

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

MINISTRY OF HIGHER EDUCATION
AND SCIENTIFIC RESEARCH

HIGHER SCHOOL IN APPLIED SCIENCES
--T L E M C E N--



المدرسة العليا في العلوم التطبيقية
École Supérieure en
Sciences Appliquées

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

المدرسة العليا في العلوم التطبيقية
-تمسان-

Mémoire de fin d'étude

Pour l'obtention du diplôme de Master

Filière : Automatique
Spécialité : Automatique

Présenté par : Meriem BELHDJ KACEM et Amine LALOUCHE

Thème

**Synthèse d'observateurs invariants
pour le modèle du chemostat**

Soutenu publiquement, le / 07 / 2021, devant le jury composé de :

M S.M. ABDI	MCB	ESSA. Tlemcen	Président
Mme I. DIDI ep BEMMOUSSAT	MCB	ESSA. Tlemcen	Directeur de mémoire
Mme A. GHOUALI ep BEDJAOUI	MCB	ESSA. Tlemcen	Co- Directeur de mémoire
Mme H. SEBBAGH ep DALI-YOUCHEF	MCA	ESSA. Tlemcen	Examinatrice 1
Mme Z. KHEDIM ep BENSID	Docteur	Université de Tlemcen	Examinatrice 2

Année universitaire : 2020 /2021

Dédicaces

Louange à **ALLAH** pour qui vont les bonnes intentions et les plus belles pensées, qui m'a créé, qui m'a donné ma chance lorsque moi-même je pensais ne pas la mériter, qui ne m'a jamais abandonné et qui m'a offert une raison d'exister et tous les cadeaux que je cite en dessous, et bien plus encore.

À ma très chère mère Fatima Zohra BOUKLI HACENE mes modestes mots ne saurait exprimer l'amour que j'ai pour elle, elle qui m'a donné la vie et tous les moyens moraux et matériels. Elle a cru en moi plus que je n'ai cru en moi-même et elle a su me redonner l'ambition quand je n'avais plus goût. Elle est mon modèle dans sa bonté de cœur, sa foi, sa force, sa jeunesse d'esprit et son optimisme. Une personne passionnée, polyvalente et surtout très cultivée elle est la lumière de ma vie.

À mon cher père Sidi Mohammed qui m'a toujours donné tout ce que je demandais. Il m'a fait confiance dans tout ce que j'ai entrepris et sans être insistant, il tenait régulièrement à passer s'assurer que j'arrivais à avancer dans mes projets.

À ma chère sœur, ma deuxième moitié Wissem qui a toujours veillé à remplir son rôle de grande sœur sans jouer les grandes sœurs. Je ne pourrais écrire tous ce qu'elle a faits pour moi, pour veiller à me protéger, mes sentiments, mes rêves et pour me montrer que je peux toujours trouver refuge chez elle. C'est la personne qui est là à veiller à ce que nous gardons notre magnifique relation malgré avoir vu la pire version de moi.

À ma chère grande sœur Zineb, qui m'a donné le meilleur d'elle quand elle était prêt de moi et qui continue à veiller sur moi malgré la distance, ainsi que mon cher beau-frère Fodil BOUAZZA. Tous les deux ne manque pas un seul appel sans me booster et m'aider à planifier mon future. Sans oublier mes chères petites boules d'énergies, mes neveux : Radia, Younes, Walid, Ahmad et Amani, tous de petits génies, artistes, sportifs, cultivés et passionnés.

À mon cher frère Abdelkrim avec qui je peux être moi même sans me soucier qu'il puisse mal prendre les choses et sur lequel j'ai pu compter dans de moments difficiles ainsi ma chère belle-sœur Imane BEKHTI qui m'a toujours motivé et veillé à ce que je garde confiance en moi.

À la mémoire de la première personne qui m'a inculqué des valeurs morales, ma chère grand-mère Bakhta HOUMITA et à toute ma famille maternelle et paternelle.

À mes meilleurs amies : Yamna AMMAR et Zineb ADAIKA, pleines de bonnes intentions et de bon sens, elles sont les petites voix de sagesse qui accompagnent mes pensées. Et à mes amies Farah, Wissal, Cherifa, Noor, Ilhem, Amel, Dounya, Ikram, Amina, Asmaa, Sarah, Chahinez, Nawel et Meriem.

Meriem BELHADJ KACEM

Remerciements

Louange à **ALLAH** qui nous a donné des buts dans la vie, qui nous a offert des rêves et la force de les réaliser. Qui nous a donné le plus grand cadeau, de pouvoir le connaître, le remercier et l'implorer et qui a mis sur notre chemin toutes les personnes que nous allons citer.

Nos plus sincères remerciements s'adressent à notre directeur de mémoire Mme Ibtissem DIDI ep. BEMMOUSSAT qui nous a accompagné et soutenu depuis le début du travail. Lorsqu'elle a su que nous tenions à soutenir notre mémoire en première session elle n'a pas hésité à venir à l'école tous les jours et à veiller avec nous en ligne jusqu'à tard le soir. Elle nous a fait reprendre confiance en nous même et a tenu à nous expliquer chaque partie du mémoire.

Nous tenons aussi à remercier notre co-encadrant Mme Amel GHOUALI ep. BEDJAOUI ainsi que le président du jury Mr Sidi Mohammed ABDI et nos examinatrices Mme Zeyneb KHEDIM ep. BENSID et Mme Hafidha SEBBAGH ep. DALI-YOUCHEF qui ont fait l'effort de lire notre mémoire et de nous corriger afin de déposer la meilleure version possible du mémoire. Et nous remercions Madame Zeyneb KHEDIM aussi de nous avoir fait découvrir le « Diagramme opératoire » avec lequel nous avons enrichi nos mémoires.

Nos grands remerciements, respects vont à nos enseignants qui en plus de nous transmettre leur savoir, nous ont accompagné dans nos activités extra scolaires et moralement durant des années universitaires secouées par les événements. Nous exprimons notre grande gratitude pour nos enseignants en primaire, CEM, lycée et de l'ESSAT qui ont veillé à cultiver notre ouverture d'esprit, notre ambition, notre culture générale, nos bonnes œuvres et nos bonnes manières.

Un grand merci nos camarades qui sont toujours prêts à partager leurs connaissances, maîtrises, savoir et les opportunités qu'ils rencontrent. Nous les remercions d'avoir été présents moralement et d'avoir dépassé tous les différents que nous avons eu.

Nous remercions tout le staff administratif ainsi que toute personne travaillant à l'école. Merci d'avoir assuré que nous puissions atteindre nos objectifs dans de bonnes conditions, de nous avoir soutenu dans nos activités extra scolaires et surtout pour les « Salam » échangés avec sourire et bonne humeur.

Nous tenons à remercier tous les enseignants, étudiants et passionnés qui présentent un contenu éducatif sur le web, ainsi qu'à tous les forums et les communautés qui traitent des sujets de notre spécialité. Nous tenons à exprimer nos grands respects et gratitude pour les logiciels libres et OpenSource ainsi que toute personne ou institution offrant des produits éducatifs gratuits. Nous remercions de façon générale tous les étudiants qui ont veillé à rédiger de bons mémoires et que nous avons exploité au maximum, et de façon particulière l'étudiante Ikram BELLAMRI qui a traité un sujet très similaire au notre l'année précédente avec notre encadrant.

En fin nous remercions tous ceux qui ont contribué de façon directe ou indirecte à notre réussite scolaire et notre épanouissement personnel.

Table des matières

Introduction générale	9
1 Généralités sur la digestion anaérobie et analyse mathématique du chemostat	12
1.1 Définition et étapes de la digestion anaérobie	12
1.1.1 Hydrolyse	13
1.1.2 Acidogenèse	13
1.1.3 Acétogénèse	13
1.1.4 Méthanogénèse	13
1.2 Bioréacteurs	14
1.2.1 Mode batch	15
1.2.2 Mode fedbatch	15
1.2.3 Mode continu	16
1.3 Modèles de digestion anaérobie	16
1.3.1 Modèle du chemostat	16
1.3.2 Modèle AM2	17
1.3.3 Modèle AM2b	17
1.3.4 Modèle AMH1	17
1.3.5 Modèle ADM1	17
1.4 Équations d'état du chemostat	18
1.5 Positivité et bornitude des états	22
1.5.1 Positivité de $x(t)$	22
1.5.2 Positivité de $s(t)$	22
1.5.3 Bornitude supérieure de $s(t)$	23
1.5.4 Bornitude supérieure de $x(t)$	24
1.5.5 Bornitude inférieure de $s(t)$	25
1.5.6 Bornitude inférieure de $x(t)$	26
1.6 Analyse mathématique du système	26
1.6.1 Points d'équilibres du système	26
1.6.2 Stabilité autour des points d'équilibres	28
1.7 Diagramme opératoire	29
1.7.1 Solution analytique	30
1.7.2 Solution numérique	31
1.8 Simulation du modèle autour des points d'équilibres	32
2 État de l'art sur les observateurs non linéaires	34
2.1 Nécessité des observateurs dans les systèmes biologiques	34
2.2 Définition de la notion d'observabilité	35

2.2.1	Définition générale de l'observabilité	35
2.3	Historique sur les observateurs	37
2.4	Observateurs non linéaires	39
2.4.1	Observateur de Luenberger linéarisé	39
2.4.2	Observateur de Luenberger étendu	41
2.4.3	Filtre de Kalman étendu	42
2.4.4	Observateur à grand gain	43
2.4.5	Observateur asymptotique	44
2.4.6	Observateur hybride entre le filtre de Kalman étendu et l'observateur asymptotique	45
2.4.7	Observateur par intervalles	46
2.4.8	Observateur type-Luenberger non linéaire à dynamique d'erreur linéaire	47
3	Synthèse d'observateur invariant pour le modèle du chemostat	49
3.1	Systèmes invariants	49
3.2	Forme générale d'un pré-observateur invariant	51
3.3	Application sur le modèle du chemostat	52
3.3.1	Observabilité	52
3.3.2	Invariance du modèle du chemostat	53
3.3.3	Construction du pré-observateur	55
3.3.4	Positivité des états estimés	57
3.3.5	Convergence du pré-observateur	58
3.4	Simulation	63
3.4.1	Simulation et interprétation des résultats	63
3.4.2	Discussion autour de la robustesse aux bruits	67
3.4.3	Étude comparative des performances des observateurs	71
4	Conclusion et perspectives	73
5	Annexe	74

Liste des tableaux

1.1	Conditions initiales et paramètres du système	32
2.1	Avantages et inconvénients de l'observateur de Luenberger linéarisé .	40
2.2	Avantages et inconvénients de l'observateur de Luenberger étendu .	41
2.3	Avantages et inconvénients du filtre de Kalman étendu	43
2.4	Avantages et inconvénients de l'observateur à grand gain	44
2.5	Avantages et inconvénients de l'observateur asymptotique	45
2.6	Avantages et inconvénients de l'observateur hybride	46
2.7	Avantages et inconvénients de l'observateur par intervalles	47
2.8	Avantages et inconvénients de l'observateur de type-Luenberger non linéaire	48
3.1	Conditions initiales et paramètres de l'observateur invariant	64

Table des figures

1	Les objectifs de l'ONU pour le développement durable traités par la digestion anaérobie [33]	10
1.1	Les étapes de la digestion anaérobie	14
1.2	Bioréacteur en mode d'alimentation discontinu [27]	15
1.3	Bioréacteur en mode d'alimentation semi-continu [27]	15
1.4	Bioréacteur en mode d'alimentation continu [27]	16
1.5	Les cinétiques de croissance en fonction de la concentration du substrat	21
1.6	Diagramme opératoire montrant les zones distinctes, affectées différemment par les combinaisons d'entrée (S_{in}, D)	30
1.7	Diagramme opératoire montrant les zones distinctes, affectées différemment par les combinaisons d'entrée (S_{in}, D)	31
1.8	Conditions de lessivage (D=1)	32
1.9	Conditions de non lessivage (D=0.7)	33
3.1	Taux de dilution $D(t)$ persistant	63
3.2	Concentration du substrat s et de son estimation S_o pour $a = 10$ et $\beta = 0.3$	64
3.3	Erreur d'estimation du substrat s	65
3.4	Concentration de la biomasse x et de son estimation X_o pour $a = 10$ et $\beta = 0.3$	66
3.5	Erreur d'estimation de la biomasse x	66
3.6	Estimation du substrat avec un bruit blanc sur μ_{max}	67
3.7	Erreur d'estimation du substrat s avec un bruit blanc sur μ_{max}	67
3.8	Estimation de la biomasse avec un bruit blanc sur μ_{max}	68
3.9	Erreur d'estimation de la biomasse x avec un bruit blanc sur μ_{max}	68
3.10	Estimation du substrat avec un bruit blanc injecté à la mesure $y = s$	69
3.11	Erreur d'estimation du substrat s avec un bruit blanc sur $y = s$	69
3.12	Estimation de la biomasse avec un bruit blanc injecté à la mesure $y = s$	70
3.13	Erreur d'estimation de la biomasse x avec un bruit blanc sur $y = s$	70
3.14	Comparaison des quatre estimations de la concentration de la biomasse x	71

Avant propos

Ce mémoire est une reprise des trois premiers chapitres de la thèse intitulée **Sur l'observation des systèmes non linéaires invariants : Application aux Bioprocédés** soutenue par *Ibtissem DIDI* à l'université AbouBekr Belkaid de Tlemcen [1] et de l'article **An invariant observer for a chemostat model** [2].

Le but de cette synthèse est de donner plus de détails sur le phénomène de la digestion anaérobie, ainsi que de détailler quelques principes de la théorie des systèmes invariants et des principes mathématiques dans l'ambition d'initier les étudiants souhaitant exploiter les perspectives cités dans la conclusion du mémoire.

Introduction générale

Gaz à effet de serre, pollution de l'air et des sols, pollution des eaux de mer, gaspillage des sources d'énergie, sont tous des facteurs à conséquences catastrophiques sur l'environnement. Eux mêmes conséquences d'activités humaines destructives.

La pollution de l'air et des sols par exemple est une conséquence de l'agriculture massive utilisant les pesticides et les fertilisants chimiques, elle est aussi causée par l'incinération des déchets. La pollution des sols conduit à la pollution des eaux douces. Celle des eaux de mers est causée par les jetés d'assainissement. La gestion d'assainissements est aussi (dérangée) par les explosions des égouts causant des problèmes de santé, de mauvaises odeurs, la réduction de la durée de vie des installations d'assainissement ainsi que l'échappement des gaz à effet de serre. Cette explosion est due à l'auto inflammation des gaz d'égouts qui est un phénomène causée par la digestion anaérobie.

La digestion anaérobie est le phénomène biologique qui a été à l'origine de la découverte du méthane par Volta (l'inventeur de la première pile voltaïque) en 1776. Il s'intéressait aux gaz inflammables qui gravitent au-dessus des marais proches de sa maison et découvrit que ce gaz est du méthane issu de la putréfaction¹. Le méthane est donc lui même le gaz d'égouts. Les micro-organismes principaux de cette putréfaction sont les bactéries anaérobies. En effet, les marais dégagent du méthane ont à leur surface une croûte de matière organique qui empêche le contact de la surface liquide avec l'air, les micro-organismes de putréfaction doivent alors être capable de décomposer la matière organique dans l'eau en absence d'oxygène, ce qui est l'environnement qui caractérise les bactéries anaérobies.

Le plus étonnant est que le contrôle de ce phénomène contribue aussi à la résolution de tous les problèmes cités auparavant. Elle peut être modélisée grossièrement par un système dont l'entrée est l'eau contenant de la matière organique et dont les sorties sont l'eau épurée, le méthane, et une boue de digestion.

La pollution causée par les jetés des eaux grises² peut être traitée en épurant ces eaux en utilisant la digestion anaérobie. La pollution résultante de la dégradation des déchets organiques en plein air peut être neutralisée en les traitant dans des digesteurs anaérobie, qui permettent aussi de récupérer le biogaz et l'utiliser comme source d'énergie. La pollution et la dégradation des sols dues à l'utilisation des fertilisants chimiques peuvent aussi être réduites en remplaçant ces derniers par la boue de digestion qui est un fertilisant naturel.

Différentes initiatives pour un environnement durable s'intéressent au phénomène de la digestion anaérobie, la plus visante est : *the global methane initiative*

1. La putréfaction est la décomposition de matière organique par des micros organismes

2. Les eaux grises sont des eaux usées domestiques, principalement des eaux résultantes du nettoyage. Elles contiennent aussi bien de matière organique que de produits chimiques.

qui rassemble des institutions de différents profils (des ONG, des banques, des entreprises) de différents pays, dont la célèbre entreprise OWS (organic waste system) spécialisée dans la conception et l'intégration des systèmes à digestion anaérobie.

La digestion anaérobie est aussi un acteur principale dans des perspectives mondiales tel que les objectifs sur la gestion des déchets, et elle joue aussi un rôle dans l'accomplissement de six objectifs des dix-sept objectifs de l'ONU pour le développement durable :

- 6) Eau propre et assainissement,
- 7) Énergie propre et d'un coût abordable,
- 12) Consommation et production responsable,
- 13) Mesures relatives à la lutte contre le changement climatique,
- 14) Vie aquatique,
- 15) Vie terrestre.



FIGURE 1 – Les objectifs de l'ONU pour le développement durable traités par la digestion anaérobie [33]

L'intégration de ce procédé en industrie a longtemps été mis à l'écart car il est fragile aux inhibitions causées par les procédés opératoires, il est donc facilement déstabilisable. De plus, le relancement du processus suite à sa déstabilisation consomme considérablement en terme de temps et de coût [19].

La manipulation de la digestion anaérobie est donc longtemps restée exclusivement l'objet d'étude dans les laboratoires de recherches. Cependant grâce à l'avancée technologique, à la conscience vis à vis de l'environnement, et aux recherches dans le but d'atténuer les risques au inhibitions que plusieurs industries se sont lancées dans l'exploitation de la digestion anaérobie. Citons-en les industries de méthanisation qui utilisent la digestion anaérobie pour récupérer le méthane.

Ce procédé est aussi exploité à de plus petites échelles dans les fermes et les maisons, suite à l'adoption de la LOW-TECH pour les consommations locales. Parce-qu'en plus de récupérer l'eau épurée et le digestat qui est un fertilisant en agriculture, le biogaz obtenu (le méthane) est un gaz léger qui, en cas de fuite, ne stagne pas. C'est donc une source d'énergie à risque réduit [34].

L'exploitation de tout procédé ne peut se faire qu'après une étude méthodologique. La théorie des système est la science responsable de cette étude. Elle englobe l'automatique qui est connue pour être la science du contrôle des systèmes. Cependant pour parvenir à synthétiser une commande il est parfois nécessaire de

synthétiser des *observateurs*, aussi appelés capteurs logiciels. Ces derniers sont l'objet principale de notre mémoire.

Ce mémoire est constitué de trois chapitres :

Dans le premiers chapitre nous allons définir qu'est ce que la digestion anaérobie et ses étapes. Nous allons aussi découvrir les bioréacteurs qui sont les milieux dans lesquels une digestion anaérobie est manipulée. Par la suite, nous allons découvrir différents modèles de cette digestion puis en choisir un et l'étudier.

Dans le deuxième chapitre nous allons voir qu'est ce qu'un observateur, sa nécessité dans les systèmes biologiques, définir l'observabilité et faire un état de l'art des observateurs non linéaires que nous allons appliquer sur notre modèle.

Dans le troisième chapitre nous allons synthétiser pour notre modèle un type d'observateur non linéaire bien précis qui est *l'observateur invariant*. Pour aboutir à un observateur opérationnel il nous faut passer par plusieurs étapes que nous présenterons dans une suite logique.

En conclusion, nous reprendrons les interprétations des résultats les plus pertinentes afin de mettre en évidence la contribution de ce mémoire dans la synthèse des travaux traitants notre sujet et dans l'enrichissement de nos connaissances de traitements des systèmes.

Chapitre 1

Généralités sur la digestion anaérobie et analyse mathématique du chemostat

L'automatique (ou la théorie des systèmes), est une science appliquée dans différents domaines. En tant qu'élèves ingénieurs, nous sommes familiarisés à l'application de l'automatique dans des systèmes électriques, électrotechniques et mécaniques. Cependant, les procédés biologiques nécessitent tout autant de méthodicit  dans leur étude. Afin d'exploiter au mieux la théorie des systèmes d'un procédé biologique il est nécessaire de bien le comprendre. C'est ce que nous allons faire dans ce premier chapitre pour la digestion anaérobie. Une bonne compréhension du procédé nous permettra par la suite d'établir un modèle et l'étudier.

1.1 Définition et étapes de la digestion anaérobie

La digestion anaérobie est une digestion qui se fait par des bactéries anaérobies.  tant des organismes vivants, les bactéries se multiplient en consommant des nutriments. La consommation des nutriments par les bactéries consiste en une transformation chimique de la matière organique, on dit alors que les bactéries procèdent à une digestion.

Les bactéries anaérobies vivent en symbiose. Ces derniers meurent en présence de dioxygène à cause de l'absence d'enzymes capables de catalyser la conversion de toxines cr ees dans leurs cellules du fait de la présence de dioxygène.

Les déchets qui composent le substrat ¹ sont des déchets ménagers, contenant principalement de la matière organique, ce sont donc des déchets fermentescible. Les déchets hospitaliers et industriels représentent un danger pour notre système car ils peuvent contenir des produits chimiques qui rendent le système instable (réaction explosif, changement des propriétés des bactéries anaérobie).

1. En philosophie : Ce qui sert de support, ce sans quoi une réalité ne saurait exister.

La digestion anaérobie d'un produit organique complexe comporte quatre grandes étapes [25] :

1.1.1 Hydrolyse

C'est la plus lente des quatre dégradations. Les bactéries décomposent la matière organique complexe en des monomères et polymères liquéfiés.

1.1.2 Acidogénèse

Les sucres et les acides aminés sont transformés en acides gras volatils (AGV), alcools, azote ammoniacal, du dihydrogène et du dioxyde de carbone.

1.1.3 Acétogénèse

Les bactéries acétogènes transforment les acides gras volatils en acide acétique, hydrogène et dioxyde de carbone.

1.1.4 Méthanogénèse

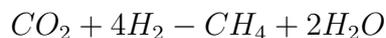
L'acide acétique et l'hydrogène sont convertis en méthane et en dioxyde de carbone par les bactéries méthanogènes acétoclastes et les bactéries méthanogènes hydrogénotrophes respectivement selon les réactions suivantes :

Décarboxylation de l'acide acétique :



environ 70 % de méthane produit.

Réduction du CO_2 :



environ 30 % de méthane produit.

Remarque 1 *Le mélange contient aussi du sulfure d'hydrogène, ne dépassant pas 2 %.*

Toutes ces transformations se font à partir des résultats des différentes étapes qui interagissent entre elles selon le schéma suivant (1) :

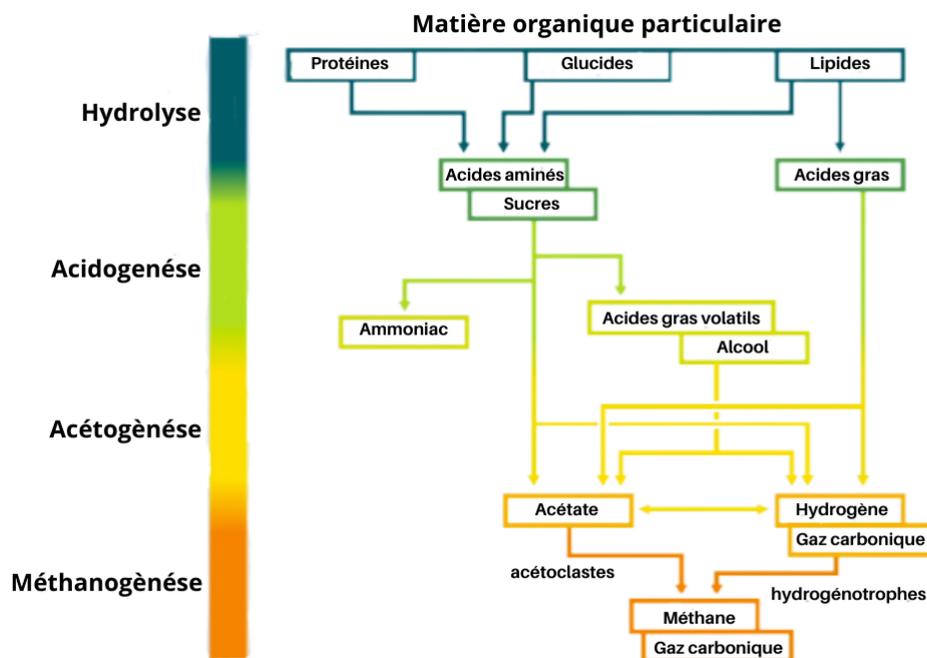


FIGURE 1.1 – Les étapes de la digestion anaérobie

1.2 Bioréacteurs

Le bioréacteur est l'enceinte dans laquelle se produit une réaction biologique, aussi appelé biodigester pour une fermentation. Il peut être utilisé à des fins de recherche ou à des fins industrielles. Nous en citons :

- Culture des bactéries anaérobies.
- Production de biogaz.
- Purification d'eau.
- Production de produit chimique.
- Études biologiques.
- Production d'engrais agricoles à partir du digestat (la boue de digestion).

Les bioréacteurs accueillant la digestion anaérobie sont appelées des enceintes anaérobies. Ce sont des chambres spéciales, bien fermées afin de ne pas permettre la pénétration d'oxygène pour créer l'anaérobiose² et c'est justement cette obligation de fermer l'environnement qui fait l'intérêt de la digestion anaérobie. En effet, ceci nous permet de récupérer le gaz produit par les bactéries anaérobies pour l'utiliser comme biogaz mais aussi pour ne pas dégager ces gaz, qui sont des gaz à effet de serre, dans l'atmosphère. Cependant, elles doivent permettre la pénétration des eaux usées domestiques qui représentent la nourriture des bactéries anaérobies existantes sous deux formes : les eaux noires³ et les eaux grises. C'est ce type

2. L'anaérobiose est l'environnement de vie des bactéries anaérobies.

3. Aussi appelées les eaux de vanne, ce sont les eaux usées domestiques contenant de la matière fécale et de l'urine. Elles contiennent principalement de la matière organique et sont donc

d'eaux usées que nous allons traiter en ne prenant en considération que la matière organique.

Les bioréacteurs sont classifiés selon leurs modes d'alimentation. Le mode d'alimentation définit le régime de remplissage et de vidange du bioréacteur. On en distingue 3 modes :

1.2.1 Mode batch

Il représente le mode d'alimentation discontinu. Il est rempli à un instant initial t_{in} puis vidé à un instant final t_f . Le volume reste donc constant comme le montre la figure (1.1) et les bactéries se multiplient exponentiellement en abondance de substrat [5]. Ce type de bioréacteur est généralement utilisé pour de petites installations, il est facile à mettre en oeuvre mais il demande une phase de remplissage et de vidange.



FIGURE 1.2 – Bioréacteur en mode d'alimentation discontinu [27]

1.2.2 Mode fedbatch

Il représente le mode d'alimentation semi-continu. Le débit de remplissage est commandé de manière à maintenir la concentration du substrat dans le bioréacteur constante, le remplissage est donc continu. N'ayant pas de débit de sortie, il est vidé à l'instant t_f où le volume est au maximum, la vidange est donc discontinue comme le montre la figure (1.2).

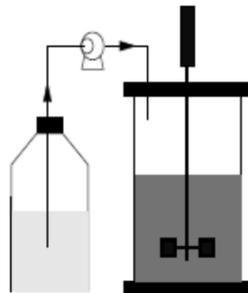


FIGURE 1.3 – Bioréacteur en mode d'alimentation semi-continu [27]

dégradables dans la nature, mais elles représentent un danger bactériologique.

1.2.3 Mode continu

Il représente le mode d'alimentation continu. Ce type de bioréacteurs permet la pénétration et la sortie de matière au cours de la digestion. Le débit d'entrée et le débit de sortie figurent donc dans le modèle mathématique de la digestion anaérobie dans un bioréacteur en mode d'alimentation continue. C'est ce type d'alimentation que nous allons utiliser dans notre modèle. Nous allons supposer que le débit d'entrée est égale au débit de sortie $F_{in} = F_{out}$ tel que le volume à l'intérieur du bioréacteur reste constant comme le montre la figure (1.3). Le but est de simplifier le modèle de deux manières :

- Ne pas prendre la cinétique du volume en considération.
- Ne pas ajouter des contraintes sur le niveau maximal et le niveau minimal pour assurer la sécurité.

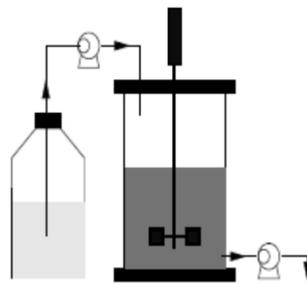


FIGURE 1.4 – Bioréacteur en mode d'alimentation continu [27]

Les bioréacteurs peuvent avoir des caractéristiques différentes en fonction de leurs utilisations. Il est donc possible de les trouver sous différentes appellations de bioréacteurs qui se basent sur la digestion anaérobie dans la littérature.

1.3 Modèles de digestion anaérobie

En présentant les étapes de la digestion anaérobie nous remarquons qu'il y a différents types de bactéries anaérobie et différentes matières résultantes. Un modèle mathématiques qui prendrait en considération les détails des étapes serait donc un modèle complet mais complexe. Différents modèles ont alors été développés, ayant différents paramètres selon le besoin. Nous en citons :

1.3.1 Modèle du chemostat

C'est le modèle le plus simplifié. Dans ce modèle nous représentons tous les types de bactéries par une seule variable, ainsi que toutes les matières résultantes de la digestion par une seul variable [5]. Ce modèle considère donc que la digestion se fait en une seule étape. "Chemostat" est aussi le nom utilisé pour désigné le bioréacteur de la digestion anaérobie. C'est ce modèle que nous allons utiliser dans ce travail.

1.3.2 Modèle AM2

L'appellation de ce modèle est l'acronyme de l'Acidogenèse et la Méthanogénèse (digestion à 2 étapes). Ce modèle prend en considération les deux étapes : Acidogenèse et Méthanogénèse [1]. Il y a donc deux types de bactéries anaérobies modélisées par deux variables différentes et deux types de substrats aussi modélisés par deux variables différentes. Ce modèle sera développé en détail dans le mémoire d'ingénieur.

1.3.3 Modèle AM2b

Pour un type de réacteur bien précis, un modèle déjà existant peut être adapté. C'est le cas pour le modèle de digestion AM2 dans un bioréacteur à membrane où une variable s correspondant aux SMP (Produits Microbiens Solubles) est ajouté [4].

1.3.4 Modèle AMH1

Dans ce modèle on suppose que le taux de croissance des acétogènes est infiniment plus grand que celui des méthanogènes. La transformation de la totalité du substrat en AGV est donc instantanée [10].

Une biomasse (X) dégrade un substrat (S) et le transforme en méthane CH_4 et CO_2 selon le schéma réactionnel suivant [19] :



Où :

k , k_m et k_c sont des coefficients "pseudo-stoechiométriques".

$\mu(\cdot)$ est la cinétique de réaction que nous allons définir en détail dans le développement du modèle chemostat.

1.3.5 Modèle ADM1

"Anaerobic Digestion Model n°1" est le modèle le plus complet et le plus précis. C'est le modèle phénoménologique développé par l'IWA (International Water Association) pour la modélisation mathématique des procédés de digestion anaérobie.

Il permet de générer des données virtuelles et tester des stratégies de contrôle à appliquer sur les installations industrielles de la Digestion Anaérobie. Les objectifs sont multiples : optimiser la production du biogaz et éviter le lessivage du bioréacteur ou sa toxicité. Ceci dit c'est un modèle à très grand nombre de variables d'état [9]. Il est donc trop complexe pour permettre une analyse mathématique de sa dynamique non linéaire et seules des recherches numériques sont disponibles [11].

En plus des modèles cités, il existe plusieurs modèles qui prennent en considération les inhibitions rencontrées comme le modèle de colmatage pour le modèle AM2b qui prend en considération le fait que les trous de la membrane peuvent se boucher, la compétitivité entre les bactéries et même des modèles pour des réacteurs interconnectés [3].

Dans les digesteurs anaérobies on trouve plusieurs types de bactéries anaérobies. Ces bactéries s'entre réagissent, il existe parmi elles des types qui coexistent et d'autres qui sont prédatrices. Ce phénomène est appelée le phénomène de compétition, il est introduit dans le modèle mathématique. Ceci dit, dans notre étude la

compétition n'est pas prise en considération. Toutes les bactéries jouent le même rôle et sont représentée par la même variable d'état x .

1.4 Équations d'état du chemostat

Le chemostat contient 2 matières principales : Le liquide et le gaz à l'intérieur du chemostat .

Dans ce chapitre nous nous intéressons seulement au liquide. La composition de ce dernier varie entre son entrée et sa sortie, et c'est justement le but de la digestion anaérobie.

En effet le liquide se compose à son tour de 2 matières principales : Le substrat et les micro-organismes (bactéries). Ce sont les concentrations de ces deux que nous prenons comme variables d'état pour modéliser le système.

Dans la liste qui suit, nous citons toutes les grandeurs relatives aux bactéries et au substrat :

- $s(t)$: La concentration du substrat à l'instant t .
- $x(t)$: La concentration de la biomasse à l'instant t .
- s_{in} : La concentration du substrat à l'entrée du chemostat.
- V : Le volume du chemostat.
- F_{in} : Le débit d'entrée.
- F_{out} : Le débit de sortie.

Remarque 2 Dans la suite du mémoire, nous allons rencontrer de longues expressions dont nous allons simplifier l'écriture en notant $s(t)$ et $x(t)$ par s et x respectivement.

Mais avant de pouvoir établir le modèle, il faut connaître la manière avec laquelle évolue la réaction. Rappelons que le système que nous traitons a principalement en entrée : bactéries + substrat, et en sortie : bactéries + substrat mais avec des concentrations différentes. La matière consommée est le substrat et la matière produite est la biomasse. Donc la grandeur qui nous permet de définir l'évolution de la réaction est la vitesse de création de biomasse que nous appelons la vitesse de réaction et que nous notons $r(t)$, définie comme suit :

$$r(t) = \mu(\cdot)x(t) \tag{1.4.1}$$

avec $\mu(\cdot)$ est la cinétique de la réaction.

Notre but est de déterminer la cinétique de l'état s et la cinétique de l'état x pour aboutir à une représentation d'état du modèle chemostat. Commençons par le substrat :

La quantité du substrat dans le bac est affectée par la quantité de substrat entrante, la quantité du substrat sortante et la quantité du substrat consommée. Nous nous intéressons de plus pré à la quantité de substrat consommée.

Cette dernière est calculée en multipliant le volume du bac par la vitesse de réaction, pondérée par la constante stœchiométrique car rappelons que la vitesse de réaction est la vitesse de création de la biomasse, hors la quantité du substrat

consommée n'est pas égale à la quantité de bactéries produites. Nous obtenons ainsi :

$$\frac{\partial V s(t)}{\partial t} = F_{in}(t)s_{in} - F_{out}(t)s(t) - kVr(t) \quad (1.4.2)$$

De même pour la quantité de bactéries, à l'exception de la matière entrante dans le bioréacteur que nous considérons très faible en bactéries. Nous obtenons alors l'équation :

$$\frac{\partial V x(t)}{\partial t} = -F_{out}(t)x(t) + Vr(t) \quad (1.4.3)$$

Remarque 3 la vitesse de réaction est en fonction de la cinétique de réaction et la quantité de bactérie, elle représente alors la vitesse de création des bactéries, et n'a donc pas besoin de pondération.

Notre but est de représenter la cinétique des concentrations s et x . Nous devons donc les séparer de l'expression du volume des deux équations (1.4.2) et (1.4.3) :

$$\begin{cases} s(t)\frac{\partial V}{\partial t} + V\frac{\partial s(t)}{\partial t} = F_{in}(t)s_{in} - F_{out}(t)s(t) - kVr(t) \\ x(t)\frac{\partial V}{\partial t} + v(t)\frac{\partial x(t)}{\partial t} = -F_{out}(t)x(t) + Vr(t) \end{cases} \quad (1.4.4)$$

Avec :

$$\frac{\partial V}{\partial t} = F_{in}(t) - F_{out}(t) \quad (1.4.5)$$

Remplaçons (1.4.5) dans (1.4.3) :

$$\begin{cases} s(t)F_{in}(t) - s(t)F_{out}(t) + V\frac{\partial s(t)}{\partial t} = F_{in}(t)s_{in} - F_{out}(t)s(t) - kVr(t) \\ x(t)F_{in}(t) - x(t)F_{out}(t) + V\frac{\partial x(t)}{\partial t} = -F_{out}(t)x(t) + Vr(t) \end{cases} \quad (1.4.6)$$

Après simplification, nous obtenons :

$$\begin{cases} \frac{\partial s(t)}{\partial t} = \frac{1}{V}F_{in}(t)s_{in} - \frac{1}{V}s(t)F_{out}(t) - kr(t) \\ \frac{\partial x(t)}{\partial t} = -\frac{1}{V}F_{in}(t)x(t) + r(t) \end{cases} \quad (1.4.7)$$

Rappelons que le modèle de la digestion anaérobie que nous traitons est le modèle du chemostat, qui est un modèle d'alimentation continue où le volume à l'intérieur du bioréacteur est maintenu constant ($F_{in}(t) = F_{out}(t)$). Cependant le débit d'entrée $F_{in}(t)$ définit un paramètre important dans la composition du liquide qui se trouve à l'intérieur du bioréacteur. Ce paramètre est le taux de dilution, définit comme :

$$D(t) = \frac{1}{V}F_{in}(t) \quad (1.4.8)$$

Les équations d'état sont alors d'avantage simplifiées en remplaçant la vitesse de réaction (1.4.1) et l'expression du taux de dilution (1.4.8) dans (1.4.7) :

$$\begin{cases} \dot{s}(t) = D(t) [S_{in} - s(t)] - k\mu(\cdot)x(t) \\ \dot{x}(t) = [-D(t) + \mu(\cdot)]x(t) \end{cases} \quad (1.4.9)$$

La cinétique de réaction n'est autre que la cinétique de croissance de la biomasse. C'est le modèle qui permet de définir la tendance avec laquelle les bactéries se multiplient en consommant du substrat. Il en existe plusieurs formes, nous en citons quelques uns ci-dessous :

Monod

C'est la cinétique la plus simplifiée mais qui reste proche de la réalité, contrairement à la cinétique linéaire où $\mu(s) = \alpha s$. Elle est utilisée pour des substrats qui sont limitant. Son expression est définie par :

$$\mu(s) = \mu_{max} \frac{s}{K + s}$$

Où :

- μ_{max} est le taux de croissance maximal (constant) des micro-organismes.
- K est la constante de Monod, aussi appelée constante de demi-saturation est définie par : $\mu(K) = \frac{1}{2}\mu_{max}$

Contois

C'est une cinétique dont l'expression ressemble à l'expression de la cinétique de Monod et qui fait parti aussi de la catégorie des modèles sans inhibitions. La différence est que la cinétique de Contois est une cinétique plus réaliste qui prend en considération aussi la concentration de la biomasse x .

La croissance de la biomasse est inversement proportionnelle à sa concentration. En effet, les bactéries inhibent leurs propres croissances [22].

Son expression est donnée par :

$$\mu(s, x) = \mu_{max} \frac{s}{Kx + s}$$

Remarque 4 Ici $\mu(Kx) = \frac{1}{2}\mu_{max}$ alors la constante de demi-saturation vaut Kx [22], nous allons donc appeler K coefficient d'affinité qu'on trouve également dans la littérature.

Tessier

Toujours dans la catégorie des cinétiques de croissance sans inhibitions, la cinétique de Tessier en est une autre forme. Son expression est la suivante :

$$\mu(s) = \mu_{max} \left(1 - e^{-\frac{s}{K}}\right)$$

Certains substrats à forte concentration causent des inhibitions dans la multiplication des bactéries. Un modèle qui prend en considération ces inhibitions permet de contourner les points critiques d'inhibition ou d'en diminuer l'impact avec une commande adaptée [20] et [21]. Parmi ces cinétiques nous avons la cinétique de :

Haldane

Dont l'expression est :

$$\mu(s) = \mu_{max} \frac{s}{K + s + \frac{s^2}{K_i}}$$

Où :

— K_i le coefficient d'inhibition de l'espèce.

Ci-dessous les allures des cinétiques de croissance autour du point d'équilibre $(s_{eq}, x_{eq}) = \left(\frac{KD(t)}{\mu_{max} - D(t)}, \frac{1}{k} [S_{in} - s_{eq}] \right)$ que nous allons définir plus tard, avec : $S_{in} = 100, k = 6.6, K = 3, \mu_{max} = 1.2$ et $K_i = 5$:

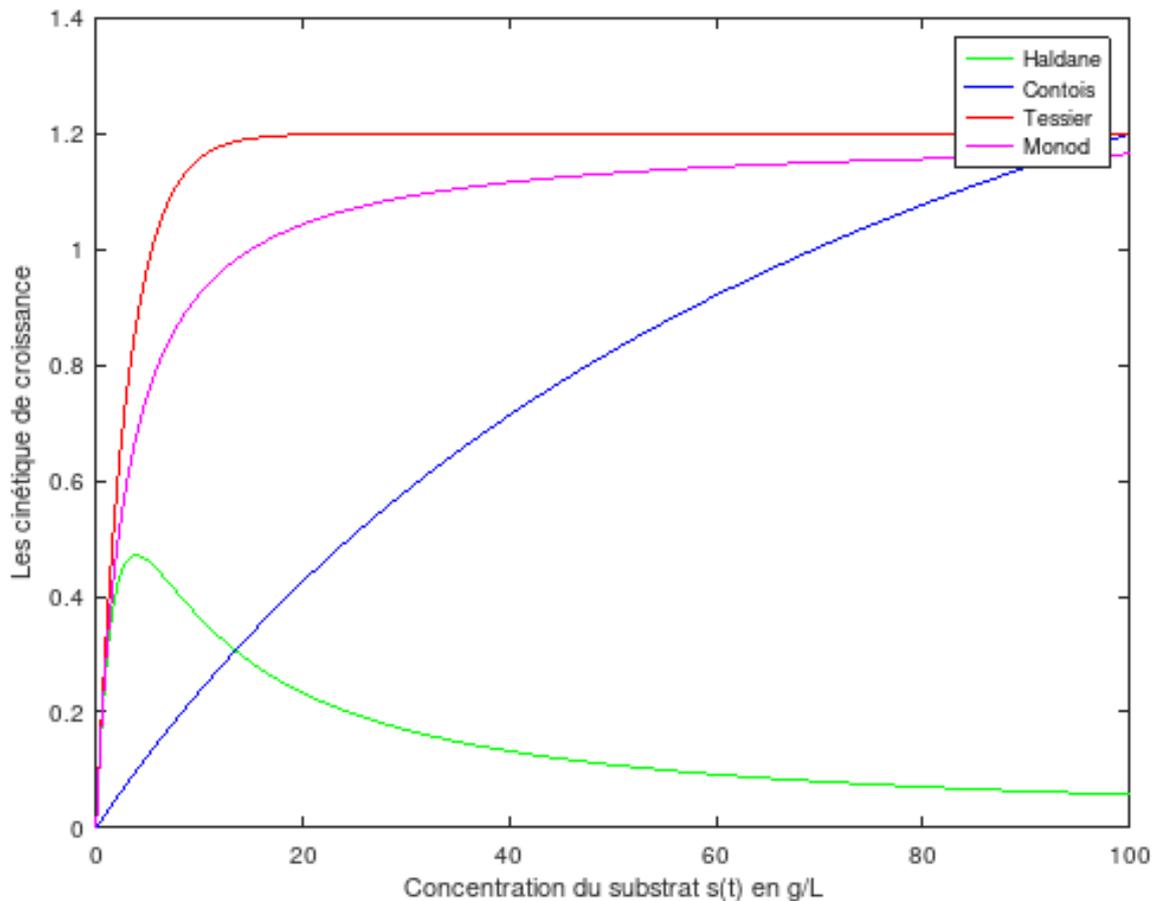


FIGURE 1.5 – Les cinétiques de croissance en fonction de la concentration du substrat

Le modèle de croissance que nous utilisons pour définir $\mu(\cdot)$ est la cinétique de Monod.

Nous réécrivons donc le modèle :

$$\begin{cases} \dot{s}(t) = D(t) [S_{in} - s(t)] - k\mu_{max} \frac{s(t)}{K + s(t)} x(t) \\ \dot{x}(t) = \left[-D(t) + \mu_{max} \frac{s(t)}{K + s(t)} \right] x(t) \end{cases} \quad (1.4.10)$$

Maintenant que nous avons établi le modèle du chemostat, nous devons nous assurer qu'il respecte les contraintes physiques réelles les plus triviales de la digestion anaérobie : la positivité de la concentration du substrat $s(t)$ et celle des bactéries $x(t)$.

1.5 Positivité et bornitude des états

1.5.1 Positivité de $x(t)$

L'équation différentielle qui définit la concentration des bactéries est :

$$\dot{x}(t) = [\mu(s) - D(t)] x(t)$$

La résolution de cette équation est :

$$x(t) = e^{\int_0^t (\mu(s(\tau)) - D(\tau)) d\tau} x(0)$$

Pour $x(0) > 0$ on a $x(t) > 0$

$x(0)$ doit être strictement positive. Physiquement $x(0)$ peut être nulle mais ceci ferait qu'il n'y aurait plus de dynamique de $x(t)$ (c'est ce qu'on appelle un point de lessivage que nous allons voir en étudiant les points d'équilibres du système).

1.5.2 Positivité de $s(t)$

Pour prouver la positivité de l'état s , nous allons essayer de trouver un contre exemple $s(t^*) < 0$, si nous arrivons à prouver que ce $s(t^*)$ ne peut pas exister alors on a toujours $s(t) > 0$.

Nous pouvons poser $s(0) \geq 0$ car les conditions initiales doivent obligatoirement obéir aux contraintes réelles du phénomène.

$s(t)$ est une fonction continue, ce qui implique que pour arriver à $s(t^*)$ il faut obligatoirement passer par $s(t_1) = 0$, avec $t_1 > 0$ et $\dot{s}(t_1) < 0$.

Or qu'en remplaçant $s(t_1) = 0$ dans l'équation d'état $\dot{s}(t)$ nous obtenons :

$$\dot{s}(t_1) = D(t) S_{in} \geq 0$$

t_1 ne peut donc pas exister, ce qui implique que t^* ne peut pas exister.

Pour $s(0) > 0$ on a $s(t) > 0$

Hormis la positivité des concentrations, il est aussi évident que la concentration du substrat $s(t)$ ne peut pas dépasser S_{in} . Nous allons donc démontrer la bornitude supérieure de $s(t)$ ainsi que d'autres bornitudes (bornitude supérieure de $x(t)$, bornitude inférieure de $s(t)$ et de $x(t)$) qui ne sont pas triviale mais dont nous aurons besoin dans le 3^{me} chapitre.

1.5.3 Bornitude supérieure de $s(t)$

Nous avons de (1.4.9), l'équation :

$$\dot{s}(t) = D(t) [S_{in} - s(t)] - k\mu(s)x(t)$$

Puisque $k\mu(s)x(t) \geq 0$ nous obtenons l'inégalité :

$$\dot{s}(t) \leq D(t) [S_{in} - s(t)]$$

Nous avons obtenu une équation différentielle que nous allons résoudre en multipliant les deux côtés de l'égalité par des variables dans le but d'obtenir une dérivé d'une fonction contenant $s(t)$ qui nous ai familière :

$$\dot{s}(t) + D(t)s(t) \leq D(t)S_{in}$$

Multiplions les deux côtés par $e^{\int_0^t D(\tau)d\tau}$:

$$\dot{s}(t)e^{\int_0^t D(\tau)d\tau} + D(t)s(t)e^{\int_0^t D(\tau)d\tau} \leq D(t)S_{in}e^{\int_0^t D(\tau)d\tau}$$

Une expression de dérivé contenant $s(t)$ est apparue :

$$\frac{d}{dt} \left(s(t)e^{\int_0^t D(\tau)d\tau} \right) \leq \frac{d}{dt} \left(S_{in}e^{\int_0^t D(\tau)d\tau} \right)$$

Nous pouvons désormais intégrer les deux côtés entre 0 et t :

$$s(t)e^{\int_0^t D(\tau)d\tau} - s(0)e^0 \leq S_{in}e^{\int_0^t D(\tau)d\tau} - S_{in}e^0$$

Nous multiplions ensuite par $e^{-\int_0^t D(\tau)d\tau}$ pour déduire l'expression de $s(t)$:

$$s(t) \leq s(0)e^{-\int_0^t D(\tau)d\tau} + S_{in} \left[1 - e^{-\int_0^t D(\tau)d\tau} \right]$$

Réécrivons l'inégalité comme suit :

$$s(t) \leq (s(0) - S_{in}) e^{-\int_0^t D(\tau)d\tau} + S_{in}$$

Rappelons que nous pouvons poser $s(0) \leq S_{in}$ car les conditions initiales doivent obligatoirement obéir au contraintes réelles du phénomène. Nous obtenons :

$$(s(0) - S_{in}) e^{-\int_0^t D(\tau)d\tau} \leq 0$$

Donc :

$$s(t) \leq S_{in}$$

1.5.4 Bornitude supérieure de $x(t)$

Pour prouver la bornitude supérieure de $x(t)$ nous allons poser une variable $\xi(t)$ défini comme suit [1] :

$$\xi(t) = s(t) + kx(t)$$

Calculons sa dynamique :

$$\dot{\xi}(t) = \dot{s}(t) + k\dot{x}(t)$$

Nous remplaçons $\dot{s}(t)$ et $\dot{x}(t)$ par leurs expressions dans la représentation d'état (1.4.9) :

$$\dot{\xi}(t) = D(t)S_{in} - D(t)\xi(t)$$

Nous avons obtenu une équation différentielle que nous allons résoudre en multipliant les deux côtés de l'égalité par des variables dans le but d'obtenir une dérivé d'une fonction contenant $\xi(t)$ qui nous est familière :

$$\dot{\xi}(t) + D(t)\xi(t) = D(t)S_{in}$$

Multiplions les deux côtés par $e^{\int_0^t D(\tau)d\tau}$:

$$\dot{\xi}(t)e^{\int_0^t D(\tau)d\tau} + D(t)\xi(t)e^{\int_0^t D(\tau)d\tau} = D(t)S_{in}e^{\int_0^t D(\tau)d\tau}$$

Une expression de dérivé contenant $\xi(t)$ est apparue, nous pouvons désormais intégrer les deux côté entre 0 et t :

$$\xi(t)e^{\int_0^t D(\tau)d\tau} - \xi(0) = S_{in}e^{\int_0^t D(\tau)d\tau} - S_{in}$$

Nous multiplions ensuite par $e^{-\int_0^t D(\tau)d\tau}$ pour déduire l'expression de $\xi(t)$:

$$\xi(t) = \xi(0)e^{-\int_0^t D(\tau)d\tau} + S_{in} \left[1 - e^{-\int_0^t D(\tau)d\tau} \right]$$

$D(\tau)$ est positive donc $e^{-\int_0^t D(\tau)d\tau} < 1$ et $1 - e^{-\int_0^t D(\tau)d\tau} < 1$. Nous en déduisons l'inégalité :

$$\xi(t) \leq \xi(0) + S_{in}$$

Remplaçons $\xi(t)$ et $\xi(0)$ par leurs expressions :

$$s(t) + kx(t) \leq s(0) + kx(0) + S_{in}$$

Puisque $s(t) \geq 0$:

$$kx(t) \leq s(0) + kx(0) + S_{in}$$

Et puisque $s(t) \leq S_{in}$ alors $s(0) \leq S_{in}$ implique que $s(0) + S_{in} \leq 2S_{in}$, donc :

$$x(t) \leq \bar{x} = \frac{2}{k}S_{in} + x(0)$$

1.5.5 Bornitude inférieure de $s(t)$

Utilisons la même variable $\xi(t)$ définie précédemment.
Nous avons :

$$\dot{\xi}(t) = D(t)S_{in} - D(t)\xi(t)$$

dont la solution est :

$$\xi(t) = (\xi(0) - S_{in}) e^{-\int_0^t D(\tau)d\tau} + S_{in}$$

nous avons $0 < e^{-\int_0^t D(\tau)d\tau} < 1$, donc :

$$\min(\xi(0), S_{in}) < \xi(t) < \max(\xi(0), S_{in})$$

de (1.4.9), nous avons

$$\dot{s}(t) = D(t) [S_{in} - s(t)] - k\mu(s)x(t)$$

Rappelons que la cinétique de croissance de Monod est bornée par μ_{max} , donc :

$$\dot{s}(t) \geq D(t) [S_{in} - s(t)] - k\mu_{max}x(t)$$

Rappelons aussi que $\xi(t) = s(t) + kx(t) \Rightarrow kx(t) = \xi(t) - s(t)$, remplaçons ceci dans la dernière inégalité :

$$\dot{s}(t) \geq D(t) [S_{in} - s(t)] - \mu_{max} (\xi(t) - s(t))$$

nous pouvons en déduire :

$$\dot{s}(t) \geq D(t)S_{in} [\mu_{max} - D(t)] s(t) - \mu_{max}\max(\xi(0), S_{in})$$

En réalité, nous ne pouvons pas avoir des conditions initiales avec des concentrations importantes, nous avons donc $S_{in} > \xi(0)$:

$$\dot{s}(t) \geq D(t)S_{in} [\mu_{max} - D(t)] s(t) - \mu_{max}S_{in}$$

donc :

$$s(t) \geq S_{in} + [s(0) - S_{in}] e^{-\int_0^t (D(\tau) - \mu_{max})d\tau}$$

Hypothèse : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^t (D(\tau) - \mu_{max})d\tau = C$, avec

$C = \text{constante} < 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^t D(\tau)d\tau = +\infty$ (condition de persistance d'excitation⁴)

Posons :

$$\phi(t) = S_{in} + [s(0) - S_{in}] e^{-\int_0^t (D(\tau) - \mu_{max})d\tau}$$

nous avons :

$$\dot{\phi}(t) = [s(0) - S_{in}] [D(t) - \mu_{max}] e^{-\int_0^t (-D(\tau) + \mu_{max})d\tau}$$

où $D(t) < \mu_{max}$ et $s(0) < S_{in}$ donc $\dot{\phi}(t) < 0$ ce qui implique que $\phi(t)$ est une fonction décroissante.

Nous en déduisons l'inégalité suivante :

$$\phi(+\infty) \leq \phi(t)$$

4. La condition de persistance est une condition réelle d'opération qui dit que $D(t)$ doit constamment changer pour que les concentrations ne stagnent pas dans un point d'équilibre.

tel que :

$$\phi(\infty) = S_{in} + [s(0) - S_{in}] e^C$$

donc :

$$s(t) \geq \phi(t) \geq \underline{s} = S_{in} + [s(0) - S_{in}] e^C$$

1.5.6 Bornitude inférieure de $x(t)$

La cinétique de x est définie comme suit :

$$\dot{x}(t) = [\mu [s(t)] - D(t)] x(t)$$

sa solution est :

$$x(t) = e^{\int_0^t [\mu [s(\tau)] - D(\tau)] d\tau} x(0)$$

Nous allons essayer de borner l'expression précédente en utilisant la bornitude de l'état s :

$$0 < \underline{s} \leq s(\tau) \leq S_{in}$$

Les cinétiques de croissance sont toutes des fonctions croissantes, donc :

$$\mu(\underline{s}) \leq \mu [s(\tau)] \leq \mu(S_{in})$$

Nous allons soustraire de tous les côtés de l'inégalité $D(\tau)$ puis nous allons les intégrer entre 0 et t :

$$\int_0^t [\mu(\underline{s}) - D(\tau)] d\tau \leq \int_0^t [\mu [s(\tau)] - D(\tau)] d\tau \leq \int_0^t [\mu(S_{in}) - D(\tau)] d\tau$$

$D(\tau) \leq D_{max}$ implique que $\int_0^t D(\tau) d\tau \leq t D_{max}$

$\mu(s(\tau)) \geq \mu(\underline{s})$ implique que $\int_0^t \mu(s(\tau)) d\tau \geq t \mu(\underline{s})$

ceci nous donne :

$$t [\mu(\underline{s}) - D_{max}] \leq \int_0^t [\mu [s(\tau)] - D(\tau)] d\tau$$

Le but étant de trouver une constante positive qui soit une borne inférieure de l'état x , il suffit de poser $\mu(\underline{s}) = D_{max}$ [1].

1.6 Analyse mathématique du système

D'après les équations d'état qui définissent le modèle (1.4.9), nous remarquons que le système obtenu est un système non linéaire. Afin d'étudier le système nous allons déterminer les points d'équilibres autour desquels nous allons étudier la stabilité.

1.6.1 Points d'équilibres du système

Pour déterminer les points d'équilibre nous résolvons les équations suivantes :

$$\begin{cases} \dot{s}(t) = 0 \\ \dot{x}(t) = 0 \end{cases} \quad (1.6.1)$$

$s(t_{eq})$ et $x(t_{eq})$ sont les solutions respectives des équations du système (1.6.1).
Notons $s(t_{eq})$ par s_{eq} et $x(t_{eq})$ par x_{eq} . Ceci nous donne :

$$\begin{cases} D(t) [S_{in} - s_{eq}] - k\mu_{max} \frac{s_{eq}}{s_{eq} + K} x_{eq} = 0 & (1.6.2a) \\ \left[\mu_{max} \frac{s_{eq}}{s_{eq} + K} - D(t) \right] x_{eq} = 0 & (1.6.2b) \end{cases}$$

À partir de l'équation (1.6.2b) nous obtenons :

$$x_{eq} = 0 \quad (1.6.3)$$

ou

$$\mu_{max} \frac{s_{eq}}{s_{eq} + K} - D(t) = 0 \quad (1.6.4)$$

En remplaçant (1.6.3) dans (1.6.2a) :

$$\begin{cases} x_{eq1} = 0 \\ D(t) [S_{in} - s_{eq1}] = 0 \end{cases} \quad (1.6.5)$$

Enfin :

$$\begin{cases} x_{eq1} = 0 \\ s_{eq1} = S_{in} \end{cases} \quad (1.6.6)$$

Nous obtenons le **premier point d'équilibre** qui correspond au point de lessivage :

$$(s_{eq1}, x_{eq1}) = (S_{in}, 0)$$

Où toutes les bactéries disparaissent à l'intérieur du bioréacteur ce qui implique que le substrat ne se consomme pas et garde sa concentration initiale.

De l'égalité (1.6.4) on a :

$$\mu_{max} \frac{s_{eq2}}{s_{eq2} + K} = D(t) \quad (1.6.7)$$

Nous en déduisons l'expression de s_{eq2} :

$$s_{eq2} = \frac{KD(t)}{\mu_{max} - D(t)} \quad (1.6.8)$$

Pour que s_{eq2} existe il faut que $0 \leq s_{eq2} \leq S_{in}$:

$$\begin{cases} 0 \leq s_{eq2} \\ s_{eq2} \leq S_{in} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} D(t) \leq \mu_{max} \\ D(t) \leq \mu(S_{in}) \end{cases} \Rightarrow D(t) \leq \mu(S_{in}), \text{ car } \mu(S_{in}) < \mu_{max}$$

La condition d'existence de s_{eq2} est : $D(t) \leq \mu(S_{in})$.

En remplaçant (1.6.7) dans (1.6.2a) :

$$x_{eq2} = \frac{1}{k} (S_{in} - s_{eq2}) \quad (1.6.9)$$

La condition d'existence de x_{eq2} est $x_{eq2} \geq 0$ qui est toujours vérifiée lorsque s_{eq2} existe.

Le **deuxième point d'équilibre** représente un équilibre non trivial :

$$(s_{eq2}, x_{eq2}) = \left(\frac{KD(t)}{\mu_{max} - D(t)}, \frac{1}{k} [S_{in} - s_{eq2}] \right)$$

1.6.2 Stabilité autour des points d'équilibres

Après avoir déterminé les points d'équilibres et leurs conditions d'existence, nous étudions la stabilité du système linéarisé autour de ces points. Pour cela nous résolvons l'équation caractéristique

$$\det(\lambda I - J) = 0$$

Si tous les modes λ correspondant à un point d'équilibre sont à parties réelles négatives alors le point d'équilibre est stable.

Commençons par déterminer la matrice jacobienne du système :

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial \dot{s}(t)}{\partial s(t)} & \frac{\partial \dot{s}(t)}{\partial x(t)} \\ \frac{\partial \dot{x}(t)}{\partial s(t)} & \frac{\partial \dot{x}(t)}{\partial x(t)} \end{pmatrix}$$

On calcule alors l'expression de l'équation caractéristique :

$$\det(\lambda I - J) = \begin{vmatrix} \lambda + D(t) + kx(t) \frac{\partial \mu(s)}{\partial s} & k\mu(s) \\ -x \frac{\partial \mu(s)}{\partial s} & \lambda - \mu(s) + D(t) \end{vmatrix} \quad (1.6.10)$$

Commençons par remplacer le **premier point d'équilibre** $(s_{eq1}, x_{eq1}) = (S_{in}, 0)$ dans (1.6.10) :

$$\begin{vmatrix} \lambda + D(t) & k(S_{in}) \\ 0 & \lambda - \mu(S_{in}) + D(t) \end{vmatrix} = 0$$

Ceci implique :

$$[\lambda + D(t)] [\lambda - \mu(S_{in}) + D(t)] = 0$$

Nous obtenons donc les deux solution :

$$\begin{cases} \lambda_{11} = -D(t) \\ \lambda_{12} = \mu(S_{in}) - D(t) \end{cases} \quad (1.6.11)$$

$D(t) > 0$ donc $\lambda_{11} < 0$

Pour que l'équilibre du lessivage soit stable il faut poser $\lambda_{12} < 0$ ce qui implique qu'il faut mettre une contrainte sur le taux de dilution $D(t) > \mu(S_{in})$

Remplaçons maintenant le **deuxième point d'équilibre**

$(s_{eq2}, x_{eq2}) = \left(\frac{KD(t)}{\mu_{max} - D(t)}, \frac{1}{k} [S_{in} - s_{eq2}] \right)$ dans (1.6.10) :

$$\begin{vmatrix} \lambda + D(t) + kx_{eq2} \frac{\partial \mu(s)}{\partial s} \Big|_{s=s_{eq2}} & k\mu(s_{eq2}) \\ -x_{eq2} \frac{\partial \mu(s)}{\partial s} \Big|_{s=s_{eq2}} & \lambda - \mu(s_{eq2}) + D(t) \end{vmatrix} = 0$$

On pose :

$$x_{eq2} \frac{\partial \mu(s)}{\partial s} \Big|_{s=s_{eq2}} = H(t)$$

Sachant que : $\mu(s_{eq2}) = D(t)$, nous obtenons :

$$\begin{vmatrix} \lambda + D(t) + kH(t) & kD(t) \\ -H(t) & \lambda \end{vmatrix} = 0$$

Nous résolvons alors l'équation :

$$\lambda^2 + [D(t) + kH(t)] \lambda + kD(t)H(t) = 0$$

Les deux solutions sont :

$$\begin{cases} \lambda_{21} = -D(t) \\ \lambda_{22} = -kH(t) \end{cases}$$

$D(t) > 0$ donc $\lambda_{11} < 0$ Pour que le deuxième équilibre soit stable il faut poser $\lambda_{22} < 0$ ce qui implique qu'il faut mettre $kH(t) > 0$

ce qui revient à mettre $kx_{eq2} \frac{\partial \mu(s)}{\partial s} \Big|_{s=s_{eq2}} > 0$

$\mu(s)$ est une fonction croissante donc $kH(t)$ est toujours positive tant que le deuxième point d'équilibre existe. Donc le deuxième équilibre est toujours stable tant que ses conditions d'existences sont remplies ($D(t) < \mu(S_{in})$).

1.7 Diagramme opératoire

Rappelons que l'entrée du chemostat est le substrat. Les grandeurs relatives au substrat d'entrée sont :

- S_{in} la concentration du substrat à l'entrée du chemostat.
- $D(t)$ le taux de dilution défini par $\frac{\text{débit d'entrée}}{\text{volume du chemostat}}$.

Ce sont ces deux grandeurs que l'opérateur injecte au système sous forme de combinaison (S_{in}, D) .

Puisque les points d'équilibres sont fortement affectés par cette combinaison, le choix de (S_{in}, D) doit être étudié et cette étude doit palier toutes les valeurs que peuvent prendre ces entrées en pratique [9].

Il existe un outil qui nous permet de visualiser des zones distinctes, affectées différemment par les combinaisons d'entrée. Cet outil est *le diagramme opératoire*, dont le nom fait référence à l'opérateur.

Il existe deux manières de dessiner un diagramme opératoire :

1.7.1 Solution analytique

Nous avons déjà défini les zones d'existence et de stabilité de chaque équilibre. Rappelons que dans le diagramme opératoire nous situons les zones de stabilité en fonction des combinaisons (S_{in}, D) . Donc il nous faut écrire les conditions d'existence et de stabilité sous forme d'inégalité entre D et $f(S_{in})$, où f est une fonction.

Premier équilibre

La condition de stabilité dont nous disposons est : $D(t) > \mu(S_{in})$ qui est déjà sous la forme souhaitable, quant à l'existence, il existe toujours [23].

Deuxième équilibre

La condition d'existence du deuxième point d'équilibre est $D(t) < \mu(S_{in})$ donc la condition de stabilité du deuxième point d'équilibre est elle même.

Récapitulons : Nous avons deux points d'équilibres dont chacun a une condition d'existence et une condition de stabilité :

- La condition d'existence du premier point d'équilibre : pas de condition.
- La condition d'existence du deuxième point d'équilibre : $\mu(S_{in}) < D(t)$.
- La condition de stabilité du premier point d'équilibre : $\mu(S_{in}) > D(t)$.
- La condition de stabilité du deuxième point d'équilibre : $\mu(S_{in}) < D(t)$.

Notons la zone où $\mu(S_{in}) < D(t)$ par J_0 qui est la zone de stabilité du premier point d'équilibre et la zone où $\mu(S_{in}) > D(t)$ par J_1 qui est la zone d'existence et de stabilité du deuxième point d'équilibre [23].

Le diagramme opératoire que nous cherchons est le suivant :

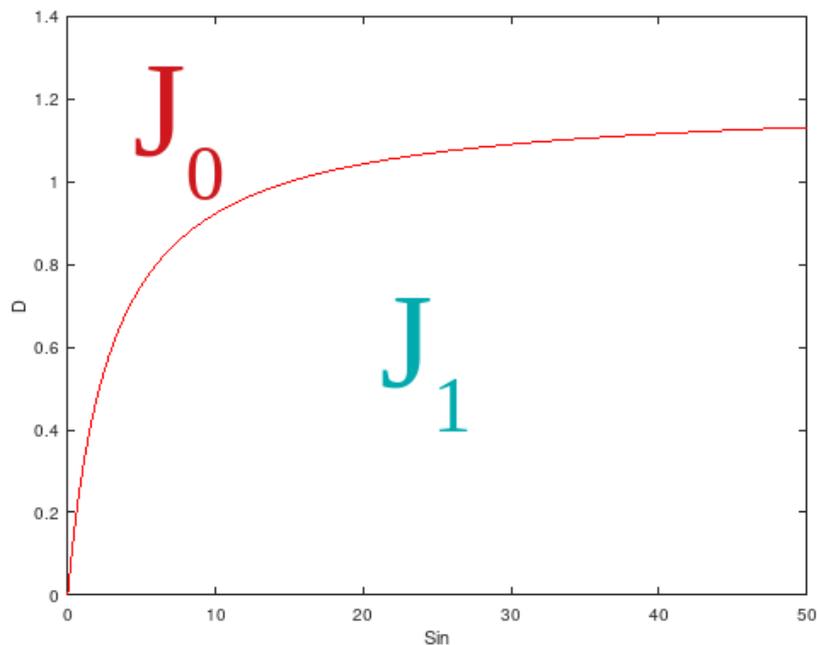


FIGURE 1.6 – Diagramme opératoire montrant les zones distinctes, affectées différemment par les combinaisons d'entrée (S_{in}, D)

1.7.2 Solution numérique

Nous pouvons traduire les étapes par lesquels nous sommes passés pour établir la solution analytique en algorithme dans le but d'écrire un code qui permet de dessiner toutes les zones d'existence et de stabilité. Ceci est possible en balayant tout l'intervalle de S_{in} et de $D(t)$ pour lesquels nous allons générer des points dont les couleurs dépendent de l'existence et la stabilité des deux équilibre [9].

Remarque 5 *Il est possible de ne pas détecter quelques zones si la résolution de l'image n'est pas grande. Pour plus de sécurité, nous balayons l'intervalle des entrées avec le pas le plus petit possible, ce qui risque de prendre beaucoup de temps en simulation.*

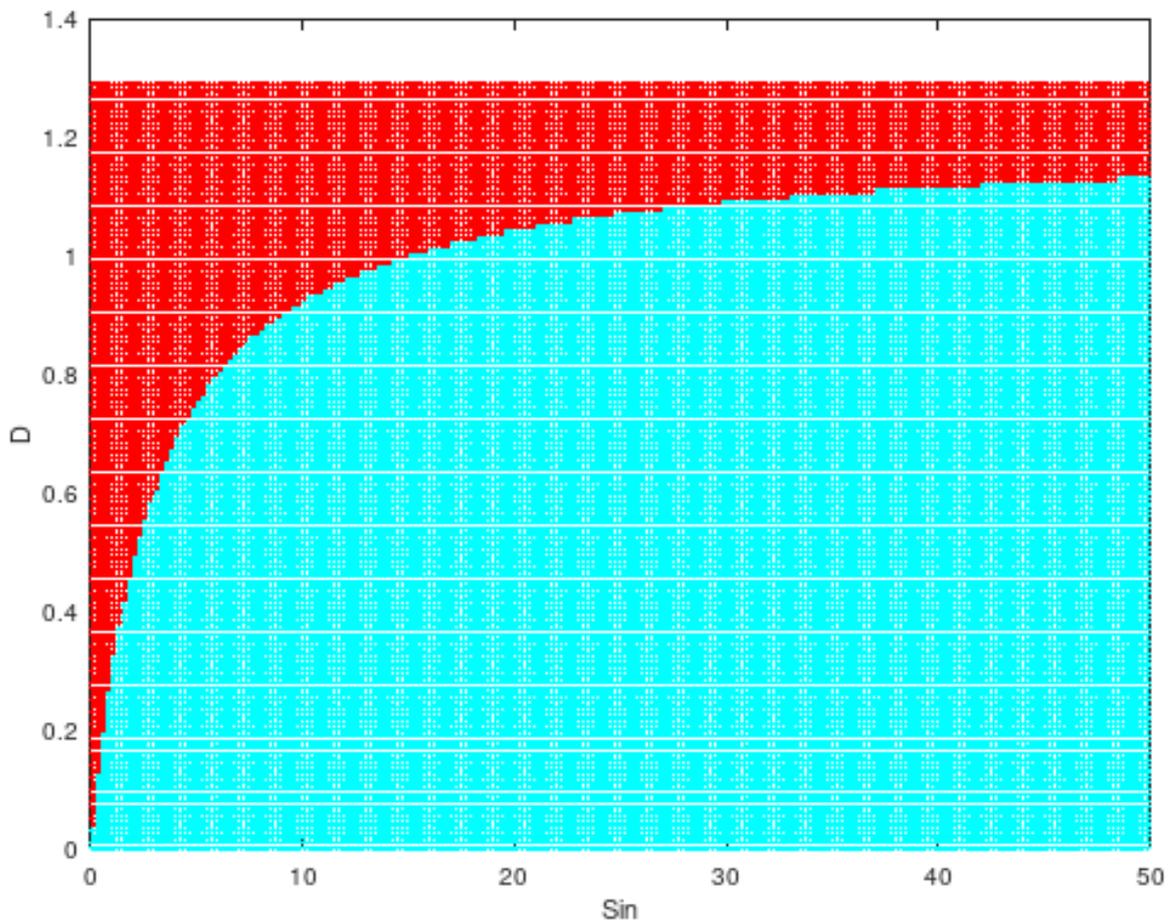


FIGURE 1.7 – Diagramme opératoire montrant les zones distinctes, affectées différemment par les combinaisons d'entrée (S_{in}, D)

Le diagramme obtenu a été généré pour un S_{in} allant de 0.1 à 50 avec un pas de 0.25 et un $D(t)$ allant de 0.0001 à 1.3 avec un pas de 0.01. Sa forme est conforme à la solution analytique.

1.8 Simulation du modèle autour des points d'équilibres

Nous avons remarqué lors de l'étude de stabilité des points d'équilibre que les conditions de stabilité dépendent des valeurs des entrées $D(t)$ et S_{in} . En réalité nous n'avons la plus part du temps pas la capacité d'opérer sur S_{in} car elle dépend de l'environnement extérieur et pour la manipuler il faudrait faire une toute autre installation de dilution avant de la faire entrer dans le bioréacteur. Nous allons donc fixer une seule valeur de l'entrée $S_{in} = \text{constante}$ pour toutes les simulations, et nous simulons notre système autour des deux points d'équilibre avec différentes valeurs de $D(t)$ pour chaque simulation en prenant toujours $D = \text{constante}$. Nous posons les paramètres et les conditions initiales avec les valeurs du tableau suivant [1] : où COD est le carbone organique dissous qui est un paramètre utilisé pour

Grandeurs	Valeur
s_0	3 g/L
x_0	0.5 g/L
S_{in}	9 g/L
K	4.25 g COD/L
k	6.6 g COD/g x
μ_{max}	1.2 Jour ⁻¹

TABLE 1.1 – Conditions initiales et paramètres du système

caractériser et suivre l'évolution du taux de carbone dissous dans l'eau.

Commençons par simuler la progression des états s et x avec la condition de lessivage, sachant que cette dernière est : $D > \mu(S_{in})$. Nous avons donc pris $D = 1$:

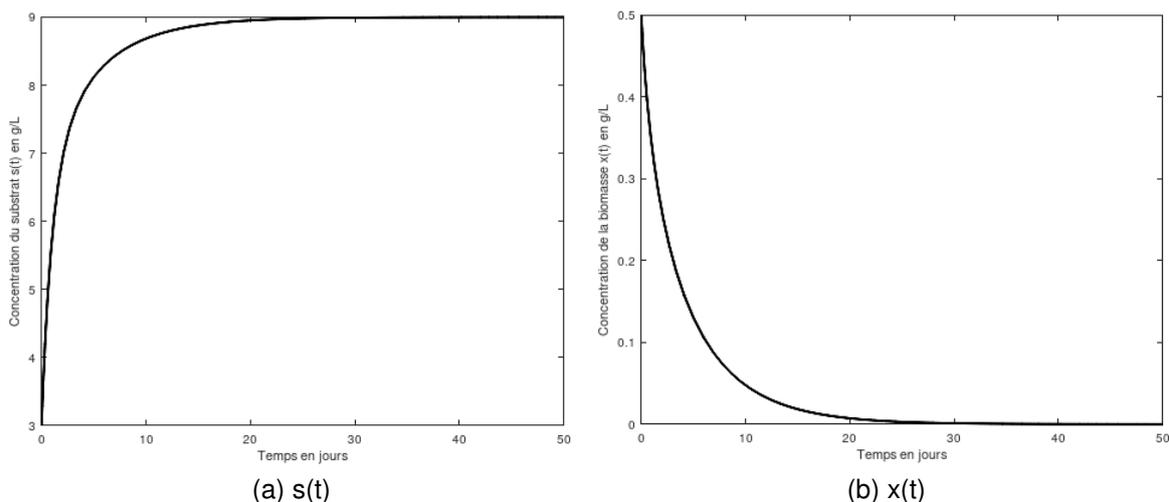


FIGURE 1.8 – Conditions de lessivage ($D=1$)

Nous remarquons que l'état s converge vers S_{in} et l'état x converge vers 0, qui est le premier point d'équilibre.

Essayons maintenant de simuler avec les conditions de stabilité du deuxième point d'équilibre. Il nous faudra choisir $D < \mu(S_i)$, prenons $D = 0.7$.

Pour $D(t) = 0.7 : (s_{eq2}, x_{eq2}) = (5.95, 0.462)$.

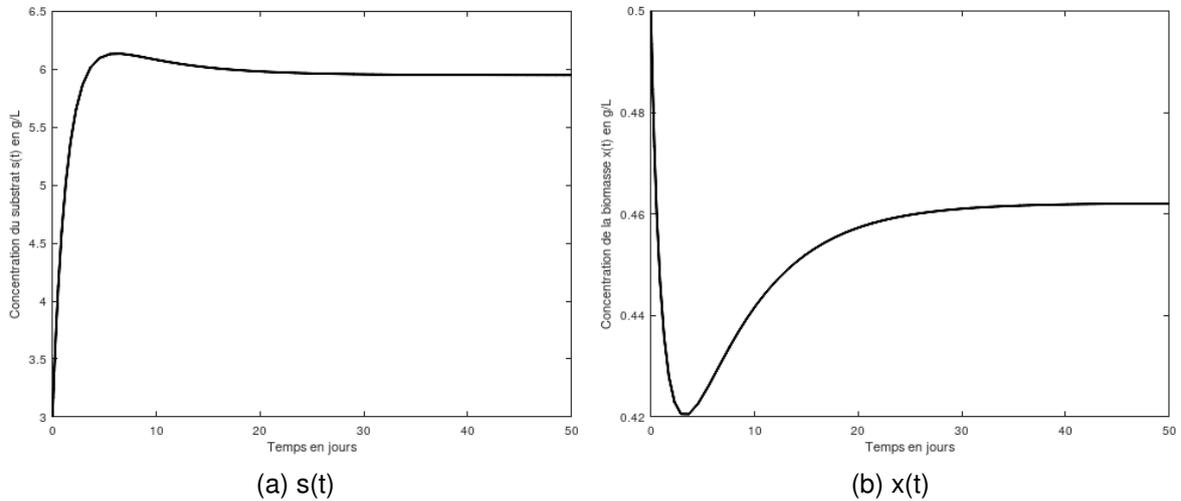


FIGURE 1.9 – Conditions de non lessivage ($D=0.7$)

Nous remarquons que les états convergent vers le point d'équilibre. Mais avant de converger nous remarquons que pour les deux concentrations ont un dépassement.

Il existe un dépassement dans s car la concentration $s(0) = 3$, en injectant le substrat avec une concentration $S_{in} = 9$, s croît rapidement vers S_{in} , mais la consommation du substrat par les bactéries la fait décroître jusqu'à atteindre l'équilibre.

De même pour x , elle décroît rapidement car le flux injecté est nulle en concentration de bactéries et $x(0) = 0.5$, x décroît rapidement vers 0, mais la consommation du substrat par les bactéries les fait multiplier jusqu'à atteindre l'équilibre.

Chapitre 2

État de l'art sur les observateurs non linéaires

Dans le chapitre précédent nous avons abordé des généralités sur les systèmes de la digestion anaérobie. Nous avons ensuite établi le modèle mathématique du chemostat en utilisant la cinétique de croissance de Monod puis nous avons analysé ce système point de vue équilibres et stabilité de ces derniers.

Cette première étape fut essentielle étant donné que le but du mémoire est la synthèse d'un observateur invariant pour le modèle chemostat.

Avant de passer à la synthèse d'observateur invariant il est intéressant de définir qu'est ce qu'un observateur, sa nécessité, le critère d'observabilité, et de faire une synthèse bibliographique sur les plus importants observateurs qui ont été appliqués aux bioprocédés en général et sur le modèle du chemostat en particulier.

2.1 Nécessité des observateurs dans les systèmes biologiques

En automatique, le contrôle d'un système nécessite la connaissance des valeurs des grandeurs de son modèle mathématique. Certaines grandeurs sont constantes et ne posent pas de problèmes. Quant aux grandeurs variables, il est nécessaire de mettre à jour leurs valeurs constamment.

La solution triviale est de mettre un capteur pour chaque grandeur variable, mais cette solution n'est pas toujours facile à mettre en œuvre ni du point de vue économique ni même parfois du point de vue d'avancement technologique.

Pour la digestion anaérobie, la nécessité de connaître les valeurs de grandeurs est importante car comme nous l'avons cité en introduction générale les systèmes de digestion anaérobie sont rapidement déstabilisables (se retrouvent facilement au lessivage) [19]. Pour les bioprocédés en général il est difficile de suivre constamment les valeurs des grandeurs car dans les bioprocédés nous rencontrons beaucoup de concentrations dont la mesure est délicate, notamment pour les bioprocédés d'épuration d'eau. Citons-en [3] :

- Les eaux grises contiennent de la matière en suspension auxquelles les capteurs sont sensibles. Pour contourner ce problème, les eaux grises doivent subir une filtration avant de pénétrer dans les bioréacteurs. Ceci ajoute une charge de mise en place des filtres et une charge de leurs maintenances.

- Les capteurs de concentration sont généralement conçus pour estimer une gamme de concentrations correspondant aux concentrations usuellement rencontrées, ce qui limite leurs utilisations.
- Ces capteurs sont coûteux, nous ne pouvons pas nous permettre d'en placer pour toutes les grandeurs. Le plus judicieux, vis à vis de la théorie des systèmes dynamiques, serait d'en placer à la sortie du bioréacteur pour mettre en place une boucle de contre réaction, mais c'est aussi le choix le plus judicieux vis à vis la législation, afin de s'assurer que l'eau épurée est conforme aux normes de qualités.

Le modèle du chemostat comporte deux variables d'état qui sont toutes les deux des concentrations. Ceci dit la mesure de la concentration de la biomasse est encore plus délicate car c'est une entité vivante qui représente différents types de bactéries anaérobies. Rappelons qu'en réalité, ces bactéries interviennent dans la digestion anaérobie selon les étapes de cette dernière, mais étant le modèle le plus simple, le chemostat représente toutes les bactéries anaérobies par une seule variable d'état x .

Pour subvenir à résoudre ce problème, nous allons utiliser le principe d'observation qui se base sur le modèle du procédé et les mesures disponibles pour reconstruire asymptotiquement les états inaccessibles [4]. Ainsi, nous allons estimer la concentration de la biomasse $x(t)$ grâce à un capteur logiciel en se basant sur la mesure de la concentration du substrat $s(t)$.

Ceci dit pour pouvoir estimer un état il faut d'abord que le système soit observable. Nous allons donc définir l'observabilité puis nous allons nous assurer de l'état x est bien observable.

2.2 Définition de la notion d'observabilité

2.2.1 Définition générale de l'observabilité

La notion d'observabilité est l'une des premières notions apprises en théorie des systèmes linéaires. Pour les systèmes non linéaires le principe reste le même mais le calcul se fait différemment.

Le principe d'observabilité est le suivant : pour qu'un état soit observable, il faut qu'on soit capables de reconstruire l'état de manière unique à partir d'une sortie mesurée.

Pour les systèmes non linéaires un état est observable si pour toute entrée, on est capables de reconstruire l'état (initial) de manière unique à partir d'une sortie mesurée. Mathématiquement, cela veut dire que $x_0 \rightarrow y(t)|_{t \geq t_0}$ est une application injective¹ [3].

Le plus par rapport aux systèmes linéaires est que l'observabilité dans les systèmes non linéaires dépend de l'entrée du système, certains systèmes seront donc observables pour certaines entrées mais pas pour d'autres, ce qui complique énormément le problème d'observation [3].

1. Une application f est injective si tout élément de son ensemble d'arrivée a au plus un antécédent par f .

Nous allons maintenant citer quelques définitions qui nous permettront de mieux comprendre l'observabilité afin de vérifier mathématiquement l'observabilité d'un système non linéaire [32]. Pour cela, nous considérons la forme générale d'un système non linéaire suivante :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, u) \\ y = h(x, u) \end{cases} \quad (2.2.1)$$

Définition 1 (Indistingabilité (Indiscernabilité)) Soient $y_u^0(t)$ et $y_u^1(t)$, ($t \geq 0$) deux signaux de sortie générés par l'application du signal d'entrée $u(t)$, $t \geq 0$ au système (2.2.1) avec les conditions initiales x^0 et x^1 , respectivement. On dit que x^0 et x^1 sont indistinguables si $y_u^0(t) = y_u^1(t)$, $\forall t \geq 0$ pour toute entrée u . Dans le cas contraire, on dit que x^0 et x^1 sont distinguables.

Définition 2 (Observabilité) Le système (2.2.1) est dit observable en x^0 , si x^0 est distinguable de tout $x \in \mathbb{R}^n$. En outre, le système (2.2.1) est observable si $\forall x^0 \in \mathbb{R}^n$, le système (2.2.1) est observable en x^0 .

Espace d'observation

L'espace d'observation est défini comme suit

$$O(h) = \begin{bmatrix} h \\ L_f h \\ \vdots \\ L_f^{n-1} h \end{bmatrix}$$

tel que n est le nombre d'états du système et les $L_f h$ sont les crochets de Lie² définis comme

$$L_f h = \sum_{i=1}^n f_i(x) \frac{\partial h}{\partial x_i}$$

où $f_i(x)$ est la fonction qui représente la cinétique de l' i^{me} état.

Observabilité au sens du rang

Généralement, lors de l'étude d'observabilité d'un système réel non linéaire on utilise le critère de rang qui dit qu'un système est observable si le rang de la dérivé de l'espace d'état est complet. C'est-à-dire :

$$\text{rang} \begin{pmatrix} dh \\ dL_f h \\ \vdots \\ dL_f^{n-1} h \end{pmatrix} = n$$

avec

$$dL_f^k h = \left(\frac{\partial L_f^k h}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial L_f^k h}{\partial x_n} \right)$$

2. Un crochet de Lie est une loi de composition interne sur un espace vectoriel inclus dans le groupe de Lie défini dans le chapitre 3.

Observabilité forte

Définition 3 La composante de l'état x_i (respectivement de l'entrée u_j) du système linéaire structuré Σ_Λ est génériquement fortement observable lorsque pour tout état initial x_0 et pour tout signal d'entrée $u(t)$, l'égalité $y(t) = 0, \forall t \geq 0$ implique $x_i(t) = 0, \forall t \geq 0$ (respectivement $u_j(t) = 0, \forall t > 0$) [29] et [30].

Cela revient à dire qu'un état est fortement observable si on arrive à l'exprimer seulement en fonction des mesures et de leurs dérivées [31].

Remarque 6 Il est important de noter qu'un état observable ne signifie pas nécessairement que l'on est capable de lui synthétiser un observateur [3].

2.3 Historique sur les observateurs

- Dans **les années 60**, la théorie de l'observation a vu le jour d'abord pour les systèmes linéaires. Ce fut un observateur linéaire stochastique, introduit par Kalman-Bucy appelé filtre de Kalman [4].
- Dans **la même période**, la théorie générale des observateurs a été établie par Luenberger pour les systèmes linéaires déterministes donnant naissance à l'observateur de Luenberger. Son idée est d'ajouter au modèle mis sous la forme canonique compagnon (Brunovsky) une correction à l'aide de la mesure fournie par les capteurs [16].
- Dans **les années 80**, les chercheurs ont proposé la synthèse d'un observateur pour une classe des systèmes non linéaires dont le système d'erreur est linéarisable à l'aide des transformations d'état qui rendent les non linéarités du système dépendantes uniquement des entrées et des sorties mesurables du système. A ce niveau, la transformation non linéaire est souvent difficile et l'application est réservée à une classe réduite des systèmes non linéaires [13].
- En **1983** Kerner-Isidori ont fourni des conditions nécessaires et suffisantes pour une linéarisation de l'erreur de l'observation des modèles non linéaires afin de leur appliquer l'observateur de Luenberger. Cependant, leurs résultats ne s'appliquent qu'à une classe réduite de systèmes non linéaires [16].
- **À la même époque** Fliess et Kupka fournissent des conditions suffisantes et nécessaires pour une linéarisation exacte des systèmes non linéaires en mettant en évidence le concept de l'immersion [16].
- En **1985** un autre résultat dû à A. Krener, and W. Respondek viennent pour élargir la classe des systèmes dynamiques étudiés par Krener-Isidori en se permettant un difféomorphisme sur la sortie [16].
- Dans **les années 90** une autre approche est apparue, qui consiste à bien exploiter les techniques des inégalités matricielles (LMI : Linear Matrix Inequalities). Cette méthode consiste à synthétiser le gain de l'observateur en résolvant un système LMIs, c'est le cas par exemple de l'observateur de Luenberger généralisé. Mais, l'inconvénient majeur de cette méthode est la relative difficulté de trouver une solution pour le système LMIs considéré [13].

- En **1990** par Bastin et Dochain ont proposé l'observateur asymptotique, cet observateur permet d'observer un état en absence de connaissance du modèle cinétique mais sous certaines conditions [1].
- En **1992** L. Chen a étendu l'observateur asymptotique qui était conçu pour des systèmes relativement simples pour inclure des systèmes plus complexe [1].
- Dans **la même année** J. P. Gauthier, H. Hammouri, and S. Othman ont introduit l'observateur à grand gain [6]. La caractéristique principale de cet observateur réside dans la facilité de son implementation et de son réglage facile assuré à l'aide d'un seul paramètre de synthèse [13].
- En **1999** Ph. Bogaerts a développé l'observateur hybride entre le filtre de Kalman étendu et l'observateur asymptotique.
- En **2000** les travaux de J. L. Gouzé, O. Bernard et Z. Hadj-Zadok et les travaux de J. L. Gouzé et V. Lemesle ont généralisé les observateurs asymptotiques et ils les ont rendu robustes à vitesse de convergence réglable partiellement [1].
- En **2001** M.Z. Hadj-Sadok et J.L. Gouzé ont proposé l'observateur par intervalles qui se compose de deux observateurs asymptotiques : un observateur maximal et un observateur minimal qui bornent la région d'état estimée. [14].
- En **2005** V. Lemesle et J. L Gouzé ont proposé un observateur hybride à erreur bornée, en couplant un observateur à grand gain et un observateur asymptotique, garantissant ainsi une convergence rapide, et une influence minimale des incertitudes sur le modèle.
- En **2008** P. Rouchon, S. Bonnabel, Ph. Martin ont mis en place l'observateur invariant pour un système mécanique [7].

Récapitulons l'histoire des observateurs, les différents observateurs ont été développés selon le besoin, par exemple :

- Le filtre de Kalman a été introduit suite aux résultats erronés causés par l'amplification des bruits et aux imperfections des mesures (par dérivation numérique de l'information des capteurs) [16].
- Un observateur asymptotique basé sur un modèle de bilan de matières peut être utilisé lorsque les cinétiques sont mal connues [4].
- Si elles sont supposées lentement variables, elles peuvent être estimées par un " estimateur basé observateur " [4].
- En cas d'incertitudes sur les entrées ou les paramètres, un observateur par intervalle peut être construit pour encadrer les états estimés [4].
- Si on dispose de modèles correctement validés, on peut utiliser des observateurs à grands gains. En outre, on peut utiliser des observateurs à modes glissants, des observateurs par approche multimodèle ou encore les filtres particuliers. »[4]

Il existe bien d'autres observateurs non linéaire dont : l'estimateur basé-observateur, l'observateur mode glissant, l'observateur adaptatif [5], l'observateur par approche multimodèle [15].

2.4 Observateurs non linéaires

Dans cette partie nous allons donner plus de détails sur quelques observateurs non linéaires³ abordés dans l'historique. Mais avant cela notons l'estimation de toute variable x par \hat{x} et assumons qu'après la synthèse d'un pré-observateur⁴ nous devons nous assurer de sa convergence, définit comme suit [19] :

Définition 4 *Un pré-observateur est dit observateur d'état si l'erreur $\|\hat{x}(t) - x(t)\|$ tend vers 0, autrement dit, il est convergent.*

Cette convergence doit être atteinte idéalement plus rapidement que la dynamique interne du système [19] et obligatoirement plus rapidement que la loi de commande dans le cas d'un système non libre.

2.4.1 Observateur de Luenberger linéarisé

L'observateur de Luenberger est l'observateur basique le plus utilisé dans les systèmes linéaires déterministes, dû à sa simplicité de synthèse et son efficacité. Dans les systèmes non linéaires l'observateur de Luenberger garde la même forme, donc pour pouvoir l'utiliser il faut linéariser le système autour d'un point de fonctionnement. Considérons la forme générale d'un système non linéaire :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t)), x(t_0) \\ y(t) = h(x(t)) \end{cases} \quad (2.4.1)$$

notons le point de fonctionnement (s_f, x_f) , la linéarisation du système se fait comme suit

$$A(t) = \left. \frac{\partial f(x, u)}{\partial x} \right|_{(s(t), x(t))=(s_f, x_f)} ; C(t) = \left. \frac{\partial h(x, u)}{\partial x} \right|_{(s(t), x(t))=(s_f, x_f)} \quad (2.4.2)$$

La forme générale de l'observateur de Luenberger linéarisé est la suivante :

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}(t) &= A(t)x(t) + LC(t)(x(t) - \hat{x}(t)) \\ \hat{x}(t_0) &= \hat{x}_0 \end{aligned} \quad (2.4.3)$$

Tel que le L est le vecteur de gain de pondération de l'erreur qui permet de régler la vitesse de convergence de l'observateur, il est calculé par un placement de pôles [1].

Comme pour toutes les applications sur les systèmes non linéaires qui nécessitent une linéarisation autour d'un point d'équilibre il est donc peu utilisé dans les bioprocédés [1].

3. Un observateur non linéaire est un observateur d'état pour un système non linéaire.

4. Un pré-observateur est un observateur dont nous n'avons pas encore prouvé la convergence.

Application sur le modèle du chemostat

En linéarisant autour du deuxième point d'équilibre nous avons obtenu :

$$\begin{cases} \dot{s}(t) = -D(t) - kx_{eq2} \left. \frac{\partial \mu(s)}{\partial s} \right|_{s=s_{eq2}} s(t) - k\mu(s_{eq2})x(t) \\ \dot{x}(t) = x_{eq2} \left. \frac{\partial \mu(s)}{\partial s} \right|_{s=s_{eq2}} s(t) + \mu(s_{eq2}) - D(t)x(t) \\ y(t) = s(t) \end{cases}$$

notre système est donc :

$$\begin{cases} \dot{s}(t) = \left[-D(t) - (S_{in}\mu_{max} - S_{in}D(t) - KD(t)) \frac{\mu_{max} - D(t)}{K\mu_{max}} \right] s(t) - kD(t)x(t) \\ \dot{x}(t) = \frac{1}{k} (S_{in}\mu_{max} - S_{in}D(t) - KD(t)) \frac{\mu_{max} - D(t)}{K\mu_{max}} s(t) \\ y(t) = s(t) \end{cases}$$

l'observateur est donc

$$\begin{cases} \dot{s}(t) = \left[-D(t) - (S_{in}\mu_{max} - S_{in}D(t) - KD(t)) \frac{\mu_{max} - D(t)}{K\mu_{max}} \right] s(t) - kD(t)x(t) + l_1 (s(t) - \hat{s}(t)) \\ \dot{x}(t) = \frac{1}{k} (S_{in}\mu_{max} - S_{in}D(t) - KD(t)) \frac{\mu_{max} - D(t)}{K\mu_{max}} s(t) + l_2 (s(t) - \hat{s}(t)) \\ y(t) = s(t) \end{cases}$$

Avantages	Inconvénients
<ul style="list-style-type: none"> -Simple à synthétiser. -Permet de régler la vitesse de convergence. 	<ul style="list-style-type: none"> -Converge localement autour du point de linéarisation. -Nécessite la connaissance des cinétiques. -Nécessite la connaissance des entrées. -Le système n'est plus fidèle à la réalité.

TABLE 2.1 – Avantages et inconvénients de l'observateur de Luenberger linéarisé

2.4.2 Observateur de Luenberger étendu

Le terme "étendu" ajouté à l'observateur de Luenberger montre que l'application s'étend du domaine des systèmes linéaires aux domaine des systèmes non linéaires.

Cet observateur utilise aussi une linéarisation pour pouvoir être synthétisé mais contrairement à l'observateur précédent la linéarisation du modèle ne se fait que pour calculer le gain, le modèle du système repris dans l'observateur est le modèle non linéaire.

Considérons la forme générale d'un système non linéaire (2.4.1). La forme générale de l'observateur de Luenberger étendu est la suivante :

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}(t) &= f(\hat{x}(t), u(t)) + K[y(t) - h(\hat{x}(t))] \\ \hat{x}(t_0) &= \hat{x}_0 \end{aligned} \quad (2.4.4)$$

Application sur le modèle du chemostat

Notre système est :

$$\begin{cases} \dot{s}(t) = D(t) [S_{in} - s(t)] - k\mu(s)x(t), (s(t_0), x(t_0)) \\ \dot{x}(t) = [-D(t) + \mu(s)] x(t), \\ y(t) = s(t) \end{cases}$$

L'observateur de Luenberger étendu appliqué au chemostat est :

$$\begin{cases} \dot{\hat{s}}(t) = D(t) [S_{in} - \hat{s}(t)] - k\mu(\hat{s})\hat{x}(t) + k_1 [s(t) - \hat{s}(t)], (s(0), x(0)) \\ \dot{\hat{x}}(t) = [-D(t) + \mu(\hat{s})] \hat{x}(t) + k_2 [s(t) - \hat{s}(t)] \end{cases} \quad (2.4.5)$$

Avantages	Inconvénients
<ul style="list-style-type: none"> -Simple à synthétiser -Permet de régler la vitesse de convergence 	<ul style="list-style-type: none"> -Converge localement autour du point de linéarisation -Nécessite la connaissance des cinétiques -Nécessite la connaissance des entrées

TABLE 2.2 – Avantages et inconvénients de l'observateur de Luenberger étendu

2.4.3 Filtre de Kalman étendu

Tout comme l'observateur de Luenberger, le filtre de Kalman a fait ses preuves dans les systèmes linéaires. Il a donc été utilisé dans les systèmes non linéaires en le linéarisant par la formule de Taylor au premier ordre [18] autour de sa trajectoire estimée [1].

Comme nous l'avons mentionné dans l'historique, l'observateur de Kalman est utilisé pour les systèmes stochastiques, sa synthèse nécessite donc la connaissance de l'intensité des bruits, en particulier le bruit de mesure, en plus de la connaissance du modèle. Ceci dit le filtre de Kalman étendu est plus une approche heuristique et aucune preuve de convergence n'existe [24] les preuves de stabilité et de convergence établies dans le cas des systèmes linéaires, ne peuvent pas être étendues de manière générale au cas des systèmes non linéaires[18].

Le filtre de Kalman est utilisé dans le cas des systèmes stochastiques en minimisant la matrice de covariance de l'erreur d'estimation [1]. Le filtre de Kalman étendu se synthétise en suivant des étapes :

Le filtre de Kalman traite les système bruités, nous allons donc représenter ces bruits dans le modèle du système, où :

w est le bruit du modèle, et v est le bruit de mesure.

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, u) + w \\ y = h(x, u) + v \end{cases} \quad (2.4.6)$$

Le but étant de minimiser la matrice de covariance de l'erreur d'estimation, nous la notons P_0 et la définissons comme suit :

$$P_0 = E [(x_0 - \hat{x}_0)(x_0 - \hat{x}_0)^T] \quad (2.4.7)$$

où E est l'espérance mathématique⁵

L'équation de Riccati est donnée :

$$\dot{P}(t) = AP(t) + P(t)A^T - P(t)C^T R(t)^{-1}CP(t) + Q(t) \quad (2.4.8)$$

c'est à cette étape qu'il est nécessaire de faire une linéarisation pour calculer les matrice A et C , tel que :

$$A(t) = \left. \frac{\partial f(x, u)}{\partial x} \right|_{x(t)=\hat{x}(t)} ; C(t) = \left. \frac{\partial h(x, u)}{\partial x} \right|_{x(t)=\hat{x}(t)} \quad (2.4.9)$$

cette équation nous permet de déduire le gain de l'observateur

$$K = P(t)C^T R(t)^{-1} \quad (2.4.10)$$

enfin la forme générale de l'observateur est

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}(t) &= f(\hat{x}(t), u(t)) + K[y(t) - h(\hat{x}(t))] \\ \hat{x}(t_0) &= \hat{x}_0 \end{aligned} \quad (2.4.11)$$

En plus de l'absence de preuves de stabilité et de convergence de cet observateur, ce qui le rend peu exploitable est la complexité de la résolution de l'équation dynamique de Riccati de la propagation de l'erreur de la covariance [13].

Remarque 7 *Le filtre de Kalman étendu est relativement complexe à synthétiser, nous n'allons donc pas s'attarder dessus avec une application sur le modèle du chemostat.*

5. L'espérance mathématique d'une variable aléatoire réelle est la valeur que l'on s'attend à trouver, en moyenne, si l'on répète un grand nombre de fois la même expérience aléatoire.

Avantages	Inconvénients
-Permet de traiter les systèmes bruités. -Approche maîtrisée.	-Relativement complexe à synthétiser. -Nécessite une linéarisation du système.

TABLE 2.3 – Avantages et inconvénients du filtre de Kalman étendu

2.4.4 Observateur à grand gain

C'est un observateur qui n'a pas la forme générale des observateurs qui est la partie où on reprend le modèle et la partie corrective pondérée par un gain. Ceci dit il possède un gain qui permet de régler la vitesse de convergence. La caractéristique principale de cet observateur réside dans la facilité de son implémentation et de son réglage facile assuré à l'aide d'un seul paramètre de synthèse [13].

$$\begin{pmatrix} z_1 = y \\ z_2 = \dot{y} \\ \vdots \\ z_n = y^{(n-1)} \end{pmatrix} \quad (2.4.12)$$

$$\begin{cases} \dot{z} = \begin{pmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \\ \vdots \\ \dot{z}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_2 \\ z_3 \\ \vdots \\ \phi(z) \end{pmatrix} = F(z) \\ y = z_1 \end{cases} \quad (2.4.13)$$

Proposition 1 Pour un θ assez grand le système différentiel suivant (2.4.15) est un observateur exponentiel :

$$\dot{\hat{z}} = F(\hat{z}) + S_\theta^{-1} C^T (y - C\hat{z}) \quad (2.4.14)$$

où S_θ est la solution de l'équation $\theta S_\theta + A^t S_\theta + A S_\theta = C^t C$ avec :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \quad (2.4.15)$$

et $C = (1 \ 0 \ \dots \ 0)$

$$s_\theta(i, j) = \frac{(-1)^{i+j} (i+j-2)!}{\theta^{i+j-1} (i-1)! (j-1)!} \quad (2.4.16)$$

Application sur le modèle du chemostat

$$S_\theta = \begin{pmatrix} \frac{1}{\theta} & -\frac{1}{\theta^2} \\ -\frac{1}{\theta^2} & \frac{2}{\theta^3} \end{pmatrix} \text{ et } S_\theta^{-1} = \begin{pmatrix} 2\theta & \theta^2 \\ \theta^2 & \theta^3 \end{pmatrix}. \text{ Le lecteur peut facilement trouver}$$

les équations de l'observateur. Ainsi

$$\begin{cases} \dot{\hat{s}} = D(t)(S_{in} - \hat{s}) - \frac{k\mu_{max}\hat{s}\hat{x}}{\hat{s} + K} - 2\theta(\hat{s} - y) \\ \dot{\hat{x}} = \left(\frac{\mu_{max}\hat{s}}{\hat{s} + K} - D(t)\right)\hat{x} + \left(2\theta\frac{K\hat{x}}{(\hat{s} + K)\hat{s}} + \theta^2\frac{\hat{s} + K}{k\mu_{max}\hat{s}}\right)(\hat{s} - y) \end{cases} \quad (2.4.17)$$

Avantages	Inconvénients
<ul style="list-style-type: none"> -Permet de régler la vitesse de convergence. -Assure une convergence et une stabilité. 	<ul style="list-style-type: none"> -Sensible aux bruits. -Sensible aux erreurs de modélisation. -Relativement complexe à synthétiser.

TABLE 2.4 – Avantages et inconvénients de l'observateur à grand gain

2.4.5 Observateur asymptotique

L'observateur asymptotique est un observateur qui permet d'avoir une approximation des états même si une partie du modèle est inconnue. Dans les bioprocédés, la partie inconnue est généralement la cinétique de croissance $\mu(\cdot)$. Cet observateur a ses avantages et ses inconvénient comme nous l'avons mentionné dans l'historique. Pour mieux les comprendre appliquons le directement sur le chemostat.

Application sur le modèle du chemostat

La synthèse de cet observateur s'appuie sur un changement linéaire systématique de variable (pour une certaine classe de systèmes) [14] :

$$\xi = s + kx$$

la cinétique de cette variable est donnée par

$$\dot{\xi} = D(t)(S_{in} - \xi)$$

nous remarquons que grâce à ce changement de variable, la cinétique de croissance s'est simplifiée, ce qui nous permet de poser son estimation

$$\dot{\hat{\xi}} = D(t)(S_{in} - \hat{\xi})$$

nous en déduisons alors une estimation de x

$$\hat{x} = \frac{\hat{\xi} - s}{k}$$

La vitesse de convergence est représentée par \dot{e} , tel que $e = x - \hat{x}$. Nous avons donc :

$$\dot{e} = \frac{\dot{\xi} - \dot{\hat{\xi}}}{k}$$

$$\dot{e} = D(\hat{x} - x) \longrightarrow \dot{e} = De$$

Nous remarquons que la spécificité de l'observateur asymptotique est que sa forme générale, contrairement aux observateurs que nous avons déjà vu, ne se compose pas de la partie du modèle plus une expression d'erreur pondérée par un gain.

Avantages	Inconvénients
<ul style="list-style-type: none"> -Ne nécessite pas la connaissance du modèle. -Robuste vis à vis les incertitudes du modèle. -Ne nécessite pas l'observabilité. -Simple à synthétiser. -Assure une stabilité et une convergence si les entrées sont persistantes et bornées. 	<ul style="list-style-type: none"> -La vitesse de convergence est partiellement réglable. -Vitesse de convergence dépend du mode opératoire du système. -Nécessite des entrées persistantes et bornées. -Le changement de coordonnées dépend du coefficient stoechiométrique, ce qui le rend peu robuste.

TABLE 2.5 – Avantages et inconvénients de l'observateur asymptotique

2.4.6 Observateur hybride entre le filtre de Kalman étendu et l'observateur asymptotique

Cette hybridation se fait grâce à un coefficient appelé coefficient de confiance. Ce coefficient est noté ζ et c'est le pourcentage de contribution du filtre de Kalman. Ceci veut dire que quand $\zeta = 0$ cet observateur devient un observateur purement asymptotique, et quand $\zeta = 1$ cet observateur devient purement un filtre de Kalman étendu.

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\hat{z}}_1 = k\mu_{max} \frac{\hat{z}_1 \hat{x}}{\hat{z}_1 + K} + D(t) (S_{in} - \hat{z}_1) \\ \dot{\hat{z}}_2 = \zeta \mu_{max} \frac{\hat{z}_1 \hat{x}}{\hat{z}_1 + K} - D(t) \left(S_{in} + \frac{1-\zeta}{k} \hat{z}_2 \right) \\ \dot{\zeta} = 0 \\ \hat{s} = \zeta \hat{z}_1 + (1-\zeta) y \\ \hat{x} = \hat{z}_2 + \frac{1-\zeta}{k} \hat{s} \\ \dot{P}(t) = F(\hat{z})P + P(t)F^T(\hat{z}), t_k \leq t \leq t_{k+1} \end{array} \right.$$

avec

$$\left\{ \begin{array}{l} z^T = [z_1^T \quad z_2^T \quad \zeta] \\ f(z) = \begin{bmatrix} k\mu_{max} \frac{z_1 x}{z_1 + K} + D(t) (S_{in} - z_1) \\ \zeta \mu_{max} \frac{z_1 x}{z_1 + K} - D(t) \left(S_{in} + \frac{1-\zeta}{k} z_2 \right) \end{bmatrix} \\ x = z_2 + \frac{1-\zeta}{k} (\zeta z_1 (1-\zeta) y) \\ F(\hat{z}) = \left. \frac{\partial f(z)}{\partial z} \right|_{z=\hat{z}(t)}, \forall t \end{array} \right.$$

et F est un flux d'ajout de substrat externe.

Avantages	Inconvénients
-Combine les avantages de l'observateur de Kalman étendu et de l'observateur asymptotique.	-Ses avantages empruntés de l'observateur de Kalman ne sont pas aussi efficaces que dans l'observateur de Kalman, et pareil pour l'observateur asymptotique.

TABLE 2.6 – Avantages et inconvénients de l'observateur hybride

2.4.7 Observateur par intervalles

L'observateur par intervalles est un étendu de l'observateur asymptotique, il se compose de deux observateurs asymptotiques qui enveloppent la région probable dans laquelle se trouve l'état. Généralement, même si nous ne connaissons pas exactement les valeurs des paramètres, ces dernières appartiennent à un intervalle. Le couple d'observateurs qui encadre l'état est calculé avec les bornes des

paramètres qui maximisent l'observateur asymptotique (l'observateur supérieur de l'enveloppe) et les bornes des paramètres qui minimisent l'observateur asymptotique (l'observateur inférieur de l'enveloppe) [19].

Ceci dit, il arrive que l'enveloppe obtenue soit grande. Par conséquent, il a été proposé de lancer un faisceau d'observateurs d'intervalles avec différentes conditions initiales, puis de sélectionner la plus petite enveloppe où l'état devrait être [14].

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, u, w) \\ y = h(x, u, w) \end{cases} \quad (2.4.18)$$

$$\begin{aligned} w^-(t) < w(t) < w^+(t) \\ v^-(t) < v(t) < v^+(t) \end{aligned} \quad (2.4.19)$$

Application sur le modèle du chemostat

$$\begin{cases} \dot{\hat{\xi}}^+ = D(t) (S_{in}^+ - \hat{\xi}^+) \\ \dot{\hat{\xi}}^- = D(t) (S_{in}^- - \hat{\xi}^-) \\ \hat{x}^+ = \frac{\hat{\xi}^+ - s}{k} \\ \hat{x}^- = \frac{\hat{\xi}^- - s}{k} \end{cases} \quad (2.4.20)$$

Avantages	Inconvénients
<ul style="list-style-type: none"> -Permet de borner l'état estimé. -Ne nécessite pas la connaissance exacte des entrées. -Assure une stabilité et une convergence si les entrées sont persistantes et bornées 	<ul style="list-style-type: none"> -Nécessite un bon choix des conditions initiales. -Les entrées doivent être persistantes et bornées. -La vitesse de convergence est partiellement réglable.

TABLE 2.7 – Avantages et inconvénients de l'observateur par intervalles

2.4.8 Observateur type-Luenberger non linéaire à dynamique d'erreur linéaire

C'est un observateur de Luenberger non linéaire dont l'erreur dans le terme correctif est linéaire et pondérée par des gain différents pour chaque cinétique d'état [1]. Ces gains sont simplement posés contrairement à l'observateur de Luenberger étendu (2.4.5) qui nécessite une linéarisation du système pour calculer le gain par placement de pôles. L'autre différence par rapport à Luenberger étendu est que la

sortie est injectée dans la cinétique de croissance, la cinétique de croissance sera donc en fonction de s mesurée et non pas de \hat{s} estimée.

Application sur le modèle du chemostat

Du fait que cet observateur a été synthétisé et appliqué directement au modèle du chemostat et au modèle AM2 [17], nous écrivons son expression sur le chemostat :

$$\begin{cases} \dot{\hat{s}}(t) = D(t) [S_{in} - \hat{s}(t)] - k\mu(s(t), K)\hat{x}(t) + a(s - \hat{s}) \\ \dot{\hat{x}}(t) = [-D(t) + \mu(s(t), K)]\hat{x}(t) + b(s - \hat{s}) \end{cases}$$

Avantages	Inconvénients
<ul style="list-style-type: none"> -Assure une convergence globale. -Permet de régler la vitesse de convergence. 	<ul style="list-style-type: none"> -Converge si et seulement si la sortie mesurée est $s(t)$.

TABLE 2.8 – Avantages et inconvénients de l'observateur de type-Luenberger non linéaire

Chapitre 3

Synthèse d'observateur invariant pour le modèle du chemostat

Nous avons vu dans le chapitre précédent qu'il y a plusieurs types d'observateurs non linéaires dont l'utilisation dépend du type de besoin. Tous ces observateurs ont déjà été appliqués au modèle du chemostat et ont donné des résultats qui se dépassent. Un des observateurs non linéaire qui a donné les meilleurs résultats de convergence et de robustesse sur le chemostat est *l'observateur invariant*.

Cet observateur a été appliqué pour la première fois pour un système mécanique [7] et [8], et il a été intéressant de l'appliquer sur des modèles de bioprocédés [1] en remarquant que ces derniers sont invariants par homothétie¹ si on considère quelques paramètres comme entrées virtuelles [1].

Dans ce chapitre nous allons définir les systèmes invariants, établir la forme générale d'un pré-observateur puis l'appliquer au modèle du chemostat et vérifier sa convergence puis discuter autour de sa robustesse. Nous allons aussi faire une étude comparative entre l'observateur invariant et quelques observateurs traités dans la littérature.

3.1 Systèmes invariants

L'invariance est une notion relative, par exemple nous avons longtemps traité durant notre cursus les systèmes linéaires invariants dans le temps (*SLIT*).

L'invariance qui nous intéresse dans la synthèse d'observateur invariant pour le modèle du chemostat est l'invariance sous l'action d'un groupe².

Pour bien assimiler la forme générale d'un pré-observateur invariant, commençons par définir les entités mathématiques qui le composent, et qui sont : un système invariant, une fonction scalaire invariante et un champs de vecteurs invariant. (*nous allons voir dans la section qui suit pourquoi nous avons choisi ces entités en particulier*).

1. L'homothétie est une reproduction avec changement d'échelle, par rapport à un point invariant.

2. L'action de groupe sur un ensemble veut dire que le groupe est munit d'une loi de composition lui permettant d'opérer sur un ensemble

Pour que ces entités soient définies, elles font appel à leurs tours à un groupe de transformation que nous notons G , avec les caractéristiques suivantes :
 Considérons la forme générale d'un système non linéaire

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, u) & (3.1.1a) \\ y = h(x, u) & (3.1.1b) \end{cases}$$

avec $x \in X \subset \mathbb{R}^n$, $u \in U \subset \mathbb{R}^m$ et $y \in Y \subset \mathbb{R}^p$
 G est un groupe de Lie de transformation tel que :

G agit sur X par $\varphi_g : X \rightarrow X$

G agit sur U par $\psi_g : U \rightarrow U$

G agit sur Y par $\rho_g : Y \rightarrow Y$, $\forall g \in G$ avec φ_g , ψ_g et ρ_g des difféomorphismes³ (de classe au moins C^1) sur X , U et Y respectivement, ayant les propriétés suivantes :

$$(\varphi_g)^{-1} = \varphi_{g^{-1}}$$

$$\varphi_{g_1} \circ \varphi_{g_2} = \varphi_{g_1 \cdot g_2}$$

Définition 5 G est un groupe de symétries de (3.1.1a) si, pour chaque solution $(x(t), u(t))$ de (3.1.1a) et $\forall g \in G$, $(\varphi_g(x(t)), \psi_g(u(t)))$ est aussi une solution.

Nous pouvons maintenant définir qu'est-ce qu'un : système invariant, une fonction scalaire invariante et un champs de vecteurs invariant.

Système invariant

Le système (3.1.1a) est dit invariant si

$$f(\varphi_g(x), \psi_g(u)) = D_{\varphi_g} f(x, u)$$

Où D_{φ_g} est la matrice jacobienne de $\varphi_g(x)$

Fonction scalaire invariante

Une fonction scalaire J est dite invariante si et seulement si

$$J(\varphi_g(x), \psi_g(u), \rho_g(y)) = J(x, u, y)$$

Champ de vecteurs invariant

Un champ de vecteurs est dit invariant si et seulement si

$$w(\varphi(x)) = D_{\varphi_g} w(x)$$

3. Si U et V sont deux ouverts de \mathbb{R}^n , et f une fonction de U dans V , on dit que f est un C^K -difféomorphisme si f est bijective et si f et f^{-1} sont de classe C^K

3.2 Forme générale d'un pré-observateur invariant

Après avoir défini les systèmes invariants il faut mettre en évidence l'intérêt de ces derniers dans la synthèse d'observateur.

Nous avons mentionné dans ce chapitre que l'intérêt pour les systèmes invariants été dû à l'invariance du modèle du chemostat. Sachant que le but d'un observateur est de donner la meilleure estimation des états inconnus, il serait très intéressant qu'il ait les mêmes caractéristiques du modèle.

Nous avons vu dans l'état de l'art que beaucoup d'observateurs s'écrivent en deux parties : la partie du modèle et un terme correctif. Le modèle étant déjà invariant, il faudrait que le terme correctif soit invariant.

Le terme correctif est généralement une expression d'erreur que nous essayons de faire tendre vers 0, pondérée par un gain pour régler la vitesse de convergence.

Notons le pré-observateur $\hat{\mathcal{F}}$ tel que

$$\hat{\mathcal{F}}(\hat{x}, y) = f(\hat{x}, y) + f_{correction} \quad (3.2.1)$$

Nous savons que $f(\varphi_g(x), \psi_g(u)) = D_{\varphi_g} f(x, u)$ et nous voulons que $\hat{\mathcal{F}}(\varphi_g(x), \psi_g(u)) = D_{\varphi_g} \hat{\mathcal{F}}(x, u)$ il faut donc que $f_{correction}(\varphi_g(x), \psi_g(u)) = D_{\varphi_g} f_{correction}(x, u)$

Pour obtenir cette forme et sachant que nous devons la former à partir d'une expression d'erreur pondérée par un gain, nous posons l'expression d'erreur une fonction scalaire invariante pondérée par un champs de vecteurs invariant

$$\begin{aligned} f_{correction}(\varphi_g(x), \psi_g(u)) &= J(\varphi_g(x), \psi_g(u), \rho_g(y)) \times w(\varphi(x)) \\ &= J(x, u, y) \times D_{\varphi_g} w(x) \\ &= D_{\varphi_g} f_{correction}(x, u) \end{aligned} \quad (3.2.2)$$

nous obtenons donc la forme du pré-observateur

$$\hat{\mathcal{F}} = f + wJ \quad (3.2.3)$$

où :

- w est le champs de vecteurs.
- J est la fonction scalaire.

Donc, le système dynamique

$$\frac{d}{dt} \hat{x} = f(\hat{x}) + \sum_i J_i(\hat{x}, y) w_i(\hat{x}) \quad (3.2.4)$$

est un pré-observateur pour le système (3.1.1a)-(3.1.1b) [7] si nous choisissons J_i une fonction scalaire invariante satisfaisant $J_i(\hat{x}, h(\hat{x}, u)) = 0$ et w_i un champs de vecteurs invariant.

3.3 Application sur le modèle du chemostat

3.3.1 Observabilité

L'espace d'observabilité est exprimé en fonction de h , où h représente le fonction de sortie mesurée

$$O(h) = \begin{bmatrix} h \\ L_f h \\ \vdots \\ L_f^{n-1} h \end{bmatrix}$$

où n est le nombre d'états du système. Donc :

$$O(h) = \begin{bmatrix} h \\ L_f h \end{bmatrix}$$

Dans notre cas, la sortie mesurée est l'état s donc $h = s$.

La deuxième ligne du vecteur d'espace d'observabilité est définie comme suit :

$$L_f h = \sum_{i=1}^n f_i(x) \frac{\partial h}{\partial x_i}$$

où $f_i(x)$ est la fonction qui représente la cinétique de l' i^{me} état. nous obtenons donc :

$$L_f h = \dot{s} \frac{\partial s}{\partial s} + \dot{x} \frac{\partial s}{\partial x}$$

Nous obtenons alors :

$$\begin{pmatrix} h \\ L_f h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s(t) \\ D(t) [S_{in} - s(t)] - k\mu(s)x(t) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} dh \\ dL_f h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -D(t) - kx(t)\mu_{max} \frac{K}{[K + s(t)]^2} & -k\mu_{max} \frac{s(t)}{K + s(t)} \end{pmatrix}$$

$det = -k\mu_{max} \frac{s(t)}{K + s(t)} < 0$ alors le système est observable.

Nous allons maintenant étudier une autre forme d'observabilité, nous allons vérifier si l'état est fortement observable selon la définition (3) dans le deuxième chapitre.

La cinétique de l'état s est donnée par le modèle suivant

$$\dot{s}(t) = D(t) [S_{in} - s(t)] - k \frac{s}{s + K} x(t)$$

Puisque nous avons utilisé la cinétique de Monod qui est seulement en fonction de s , nous déduisons l'expression de x

$$x = \frac{K + s}{ks} D(t) [S_{in} - s] - \dot{s} \quad (3.3.1)$$

tel que la mesure $y = s$, nous obtenons :

$$\begin{cases} s = y \\ x = \frac{K + y}{ky} D(t) [S_{in} - y] - \dot{y} \end{cases} \quad (3.3.2)$$

nous avons pu obtenir les états s et x en fonction de la mesure y et de sa dérivée \dot{y} donc le système est fortement observable.

3.3.2 Invariance du modèle du chemostat

Lorsque nous avons établi la forme générale du pré-observateur invariant nous avons supposé que le modèle sur lequel nous l'appliquions était invariant. maintenant que nous l'appliquons sur le modèle du chemostat il nous faut prouver son invariance.

Pour prouver l'invariance d'un modèle il faut trouver mathématiquement le groupe de transformation agissant sur l'ensemble. Cependant, nombreuses preuves ont été établi après avoir remarqué que leurs résultats étaient vérifiés et cela peut s'appliquer sur le modèle du chemostat.

Dans ce qui suit nous allons établir une conjecture⁴ qui nous permettra de prendre en considération des paramètres du modèle comme entrées virtuelles pour trouver le groupe de transformation assurant l'invariance du chemostat.

Conjecture 1 *Notre système comporte deux états s et x , nous supposons que ce système est invariant par homothétie :*

$$s \longrightarrow \lambda_1 s, x \longrightarrow \lambda_2 x$$

où λ_1 et λ_2 sont les rapports de transformation par homothétie.

Il nous faut l'invariance de $\dot{s} = f_s$, $\dot{x} = f_x$ et de $\mu(s)$:

Commençons par l'invariance de $\mu(s)$ pour pouvoir ensuite l'utiliser pour prouver l'invariance de \dot{s} et \dot{x} :

$$\mu(s) = \mu_{max} \frac{s}{s + K}$$

$$\mu(\lambda_1 s) = \mu_{max} \frac{\lambda_1 s}{\lambda_1 s + K}$$

Nous remarquons que cette équation ne peut être invariante que pour $\lambda_1 = 1$, nous considérons alors K comme entrée virtuelle pour pouvoir la pondérer par un rapport λ_a que nous cherchons à déterminer :

$$\mu(\lambda_1 s, \lambda_a K) = \mu_{max} \frac{\lambda_1 s}{\lambda_1 s + \lambda_a K}$$

il faut donc que $\lambda_a = \lambda_1$

$$\mu(\lambda_1 s, \lambda_1 K) = \mu_{max} \frac{\lambda_1 s}{\lambda_1 s + \lambda_1 K} = \mu_{max} \frac{s}{s + K} = \mu(s, K)$$

4. une conjecture est une prévision et une prospective fondée sur des apparences.

Passons maintenant à l'invariance de \dot{s} et \dot{x} :

$$\begin{cases} \dot{s}(t) = D(t) [S_{in} - s(t)] - k\mu(s, K)x(t) \\ \dot{x}(t) = [-D(t) + \mu(s, K)] x(t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lambda_1 \dot{s}(t) = D(t) [S_{in} - \lambda_1 s(t)] - k\mu(s, K)\lambda_2 x(t) \\ \lambda_2 \dot{x}(t) = [-D(t) + \mu(s, K)] \lambda_2 x(t) \end{cases}$$

Pareil que pour K , nous devons considérer S_{in} et k comme des entrées virtuelles pour pouvoir les pondérer par les rapports λ_b et λ_c respectivement :

$$\begin{cases} \lambda_1 \dot{s}(t) = D(t) [\lambda_b S_{in} - \lambda_1 s(t)] - \lambda_c k \mu(s, K) \lambda_2 x(t) \\ \lambda_2 \dot{x}(t) = [-D(t) + \mu(s, K)] \lambda_2 x(t) \end{cases}$$

il faut donc que $\lambda_b = \lambda_1$ et $\lambda_c = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}$

$$\begin{cases} \lambda_1 \dot{s}(t) = D(t) [\lambda_1 S_{in} - \lambda_1 s(t)] - \frac{\lambda_1}{\lambda_2} k \mu(s, K) \lambda_2 x(t) \\ \lambda_2 \dot{x}(t) = [-D(t) + \mu(s, K)] \lambda_2 x(t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} [\dot{s}(t) = D(t) [S_{in} - s(t)] - k\mu(s, K)x(t)] \cdot \lambda_1 \\ [\dot{x}(t) = [-D(t) + \mu(s, K)] x(t)] \cdot \lambda_2 \end{cases}$$

$$X = \begin{pmatrix} \lambda_1 s \\ \lambda_2 x \end{pmatrix}$$

$$U = \begin{pmatrix} \lambda_1 S_{in} \\ \frac{\lambda_1}{\lambda_2} k \\ \lambda_1 K \end{pmatrix}$$

$$Y = (\lambda_1 s)$$

Cette conjecture nous a permis de chercher le groupe de transformation agissant sur le vecteur des variables du système en prenant en considération les paramètres S_{in} , k et K comme entrées virtuelles.

Nous aurons alors à chercher une matrice A pour trouver le groupe de transforma-

tion vérifiant l'invariance, tel que

$$\begin{pmatrix} \tilde{s} \\ \tilde{x} \\ \tilde{S}_{in} \\ \tilde{k} \\ \tilde{K} \end{pmatrix} = e^{\nu A} \begin{pmatrix} s \\ x \\ S_{in} \\ k \\ K \end{pmatrix}, \nu \in \mathbb{R} \quad (3.3.3)$$

Après résolution [1] nous obtenons la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha - \beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix} \quad (3.3.4)$$

où $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ quelconques. Donc le plus grand groupe linéaire qui rend le système du chemostat invariant est le groupe des homothéties $G = (R_+^* \times R_+^*, \cdot)$, qui agit sur (s, x) avec deux paramètres (λ_1, λ_2) où $\lambda_1 = e^\alpha$ et $\lambda_2 = e^\beta$ [1].

Remarque 8 Ayant posé la matrice A sans écrire les détails de résolution, il est nécessaire de faire une vérification. Cependant, la conjecture que nous avons posé a vérifié au préalable les résultats.

3.3.3 Construction du pré-observateur

En appliquant le groupe des homothéties nous obtenons :

$$\begin{pmatrix} \tilde{s} \\ \tilde{x} \\ \tilde{S}_{in} \\ \tilde{k} \\ \tilde{K} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 s \\ \lambda_2 x \\ \lambda_1 S_{in} \\ \frac{\lambda_1}{\lambda_2} k \\ \lambda_1 K \end{pmatrix} \quad (3.3.5)$$

Fonctions scalaires invariantes

Notre but est de trouver une fonction scalaire invariante qui converge vers 0 lorsque $\hat{s} = s$, en partant de $J(X, U, Y)$

$$J \left(\lambda_1 s, \lambda_2 x, \lambda_1 S_{in}, \frac{\lambda_1}{\lambda_2} k, \lambda_1 K, \lambda_1 y \right) = J(s, x, S_{in}, k, K, y)$$

pour $\lambda_2 = 1$ et λ_1 quelconque

$$J(\lambda_1 s, x, \lambda_1 S_{in}, \lambda_1 k, \lambda_1 K, \lambda_1 y) = J(s, x, S_{in}, k, K, y)$$

par dérivation par rapport à λ_1 en $\lambda_1 = 1$

$$s \frac{\partial J}{\partial s} + S_{in} \frac{\partial J}{\partial S_{in}} + k \frac{\partial J}{\partial k} + K \frac{\partial J}{\partial K} + y \frac{\partial J}{\partial y} = 0$$

l'expression obtenue ci-dessus est une équation aux dérivées partielles, dont la résolution par la méthode caractéristique nous donne le résultat suivant

$$\frac{ds}{s} = \frac{dS_{in}}{S_{in}} = \frac{dk}{k} = \frac{dK}{K} = \frac{dy}{y}$$

Alors il existe une fonction scalaire invariante Q , tel que

$$J(s, x, S_{in}, k, K, y) = Q \left(\underbrace{x}_{z_1}, \underbrace{\frac{S_{in}}{s}}_{z_2}, \underbrace{\frac{k}{s}}_{z_3}, \underbrace{\frac{K}{s}}_{z_4}, \underbrace{\frac{y}{s}}_{z_5} \right)$$

Q est aussi invariante par homothétie qui agit avec (λ_1, λ_2) donc

$$Q \left(\lambda_2 z_1, z_2, \frac{1}{\lambda_2} z_3, \frac{1}{\lambda_2} z_4, z_5 \right) = Q(z_1, z_2, z_3, z_4, z_5)$$

en remplaçant λ_1 par 1 puis en dérivant par rapport à λ_2 en $\lambda_2 = 1$ nous obtenons

$$z_1 \frac{\partial Q}{\partial z_1} - z_3 \frac{\partial Q}{\partial z_3} = 0$$

l'expression obtenue ci-dessus est une équation aux dérivées partielles, dont la résolution par la méthode caractéristique nous donne le résultat suivant

$$\frac{dz_1}{z_1} = - \frac{dz_3}{z_3}$$

Alors il existe une fonction scalaire invariante L , tel que

$$Q(z_1, z_2, z_3, z_4, z_5) = L(z_1 z_3, z_2, z_4, z_5)$$

en remplaçant (3.3.3) dans (3.3.-1)

$$J(s, x, S_{in}, k, K, y) = L \left(\frac{xk}{s}, \frac{S_{in}}{s}, \frac{K}{s}, \frac{y}{s} \right)$$

rappelons que notre but est de trouver une fonction scalaire invariante qui converge vers 0 lorsque $\hat{s} = s$, nous posons alors une fonction scalaire invariante H ne comportant que le variable de sortie

$$J(s, x, S_{in}, k, K, y) = H \left(\frac{y}{s} \right)$$

Cette fonction $H \left(\frac{y}{s} \right)$ sera définie un peu plus tard dans le mémoire.

Champs de vecteurs invariants

Notre but maintenant est de trouver $w_1(s, x)$ et $w_2(s, x)$ tel que $w(\varphi(x)) = D_{\varphi_g}w(x)$
D'après (3.3.3) $D_{\varphi_{g1}} = \lambda_1$ et $D_{\varphi_{g2}} = \lambda_2$, donc :

$$\begin{aligned} w_1(\lambda_1 s, \lambda_2 x) &= \lambda_1 w_1(s, x) \\ w_2(\lambda_1 s, \lambda_2 x) &= \lambda_2 w_2(s, x) \end{aligned} \quad (3.3.-4)$$

donc :

$$\begin{aligned} w_1(s, x) &= as \text{ tel que } w_1(\lambda_1 s, \lambda_2 x) = \lambda_1 as = \lambda_1 w_1(s, x) \\ w_2(s, x) &= bx \text{ tel que } w_2(\lambda_1 s, \lambda_2 x) = \lambda_2 bs = \lambda_2 w_2(s, x) \end{aligned} \quad (3.3.-4)$$

où a et b sont les gains de notre observateur. Le pré-observateur invariant est donc donné par l'expression

$$\begin{cases} \dot{\hat{s}}(t) = D(t) [S_{in} - \hat{s}(t)] - k\mu(\hat{s}(t), K)\hat{x}(t) + a\hat{s}(t) \left[H\left(\frac{y}{\hat{s}}\right) - H\left(\frac{\hat{y}}{\hat{s}}\right) \right] \\ \dot{\hat{x}}(t) = [-D(t) + \mu(\hat{s}, K)]\hat{x}(t) + b\hat{x}(t) \left[H\left(\frac{y}{\hat{s}}\right) - H\left(\frac{\hat{y}}{\hat{s}}\right) \right] \end{cases} \quad (3.3.-4)$$

Avant de pouvoir passer à la convergence du pré-observateur il nous faut faire un choix de la fonction H

Nous choisissons

$$H\left(\frac{y}{s}\right) = \ln\left(\frac{y}{s}\right)$$

ainsi

$$\ln\left(\frac{y}{\hat{s}}\right) - \ln\left(\frac{\hat{y}}{\hat{s}}\right) = \ln\left(\frac{y \hat{s}}{\hat{s} \hat{y}}\right) = \ln(y) - \ln(\hat{y})$$

puisque la sortie mesuré $y = s$ donc nous obtenons

$$\ln(s) - \ln(\hat{s})$$

Ce choix de fonction scalaire nous oblige à vérifier si les état estimé \hat{s} est positif pour que la fonction \ln soit définie. Nous allons aussi prouver que \hat{x} est positif car nous aurons besoin de définir l'erreur d'estimation de l'état x définie par $\ln(s) - \ln(\hat{s})$

3.3.4 Positivité des états estimés

Positivité de \hat{s}

Pour prouver que $\hat{s} > 0$, nous allons utiliser la même méthode employée pour prouver que $s(t) \geq 0$. Nous allons essayer de trouver un contre exemple $\hat{s}(t^*) < 0$, si nous arrivons à prouver que ce $\hat{s}(t^*)$ ne peut pas exister alors on a toujours $\hat{s}(t) \geq 0$.

Nous pouvons poser $s(0) \geq 0$ car les conditions initiales doivent obligatoirement obéir au contraintes réelles du phénomène. Ceci dit notre but est de prouver que $\hat{s}(t)$ est strictement positif, nous allons donc prouver que $\hat{s} > 0, \forall t > 0$.

$\hat{s}(t)$ est une fonction continue, ce qui implique que pour arriver à $\hat{s}(t^*)$ il faut obligatoirement passer par $\hat{s}(t_1) = 0$, avec $t_1 \geq 0$ et $\dot{\hat{s}}(t_1) < 0$.

Hors qu'en remplaçant $\hat{s}(t_1) = 0$ dans l'équation d'état $\dot{\hat{s}}(t)$ nous obtenons :

$$\dot{\hat{s}}(t_1) = D(t)S_{in} \geq 0$$

t_1 ne peut donc pas exister, ce qui implique de t^* ne peut pas exister.

Pour $\hat{s}(0) > 0$ on a $\hat{s}(t) > 0, \forall t > 0$

Positivité de \hat{x}

Après avoir prouvé la positivité de \hat{s} , nous pouvons écrire :

$$\dot{\hat{x}}(t) = [-D(t) + \mu(\hat{s}(t), K)] \hat{x}(t) + b\hat{x}(t) (\ln(s(t)) - \ln(\hat{s}(t)))$$

L'équation différentielle qui définit la concentration des bactéries est :

$$\dot{\hat{x}}(t) = [-D(t) + \mu(\hat{s}(t), K) + b(\ln(s(t)) - \ln(\hat{s}(t)))] \hat{x}(t)$$

La résolution de cette équation est :

$$\hat{x}(t) = e^{\int_0^t -D(\tau) + \mu(\hat{s}(\tau), K) + b(\ln(s(\tau)) - \ln(\hat{s}(\tau))) d\tau} \hat{x}(0)$$

Pour $\hat{x}(0) > 0$ on a $\hat{x}(t) > 0$

Donc nous avons pu vérifier que le pré-observateur est défini pour le choix $H = \ln$ et nous avons prouvé par la même occasion que le pré-observateur respecte le critère de positivité des états, étudiés dans le premier chapitre.

3.3.5 Convergence du pré-observateur

Après avoir pu obtenir une forme de pré-observateur invariant il nous faut montrer qu'il converge, autrement dit, il nous faut prouver que $(0, 0)$ est un point d'équilibre uniformément asymptotiquement stable pour le système dont les deux états sont les deux erreurs :

$$\begin{cases} \dot{e}_1(t) = E_1(e(t)) \\ \dot{e}_2(t) = E_2(e(t)) \end{cases}$$

avant cela nous allons annoncer le théorème qui est le but de notre mémoire, comportant la forme du pré-observateur et les conditions de sa convergence.

Théorème 1 Pour le système

$$\begin{cases} \dot{s}(t) = D(t) [S_{in} - s(t)] - k\mu(s)x(t), (s(t_0), x(t_0)) \\ \dot{x}(t) = [-D(t) + \mu(s)] x(t), \mu(s) = \frac{s}{K + s} \\ y(t) = s(t) \end{cases}$$

le système suivant :

$$\begin{cases} \dot{\hat{s}}(t) = D(t) [S_{in} - \hat{s}(t)] - k\mu(\hat{s}(t), K)\hat{x}(t) + a\hat{s}(t) (\ln(s) - \ln(\hat{s})) \\ \dot{\hat{x}}(t) = [-D(t) + \mu(\hat{s}(t), K)] \hat{x}(t) + b\hat{x}(t) (\ln(s) - \ln(\hat{s})) \end{cases}$$

est un observateur. La dynamique des erreurs est donnée par le système suivant :

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = -ae_1 + \frac{D(t)S_{in}}{s} (1 - e^{-e_1}) + \frac{k\mu_{max}sx}{(s+K)(se^{-e_1}+K)} (1 - e^{-e_1}) - \frac{k\mu_{max}x}{K + se^{-e_1}} (1 - e^{-e_2}) \\ \dot{e}_2 = -be_1 + \frac{\mu_{max}Ks}{(s+K)(se^{-e_1}+K)} (1 - e^{-e_1}) \end{cases}$$

(3.3.-7)

Supposons que $a > 0$ suffisamment grand et $b < 0$, avec $|b|$ assez grand, alors $(0, 0)$ est un point d'équilibre uniformément asymptotiquement stable pour le système (1).

Preuve. Nous avons :

$$e_1 = \ln s - \ln \hat{s} = \ln \frac{s}{\hat{s}} \Rightarrow \hat{s} = se^{-e_1}$$

et

$$e_2 = \ln x - \ln \hat{x} = \ln \frac{x}{\hat{x}} \Rightarrow \hat{x} = xe^{-e_2}$$

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = \frac{\dot{s}}{s} - \frac{\dot{\hat{s}}}{\hat{s}} \\ \dot{e}_2 = \frac{\dot{x}}{x} - \frac{\dot{\hat{x}}}{\hat{x}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = D(t) \frac{S_{in} - s}{s} - k\mu_{max} \frac{1}{K + s} x - D(t) \frac{S_{in} - \hat{s}}{\hat{s}} + k\mu_{max} \frac{1}{K + \hat{s}} \hat{x} - ae_1 \\ \dot{e}_2 = \mu(s, K) - D(t) - \mu(\hat{s}) + D(t) - be_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = D(t) S_{in} \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{\hat{s}} \right) - k\mu_{max} \left(\frac{x}{K + s} - \frac{\hat{x}}{K + \hat{s}} \right) - ae_1 \\ \dot{e}_2 = \mu_{max} \left(\frac{s}{K + s} - \frac{\hat{s}}{K + \hat{s}} \right) - be_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = D(t) S_{in} \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{se^{-e_1}} \right) - k\mu_{max} \left(\frac{x}{K + s} - \frac{xe^{-e_2}}{K + se^{-e_1}} \right) - ae_1 \\ \dot{e}_2 = \mu_{max} \left(\frac{s}{K + s} - \frac{se^{-e_1}}{K + se^{-e_1}} \right) - be_1 \end{cases}$$

à cette étape nous pouvons vérifier que $(0, 0)$ est un point d'équilibre, tel que

$$\begin{cases} \dot{e}_1|_{(e_1, e_2)=(0,0)} = 0 \\ \dot{e}_2|_{(e_1, e_2)=(0,0)} = 0 \end{cases}$$

il nous reste à prouver que cette équilibre est stable, nous allons donc développer encore plus le système dans le but d'obtenir un sous système linéaire et un sous système non linéaire pour pouvoir appliquer un théorème de stabilité

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = \frac{D(t)S_{in}}{s} (1 - e^{e_1}) - k\mu_{max} \left(\frac{1}{K + s} - \frac{e^{-e_2}}{K + se^{-e_1}} \right) x - ae_1 \\ \dot{e}_2 = \mu_{max} \left(\frac{1}{K + s} - \frac{e^{-e_1}}{K + se^{-e_1}} \right) s - be_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = -ae_1 + \frac{D(t)S_{in}}{s} (1 - e^{e_1}) + \frac{k\mu_{max}sx}{(s + K)(se^{-e_1} + K)} (1 - e^{-e_2}) - \frac{k\mu_{max}x}{K + se^{-e_1}} (1 - e^{-e_2}) \\ \dot{e}_2 = -be_1 + \frac{\mu_{max}Ks}{(s + K)(se^{-e_1} + K)} (1 - e^{-e_1}) \end{cases}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{e}_1 = \left[-a - \frac{D(t)S_{in}}{s} + \frac{k\mu_{max}sx}{(s+K)^2} \right] e_1 - \frac{k\mu_{max}x}{s+K} e_2 - \frac{D(t)S_{in}}{s} (e^{e_1} - e_1 - 1) \\ - \frac{k\mu_{max}sx}{(s+K)^2} \left[\frac{s+K}{se^{-e_1}+K} (e^{e_1} - e_1 - 1) + \frac{s}{se^{-e_1}+K} (e^{e_1} - 1) e_1 \right] \\ + \frac{k\mu_{max}x}{s+K} \left[\frac{s+K}{se^{-e_1}+K} (e^{e_2} - e_2 - 1) + \frac{s}{se^{-e_1}+K} (e^{e_1} - 1) e_2 \right] \\ \dot{e}_2 = \left[-b + \frac{\mu_{max}Ks}{(s+K)^2} \right] e_1 \\ - \frac{\mu_{max}Ks}{(s+K)^2} \left[\frac{s+K}{se^{-e_1}+K} (e^{e_1} - e_1 - 1) + \frac{s}{se^{-e_1}+K} (e^{e_1} - 1) e_1 \right] \end{array} \right.$$

Nous allons simplifier la dernière écriture avec les notation suivantes :

$$u_1 = \frac{D(t)S_{in}}{s}; u_2 = \frac{k\mu_{max}sx}{(s+K)^2}; u_3 = \frac{k\mu_{max}x}{s+K}; u_4 = \frac{K\mu_{max}s}{(s+K)^2}$$

$$v_1 = \frac{s+K}{se^{-e_1}+K}; v_2 = \frac{s}{se^{-e_1}+K}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{e}_1 = [-a - u_1 + u_2] e_1 - u_3 e_2 - u_1 (e^{e_1} - e_1 - 1) \\ -u_2 [v_1 (e^{e_1} - e_1 - 1) + v_2 (e^{e_1} - 1) e_1] \\ +u_3 [v_1 (e^{e_2} - e_2 - 1) + v_2 (e^{e_1} - 1) e_2] \\ \dot{e}_2 = [-b + u_4] e_1 \\ -u_4 [v_1 (e^{e_1} - e_1 - 1) + v_2 (e^{e_1} - 1) e_1] \end{array} \right.$$

Ce système est non-autonome, nous allons donc utiliser le théorème (2) [voir l'annexe] pour montrer que l'équilibre $(0, 0)$ est localement uniformément asymptotiquement stable.

D'après ce théorème, notre but serait de prouver que le sous système linéaire est asymptotiquement stable en $(0, 0)$ et que le sous système non linéaire est borné.

Nous allons donc définir le sous système linéaire et le sous système non linéaire.

$$\dot{e}(t) = A(t)e(t) + F(t, e(t)) \quad (3.3-15)$$

Où $A(t)e(t)$ est la partie linéaire du système $F(t, e(t))$ est la partie non linéaire.

$$A(t) = \begin{pmatrix} -a - u_1 + u_2 & -u_3 \\ -b + u_4 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.3-14)$$

$$\begin{pmatrix} F_1(t, e(t)) \\ F_2(t, e(t)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -u_1 (e^{e_1} - e_1 - 1) \\ -u_2 [v_1 (e^{e_1} - e_1 - 1) + v_2 (e^{e_1} - 1) e_1] \\ +u_3 [v_1 (e^{e_2} - e_2 - 1) + v_2 (e^{e_1} - 1) e_2] \\ -u_4 [v_1 (e^{e_1} - e_1 - 1) + v_2 (e^{e_1} - 1) e_1] \end{pmatrix} \quad (3.3-13)$$

àfin de borner la partie non linéaire du système, nous allons borner les fonction $u_1, u_2, u_3, u_4, v_1, v_2$ ainsi que $(e^{e_{1,2}} - e_{1,2} - 1)$ et $(e^{e_{1,2}} - 1)$

$$\begin{array}{ll}
D_{min} \leq u_1 \leq \frac{D_{max} S_{in}}{\underline{s}} & 0 < u_2 \leq \frac{k\mu_{max} S_{in} \bar{x}}{(\underline{s} + K)^2} \\
0 < u_3 \leq \frac{k\mu_{max} \bar{x}}{K} & 0 < u_4 \leq \frac{K\mu_{max} S_{in}}{(\underline{s} + K)^2} \\
0 < v_1 \leq \frac{S_{in} + K}{K} & 0 < v_2 \leq \frac{S_{in}}{K}
\end{array}$$

Sachant que : $0 < \underline{s} \leq s \leq S_{in}$ et $0 < x \leq \bar{x}$ et $D_{min} \leq D(t) \leq D_{max}$

où : $\underline{s} = S_{in} + (s(0) - S_{in}) e^{-C}$ et $\bar{x} = \frac{2}{k} S_{in} + x(0)$

Le développement de Taylor de e^{e_1} est

$$e^{e_1} = 1 + e_1 + e_1^2 \int_0^1 (1 - \tau) e^{e_1 \tau} d\tau$$

ce qui nous donne : $|e^{\pm e_1} \pm e_1 - 1| \leq \frac{1}{2} e^{\delta_\epsilon} \delta_\epsilon |e_1|$ et $|e^{-e_1} - 1| \leq \delta_\epsilon + \frac{1}{2} e^{\delta_\epsilon} \delta_\epsilon^2$

$$\left\{ \begin{array}{l}
|F_1| \leq \left[\frac{D_{max} S_{in} \bar{x} e^{\delta_\epsilon}}{2(\underline{s} + K)^2} + \frac{k\mu_{max} S_{in} \bar{x}}{(\underline{s} + K)^2} \left(\frac{S_{in} + K}{2K} e^{\delta_\epsilon} + \frac{S_{in}}{K} \left(1 + \frac{1}{2} e^{\delta_\epsilon} \delta_\epsilon \right) \right) \right] \delta_\epsilon |e_1| \\
+ \left[\frac{k\mu_{max} \bar{x}}{K} \left(\frac{S_{in} + K}{2K} e^{\delta_\epsilon} + \frac{S_{in}}{K} \left(1 + \frac{1}{2} e^{\delta_\epsilon} \delta_\epsilon \right) \right) \right] \delta_\epsilon |e_2| \\
|F_2| \leq \frac{K\mu_{max} S_{in}}{(\underline{s} + K)^2} \left(\frac{S_{in} + K}{2K} e^{\delta_\epsilon} + \frac{S_{in}}{K} \left(1 + \frac{1}{2} e^{\delta_\epsilon} \delta_\epsilon \right) \right) \delta_\epsilon |e_1|
\end{array} \right.$$

en suposant que $S_{in} > 1$

$$\left\{ \begin{array}{l}
|F_1| \leq \left[\frac{D_{max} S_{in} \bar{x} e^{\delta_\epsilon}}{K} + \frac{k\mu_{max} S_{in} \bar{x}}{K} \left(\frac{S_{in} + K}{2K} e^{\delta_\epsilon} + \frac{S_{in}}{K} \left(1 + \frac{1}{2} e^{\delta_\epsilon} \delta_\epsilon \right) \right) \right] \delta_\epsilon |e_1| \\
+ \left[\frac{k\mu_{max} S_{in} \bar{x}}{K} \left(\frac{S_{in} + K}{2K} e^{\delta_\epsilon} + \frac{S_{in}}{K} \left(1 + \frac{1}{2} e^{\delta_\epsilon} \delta_\epsilon \right) \right) \right] \delta_\epsilon |e_2| \\
|F_2| \leq \frac{\mu_{max} S_{in}}{K} \left(\frac{S_{in} + K}{2K} e^{\delta_\epsilon} + \frac{S_{in}}{K} \left(1 + \frac{1}{2} e^{\delta_\epsilon} \delta_\epsilon \right) \right) \delta_\epsilon |e_1|
\end{array} \right.$$

On pose $\left(\frac{S_{in} + K}{2K} e^{\delta_\epsilon} + \frac{S_{in}}{K} \left(1 + \frac{1}{2} e^{\delta_\epsilon} \delta_\epsilon \right) \right) = \mathcal{P}$

$$|F_1| + |F_2| \leq \left[\frac{D_{max} S_{in} \bar{x} e^{\delta_\epsilon}}{K} + \frac{\mu_{max} S_{in}}{K} (k\bar{x} + 1) \mathcal{P} \right] \delta_\epsilon (|e_1| + |e_2|)$$

$$|F_1| + |F_2| \leq \wp(\delta_\epsilon) (|e_1| + |e_2|)$$

avec : $\wp(\delta_\epsilon) = \left[\frac{D_{max} S_{in} \bar{x} e^{\delta_\epsilon}}{K} + \frac{\mu_{max} S_{in}}{K} (k\bar{x} + 1) \mathcal{P} \right] \delta_\epsilon$

Notons que la fonction $\wp(\delta_\epsilon)$ est continue en δ_ϵ et $\wp(0) = 0$, alors pour tout $\epsilon > 0$ il existe un $\delta_\epsilon > 0$ tel que $\wp(\delta_\epsilon) < \epsilon$.

Après avoir montré que la partie non linéaire est bornée, il nous reste à montrer que la partie linéaire est asymptotiquement stable en $(0, 0)$.

Pour arriver à nos fins, nous allons utiliser le théorème de stabilité au sens de Lyapunov (3) [voir l'annexe].

Nous allons donc chercher une fonction de Lyapunov qui doit être positive et dont la cinétique doit être négative.

Après quelques essais, nous avons fini par choisir la fonction de Lyapunov suivante :

$$V_{\alpha,\beta}(e_1, e_2) = \alpha e_1^2 + (e_1 + \beta e_2)^2 \geq 0$$

où $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ sont des paramètres sur lesquels nous allons poser des contraintes afin de remplir les conditions de convergence.

il nous reste à prouver que sa cinétique est négative

$$\dot{V}_{\alpha,\beta}(e_1, e_2) = 2\alpha e_1 \dot{e}_1 + 2(e_1 + \beta e_2)(\dot{e}_1 + \beta \dot{e}_2)$$

$$\dot{V}_{\alpha,\beta}(e_1, e_2) = \begin{pmatrix} e_1 & e_2 \end{pmatrix} M_{\alpha,\beta} \begin{pmatrix} \dot{e}_1 \\ \dot{e}_2 \end{pmatrix}$$

pour prouver que $\dot{V}_{\alpha,\beta}(e_1, e_2) < 0$ il nous faut prouver que la matrice $M_{\alpha,\beta}$ est définie négative.

$$M_{\alpha,\beta} = \begin{pmatrix} -[(\alpha + 1)a + \beta b] + \alpha(u_2 - u_1) & -2\beta(a + \beta b) - (\alpha + 1)u_3 \\ + (u_2 - u_1 + \beta u_4) & + 2\beta(u_2 - u_1 + \beta u_4) \\ -2\beta(a + \beta b) - (\alpha + 1)u_3 & -2\beta u_3 \\ + 2\beta(u_2 - u_1 + \beta u_4) & \end{pmatrix}$$

une des manières de prouver que $M_{\alpha,\beta}$ est définie négative serait de prouver que sa trace est négative et que son déterminant est positif

$$tr(M_{\alpha,\beta}) = -[(\alpha + 1)a + \beta b] + \alpha(u_2 - u_1) + (u_2 - u_1) + \beta(u_4 - 2u_3) \quad (3.3.-21)$$

$$det(M_{\alpha,\beta}) = 2\beta u_3 [(\alpha + 1)a + \beta b] - 2\beta \alpha u_3 (u_2 - u_1) - 2\beta (u_2 - u_1) - 2\beta^2 u_3 u_4 - [-2\beta(a + \beta b) - (\alpha + 1)u_3 + 2\beta(u_2 - u_1 + \beta u_4)]^2$$

$$det(M_{\alpha,\beta}) = -4\beta^2(a + \beta b)^2 + pa + qb + r \quad (3.3.-22)$$

avec

$$p = 2\beta [4\beta(u_2 - u_1 + \beta u_4) - (\alpha + 1)u_3]$$

$$q = 2\beta^2 [4\beta(u_2 - u_1 + \beta u_4) - 2(\alpha + 1)u_3 + u_3]$$

$$r = -[-(\alpha + 1)u_3 + 2\beta(u_2 - u_1 + \beta u_4)]^2 - [2\alpha\beta(u_2 - u_1)u_3 + 2\beta(u_2 - u_1) + 2\beta^2 u_3 u_4]$$

Sous le choix $a + \beta b = 0$ on a $b = -\frac{1}{\beta}a$

$$tr(M_{\alpha,\beta}) = -[\alpha a] + \underbrace{\alpha(u_2 - u_1) + (u_2 - u_1) + \beta(u_4 - 2u_3)}_{\bar{r}}$$

\bar{r} est bornée donc pour $\alpha > 0$ et a assez grand $tr(M_{\alpha,\beta}) < 0$

$$det(M_{\alpha,\beta}) = 2\beta \alpha u_3 a + r$$

r est bornée donc pour un a assez grand $\det(M_{\alpha,\beta}) > 0$.

Donc

$$\dot{V}_\alpha \leq \lambda_{max}(M_\alpha)(e_1^2 + e_2^2) \leq c\lambda_{max}V_\alpha$$

où c est une constante réelle et λ_{max} est la plus grande valeurs propres négative de M_α . Ce qui implique que $\dot{V}_\alpha(e_1, e_2)$ est négative. Ainsi, $(0, 0)$ est un point d'équilibre localement uniformément asymptotiquement stable. ■

3.4 Simulation

3.4.1 Simulation et interprétation des résultats

Pour juger les performances de l'observateur invariant nous utiliserons l'entrée D variable pour toutes les simulations qui viennent. Ceci nous permettra de remplir la condition d'opération réelle de persistance de l'entrée, mais ça nous permettra surtout de visualiser la capacité de l'observateur à suivre le changement *relativement rapide* des valeurs des états.

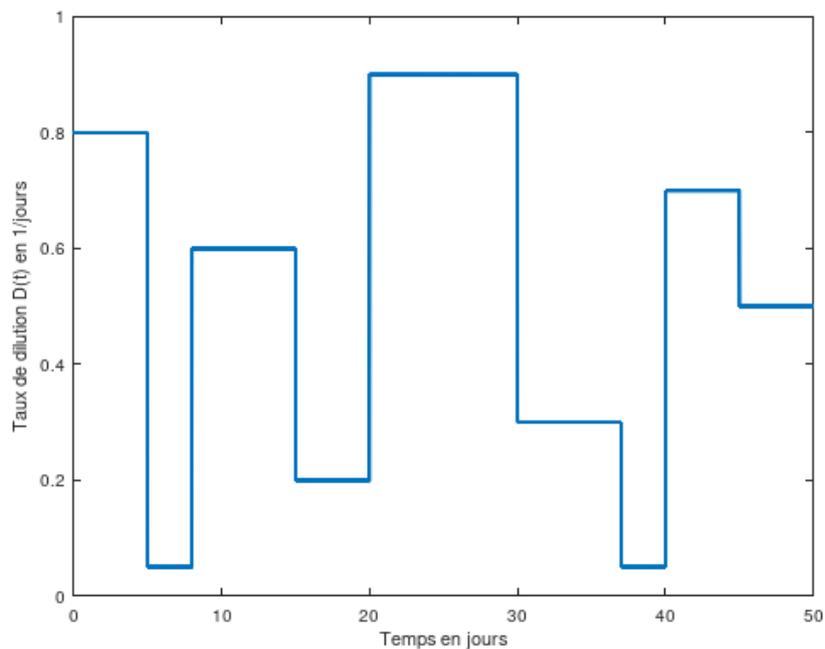


FIGURE 3.1 – Taux de dilution $D(t)$ persistant

Nous utiliserons les mêmes paramètres des simulations du premier chapitre (1.1). Les paramètres de l'observateur invariant sont donnés dans le tableau suivant :

Nous allons visualiser dans un premier temps la réponse du système et de son estimation à l'entrée (3.1).

Grandeurs	Valeur
S_{o0}	2 g/L
X_{o0}	3 g/L
a	10
β	0.3

TABLE 3.1 – Conditions initiales et paramètres de l'observateur invariant

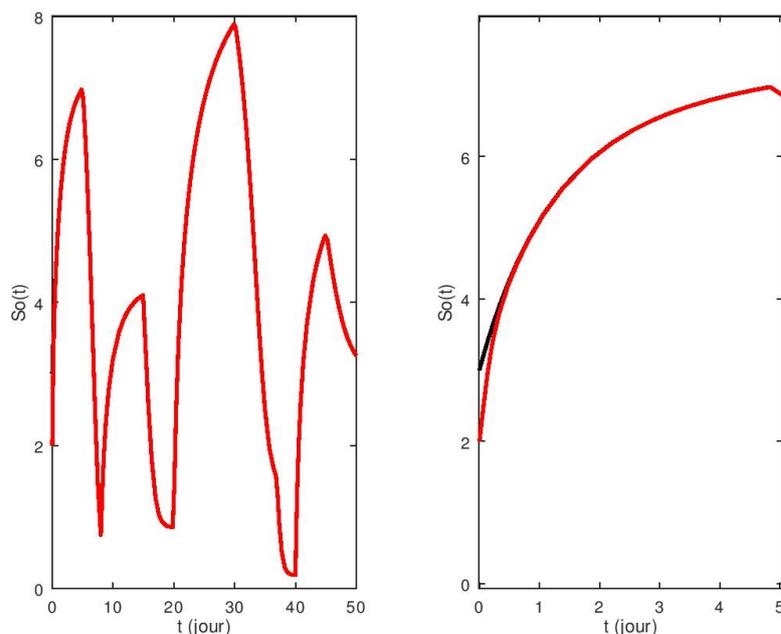


FIGURE 3.2 – Concentration du substrat s et de son estimation S_o pour $a = 10$ et $\beta = 0.3$

La première simulation ci-dessus nous montre la concentration du substrat s en couleur noir et la concentration de son estimation S_o en rouge. Nous remarquons que les deux courbes son confondues. Nous avons donc refait la simulation sur un intervalle de temps beaucoup moins important pour pouvoir distinguer les deux courbes.

Nous pouvons distinguer les deux courbes de l'instant 0 jusqu'à une demi journée, ce après quoi S_o converge vers s .

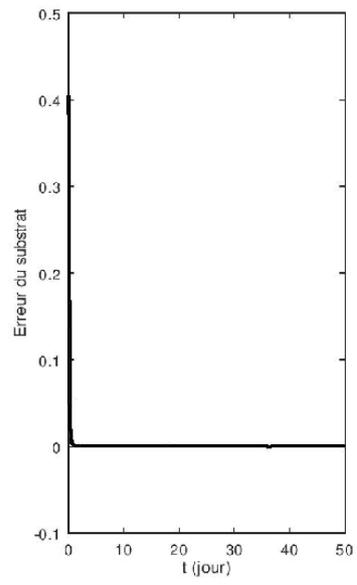


FIGURE 3.3 – Erreur d'estimation du substrat s

La visualisation de l'erreur ci-dessus nous confirme qu'après le temps de convergence S_o suit s même lors des changements brusques des valeurs de $D(t)$.

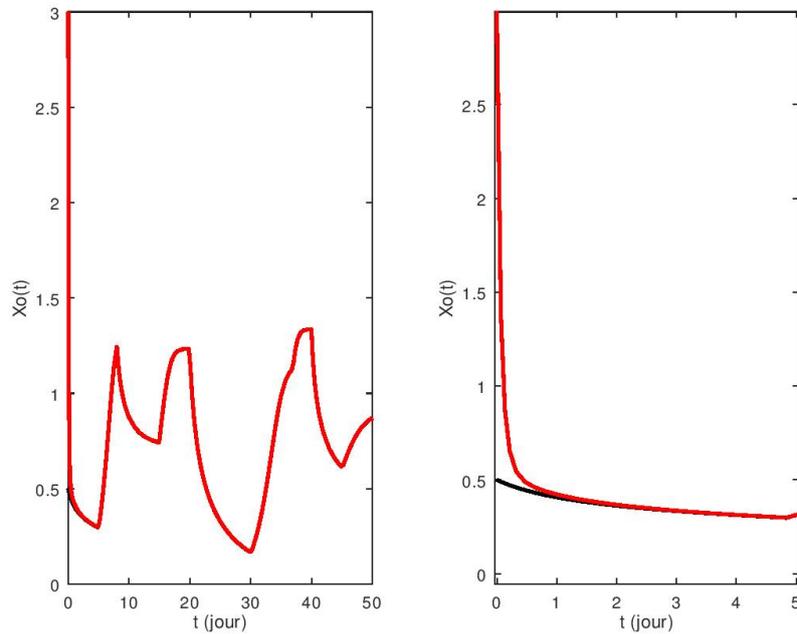


FIGURE 3.4 – Concentration de la biomasse x et de son estimation X_o pour $a = 10$ et $\beta = 0.3$

Pareil que pour la concentration du substrat et de son estimation, la concentration de la biomasse x et de son estimation X_o se confondent durant les 50 *jours* à l'exception d'un petit intervalle de départ que nous visualisons de plus près. En effet, X_o converge vers x après une journée. Cette performance, sachant que l'état que nous cherchons à observer est l'état x , est satisfaisante du point de vue contrôle des bioprocédés connu pour être très lent.

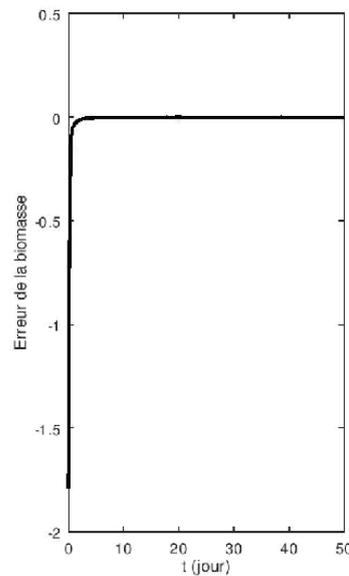


FIGURE 3.5 – Erreur d'estimation de la biomasse x

La visualisation de l'erreur ci-dessus nous confirme qu'après le temps de convergence X_0 suit x même lors des changements brusques des valeurs de $D(t)$.

3.4.2 Discussion autour de la robustesse aux bruits

Sachant qu'en réalité le système subit différents bruits, nous allons injecter un bruit blanc au modèle et observer la réaction de notre observateur. Généralement les discussions autour de la robustesse aux bruits se font pour des bruits injectés aux paramètres (incertitude de modélisation) du modèle et pour des bruits injectés aux mesures (bruit de capteurs).

Commençons par injecter un bruit blanc au paramètre μ_{max}

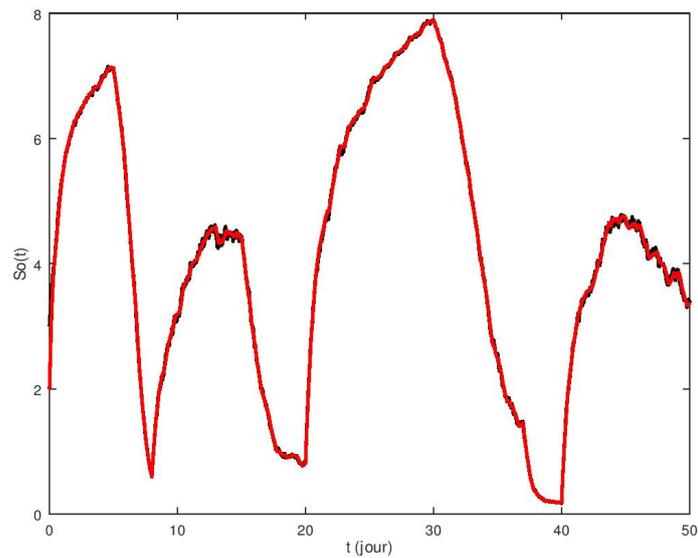


FIGURE 3.6 – Estimation du substrat avec un bruit blanc sur μ_{max}

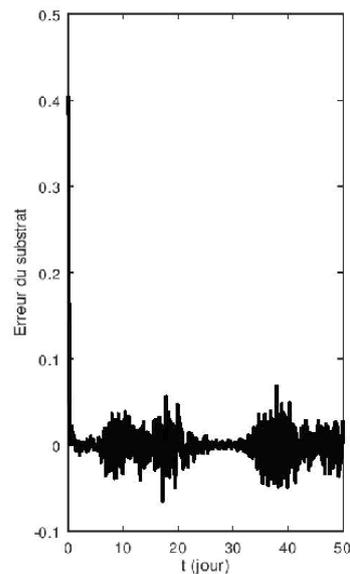


FIGURE 3.7 – Erreur d'estimation du substrat s avec un bruit blanc sur μ_{max}

Nous remarquons que l'état estimé S_o suit assez bien s et converge très rapidement.

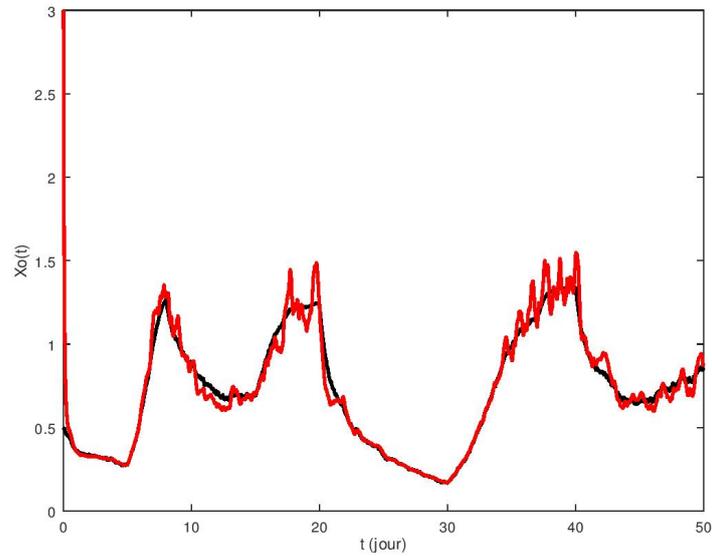


FIGURE 3.8 – Estimation de la biomasse avec un bruit blanc sur μ_{max}

Nous remarquons que l'estimation X_o est beaucoup plus bruitée par rapport à l'estimation S_o ce qui est tout à fait normal, d'ailleurs toutes les performances sont meilleures dans S_o que dans X_o comme nous l'avons remarqué pour la vitesse de convergence dans la simulation sans bruits.

Ceci est du au fait que le terme correctif s'écrit en fonction de s et S_o , son impacte est donc plus important dans la cinétique de S_o que dans la cinétique de X_o .

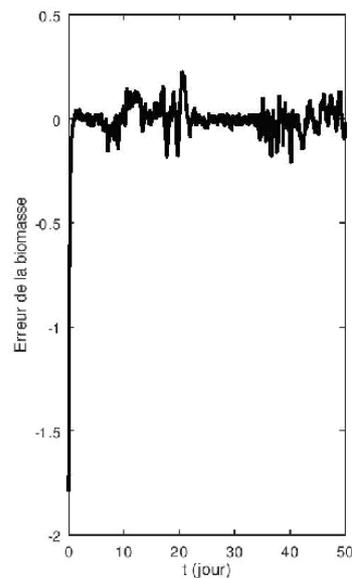


FIGURE 3.9 – Erreur d'estimation de la biomasse x avec un bruit blanc sur μ_{max}

La visualisation de l'erreur ci-dessus nous permet d'avoir une autre remarque. L'erreur du substrat est plus condensée que l'erreur de la biomasse ce qui confirme que sa correction se fait plus rapidement.

Cependant l'intensité de l'erreur de la biomasse ne dépasse pas 6×10^{-1} ce qui nous permet de dire que notre observateur est robuste au bruit sur μ_{max} .
Nous allons maintenant injecter un bruit blanc à la sortie $y = s$

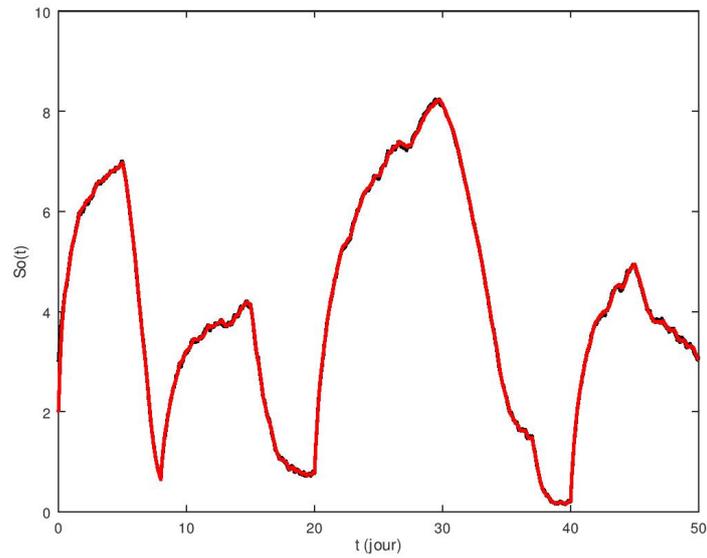


FIGURE 3.10 – Estimation du substrat avec un bruit blanc injecté à la mesure $y = s$

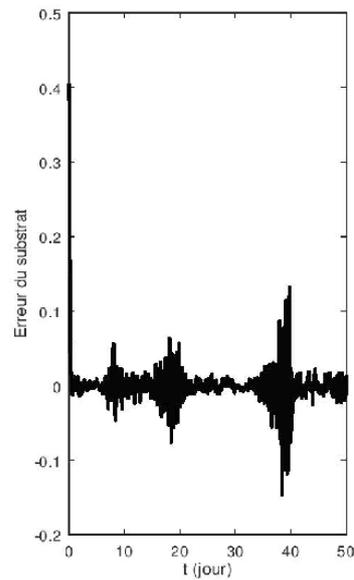


FIGURE 3.11 – Erreur d'estimation du substrat s avec un bruit blanc sur $y = s$

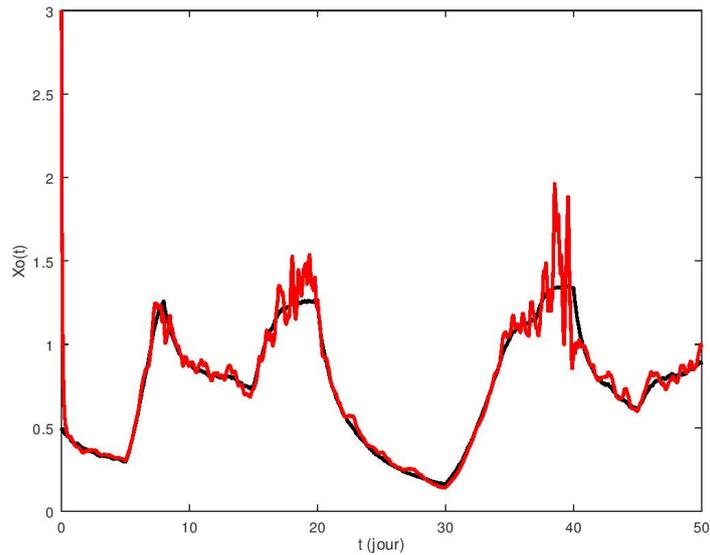


FIGURE 3.12 – Estimation de la biomasse avec un bruit blanc injecté à la mesure $y = s$

Nous remarquons que lorsque nous injectons un bruit de mesure le système est moins bruité que pour un bruit dans le paramètre μ_{max} (Les courbes du modèle sont plus lisses), malgré cela les courbes des états estimées sont encore plus charcuté par rapport au modèle. Ceci peut se traduire comme suit :

- Le paramètre μ_{max} a une plus grande contribution numérique dans le modèle que l'état s .
- Le terme correctif est ce qui fait la performance de notre observateur, et il est en fonction de la mesure et de son estimation, il est donc moins affecté par le paramètre μ_{max} qu'il est affecté par l'état s .

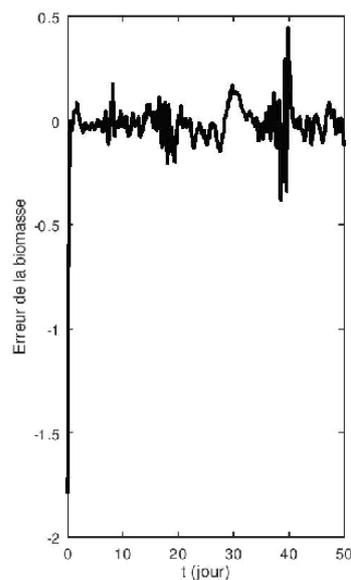


FIGURE 3.13 – Erreur d'estimation de la biomasse x avec un bruit blanc sur $y = s$

Les propositions précédentes se confirment par l'intensité de l'erreur ci-dessus. remarquons que l'intensité du bruit de biomasse ne dépasse pas 9×10^{-1} donc nous pouvons dire que notre observateur est robuste au bruit sur la mesure $y = s$. Remarquons aussi que cette intensité d'erreur n'est pas très importante par rapport à l'intensité du bruit sur μ_{max} , mais sachant que le système ce deuxième bruit était moins caractérisé nous pouvons déduire que notre observateur est plus robuste au bruit sur μ_{max} , qu'il l'est au bruit sur la mesure $y = s$

3.4.3 Étude comparative des performances des observateurs

Dans cette dernière partie du chapitre nous allons simuler l'estimation de la biomasse par quatre différents observateurs vu dans l'état de l'art, qui sont : *L'observateur invariant (noté obs inv)*, *l'observateur type-Luenberger à dynamique d'erreur linéaire (noté obs luenNL)*, *l'observateur à grand gain (noté obs gg)* et *l'observateur asymptotique (noté obs asym)* et faire une étude comparative sur leurs performances.

Notre choix s'est porté sur ces trois observateurs car ce sont tous les trois des observateurs non linéaires dont les structures se ressemblent.

Pour cette simulation nous injectons en entrée de même taux de dilution précédent (3.1). Cependant nous ne simulons que sur l'intervalle de 0 à 10 jours puisque c'est l'intervalle le plus riche en informations.

afin de bien comparer les différentes estimations, nous choisissons la même condition initiale $X_o(0) = 3$.

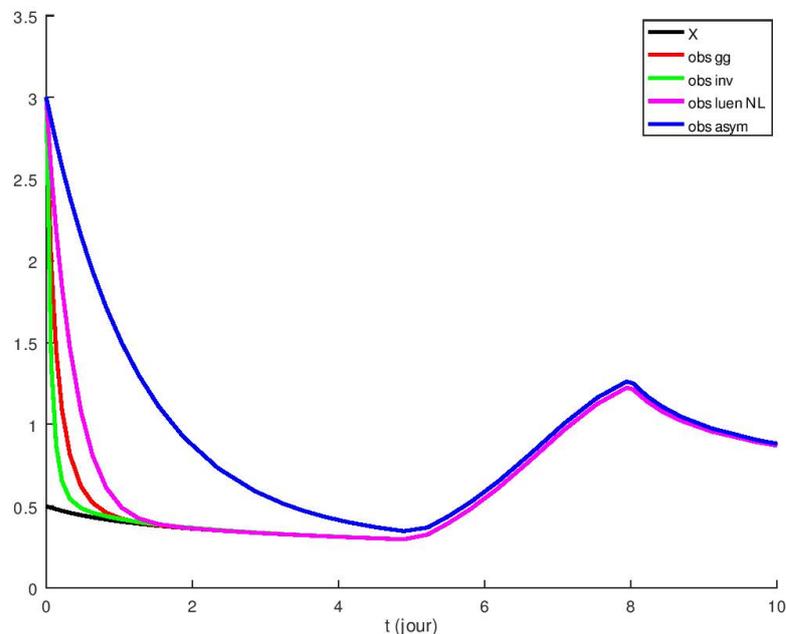


FIGURE 3.14 – Comparaison des quatre estimations de la concentration de la biomasse x

Cette simulation nous permet de comparer les vitesses de convergence de chaque observateur, où nous remarquons que l'observateur invariant est l'observateur qui converge le plus rapidement.

Il est très important de noter que pour les observateur avec gains de réglage, c'est le choix de ces derniers qui défini les performances, un observateur peut donc avoir de meilleurs résultats de rapidité et de robustesse qu'un autre observateur pour un couple de gain, et avoir de moins bons résultats que le même autre observateur pour un autre couple de gains. Cependant, chaque observateur possède un couple de gain optimal dans une situation bien précise. Donc ce qui nous permet de dire que l'observateur invariant est le meilleur observateur appliqué au chemostat pour l'estimation de la biomasse, est qu'il a pu atteindre des performance de convergence et de robustesse qui n'ont pu être dépassées par aucun autre observateur.

Chapitre 4

Conclusion et perspectives

Le but de ce mémoire est la synthèse d'observateur invariant pour le modèle du chemostat.

La route vers l'accomplissement du but principale nous a aussi permis de découvrir le phénomène de la digestion anaérobie et les travaux de modélisation (analyse mathématique du système, étude de la positivité des états et leur bornitude, calcul des point d'équilibres et leurs stabilité et le traçage du diagramme opératoire) qui ont été faits pour pouvoir l'exploiter.

Nous avons aussi découvert différents types d'observateurs avant de détailler l'observateur qui nous intéresse et nous avons déduit leurs avantages et leurs inconvénients.

Enfin, nous avons synthétisé le pré-observateur invariant et prouvé sa convergence, puis nous l'avons mis à l'épreuve à travers des simulations en injectant des bruits et une comparaison avec d'autres observateurs, dans lequel nous avons déduit qu'il était le meilleur observateur appliqué au modèle du chemostat pour estimer la biomasse.

Le déficit dans ce mémoire était la complexité des calculs formels nécessaires à l'étude du système et dans la preuve de convergence du pré-observateur.

Cependant, ça nous a permis de découvrir plusieurs astuces et de nouveaux concepts mathématiques.

Pour enrichir cette voix il serait intéressant de reproduire le travail en utilisant d'autres cinétiques de croissances, particulièrement la cinétique de Contois. Il serait aussi intéressant d'exploiter les bornitudes des états pour tracer le diagramme opératoire. Une autre large voix à explorer serait la synthèse d'observateurs qui suivent les caractéristique des modèles comme pour l'invariance du chemostat. Et biensûr il serait intéressant d'utiliser une autre mesure qui est la mesure du biogaz, et de reproduire ces travaux sur un autre modèle comme le modèle de compétition dans le chemostat.

Chapitre 5

Annexe

Théorème 2 Soit (1) $\frac{dx}{dt} = A(t)x$ un système linéaire sur \mathbb{R}^n , uniformément asymptotiquement stable pour $t_0 \geq T$.

Soit

$$F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d; (t, x) \longmapsto F(t, x)$$

une fonction continue et $F(t, 0) = 0$ telle que :

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta_\epsilon > 0 : \|x\| \leq \delta_\epsilon \implies \|F(t, x)\| \leq \epsilon \|x\|, \forall t \geq T$$

Soit (2) $\frac{dx}{dt} = A(t)x + F(t, x)$. Alors la solution $x \equiv 0$ de (2) est uniformément asymptotiquement stable pour $t_0 \geq T$. [28]

Théorème 3 (Stabilité au sens de Lyapunov) Soit $x_e = 0$ un point d'équilibre et soit la fonction $V : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 telle que $V(0) = 0$ et $V(x) > 0$ et $\dot{V}(x) < 0$ dans $\mathbb{R}^n - 0$ et aussi $\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} V(x) = \infty$ alors le point d'équilibre est asymptotiquement stable.

Bibliographie

- [1] I. DIDI, *Sur l'observation des systèmes non linéaires invariants : Application aux Bioprocédés*, thèse de doctorat, Université Aboubekr Belkaid de Tlemcen , 2015.
- [2] I. DIDI, H. DIB, B.CHERKI, *An invariant observer for a chemostat model*, *Automatica*, 50, 2321-2326, 2014.
- [3] J. HARMAND, *Contribution à l'analyse et au contrôle des systèmes biologiques : application aux bioprocédés de dépollution*, habilitation à diriger des recherches, Université Claude Bernard, 2004.
- [4] B. BENYAHIA, *Modélisation et observation des bioprocédés à membranes : application à la digestion anaérobie*, thèse de doctorat, Université Aboubekr Belkaid de Tlemcen et Université de Montpellier 2 , 2012.
- [5] V. LEMESLE, *Modélisation mathématique structurée de la croissance cellulaire en chemostat : analyse et estimation*, thèse de doctorat, Université de Nice - Sophia Antipolis, 2004.
- [6] J.P. GAUTHIER, H. HAMMOURI and S. OTHMAN, *A simple observer for non-linear systems applications to bioreactors*, *IEEE Transactions on Automatic Control*. vol 37(6), pp 875-880, 1992.
- [7] P. ROUCHON, S. BONNABEL, Ph. MARTIN, *Invariant Asymptotic Observers*, *IEEE Trans. Automatic Control*, vol.53, 2514-2526, 2008.
- [8] P. ROUCHON, *Symmetry preserving asymptotic observers : theory and examples*, 2nd Mediterranean Conference on Intelligent Systems and Automation (CISA09), Zarzis, Tunisia, March 23-25, 2009.
- [9] Z. KHEDIM, *Contribution à la modélisation et au contrôle des systèmes de digestion anaérobie*, thèse de doctorat, Université Aboubekr Belkaid de Tlemcen, 2018.
- [10] O. BERNARD, B. CHACHUAT, A. HÉLIAS, and J. RODRIGUEZ. *Can we assess the model complexity for a bioprocess : theory and example of the anaerobic digestion process*. *Water science and technology*, 53(1) :85–92, 2006.
- [11] Y. DAOUD, *Analyse de modèles de la digestion anaérobie : Application à la modélisation et au contrôle des bioréacteurs*, thèse de doctorat, Université de Montpellier, 2018.
- [12] W. ARRAS, *Étude expérimentale et modélisation de la digestion anaérobie des matières organiques résiduelles dans des conditions hyperthermophiles*, thèse de doctorat, Université du Québec, 2017.
- [13] M. OUEDER, *Synthèse des observateurs pour les systèmes non linéaires*, thèse de doctorat, Université de Caen Basse-Normandie et Université de Gabès, 2006.

- [14] K. CHAIB DRAA, *Observation et commande des procédés de digestion anaérobie pour l'amélioration de la production de biogaz*, thèse de doctorat, Université de Luxembourg, 2017.
- [15] A. AKHENAK, *Conception d'observateurs non linéaires par approche multimodèle : application au diagnostic*, thèse de doctorat, Institut National Polytechnique de Lorraine, 2004.
- [16] , D. BOUTAT, *La notion d'observateur pour les systèmes non linéaires*, cours.
- [17] I. DIDI, H. DIB, B.CHERKI, *A Luenberger-type observer for the AM2 model*, Journal Of Process Control, 32, 117-126, 2015.
- [18] M. ZERROUGUI, *Observation et commande des systèmes singuliers non linéaires*, thèse de doctorat, Université Henri Poincaré – Nancy 1, 2011.
- [19] J. HESS, *Modélisation de la qualité de biogaz produit par un fermenteur méthanogène et stratégie de régulation en vue de sa valorisation*, thèse de doctorat, Université de Nice - Sophia Antipolis, 2007.
- [20] M. EL HADJI, *Modélisation et analyse mathématiques pour les écosystèmes microbiens -Approche par les systèmes dynamiques-*, thèse de doctorat, Université Montpellier 2, 2010.
- [21] P. O. POLIQUIN, *Modélisation métabolique pour l'étude des voies de régulation énergétiques : un enjeu dans la maladie de Parkinson*, Université de Montréal, thèse de doctorat, 2012.
- [22] J. HARMAND, C. LOBRY, A. RAPAPORT, T. SARI, *Le chémostat : Théorie mathématique de la culture continue de micro-organismes*, ISTE Editions, 2017.
- [23] T. SARI, *Modèles multi-étapes*, cours, 2015.
- [24] P. ROUCHON, K.BEAUCHARD, *Dynamique et contrôle des systèmes non linéaires*, cours, 2011.
- [25] Y. VÖGELI, C. R. LOHRI, A. GALLARDO, S. DIENER, C. ZURBRÜGG, *Anaerobic Digestion of Biowaste in Developing Countries -Practical Information and Case Studies-*, Swiss Federal Institute of Aquatic Science and Technology (Eawag), Dübendorf, Switzerland, 2014.
- [26] E. TILLEY, L. ULRICH, C. LÜTHI, P. REYMOND, R. SCHERTENLEIB, C. ZURBRÜGG, *Compendium of Sanitation Systems and Technologies*, second revised edition, Swiss Federal Institute of Aquatic Science and Technology(Eawag). Dübendorf, Switzerland, 2014.
- [27] O. BERNARD, *La modélisation des systèmes biologiques : Aller-retours le long des fleuves qui circulent entre l'océan du réel et le lac des modèles*, thèse de doctorat, Université de Nice-Sophia-Antipolis, 2004.
- [28] H. REINHARD, *Equations différentielles*, Gautier-Villars, 1982.
- [29] G. BASILE, G. MARRO, *On observability of linear time-invariant systems with unknown inputs* Journal of Optimization Theory and Applications, 3 :410–415, 1969.
- [30] M. HAUTUS, *Strong detectability and observers*, Linear Algebra and its Applications, 50 :353–360, 1983.

- [31] S. M. MARTINEZ, *Analyse des propriétés structurelles d'observabilité de l'état et de l'entrée inconnue des systèmes linéaires par approche graphique*, thèse de doctorat, Université de Henri Poincaré, 2008.
- [32] A. ISODIRI, *Nonlinear Control Systems*, (3rd ed.), Springer, 1995.
- [33] <https://www.un.org/sustainabledevelopment/fr/objectifs-de-developpement-durable/>
- [34] <https://www.sortirdunucleaire.org/Le-biogaz-domestique-acces-a-l>

Résumé

La visée de ce mémoire est la synthèse d'observateurs invariants pour le modèle du chemostat. Cette synthèse a nécessité la découverte du phénomène de la digestion anaérobie et l'établissement de l'un de ses modèles qui est le modèle du chemostat. Par la suite, une vérification des conditions physiques réelles sur les états du modèle a été faite ainsi que l'étude de l'existence et la stabilité de ses points d'équilibres, confirmée par des simulations autour de ces points d'équilibres et mise en avant avec le diagramme opératoire.

Avant de pouvoir passer à la synthèse d'observateurs invariants, il a aussi été nécessaire de faire un état de l'art sur les observateurs non linéaires appliqués aux bioprocédés, avant quoi l'histoire du développement de ces observateurs a été relaté. Il a été profitable de mettre, dans la même partie, en avant la nécessité des observateurs dans les bioprocédés et donner les définitions de l'observabilité.

Après les généralités sur le bioprocédés et les généralités sur les observateurs non linéaires, les généralités sur les systèmes invariants et la forme générale d'un pré-observateur invariant ont été établis, pour pouvoir enfin faire une application sur le modèle du chemostat en vérifiant son observabilité et son invariance et en posant le pré-observateur invariant. Ce travail a été finalisé en prouvant la convergence du pré-observateur et en faisant des simulations pour tester ses performances dans des environnements purs et bruités et en le comparant avec quelques observateurs traités dans l'état de l'art.

Abstract

The aim of this Master thesis is the synthesis of invariant observers for the chemostat model. This synthesis required the discovery of anaerobic digestion phenomenon and the establishment of one of its models which is the chemostat model. Subsequently, a verification of the real physical conditions on the states of the model was made as well as the study of the existence and stability of its points of equilibrium, confirmed by simulations around these points of equilibrium and put forward with the operating diagram.

Before being able to pass to the synthesis of invariant observers, it was also necessary to make a state of the art on the nonlinear observers applied to the bioprocesses, and before that, the history of the development of these observers was narrated. In the same part, it has been profitable to put forward the necessity of observers in bioprocesses and to give the definitions of observability.

After the generalities on the bioprocess and the generalities on the nonlinear observers, the generalities on the invariant systems and the general form of an invariant pre-observer were established, to be able to finally make an application on the model of the chemostat by verifying its observability and its invariance and by posing the invariant pre-observer. This work has been finalized by proving the convergence of the pre-observer and by doing simulations to test its performances in pure and noisy environments and by comparing it with some state-of-the-art observers.

ملخص

الهدف من رسالة المستر هذه هو تلفيق جهاز استشعاري مبرمج خاضع لنظرية الثوابت لنموذج الكيموستات. تطلب هذا التركيب اكتشاف ظاهرة الهضم اللاهوائي وتأسيس أحد نماذجه وهو نموذج الكيموستات. بعد ذلك، تم التحقق من الظروف المادية الحقيقية على حالات النموذج وكذلك دراسة وجود واستقرار نقاط التوازن الخاصة به، والتي تؤكد عمليات المحاكاة حول نقاط التوازن هذه والمضي قدمًا في مخطط التشغيل. قبل التمكن من الانتقال إلى تلفيق الجهاز الاستشعاري المبرمج الخاضع لنظرية الثوابت، كان من الضروري أيضًا إجراء بحث حول الأجهزة الاستشعارية المبرمجة غير الخطية المطبقة على العمليات الحيوية، والتي تم سرد تاريخ تطورها. كان من المفيد تسليط الضوء، في نفس القسم، على الحاجة إلى الأجهزة الاستشعارية المبرمجة في العمليات الحيوية وإعطاء تعريفات للاستشعار المبرمج.

بعد العموميات حول العمليات الحيوية والعموميات حول المراقبين غير الخطيين، تم إنشاء العموميات حول الأنظمة الثابتة والشكل العام للجهاز الاستشعاري المبرمج الخاضع لنظرية الثوابت، للقدرة أخيرًا على تقديم تطبيق على نموذج الكيموستات عن طريق التحقق القابلية للاستشعار المبرمج و خضوعه لنظرية الثوابت وبتعيين جهاز استشعاري مبرمج مسبق. تم الانتهاء من هذا العمل من خلال إثبات تقارب الجهاز الاستشعاري المبرمج السابق وإجراء عمليات محاكاة لاختبار أدائه في بيئات نقية وصاخبة ومقارنته ببعض الأجهزة الاستشعارية المبرمجة الذين تمت معالجتهم في البحث البيولوجي الجغرافي.