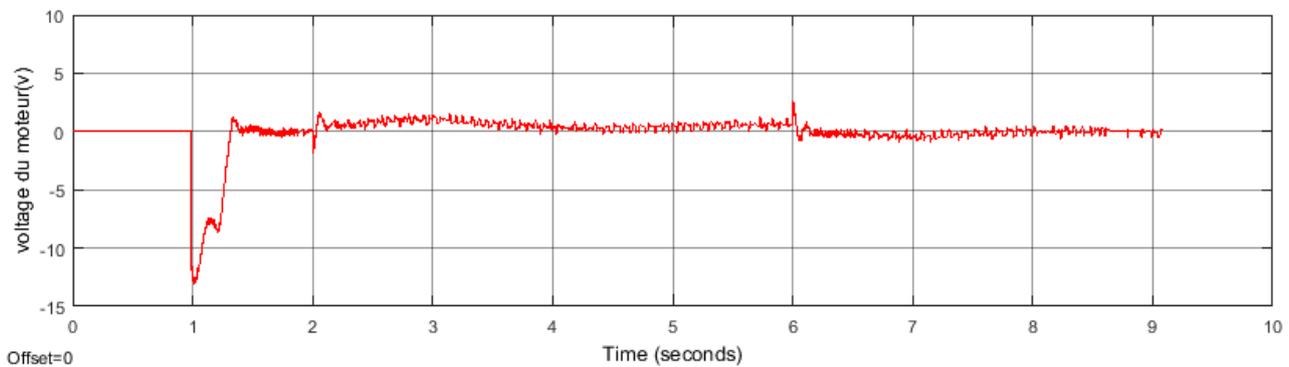


FIGURE 4.6: Évolution du voltage du moteur avec la commande placement de pôle

Nous remarquons un bon suivi de consigne de la part du bras comme il est décrit dans la figure(4.4).

Le résultat de simulation de la commande de l'angle de pendule est donné par la figure(4.5). On remarque que la spécification du cahier de charge concernant l'angle du pendule $\alpha < 10$ est respecté. Et la figure(4.6) montre la consommation d'énergie en volts, qui ne dépasse pas la barre des 15V, comme il est indiqué dans le cahier de charge.

4.5.1.1 Test de robustesse

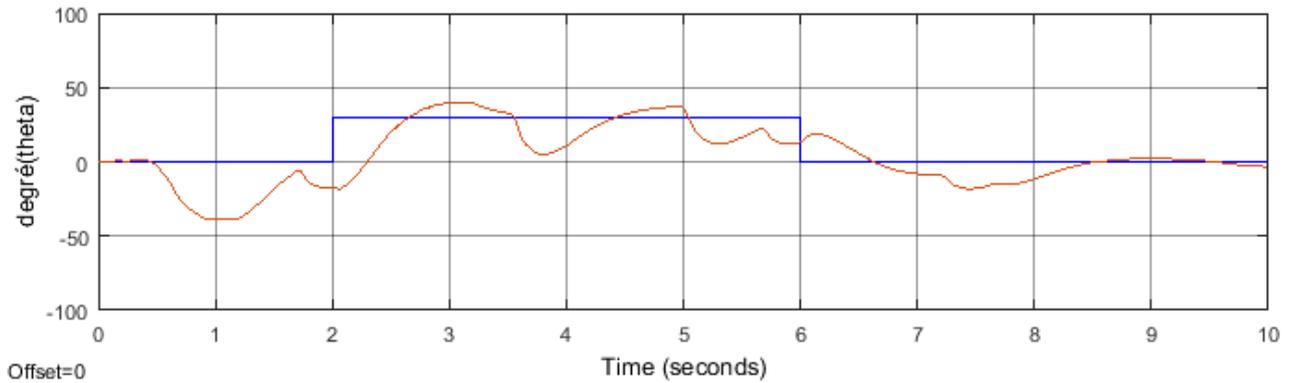


FIGURE 4.7: Évolution de l'angle de bras sur la maquette avec des perturbations

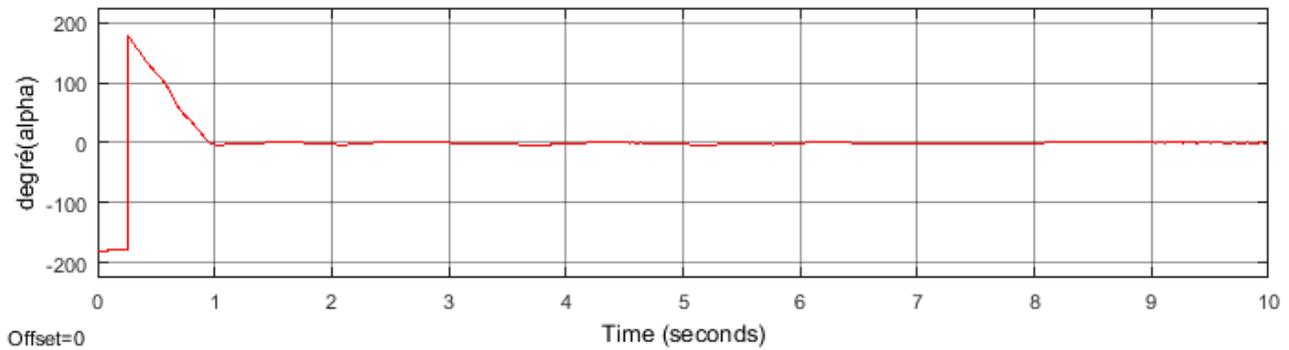


FIGURE 4.8: Évolution de l'angle de pendule sur la maquette avec des perturbations

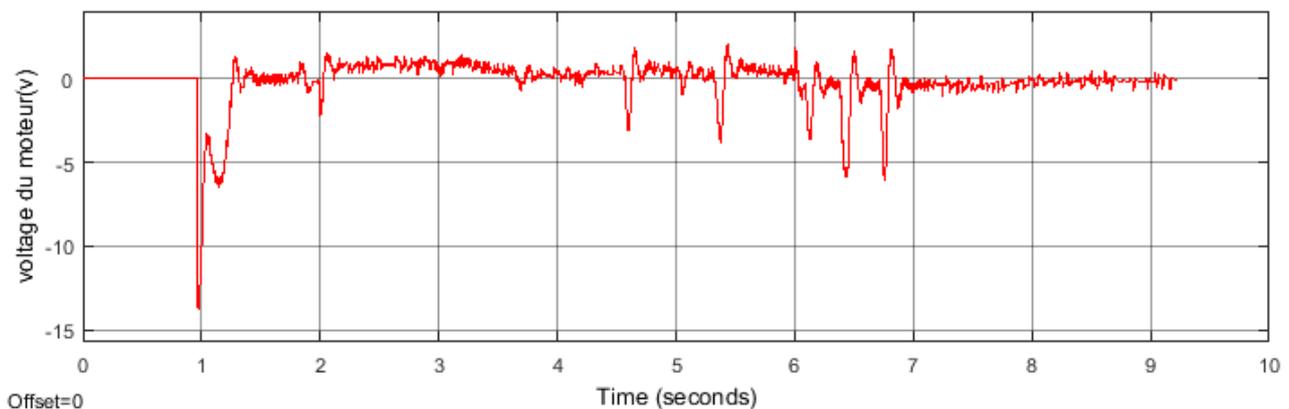


FIGURE 4.9: Évolution du voltage du moteur avec des perturbations

La figure (4.7) décrit l'état de la position du bras avec des perturbations effectuées avec la main sur le pendule, et qui montre que le bras fais des mouvements pour but de garder le pendule stable. Dans la figure(4.8) le pendule reste à sa position d'équilibre malgré les perturbations effectuées, ce qui montre que la commande est robuste vis à vis les perturbations. La réaction du moteur vis-à-vis des perturbations subies par le pendule est donnée dans la figure (4.9).

4.5.2 Commande LQR

Utilisation de la fonction lqr avec le modèle chargé et les matrices de pondération

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad R = 1$$

Modifiez la matrice de pondération LQR comme suit et générez un nouveau gain de contrôle de gain :

$$Q = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad R = 1$$

$$k = [-2.4495 \quad 41.4686 \quad -1.3826 \quad 3.4305]$$

4.5.3 Résultats obtenus

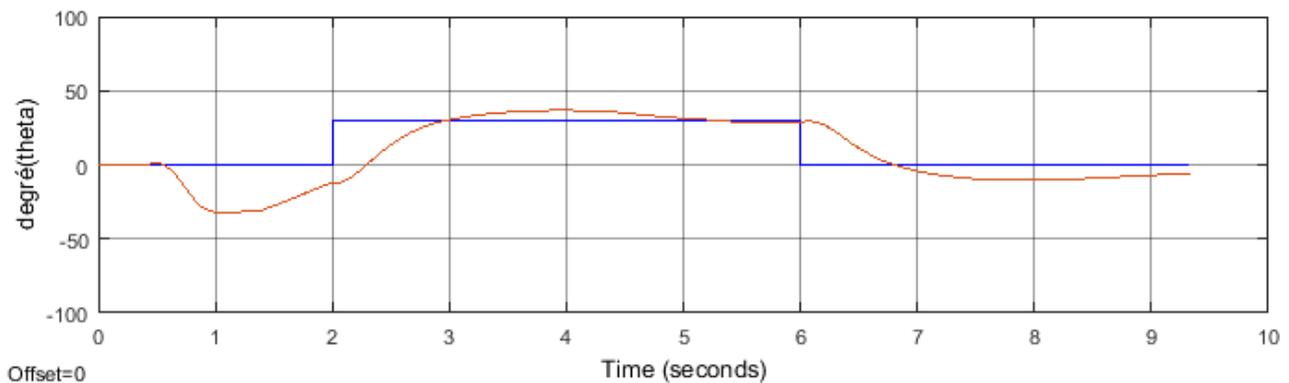


FIGURE 4.10: Évolution du l'angle de bras sur la maquette

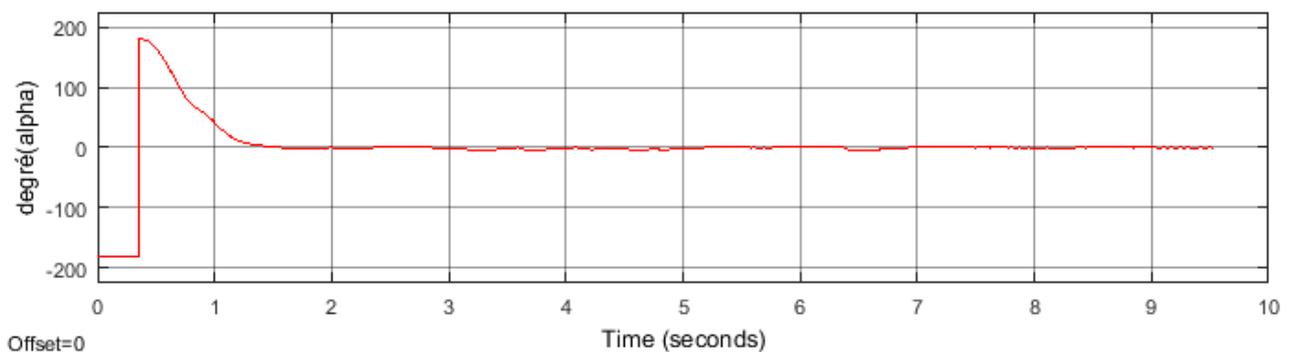


FIGURE 4.11: Évolution du l'angle de pendule sur la maquette

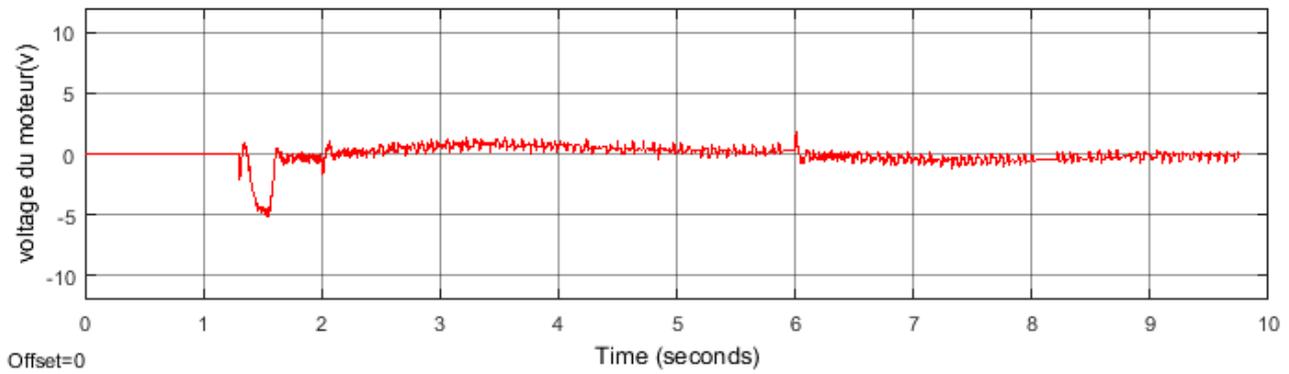


FIGURE 4.12: Évolution du voltage du moteur sur la maquette

La figure(4.10) montre l'évolution de l'angle du bras qui à une suivie de consigne plutôt rapide. La figure(4.11) décrit l'évolution de l'angle du pendule et montre que le pendule se stabilise rapidement, après l'avoir mis dans sa zone linéaire. La figure (4.12) montre la consommation d'énergie en volts, et qui ne dépassent pas les $5|v$, ce qui montre que la commande utilisée optimise la consommation d'énergie vis-à-vis les performances données.

4.5.3.1 Test de robustesse

On perturbe le pendule et le bras de la maquette et on observe les résultats :

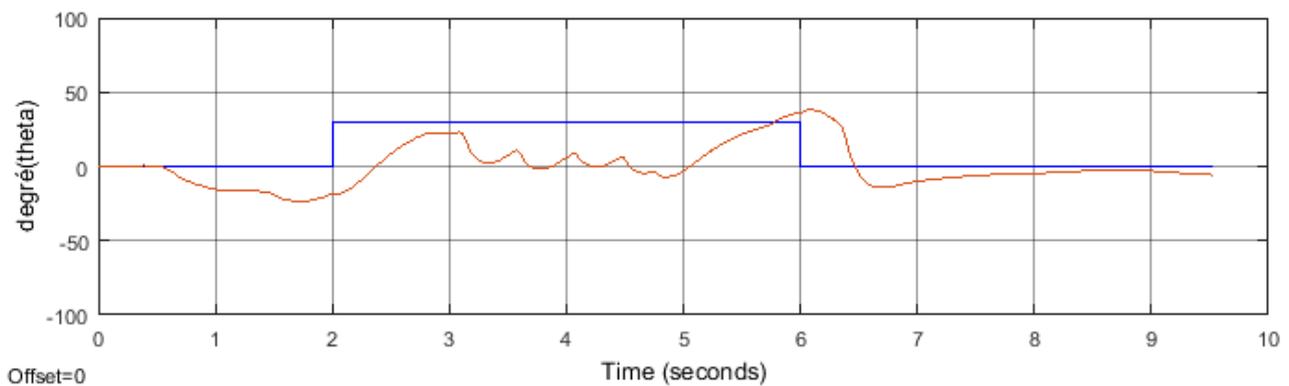


FIGURE 4.13: Évolution du l'angle de bras sur la maquette avec des perturbations

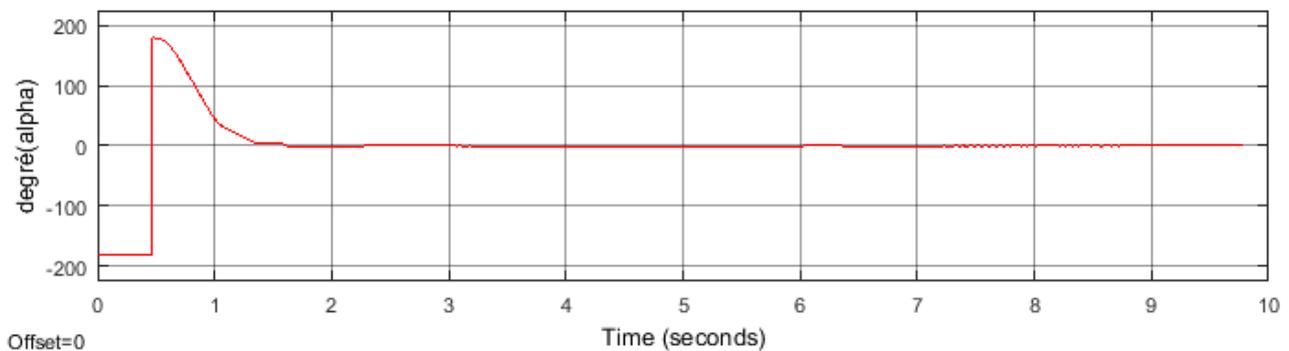


FIGURE 4.14: Évolution de l'angle du pendule sur la maquette avec des perturbations

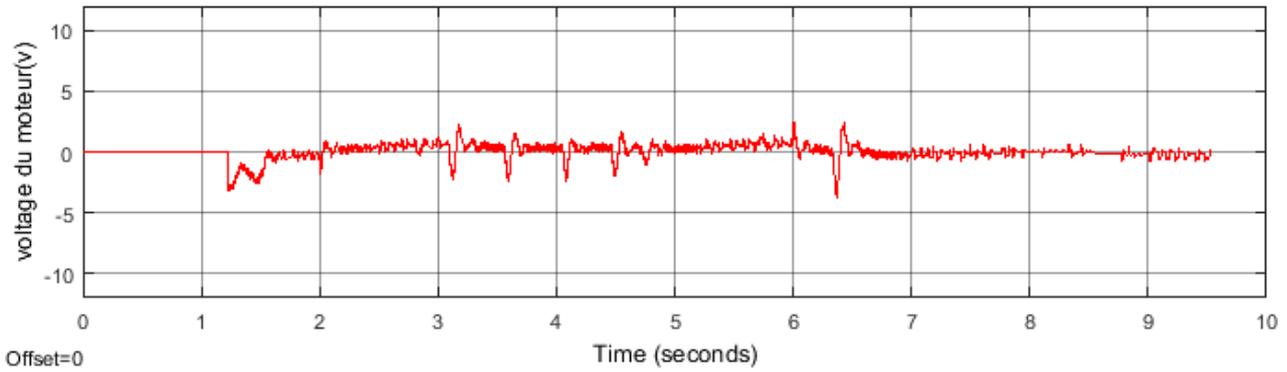


FIGURE 4.15: Évolution du voltage du moteur avec des perturbations

La figure (4.13) montre le comportement du bras face au perturbation subie au pendule, en essayant de ne pas faire tomber ce dernier. La figure(4.14) montre que le pendule n'est pas affecté par les perturbations effectuées, et cela due à la robustesse de la commande utilisée. La figure (4.15) décrit la consommation d'énergie en voltes, et qui ne dépasse pas les $|5|v$.

4.5.4 Commande PD

Dans cette expérience, nous trouverons des stratégies de contrôle qui stabilisent le pendule en position verticale tout en maintenant une position souhaitée du bras. Lors de stabilisation du système, l'angle du pendule est petit et stabilisation peut être réalisé avec un contrôleur PD, comme illustré à la Figure 4.16 Si nous sommes plus loin intéressés à maintenir le bras dans une position souhaitée, une boucle de rétroaction à partir de la position du bras sera également introduite.

La loi de commande peut alors être exprimée sous la forme :

$$u = K_{p,\theta} (\theta_r - \theta) - K_{p,\alpha} \alpha - K_{d,\theta} \dot{\theta} - K_{d,\alpha} \dot{\alpha}$$

où $k_{p,\theta}$: est le gain proportionnel à l'angle du bras,

$k_{p,\alpha}$: est le gain proportionnel à l'angle du pendule,

$k_{d,\theta}$: est l'angle du bras gain dérivé, et

$k_{d,\alpha}$: est le gain dérivé de l'angle du pendule.

L'angle souhaité du bras est noté θ_r et la référence pour l'angle du pendule est zéro (c'est-à-dire en position verticale).

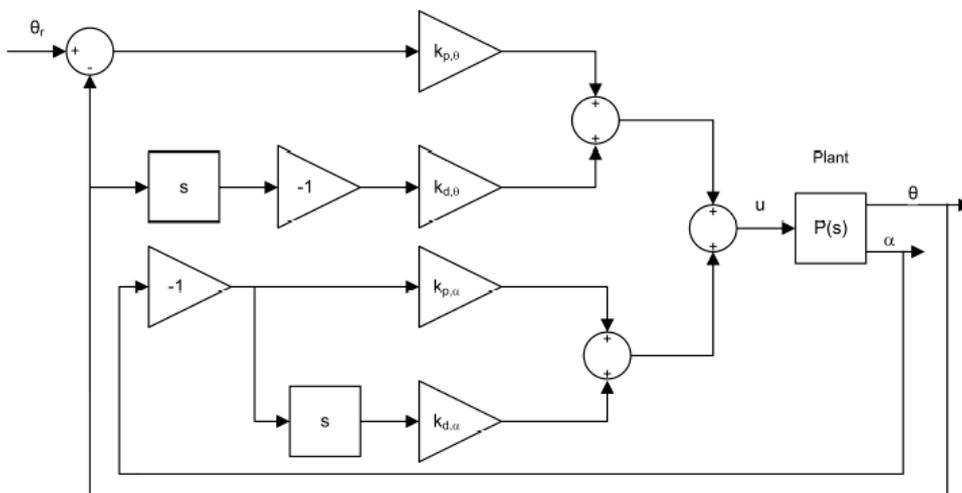


FIGURE 4.16: Schéma fonctionnel de la commande de balance PD pour pendule rotatif

Il existe de nombreuses façons de trouver les paramètres du contrôleur, une des méthodes est l'approximation successive qui est déjà présentée au par avant.

4.5.4.1 Résultat de l'essai sur la maquette

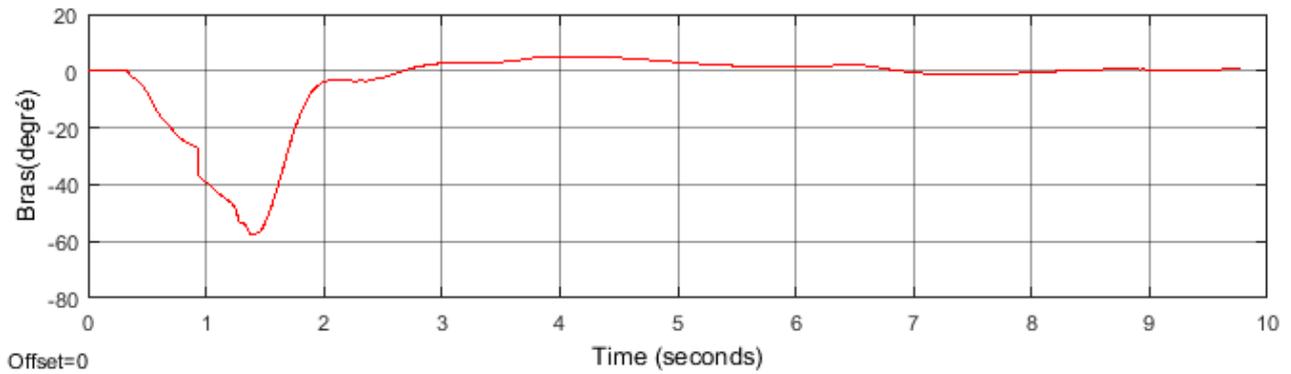


FIGURE 4.17: Évolution de l'angle du bras sur la maquette avec la commande PD

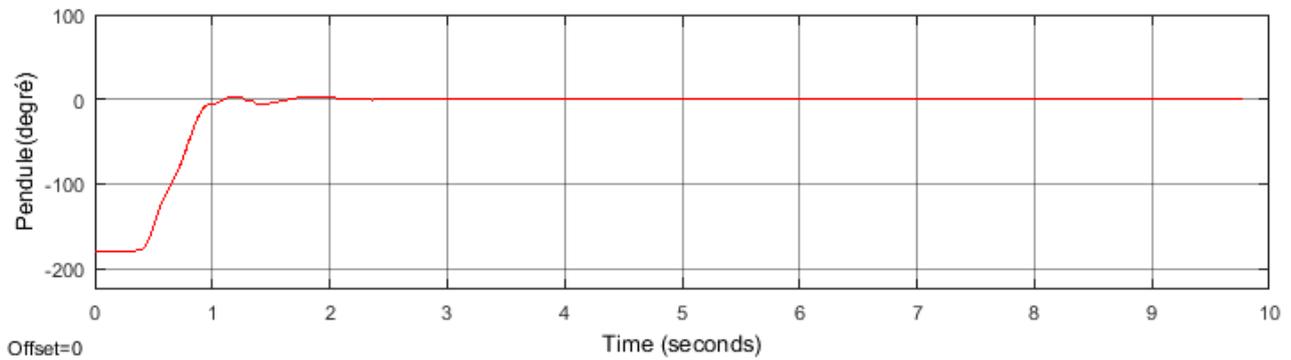


FIGURE 4.18: Évolution de l'angle du pendule sur la maquette

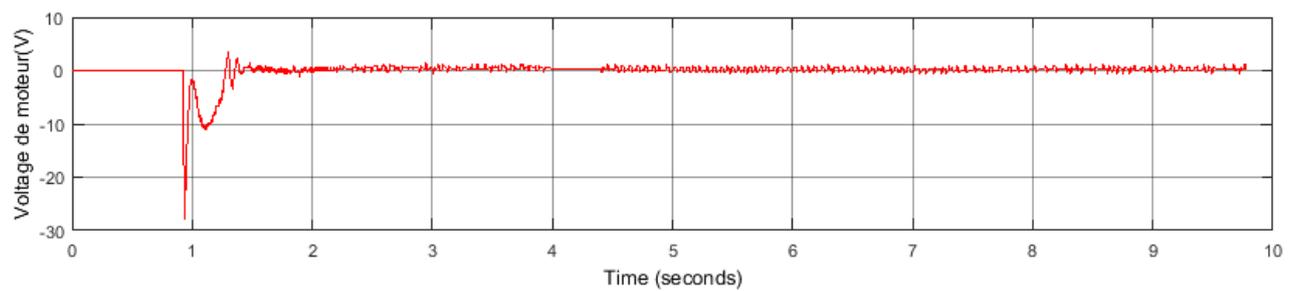


FIGURE 4.19: Évolution du voltage du moteur de la maquette

La figure(4.17) représente l'évolution du bras avant et après mettre le pendule dans la zone d'équilibre instable, et qui montre qu'il n'ya pas d'oscillation dans le bras, et c'est grâce au bon choix du gain K_d du bras. La figure(4.18) montre que le pendule se stabilise rapidement après de le mettre manuellement dans sa position d'équilibre instable, qui est du au gain K_p du pendule.

Le choix des paramètres des régulateurs PID utilisé est :

- Contrôle de bras : -4.2 pour K_p , et -2 pour K_d .
- Contrôle de pendule : 30 pour K_p , 2.5 pour K_d .

4.5.4.2 Test de robustesse

On perturbe le pendule et le bras de la maquette et on observe les résultats :

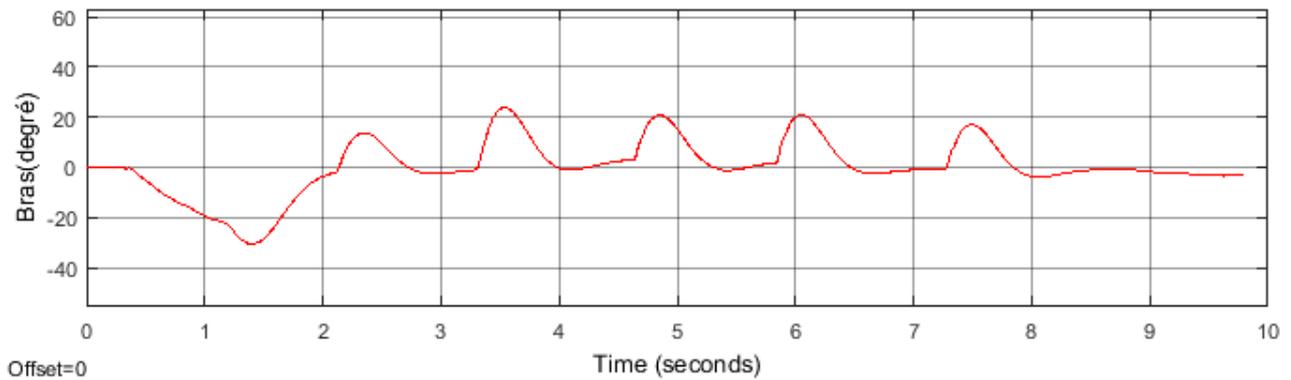


FIGURE 4.20: Évolution de l'angle de bras sur la maquette avec des perturbations

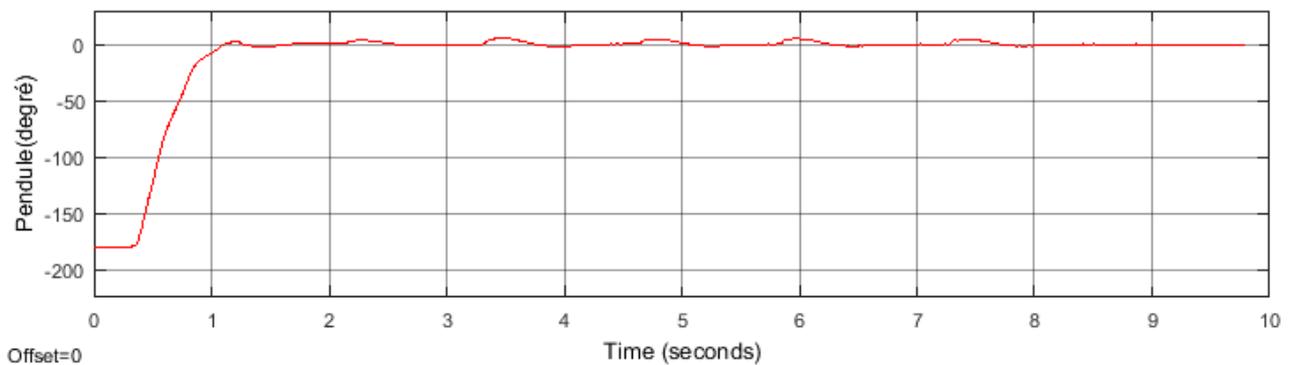


FIGURE 4.21: Évolution de l'angle pendule sur la maquette avec des perturbations

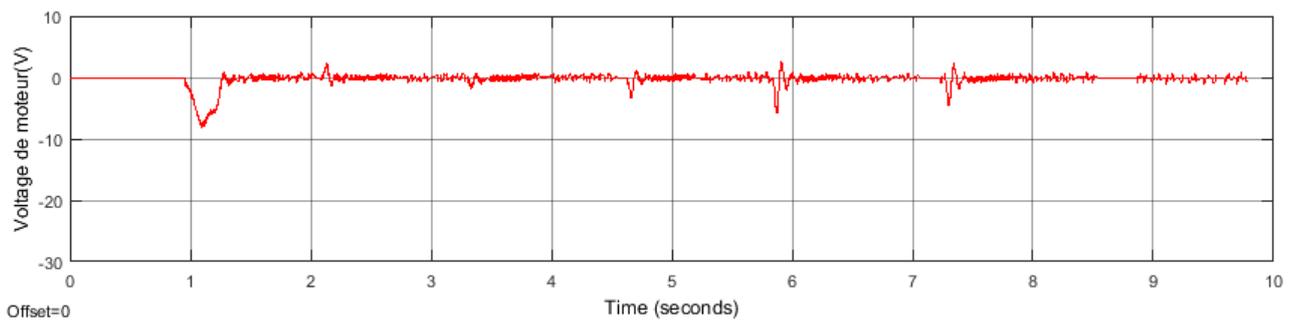


FIGURE 4.22: Évolution du voltage du moteur de la maquette avec des perturbations

La figure (4.20) décrit la réponse du bras vis-à-vis des perturbations subie au le pendule, et on remarque qu'il gère avec rapidité et robustesse ces perturbations en maintenant la stabilité du pendule, et cela dû au bon choix des gain K_p pour la rapidité de stabilisation, et K_d pour la bonne atténuation des perturbations. La figure (4.21) montre l'évolution de l'angle du pendule tout en introduisant des perturbations, qui ne semblent pas affecter vraiment la stabilité du pendule. La figure (4.22) représente la consommation d'énergie en volts qui ne dépasse pas les $|10|v$.

4.6 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons appliqué trois types des commandes linéaires en temps réel pour le PIR a savoir, le placement de pôles, régulateur linéaire quadratique (LQR), et contrôleur proportionnelle intégrale dérivée (PID). Nous avons remarqué que les trois commandes ont réussi à stabiliser le PIR même dans la présence des perturbations. Nous avons constaté qu'avec les paramètres pris dans ce travail le correcteur linéaire quadratique a donné les meilleurs résultats en termes d'énergie et de robustesse, tandis que le correcteur PID est le plus rapide en stabilisation du pendule.

CONCLUSION GÉNÉRALE

travaux présentés dans ce mémoire portent sur la modélisation et la synthèse des lois de commande linéaires afin de stabiliser le pendule inversé rotatif, qui représente l'objet de plusieurs études grâce à ces dynamiques instables, sa nature non linéaire et sous-actionné. Nous avons utilisé le formalisme d'Euler-Lagrangien pour modéliser mathématiquement le pendule inversé rotatif, pour exprimer ces dynamiques. Mais avec sa nature complexe, la synthèse de commandes est un peu difficile, alors nous avons procédé par la linéarisation de ce système autour de son point d'équilibre instable. Ensuite nous avons synthétisé trois types de commandes linéaires à savoir la commande par placement de pôles, le régulateur linéaire quadratique (LQR), et régulateur PID. Le but est de stabiliser le pendule inversé rotatif autour de son point d'équilibre instable lorsque le pendule est manuellement placé autour de sa position d'équilibre instable. Nous avons appliqué les trois commandes en temps réel sur la maquette du pendule de type Quanser disponible au niveau de notre établissement ESSAT. Finalement, les résultats expérimentaux montrent l'efficacité des commandes proposées.

Comme perspectives, nous pouvons proposer des lois de commandes non linéaires telles que la commande par mode glissant, la commande par contrôle d'énergie, et d'autre.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] Jamilu Kamilu Adamu, Mukhtar Fatihu Hamza, and Abdulbasid Ismail Isa. Performance comparisons of hybrid fuzzy-lqr and hybrid pid-lqr controllers on stabilizing double rotary inverted pendulum. *Journal of Applied Materials and Technology*, 1(2) :71–80, 2020.
- [2] Md Akhtaruzzaman and Amir Akramin Shafie. Modeling and control of a rotary inverted pendulum using various methods, comparative assessment and result analysis. In *2010 IEEE International Conference on Mechatronics and Automation*, pages 1342–1347. IEEE, 2010.
- [3] Abderrafik Boudab, Nidhal Encadreur Cherrat, Hamid Encadreur Boubertakh, et al. *Commande PID robuste d'un pendule inversé rotatif*. PhD thesis, Université de Jijel, 2019.
- [4] Khaoula BRAHIM. Analyse et modélisation : du pendule inversé sur deux roues au fauteuil roulant automatisé freemove». *Rapport de Stage de Master*, 2.
- [5] Nidhal Cherrat, Hamid Boubertakh, and Hichem Arioui. An adaptive fuzzy pid control for a class of uncertain nonlinear underactuated systems. In *2016 8th International Conference on Modelling, Identification and Control (ICMIC)*, pages 677–682. IEEE, 2016.
- [6] M. DEHAK, S. KAHOUADJI. Modélisation et stabilisation d'un pendule inversé rotatif . mémoire master 2. *automatique et informatique industrielle.*, 44(1) :233–241, 2016.
- [7] Alexis Delisse and Christophe Le Mao. Moto autonome : Honda riding assist-e, Oct 2017.
- [8] Michel Ferrara. Pendule de torsion automatique. *Rheologica Acta*, 12(4) :563–566, 1973.
- [9] Abhishek Kathpal and Ashish Singla. Simmechanics™ based modeling, simulation and real-time control of rotary inverted pendulum. In *2017 11th International Conference on Intelligent Systems and Control (ISCO)*, pages 166–172. IEEE, 2017.
- [10] Mehmet Öksüz, Mehmet Burak Önal, Recep Halicioğlu, and Lale Canan Dülger. Alternative controller design for rotary inverted pendulum. *Tehnički glasnik*, 12(3) :139–145, 2018.
- [11] Reza Olfati-Saber. Global stabilization of a flat underactuated system : the inertia wheel pendulum. In *IEEE Conference on Decision and Control*, volume 4, pages 3764–3765. Citeseer, 2001.
- [12] Patrick Prouvost. *Automatique-Contrôle et régulation 2/e : Cours, exercices et problèmes corrigés*. Dunod, 2010.
- [13] Quillau, Jacques Francois fils, et al. *Traité des sections coniques et autres courbes anciennes, appliquées ou applicables à la pratique de différents arts... Avec un petit Traité de la Cycloïde... Le tout enrichi de notes ou de dissertations historiques & critiques... par M. de la Chapelle..* chez JF Quillau, fils, libraire, rue Saint Jacques, vis-à-vis celle des ... , 1750.
- [14] Arturo Rojas-Moreno, Juan Hernandez-Garagatti, Oscar Pacheco-De La Vega, and Luis Lopez-Lozano. Fo based-lqr stabilization of the rotary inverted pendulum. In *2016 Chinese Control and Decision Conference (CCDC)*, pages 4292–4297. IEEE, 2016.

- [15] AS Shiriaev, A Pogromsky, H Ludvigsen, and O Egeland. On global properties of passivity-based control of an inverted pendulum. *International Journal of Robust and Nonlinear Control : IFAC-Affiliated Journal*, 10(4) :283–300, 2000.
- [16] Elisa Sara Varghese, Anju K Vincent, and V Bagyaveereswaran. Optimal control of inverted pendulum system using pid controller, lqr and mpc. In *IOP Conference Series : Materials Science and Engineering*, volume 263, page 052007. IOP Publishing, 2017.
- [17] Wei Zhong and Helmut Rock. Energy and passivity based control of the double inverted pendulum on a cart. In *Proceedings of the 2001 IEEE International Conference on Control Applications (CCA'01)(Cat. No. 01CH37204)*, pages 896–901. IEEE, 2001.

Annexes

Symboles	Paramètres	Valeurs	unité
η_g	Rendement des engrenages	0.9	-
η_m	Rendement du moteur	0.69	-
k_t	Constante du couple moteur	0.007683	N.m/A
k_g	Constante des engrenages	70	-
k_m	Constante de la f.e.m	0.0076777	V.s/rad
R_m	Résistance d'induit du moteur	2.6	Ω
m_p	Masse du pendule	0.127	Kg
L_r	Longueur de bras	0.2159	m
L_p	Longueur de pendule	0.33655	m
J_r	Moment d'inertie du bras de son centre de masse	0.0009983	Kg.m ²
J_p	Moment d'inertie du pendule de son centre de masse	0.0012	Kg.m ²
B_r	coefficient de viscosité d'amortissement du bras	0.0024	N.m.s/rad
B_p	coefficient de viscosité d'amortissement du pendule	0.0024	N.m.s/rad
g	Gravité	9.81	Kg.m ²

TABLE 1: Paramètres du système