

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

MINISTRY OF HIGHER EDUCATION  
AND SCIENTIFIC RESEARCH

HIGHER SCHOOL IN APPLIED SCIENCES  
--T L E M C E N--



المدرسة العليا في العلوم التطبيقية  
École Supérieure en  
Sciences Appliquées

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

المدرسة العليا في العلوم التطبيقية  
-تلمسان-

Mémoire de fin d'étude

Pour l'obtention du diplôme d'Ingénieur

Filière : Automatique  
Spécialité : Automatique

Présenté par : Meriem BELHDJ KACEM et Amine LALOUCHE

Thème

**Synthèse d'observateurs invariants  
pour le modèle AM2**

Soutenu publiquement, le /07 / 2021, devant le jury composé de :

Mr S.M. ABDI	MCB	ESSA. Tlemcen	Président
Mme I. DIDI ep BEMMOUSSAT	MCB	ESSA. Tlemcen	Directeur de mémoire
Mme A. GHOUALI ep BEDJAOUI	MCB	ESSA. Tlemcen	Co- Directeur de mémoire
Mme H. SEBBAGH ep DALI-YOUCHEF	MCA	ESSA. Tlemcen	Examinatrice1
Mme Z. KHEDIM ep BENSID	Docteur	Université de Tlemcen	Examinatrice 2

Année universitaire : 2020 /2021

## *Dédicaces*

Louange à **ALLAH** pour qui vont les bonnes intentions et les plus belles pensées, qui m'a créé, qui m'a donné ma chance lorsque moi-même je pensais ne pas la mériter, qui ne m'a jamais abandonné et qui m'a offert une raison d'exister et tous les cadeaux que je cite en dessous, et bien plus encore.

À ma très chère mère Fatima Zohra BOUKLI HACENE mes modestes mots ne saurait exprimer l'amour que j'ai pour elle, elle qui m'a donné la vie et tous les moyens moraux et matériels. Elle a cru en moi plus que je n'ai cru en moi-même et elle a su me redonner l'ambition quand je n'avais plus goût. Elle est mon modèle dans sa bonté de cœur, sa foi, sa force, sa jeunesse d'esprit et son optimisme. Une personne passionnée, polyvalente et surtout très cultivée elle est la lumière de ma vie.

À mon cher père Sidi Mohammed qui m'a toujours donné tout ce que je demandais. Il m'a fait confiance dans tout ce que j'ai entrepris et sans être insistant, il tenait régulièrement à passer s'assurer que j'arrivais à avancer dans mes projets.

À ma chère sœur, ma deuxième moitié Wissem qui a toujours veillé à remplir son rôle de grande sœur sans jouer les grandes sœurs. Je ne pourrais écrire tous ce qu'elle a faits pour moi, pour veiller à me protéger, mes sentiments, mes rêves et pour me montrer que je peux toujours trouver refuge chez elle. C'est la personne qui est là à veiller à ce que nous gardons notre magnifique relation malgré avoir vu la pire version de moi.

À ma chère grande sœur Zineb, qui m'a donné le meilleur d'elle quand elle était prêt de moi et qui continue à veiller sur moi malgré la distance, ainsi que mon cher beau-frère Fodil BOUAZZA. Tous les deux ne manque pas un seul appel sans me booster et m'aider à planifier mon future. Sans oublier mes chères petites boules d'énergies, mes neveux : Radia, Younes, Walid, Ahmad et Amani, tous de petits génies, artistes, sportifs, cultivés et passionnés.

À mon cher frère Abdelkrim avec qui je peux être moi même sans me soucier qu'il puisse mal prendre les choses et sur lequel j'ai pu compter dans de moments difficiles ainsi ma chère belle-sœur Imane BEKHTI qui m'a toujours motivé et veillé à ce que je garde confiance en moi.

À la mémoire de la première personne qui m'a inculqué des valeurs morales, ma chère grand-mère Bakhta HOUMITA et à toute ma famille maternelle et paternelle.

À mes meilleurs amies : Yamna AMMAR et Zineb ADAIKA, pleines de bonnes intentions et de bon sens, elles sont les petites voix de sagesse qui accompagnent mes pensées. Et à mes amies Farah, Wissal, Cherifa, Noor, Ilhem, Amel, Dounya, Ikram, Amina, Asmaa, Sarah, Chahinez, Nawel et Meriem.

*Meriem BELHADJ KACEM*

## *Remerciements*

Louange à **ALLAH** qui nous a donné des buts dans la vie, qui nous a offert des rêves et la force de les réaliser. Qui nous a donné le plus grand cadeau, de pouvoir le connaître, le remercier et l'implorer et qui a mis sur notre chemin toutes les personnes que nous allons citer.

Nos plus sincères remerciements s'adressent à notre directeur de mémoire Mme Ibtissem DIDI ep. BEMMOUSSAT qui nous a accompagné et soutenu depuis le début du travail. Lorsqu'elle a su que nous tenions à soutenir notre mémoire en première session elle n'a pas hésité à venir à l'école tous les jours et à veiller avec nous en ligne jusqu'à tard le soir. Elle nous a fait reprendre confiance en nous même et a tenu à nous expliquer chaque partie du mémoire.

Nous tenons aussi à remercier notre co-encadrant Mme Amel GHOUALI ep. BEDJAOUI ainsi que le président du jury Mr Sidi Mohammed ABDI et nos examinatrices Mme Zeyneb KHEDIM ep. BENSID et Mme Hafidha SEBBAGH ep. DALI-YOUCHEF qui ont fait l'effort de lire notre mémoire et de nous corriger afin de déposer la meilleure version possible du mémoire. Et nous remercions Madame Zeyneb KHEDIM aussi de nous avoir fait découvrir le « Diagramme opératoire » avec lequel nous avons enrichi nos mémoires.

Nos grands remerciements, respects vont à nos enseignants qui en plus de nous transmettre leur savoir, nous ont accompagné dans nos activités extra scolaires et moralement durant des années universitaires secouées par les événements. Nous exprimons notre grande gratitude pour nos enseignants en primaire, CEM, lycée et de l'ESSAT qui ont veillé à cultiver notre ouverture d'esprit, notre ambition, notre culture générale, nos bonnes œuvres et nos bonnes manières.

Un grand merci nos camarades qui sont toujours prêts à partager leurs connaissances, maîtrises, savoir et les opportunités qu'ils rencontrent. Nous les remercions d'avoir été présents moralement et d'avoir dépassé tous les différents que nous avons eu.

Nous remercions tout le staff administratif ainsi que toute personne travaillant à l'école. Merci d'avoir assuré que nous puissions atteindre nos objectifs dans de bonnes conditions, de nous avoir soutenu dans nos activités extra scolaires et surtout pour les « Salam » échangés avec sourire et bonne humeur.

Nous tenons à remercier tous les enseignants, étudiants et passionnés qui présentent un contenu éducatif sur le web, ainsi qu'à tous les forums et les communautés qui traitent des sujets de notre spécialité. Nous tenons à exprimer nos grands respects et gratitude pour les logiciels libres et OpenSource ainsi que toute personne ou institution offrant des produits éducatifs gratuits. Nous remercions de façon générale tous les étudiants qui ont veillé à rédiger de bons mémoires et que nous avons exploité au maximum, et de façon particulière l'étudiante Ikram BELLAMRI qui a traité un sujet très similaire au notre l'année précédente avec notre encadrant.

En fin nous remercions tous ceux qui ont contribué de façon directe ou indirecte à notre réussite scolaire et notre épanouissement personnel.

# Table des matières

<b>Introduction générale</b>	<b>8</b>
<b>1 Analyse mathématique du modèle AM2</b>	<b>12</b>
1.1 Le modèle AM2	12
1.1.1 Définition	12
1.1.2 Les étapes du modèle AM2	12
1.2 Le modèle mathématique du AM2	15
1.2.1 Les équations dynamiques du modèle AM2	15
1.2.2 Les équilibres du modèle AM2	16
1.2.3 Existence et stabilité des points d'équilibres	17
1.3 Résultats de simulation autour d'un point d'équilibre	17
1.4 Diagramme opératoire	19
1.5 Positivité des variables d'états	21
1.5.1 Positivité de l'état $s_1$	21
1.5.2 Positivité de l'état $x_1$	21
1.5.3 Positivité de l'état $s_2$	21
1.5.4 Positivité de l'état $x_2$	22
1.6 Bornitude supérieure des variables d'état	22
1.6.1 La variable d'état $s_1$	22
1.6.2 La variable d'état $x_1$	23
1.6.3 La variable d'état $s_2$	24
1.6.4 La variable d'état $x_2$	24
<b>2 Synthèse d'observateur invariant pour le modèle du AM2</b>	<b>26</b>
2.1 Systèmes invariants	26
2.2 Forme générale d'un pré-observateur invariant	28
2.3 Application au modèle AM2	29
2.3.1 Observabilité	29
2.3.2 Invariance du modèle AM2	31
2.3.3 Les fonctions scalaires invariantes	34
2.3.4 Les champs de vecteurs invariants	37
2.3.5 Le pré-observateur	37
2.3.6 Convergence du pré-observateur	40
2.3.7 Résultats de simulations	46
2.3.8 Discussion autour de la robustesse	52
<b>Conclusion général</b>	<b>61</b>
<b>References</b>	<b>62</b>

# Liste des tableaux

1.1	En cas de lessivage de $x_1$ . . . . .	17
1.2	En cas de non lessivage de $x_1$ . . . . .	17
1.3	Paramètres du modèle AM2 . . . . .	18
1.4	Les conditions initiales du modèle AM2 . . . . .	18
1.5	Les région du diagramme opératoire du modèle AM2 . . . . .	20
2.1	Conditions initiales du modèle et de l'observateur . . . . .	47

# Table des figures

1	Imhoff Tank [28]	9
2	Filtre anaérobie [28]	9
3	Lagunage Anaérobie [29]	10
1.1	Les étapes de la digestion anaérobie	13
1.2	La cinétique de Monod.	14
1.3	La cinétique de Haldane	15
1.4	Le modèle AM2 dans le cas de lessivage de $x_1$ et $x_2$ pour $D=1.3$	18
1.5	Le modèle AM2 dans le cas de non lessivage de $x_1$ et $x_2$ pour $D=0.3$	19
1.6	Diagramme opératoire du modèle AM2	20
2.1	Taux de dilution $D(t)$	47
2.2	Concentration du substrat $s_1$ et de son estimation $S_{1o}$ pour $a_1 = 10$ , $\alpha = 0.2$ , $a_3 =$ et $\beta = 0.3$	48
2.3	Erreur d'estimation du substrat $s_1$	48
2.4	Concentration de la biomasse $x_1$ et de son estimation $x_{1o}$ pour $a_1 = 10$ , $\alpha = 0.2$ , $a_3 =$ et $\beta = 0.3$	49
2.5	Erreur d'estimation de la biomasse $x_1$	49
2.6	Concentration du substrat $s_2$ et de son estimation $S_{2o}$ pour $a_1 = 10$ , $\alpha = 0.2$ , $a_3 =$ et $\beta = 0.3$	50
2.7	Erreur d'estimation du substrat $s_2$	50
2.8	Concentration de la biomasse $x_2$ et de son estimation $x_{2o}$ pour $a_1 = 10$ , $\alpha = 0.2$ , $a_3 =$ et $\beta = 0.3$	51
2.9	Erreur d'estimation de la biomasse $x_2$	51
2.10	Concentration de la biomasse $x_1$ et de son estimation $x_{1o}$ avec bruit sur $s_1$ pour $a_1 = 10$ , $\alpha = 0.2$ , $a_3 =$ et $\beta = 0.3$	52
2.11	Erreur d'estimation de la biomasse $x_1$ avec bruit sur $s_1$	52
2.12	Concentration de la biomasse $x_2$ et de son estimation $x_{2o}$ avec bruit sur $s_1$ pour $a_1 = 10$ , $\alpha = 0.2$ , $a_3 =$ et $\beta = 0.3$	53
2.13	Erreur d'estimation de la biomasse $x_2$ avec bruit sur $s_1$	53
2.14	Concentration de la biomasse $x_1$ et de son estimation $x_{1o}$ avec bruit sur $s_2$ pour $a_1 = 10$ , $\alpha = 0.2$ , $a_3 =$ et $\beta = 0.3$	54
2.15	Erreur d'estimation de la biomasse $x_1$ avec bruit sur $s_2$	54
2.16	Concentration de la biomasse $x_2$ et de son estimation $x_{2o}$ avec bruit sur $s_2$ pour $a_1 = 10$ , $\alpha = 0.2$ , $a_3 =$ et $\beta = 0.3$	55
2.17	Erreur d'estimation de la biomasse $x_2$ avec bruit sur $s_2$	55
2.18	Concentration de la biomasse $x_1$ et de son estimation $x_{1o}$ avec bruit sur $\mu_{1max}$ pour $a_1 = 10$ , $\alpha = 0.2$ , $a_3 =$ et $\beta = 0.3$	56
2.19	Erreur d'estimation de la biomasse $x_1$ avec bruit sur $\mu_{1max}$	56

2.20	Concentration de la biomasse $x_2$ et de son estimation $x_{2o}$ avec bruit sur $\mu_{1max}$ pour $a_1 = 10$ , $\alpha = 0.2$ , $a_3 =$ et $\beta = 0.3$ . . . . .	57
2.21	Erreur d'estimation de la biomasse $x_2$ avec bruit sur $\mu_{1max}$ . . . . .	57
2.22	Concentration de la biomasse $x_1$ et de son estimation $x_{1o}$ avec bruit sur $\mu_{2max}$ pour $a_1 = 10$ , $\alpha = 0.2$ , $a_3 =$ et $\beta = 0.3$ . . . . .	58
2.23	Erreur d'estimation de la biomasse $x_1$ avec bruit sur $\mu_{2max}$ . . . . .	58
2.24	Concentration de la biomasse $x_2$ et de son estimation $x_{2o}$ avec bruit sur $\mu_{2max}$ pour $a_1 = 10$ , $\alpha = 0.2$ , $a_3 =$ et $\beta = 0.3$ . . . . .	59
2.25	Erreur d'estimation de la biomasse $x_2$ avec bruit sur $\mu_{2max}$ . . . . .	59

# Introduction générale

En ingénierie, des phénomènes naturels sont exploités pour l'intégration de solutions dans des industries de façon optimale, mais aussi pour régler des problèmes d'ordre gouvernemental, voir planétaire. Un de ces phénomènes est **la digestion anaérobie**, elle est utilisée dans des projets environnementaux, agricoles, d'assainissement et bien plus encore.

La digestion anaérobie est un phénomène biologique qui décrit la capacité d'un type de bactéries, appelé **bactéries anaérobies**<sup>1</sup>. Ces bactéries peuvent quasiment mourir si elle se retrouvent exposées à l'oxygène, c'est pourquoi l'exploitation de ce phénomène se fait dans des bioréacteurs bien fermés, utilisant des modes d'alimentation différents. Le résultat en matière de cette digestion est une eau propre sans matière organique, une boue de digestion qui s'accumulent au fond du mélange et du biogaz. C'est pourquoi il serait très intéressant de pouvoir l'exploiter de manière optimale.

Comme nous l'avons mentionné au début, la digestion anaérobie est utilisée pour régler de nombreux problèmes. Son application la plus connue est la méthanisation qui consiste à récupérer le biogaz dégagé de la digestion. En Algérie, cette application n'est pas d'ordre gouvernemental puisque le gaz naturel est une ressource disponible, cependant elle est utilisée dans les zones rurales pour produire de l'énergie à petite échelle. Un article de la première édition de la revue de l'école supérieure en sciences appliquées de Tlemcen *ESSAT Mag* sur les éco quartier a mis les projecteurs sur le village Laajaija dans la Daïra de Nedroma, un village connue pour son élevage de poules où ils ont décidé d'exploiter les déchets des poulaillers pour produire du biogaz qui sera utilisé à son tour pour chauffer les poulaillers. Le digestat résultant est aussi exploité en le vendant aux agriculteurs en tant que fertilisant.

L'application de la digestion anaérobie la plus intéressante à mettre en place en Algérie est la purification d'eau. Il existe plusieurs stations de purification d'eau en Algérie mais qui utilisent la digestion aérobie, une digestion qui se fait en présence d'oxygène et dont le rendement n'est pas aussi intéressant que celui de la digestion anaérobie. La mise en place de systèmes de purification d'eau utilisant la digestion anaérobie peut se faire de différentes manières :

- Avec un Imhoff tank qui est un étang anaérobie ayant une entrée et deux sorties. La première sortie est située tout en haut de l'étang, elle permet de récupérer le biogaz accumulé. La deuxième sortie est située tout en bas de l'étang, elle permet de récupérer la boue de digestion. Quant à l'entrée, est située en bas de la chambre supérieure qui accueille les eaux usées avant traitement, et est commandée par une vanne.

---

1. Les bactéries anaérobies vivent en l'absence d'oxygène.

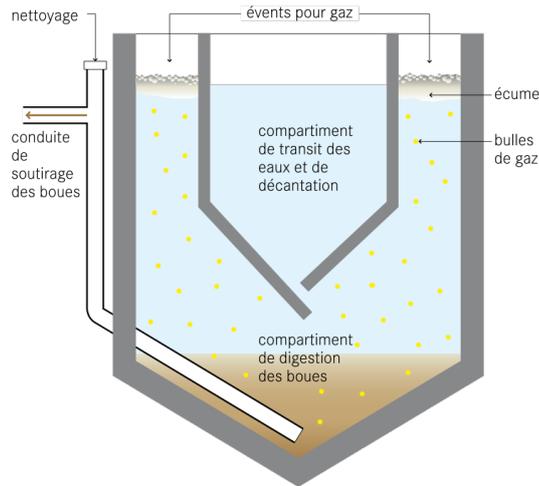


FIGURE 1 – Imhoff Tank [28]

- Avec un filtre anaérobie qui est aussi un étang anaérobie qui se constitue de plusieurs chambres reliées en série et séparées par des filtres. La boue s'accumule principalement dans la première chambre et les chambres qui suivent accueillent l'eau de mieux en mieux épurée. Les filtres sont des tubes abritant une grande densité de bactéries anaérobies, le passage d'eau par ces tubes permet donc une meilleure digestion.

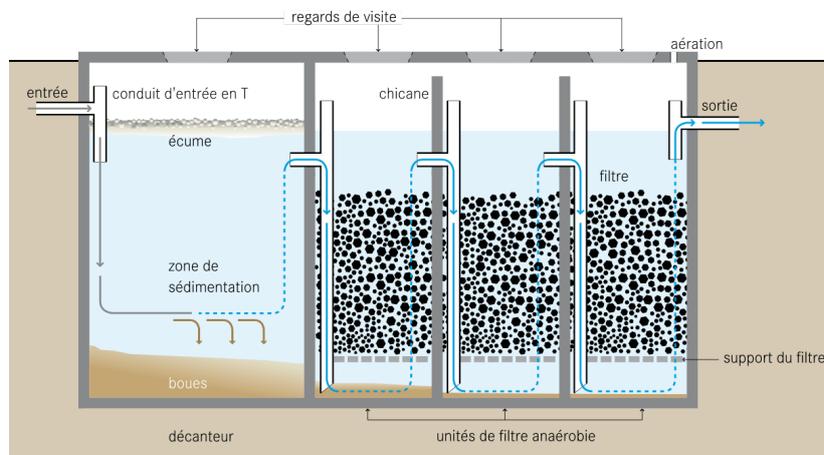


FIGURE 2 – Filtre anaérobie [28]

- Avec un lagunage anaérobie qui constitue une partie d'un système d'épuration d'eau hybride. Le lagunage, comme le filtre anaérobie, dispose de bassins connectés en série mais ayant différents types de digestions. Ces systèmes sont souvent disposés en nature en plein air, l'anaérobiose de la lagune anaérobie est donc assurée non pas par la fermeture du bassin mais par sa profondeur qui peut atteindre 5 mètres.

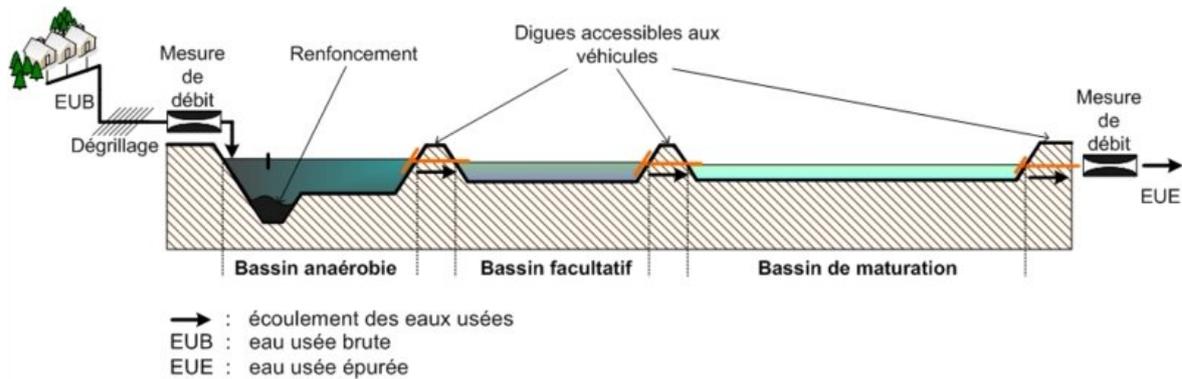


FIGURE 3 – Lagunage Anaérobie [29]

Il est bien connu que l'être humain a peur de l'inconnu, c'est pourquoi il ressent le besoin de prendre connaissance de ce qu'il s'apprête à manipuler de tous les côtés possibles.

En ingénierie, cette peur est bien plus qu'un instinct de survie, c'est une loi fondamentale à l'exploitation des ressources disponible dont la vie de milliers de gens peut en dépendre. Afin de bien connaître un système et ses éventuels comportements, la modélisation est l'outil indispensable. Cette modélisation se fait en fonction du comportement du système, des découvertes scientifiques et de l'avancée technologique.

La digestion anaérobie a été étudiée en 1960 avec son modèle le plus simple connu sous le nom du modèle du chemostat. Ce modèle considère que cette dernière se fait en une seule étape [26], il a fallu donc attendre d'autres modèles pour prendre en considération d'autres étapes. Il a aussi été découvert que la digestion anaérobie était fragile à de nombreux facteurs, il a fallu donc introduire ce phénomène aux modèles. Le modèle le plus complet et le plus complexe est le modèle ADM1 [27], un modèle très riche en information et fidèle à la réalité, cependant ça complexité fait qu'il n'est pas très utilisé dans la théorie des systèmes.

Dans ce mémoire, nous allons faire notre étude en utilisant **le modèle AM2**, qui est un modèle relativement non complexe mais qui donne des résultats exploitables et satisfaisants.

La difficulté de l'exploitation de la digestion anaérobie ne réside pas seulement dans la modélisation, il faudrait être capable de suivre le développement des bactéries anaérobies dans le bioréacteur dont l'équilibre est très fragile [25]. Une des manières de suivre le développement des grandeurs est l'utilisation **d'observateur** qui se basent sur la mesure d'autre grandeurs pour estimer la grandeur souhaitée. Cette solution est largement utilisée car c'est une solution économique, *les observateurs sont d'ailleurs appelés des capteurs logiciels*, mais aussi car le résultat donné peut être bien mieux qu'un résultat donné par un capteur physique, surtout lorsque la grandeur à mesurer est une concentration d'entités vivantes [24] comme c'est notre cas avec les bactéries anaérobies.

Les observateurs de leur côté ont connu un développement continu. La spécificité de ces derniers est qu'il en existe des familles qui suivent le même principe pour estimer les états d'un système, cependant leur performances dépendent en majeure partie du système en question et plus précisément de chaque état.

Le type d'observateurs qui ont fait leurs preuves dans les bioprocédés en générale et avec le modèle AM2 en particulier sont : **l'observateur à grand gain** [16],

**l'observateur type-Luenberger à dynamique d'erreur linéaire [17], l'observateur asymptotique [18], l'observateur par intervalle [19], etc.** Les tout premiers ont été obtenus en essayant différents compromis entre les observateurs linéaires et les modèles de la digestion anaérobie [20] (*sachant que tous les modèles de digestion anaérobie sont non linéaires*), ce après quoi des observateurs non linéaires ont vu le jour mais qui ne pouvaient s'appliquer qu'à des classes réduites de systèmes non linéaires et avec des conditions de convergence très limitantes.

Ces problèmes ont presque tous été contournés entre 1960 et 2000 et d'autres observateurs ont été synthétisés puis développés et parfois hybridés comme **l'observateur hybride entre le filtre de Kalman étendu et l'observateur asymptotique [21]** développé par Ph. Bogaerts en 1999 et **l'observateur hybride à erreur bornée**, en couplant un observateur à grand gain et un observateur asymptotique [22] développé par V. Lemesle et J. L. Gouzé en 2005.

Un des derniers observateurs à être développés pour les systèmes non linéaire est **l'observateur invariant [23]** et [2] qui est le sujet principale de notre mémoire. Notre mémoire est basé sur deux grands chapitres : dans le premier chapitre nous allons nous familiariser avec le modèle AM2 en comprenant biologiquement ses étapes puis calculer ses équilibres pour le comprendre mathématiquement et interpréter ces résultats par des simulations.

Le deuxième chapitre sera dédié à la synthèse d'observateur invariant en passant pas l'observabilité du modèle AM2 et la preuve de son convergence puis finir avec des simulations.

La conclusion générale récapitulera les plus importantes étapes du mémoire et conclura sur l'efficacité de notre observateur et des perspectives.

# Chapitre 1

## Analyse mathématique du modèle AM2

Tout système, allant des plus simples circuits électriques aux fusées spatiales, a besoin d'une modélisation pour pouvoir le manipuler avec la plus grande sécurité possible.

Les systèmes biologiques demandent une attention particulière. Ils comportent des entités vivantes dont le comportement n'est pas tout le temps régulier.

La digestion anaérobie est un des systèmes biologiques qui demandent à être traités avec attention. En effet cette dernière se fait en plusieurs étapes et est fragile aux inhibitions. Dans ce premier chapitre nous allons développer un des modèles de la digestion anaérobie les plus utilisés, mais avant cela nous allons donner un aperçu sur les étapes de digestion sur lesquels est basé ce modèle et définir les cinétiques de croissance utilisées dans chaque étape. Après l'établissement du modèle, nous allons chercher ses équilibres et étudier leurs zones d'existence et de stabilité. Pour conclure, nous allons mettre en évidence ces équilibres en faisant des simulations autour de leurs zones étudiées puis en utilisant un outil de processus opératoire.

### 1.1 Le modèle AM2

#### 1.1.1 Définition

Le modèle AM2 a été développé sous le projet Européen AMOCO. C'est un modèle de digestion anaérobie à deux-étapes (correspondant à deux réactions biologiques en cascade, d'où son nom) [2].

#### 1.1.2 Les étapes du modèle AM2

La digestion anaérobie se fait en 4 étapes principales. Toutes ces transformations se font à partir des résultats des différentes étapes qui interagissent entre elles selon le schéma suivant :

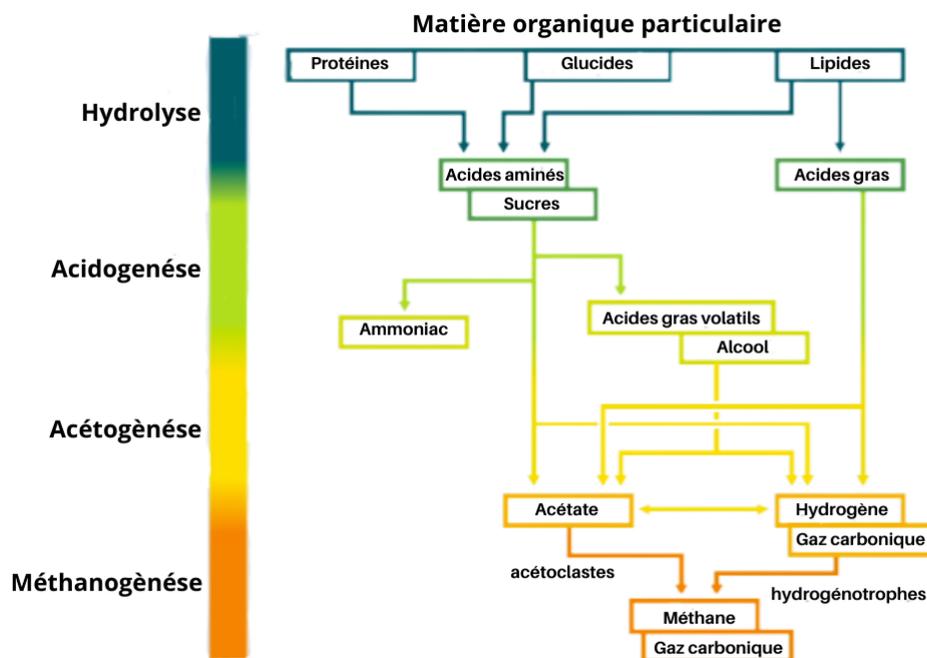
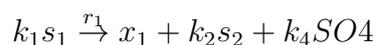


FIGURE 1.1 – Les étapes de la digestion anaérobie

Cependant le modèle AM2 ne prend en considération que la deuxième et la dernière étapes, détaillés ci-dessous :

### Acidogénèse

La matière organique  $s_1$  (DCO) est décomposé par le consortium de bactéries acidogènes  $x_1$  en acides gras volatils AGV  $s_2$  composés d'acétate, propionate et butyrate et en dioxyde de carbone  $CO_2$  selon [1] :



où  $k_1, k_2, k_4$  sont des coefficients stoechiométriques.

Avec  $r_1$  étant la vitesse de réaction selon la relation  $r_1 = \mu_1(s_1)x_1$  telle que  $\mu_1(s_1)$  est le taux de croissance spécifique de  $x_1$  sur  $s_1$  qui suit la cinétique de **Monod** :

$$\mu_1(s_1) = \mu_{1,max} \frac{s_1}{s_1 + K_1} \quad (1.1.1)$$

avec :

- $\mu_{1,max}$  est le taux de croissance maximum de  $x_1$  sur  $s_1$  en  $jour^{-1}$ .
- $K_1$  est la constante de demi-saturation à  $s_1$ .

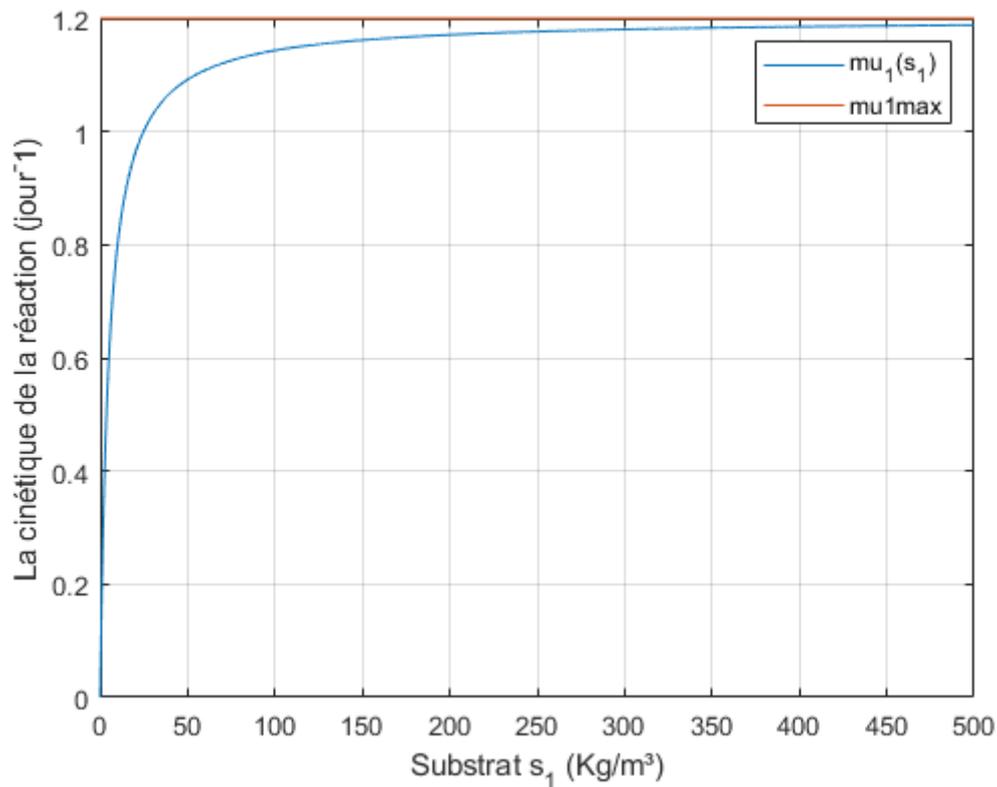


FIGURE 1.2 – La cinétique de Monod.

### Méthanogénèse

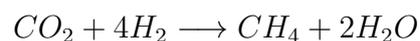
La Méthanogénèse est la quatrième étape de la digestion anaérobie. Durant cette étape l'acide acétique et l'hydrogène sont convertis en méthane et en dioxyde de carbone par les bactéries méthanogènes acétoclastes et les bactéries méthanogènes hydrogénotrophes respectivement selon les réactions suivantes :

#### Décarboxylation de l'acide acétique :



environ 70 % de méthane produit.

#### Réduction du $CO_2$ :



environ 30 % de méthane produit.

La méthanogénèse a une vitesse de réaction  $r_2 = \mu_2(s_2)s_2$ , telle que  $\mu_2(s_2)$  est le taux de croissance spécifique de  $x_2$  sur  $s_2$  [1] :



où  $k_3, k_5, k_6$  sont des coefficients stoechiométriques.

Nous utiliserons dans cette étape la cinétique de **Haldane** qui est une des cinétiques les plus réaliste puisqu'elle prend en considération les inhibitions.

$$\mu_2(s_2) = \mu_{2max} \frac{s_2}{\frac{s_2^2}{K_i} + s_2 + K_2} \quad (1.1.2)$$

avec :

- $\mu_{2,max}$  est le taux de croissance maximum de  $x_2$  sur  $s_2$
- $K_2$  est la constante de demi-saturation associée à  $s_2$
- $K_i$  est la constante d'inhibition associée à  $s_2$

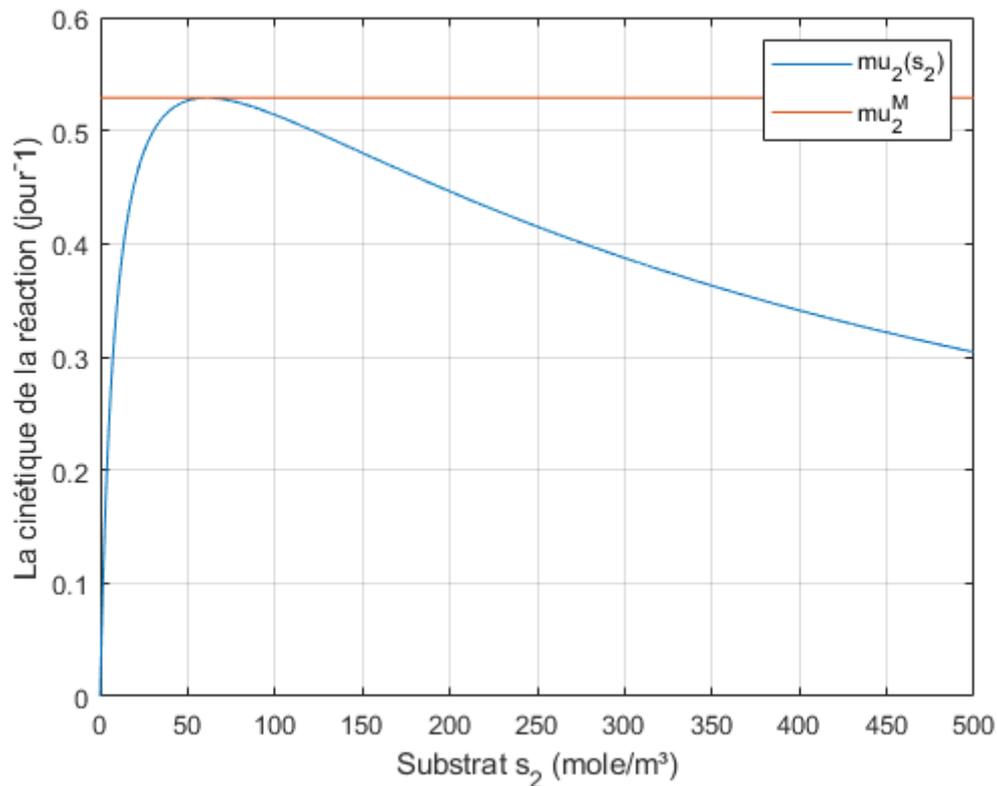


FIGURE 1.3 – La cinétique de Haldane

Où :

- $\mu_2^M$  est la valeur maximale de  $\mu_2(s_2)$ .

## 1.2 Le modèle mathématique du AM2

### 1.2.1 Les équations dynamiques du modèle AM2

On a le modelé AM2, initialement proposé dans [4]  $\xi = [s_1, x_1, s_2, x_2, z, c]^T$  avec 6 variables d'états.

où :

- $z$  : la concentration de l'alcalinité.
- $c$  : la concentration du carbone inorganique ( $CO_2$ )

Dans ce travail nous allons utilisés le modèle réduit avec le vecteur de variables d'état  $\xi = [s_1, x_1, s_2, x_2]^T$  avec la sortie  $y = (s_1 \ s_2)^T$ , ce qui ne posera pas de problème pour l'analyse mathématique du modèle réduit car il est indépendant des deux variables  $z$  et  $c$ . Si nécessaire les variables  $z$  et  $c$  peuvent être ajouté ultérieurement [1].

$$\begin{cases} \dot{s}_1(t) = D(t)(s_{1in} - s_1(t)) - k_1\mu_1(s_1(t))x_1(t) \\ \dot{x}_1(t) = [\mu_1(s_1(t)) - D(t)]x_1(t) \\ \dot{s}_2(t) = D(t)(s_{2in} - s_2(t)) + k_2\mu_1(s_1(t))x_1(t) - k_3\mu_2(s_2(t))x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = [\mu_2(s_2(t)) - D(t)]x_2(t) \end{cases} \quad (1.2.1)$$

Avec :

- $D(t)$  : le taux de dilution mesuré en (L/h).
- $s_{1in}$  : la concentration de  $s_1$  dans l'alimentation mesurée en (Kg/m<sup>3</sup>).
- $s_{2in}$  : la concentration de  $s_2$  dans l'alimentation mesurée en (mol/m<sup>3</sup>).
- $k_1$  : le rendement de dégradation de  $s_1$  par  $x_1$  mesuré en (Kg COD/Kg $x_1$ ).
- $k_2$  : le rendement de production de  $s_2$  par  $x_1$  (Kg VFA/Kg $x_1$ ).
- $k_3$  : le rendement de dégradation de  $s_2$  par  $x_2$  (Kg VFA/Kg $x_2$ )

Ces équations d'état ont été obtenu grâce au principe de la conservation de la matière [2].

Après avoir établi le modèle AM2, il serait très intéressant, voire nécessaire, de chercher ses points d'équilibres pour savoir la manière avec laquelle réagit notre système à différentes entrées.

## 1.2.2 Les équilibres du modèle AM2

Pour trouver les points d'équilibres d'un tel système il suffit de mettre  $\dot{\xi}(t) = 0$ , ainsi on obtient [1] :

- $E_1^0 = (s_{1in}, 0, s_{2in}, 0)$  existe toujours.
- $E_1^1 = (s_{1in}, 0, \lambda_2^1, x_2^1)$  où  $x_2^1 = \frac{1}{k_3}(s_{2in} - \lambda_2^1)$ , existe si et seulement si  $s_{2in} > \lambda_2^1$ .
- $E_1^2 = (s_{1in}, 0, \lambda_2^2, x_2^2)$  où  $x_2^2 = \frac{1}{k_3}(s_{2in} - \lambda_2^2)$ , existe si et seulement si  $s_{2in} > \lambda_2^2(D)$ .
- $E_2^0 = (\lambda_1, x_1^*, s_2^*, 0)$  où  $x_1^* = \frac{1}{k_1}(s_{1in} - \lambda_1)$  et  $s_2^* = s_{2in} + \frac{k_2}{k_1}(s_{1in} - \lambda_1)$ , existe si et seulement si  $s_{1in} > \lambda_1$ .
- $E_2^1 = (\lambda_1, x_1^*, \lambda_2^1, x_2^{1*})$  où  $x_2^{1*} = \frac{1}{k_3}(s_2^* - \lambda_2^1)$ , existe si et seulement si  $s_{1in} > \lambda_1$  et  $s_2^* > \lambda_2^1$ .
- $E_2^2 = (\lambda_1, x_1^*, \lambda_2^2, x_2^{2*})$  où  $x_2^{2*} = \frac{1}{k_3}(s_2^* - \lambda_2^2)$  existe si et seulement si  $s_{1in} > \lambda_1$  et  $s_2^* > \lambda_2^2$ .

Et nous définissons  $\lambda_1$  et  $\lambda_2^i$  :

- Si  $D < \mu_{1max}$  :  $\mu_1(s_1) = D$  a une solution  $\lambda_1(D)$ .
- Si  $D \geq \mu_{1max}$  :  $\mu_1(s_1) = D$  n'a pas de solution et on pose  $\lambda_1(D) = +\infty$ .
- si  $D < \mu_2^M$  :  $\mu_2(s_2) = D$  a deux solution  $\lambda_2^1 < \lambda_2^2$
- si  $D = \mu_2^M$  :  $\mu_2(s_2) = D$  a une solution  $\lambda_2^1 = \lambda_2^2$
- Si  $D > \mu_2^M$  :  $\mu_2(s_2) = D$  n'a pas de solution et on pose  $\lambda_2^1(D) = +\infty$ .

### 1.2.3 Existence et stabilité des points d'équilibres

L'existence et la stabilité des points d'équilibres dépend des positions relatives à  $s_{1in}, \lambda_1, s_{2in}, \lambda_1^1, \lambda_1^2, s_2^*$  sont détaillées dans les deux tableaux suivants [1] :

$s_{1in} < \lambda_1$	$E_1^0$	$E_1^1$	$E_1^2$
$s_{2in} < \lambda_2^1$	S	$\nexists$	$\nexists$
$\lambda_2^1 < s_{2in} < \lambda_2^2$	I	S	$\nexists$
$\lambda_2^2 < s_{2in}$	S	S	I

TABLE 1.1 – En cas de lessivage de  $x_1$

$s_{1in} > \lambda_1$	$E_1^0$	$E_1^1$	$E_1^2$	$E_2^0$	$E_2^1$	$E_2^2$
$s_2^* < \lambda_2^1$	I	$\nexists$	$\nexists$	S	$\nexists$	$\nexists$
$s_{2in} < \lambda_2^1 < s_2^* < \lambda_2^2$	I	$\nexists$	$\nexists$	I	S	$\nexists$
$s_{2in} < \lambda_2^1 < \lambda_2^2 < s_{2in}^*$	I	$\nexists$	$\nexists$	$\nexists$	S	I
$\lambda_2^1 < s_{2in} < \lambda_{2in}^* < \lambda_2^2$	I	I	$\nexists$	I	S	$\nexists$
$\lambda_2^1 < s_{2in} < \lambda_2^2 < s_2^*$	I	I	$\nexists$	S	S	I
$\lambda_2^1 < \lambda_2^2 < s_{2in}$	I	I	I	S	S	I

TABLE 1.2 – En cas de non lessivage de  $x_1$

Ces tableaux mettent en évidence des zones d'existence et de stabilité des équilibres grâce aux quels nous pouvons établir un guide opératoire, d'ailleurs c'est la base de la solution analytique du diagramme opératoire que nous allons voir après la simulation autour des points d'équilibre.

### 1.3 Résultats de simulation autour d'un point d'équilibre

La définition des paramètres du modèle AM2, leurs valeurs et les conditions initiales sont données dans les tableaux (1.3) et (1.4) [2].

Pour faire une simulations autour d'un point d'équilibre, on fixe la valeur de  $D$ . Nous avons vu que les conditions de stabilité dépendent des valeurs des entrées  $D, s_{1in}$  et  $s_{2in}$ . En réalité, la plus part du temps nous n'avons pas la capacité d'opérer sur  $s_{1in}$  et  $s_{2in}$  car elles dépendent de l'environnement extérieur et pour la manipuler il faudrait faire une toute autre installation de dilution avant de la faire entrer dans le bioréacteur. Nous allons donc fixer une seule valeur de l'entrée  $s_{1in} = constante$  et  $s_{2in}$  pour toutes les simulations, et nous simulons notre système autour de deux points d'équilibres avec différentes valeurs de  $D$  pour chaque simulation en prenant toujours  $D = constante$ .

Paramètres	Valeurs	Unités
$k_1$	6.6	$KgCOD/Kgx_1$
$k_2$	7.8	$molVFA/Kgx_1$
$k_3$	611.2	$molVFA/Kgx_2$
$s_{1in}$	15	$Kg/m^3$
$s_{2in}$	80	$mol/m^3$
$\mu_{1max}$	1.2	$jour^{-1}$
$\mu_{2max}$	0.69	$jour^{-1}$
$K_1$	4.95	$KgCOD/m^3$
$K_2$	9.28	$molVFA/m^3$
$K_i$	400	$(molVFA/m^3)$

TABLE 1.3 – Paramètres du modèle AM2

	$s_1(0)$	$x_1(0)$	$s_2(0)$	$x_2(0)$
Valeurs	3	0.5	15	0.12
Unités	$Kg/m^3$	$Kg/m^3$	$mol/m^3$	$Kg/m^3$

TABLE 1.4 – Les conditions initiales du modèle AM2

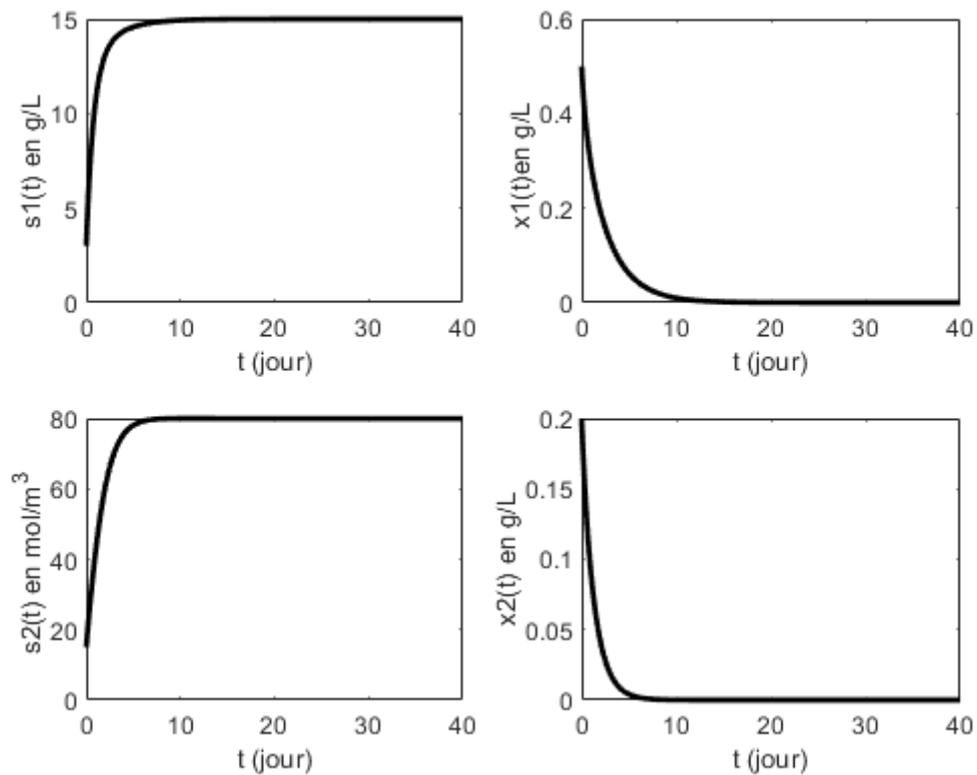


FIGURE 1.4 – Le modèle AM2 dans le cas de lessivage de  $x_1$  et  $x_2$  pour  $D=1.3$

On remarque qu'on a un lessivage des concentrations des bactéries  $x_1$  et  $x_2$ , car  $D > \mu_{1max}$  et  $D > \mu_2^M$  et donc naturellement en absence des bactéries,  $s_1$  et  $s_2$  se stabilise respectivement en  $s_{1in}$  et  $s_{2in}$ , le point d'équilibre  $E_1^0$ .

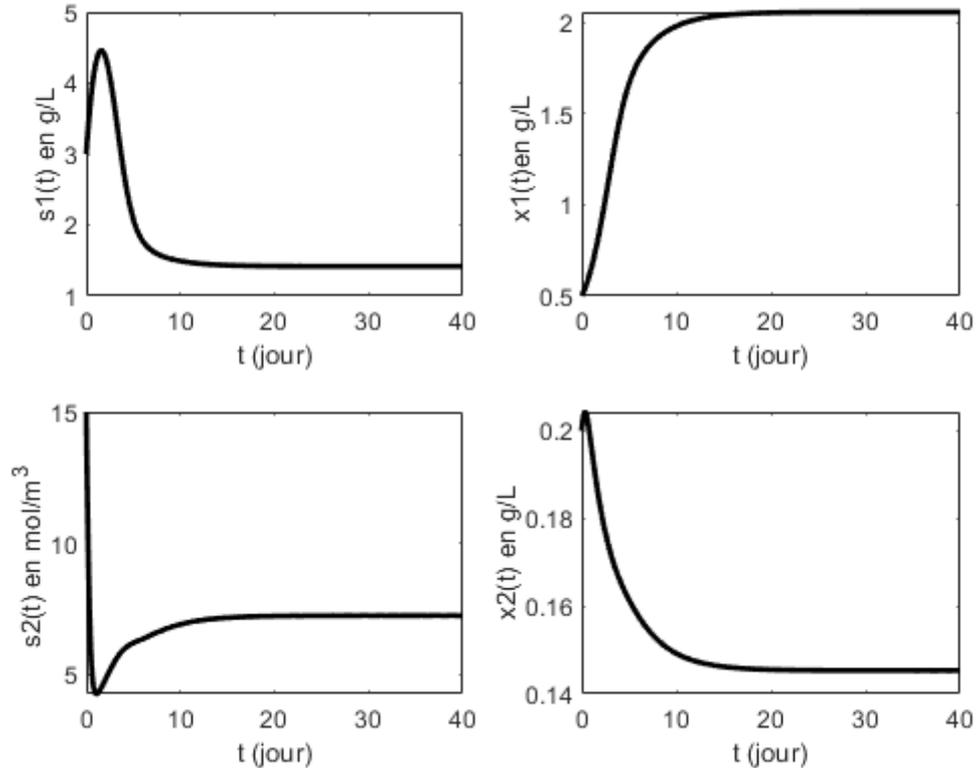


FIGURE 1.5 – Le modèle AM2 dans le cas de non lessivage de  $x_1$  et  $x_2$  pour  $D=0.3$

On remarque ici qu'on n'a pas de lessivage, car  $D < \mu_{1max}$  et  $D < \mu_2^M$ , le système est au point d'équilibre  $E_2^1$  avec  $\lambda_1 = 1.7$ ,  $\lambda_2^1 = 7.2$  et  $\lambda_2^2 = 512.9$ . Après calcul, on a  $s_2^* = 95.71$ . Donc  $s_{1in} > \lambda_1$  et  $\lambda_2^1 < s_2^* < \lambda_2^2$ , on peut calculer  $x_1^* = 2.015$  et  $x_2^* = 0.14$  ce qui correspond à notre simulation.

## 1.4 Diagramme opératoire

Cette dernière partie du chapitre sera dédiée à la découverte et l'application d'un outil de processus opératoire qui est **le diagramme opératoire**.

Le diagramme opératoire nous permet de visualiser graphiquement les zones d'existence et de stabilité des points d'équilibres d'un système. C'est un outil qui se répond de plus en plus surtout dans l'étude de digestion anaérobie où il a déjà fait ses preuves dans son application au modèle du chemostat.

L'application au modèle du chemostat a été un succès puisque les entrées sont au nombre de deux. La visualisation des zones peut donc facilement se faire dans un repère orthonormé de  $D$  en fonction de  $s_{in}$ . Notre modèle en revanche possède trois entrées :  $D$ ,  $s_{1in}$  et  $s_{2in}$ .

Un bon moyen de représenter les zones serait de le faire dans un repère à 3 dimensions [7] ou bien de supposer une entrée commune  $s_{in}$  et mettre une proportion  $s_{1in} = \alpha s_{in}$ ,  $s_{2in} = (1 - \alpha)s_{in}$ . C'est cette deuxième solution que nous allons poser avec  $\alpha = 0.18$ .

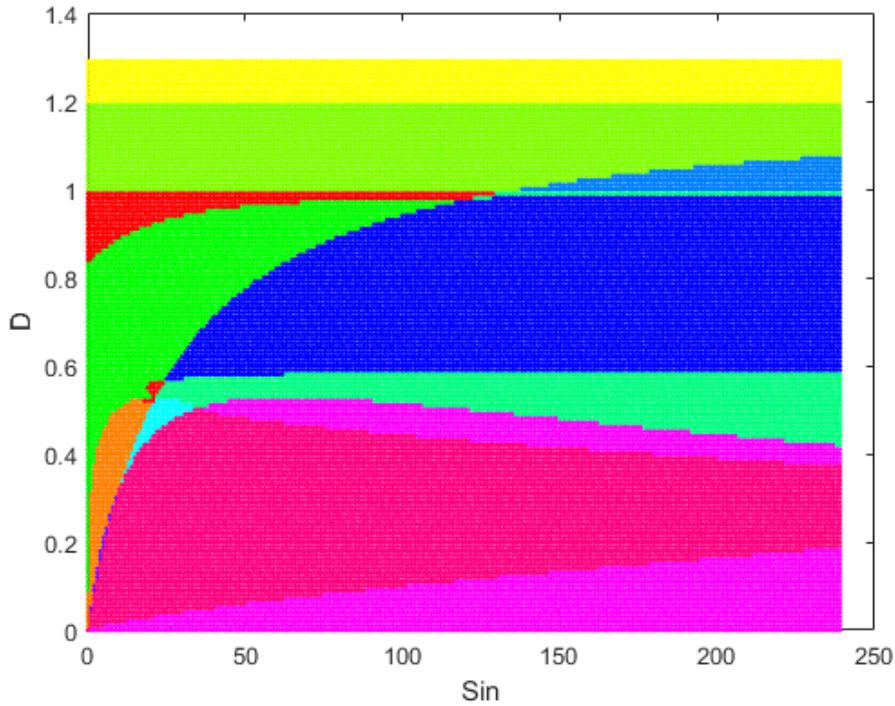


FIGURE 1.6 – Diagramme opératoire du modèle AM2

Couleurs	J	$E_1^0$	$E_2^0$	$E_1^1$	$E_1^2$	$E_2^1$	$E_2^2$
	$J_1$	S	∅	S	S	∅	∅
	$J_2$	S	∅	S	∅	∅	∅
	$J_3$	S	∅	∅	S	∅	S
	$J_4$	S	∅	∅	S	∅	∅
	$J_5$	S	∅	∅	∅	∅	∅
	$J_6$	I	S	∅	∅	S	S
	$J_7$	I	S	∅	∅	S	∅
	$J_8$	I	S	∅	∅	∅	S
	$J_9$	I	S	∅	∅	∅	∅
	$J_{10}$	I	∅	S	∅	∅	∅
	$J_{11}$	I	∅	∅	∅	S	S
	$J_{12}$	I	∅	∅	∅	S	∅

TABLE 1.5 – Les régions du diagramme opératoire du modèle AM2

Avec le tableau ci-dessus nous pouvons identifier les différentes zones du diagramme opératoire.

Dans les sections suivantes nous allons parler de la positivité et bornitude supérieure des variables d'états [2].

## 1.5 Positivité des variables d'états

On doit prouver la positivité des variables d'états car notre système réel ne peut pas admettre des valeurs de concentrations négatives.

### 1.5.1 Positivité de l'état $s_1$

Pour prouver la positivité de l'état  $s_1$ , nous allons essayer de trouver un contre exemple  $s_1(t^*) < 0$ , si nous arrivons à prouver que ce  $s_1(t^*)$  ne peut pas exister alors on a toujours  $s_1(t) \geq 0$ .

Nous pouvons poser  $s_1(0) \geq 0$  car les conditions initiales doivent obligatoirement obéir aux contraintes réelles du phénomène.

$s_1(t)$  est une fonction continue, ce qui implique que pour arriver à  $s_1(t^*)$  il faut obligatoirement passer par  $s_1(t_1) = 0$ , avec  $t_1 > 0$ , tel que  $\dot{s}_1(t_1) < 0$ .

Or qu'en remplaçant  $s_1(t_1) = 0$  dans l'équation d'état  $\dot{s}_1(t)$  nous obtenons :

$$\dot{s}_1(t_1) = D(t)s_{1in} \geq 0$$

$t_1$  ne peut donc pas exister, ce qui implique que  $t^*$  ne peut pas exister. Donc, pour  $s_1(0) \geq 0$  on a  $s_1(t) \geq 0$

### 1.5.2 Positivité de l'état $x_1$

L'équation différentielle qui définit la concentration de la biomasse est :

$$\dot{x}_1(t) = [\mu_1(s_1) - D(t)]x_1(t)$$

La résolution de cette équation est :

$$x_1(t) = e^{\int_0^t (\mu_1(s_1(\tau)) - D(\tau)) d\tau} x_1(0)$$

Pour  $x_1(0) > 0$  on a  $x_1(t) \geq 0$

### 1.5.3 Positivité de l'état $s_2$

Pour prouver la positivité de l'état  $s_2$ , nous allons essayer de trouver un contre exemple  $s_2(t^*) < 0$ , si nous arrivons à prouver que ce  $s_2(t^*)$  ne peut pas exister alors on a toujours  $s_2(t) \geq 0$ .

Nous pouvons poser  $s_2 \geq 0$  car les conditions initiales doivent obligatoirement obéir aux contraintes réelles du phénomène.

$s_2(t)$  est une fonction continue, ce qui implique que pour arriver à  $s_2(t^*)$  il faut obligatoirement passer par  $s_2(t_1) = 0$ , avec  $t_1 > 0$ , tel que  $\dot{s}_2(t_1) < 0$ .

Or qu'en remplaçant  $s_1(t_1) = 0$  dans l'équation d'état  $\dot{s}_2(t)$  nous obtenons :

$$\dot{s}_2(t_1) = D(t)s_{2in} + k_2\mu_1(s_1)x_1 \geq 0$$

$t_1$  ne peut donc pas exister, ce qui implique que  $t^*$  ne peut pas exister.

Pour  $s_2(0) \geq 0$  on a  $s_2(t) \geq 0$

### 1.5.4 Positivité de l'état $x_2$

L'équation différentielle qui définit la concentration de la biomasse  $x_2$  est :

$$\dot{x}_2(t) = [\mu_2(s_2) - D(t)]x_2(t)$$

La résolution de cette équation est :

$$x_2(t) = e^{\int_0^t (\mu_2(s_2(\tau)) - D(\tau)) d\tau} x_2(0)$$

Pour  $x_2(0) > 0$  on a  $x_2(t) \geq 0$

## 1.6 Bornitude supérieure des variables d'état

En plus d'être positives, les valeurs de ces variables d'état doivent respecter des bornes de logique biologique. Par exemple il est évident que la valeur de  $s_1(t)$  ne peut jamais dépasser  $s_{1in}$ . Dans cette partie nous allons prouver ceci mathématiquement, nous allons aussi prouver la bornitude des autres variables d'état et utiliser leurs bornes dans le chapitre suivant.

### 1.6.1 La variable d'état $s_1$

$$\dot{s}_1(t) = D(t)[s_{1in} - s_1(t)] - k_1\mu_1(s_1)x_1(t)$$

Étant donné que la quantité  $k_1\mu_1(s_1)x_1$  est positive, alors

$$\dot{s}_1(t) \leq D(t)[s_{1in} - s_1(t)]$$

par suite

$$\dot{s}_1 + D(t)s_1 \leq D(t)s_{1in}$$

On obtient en multipliant les deux membres de l'inégalité par  $e^{\int_0^t D(\tau)d\tau}$  et en les intégrant entre 0 et t

$$s_1 e^{\int_0^t D(\tau)d\tau} \leq s_1(0) + s_{1in} \int_0^t D(\tau) e^{\int_0^\tau D(\epsilon)d\epsilon} d\tau$$

ainsi

$$s_1 e^{\int_0^t D(\tau)d\tau} \leq s_1(0) + s_{1in} [e^{\int_0^t D(\tau)d\tau} - 1]$$

Multiplions les deux côtés par  $e^{-\int_0^t D(\tau)d\tau}$  :

$$\dot{s}_1(t) e^{\int_0^t D(\tau)d\tau} + D(t)s_1(t) e^{\int_0^t D(\tau)d\tau} \leq D(t)s_{1in} e^{\int_0^t D(\tau)d\tau}$$

Une expression de dérivé contenant  $s(t)$  est apparue, nous pouvons désormais intégrer les deux côtés entre 0 et t :

$$s_1(t) e^{\int_0^t D(\tau)d\tau} - s_1(0) = s_{1in} e^{\int_0^t D(\tau)d\tau} - s_{1in} e^0$$

Nous multiplions ensuite par  $e^{-\int_0^t D(\tau)d\tau}$  pour déduire l'expression de  $s_1(t)$  :

$$s_1 \leq s_1(0) e^{-\int_0^t D(\tau)d\tau} + s_{1in} [1 - e^{-\int_0^t D(\tau)d\tau}]$$

Ce qui peut s'écrire

$$s_1 \leq (s_1(0) - s_{1in})e^{-\int_0^t D(\tau)d\tau} + s_{1in}$$

Par conséquent

$$s_1 \leq s_{1in}$$

Où l'on a supposé  $s_1(0) \leq s_{1in}$  d'où  $(s_1(0) - s_{1in})e^{-\int_0^t D(\tau)d\tau} < 0$

## 1.6.2 La variable d'état $x_1$

Pour prouver la bornitude supérieure de  $x_1(t)$  nous allons poser une variable définie comme suit :

$$\xi_1(t) = s_1(t) + k_1 x_1(t)$$

Calculons sa dynamique :

$$\dot{\xi}_1(t) = \dot{s}_1(t) + k_1 \dot{x}_1(t)$$

Nous remplaçons  $\dot{s}_1(t)$  et  $\dot{x}_1(t)$  par leurs expressions dans la représentation d'état :

$$\dot{\xi}_1(t) = D(t)s_{1in} - D(t)\xi_1(t)$$

Nous avons obtenu une équation différentielle que nous allons résoudre en multipliant les deux côtés de l'égalité par  $e^{\int_0^t D(\tau)d\tau}$  :

$$\dot{\xi}_1(t)e^{\int_0^t D(\tau)d\tau} + D(t)\xi_1(t)e^{\int_0^t D(\tau)d\tau} = D(t)s_{1in}e^{\int_0^t D(\tau)d\tau}$$

Une expression de dérivé contenant  $\xi_1(t)$  est apparue, nous pouvons désormais intégrer les deux côtés entre 0 et  $t$  :

$$\xi_1(t)e^{\int_0^t D(\tau)d\tau} - \xi_1(0) = s_{1in}e^{\int_0^t D(\tau)d\tau} - s_{1in}e^0$$

Nous multiplions ensuite par  $e^{-\int_0^t D(\tau)d\tau}$  pour déduire l'expression de  $\xi_1(t)$  :

$$\xi_1(t) = \xi_1(0)e^{-\int_0^t D(\tau)d\tau} + s_{1in} \left[ 1 - e^{-\int_0^t D(\tau)d\tau} \right]$$

$D(\tau)$  est positive donc  $e^{-\int_0^t D(\tau)d\tau} < 1$  et  $1 - e^{-\int_0^t D(\tau)d\tau} < 1$ . Nous en déduisons l'inégalité :

$$\xi_1(t) \leq \xi_1(0) + s_{1in}$$

Remplaçons  $\xi_1(t)$  et  $\xi_1(0)$  par leurs expressions :

$$s_1(t) + k_1 x_1(t) \leq s_1(0) + k_1 x_1(0) + s_{1in}$$

Puisque  $s_1(t) > 0$  :

$$k_1 x_1(t) \leq s_1(0) + k_1 x_1(0) + s_{1in}$$

Et puisque  $s_1(t) < s_{1in}$  alors  $s_1(0) < s_{1in}$  implique que  $s_1(0) + s_{1in} < 2s_{1in}$ , donc :

$$x_1(t) \leq \frac{2}{k_1} s_{1in} + x_1(0)$$

### 1.6.3 La variable d'état $s_2$

Posons

$$\xi_2 = s_2 - k_2 x_1$$

La dérivé s'écrit :

$$\dot{\xi}_2 = D(t)s_{2in} - D(t)\xi_2 - k_3\mu_2(s_2)x_2$$

sachant  $k_3\mu_2(s_2)x_2 \geq 0$ , alors :

$$\dot{\xi}_2 \leq D(t)(s_{2in} - \xi_2)$$

Ainsi on trouve en multipliant les deux membres de l'inégalité par  $e^{\int_0^t D(\tau)d\tau}$

$$\dot{\xi}_2 e^{\int_0^t D(\tau)d\tau} + D(t)\xi_2 e^{\int_0^t D(\tau)d\tau} \leq D(t)s_{2in} e^{\int_0^t D(\tau)d\tau}$$

Et en intégrant entre 0 et t :

$$\xi_2 e^{\int_0^t D(\tau)d\tau} \leq \xi_2(0) + s_{2in}[e^{\int_0^t D(\tau)d\tau} - 1]$$

En multipliant les deux membres par  $e^{-\int_0^t D(\tau)d\tau}$ , on trouve :

$$\xi_2 \leq \xi_2(0)e^{-\int_0^t D(\tau)d\tau} + s_{2in}[1 - e^{-\int_0^t D(\tau)d\tau}]$$

Comme  $e^{-\int_0^t D(\tau)d\tau} < 1$  et  $1 - e^{-\int_0^t D(\tau)d\tau} < 1$  car  $D(\tau) \geq 0$ , donc :

$$\xi_2 \leq \xi_2(0) + s_{2in}$$

En remplaçant l'expression de  $\xi_2$ , on obtient :

$$s_2 - k_2 x_1 \leq s_2(0) - k_2 x_1(0) + s_{2in}$$

alors

$$s_2 \leq 2s_{2in} + \frac{2k_2}{k_1} s_{1in}$$

car  $s_2(0) \leq s_{2in}$ .

### 1.6.4 La variable d'état $x_2$

Posons :

$$\xi_3 = s_2 - k_2 x_1 + k_3 x_2$$

La dérivé de  $\xi_3$  s'écrit :

$$\dot{\xi}_3 = D(t)s_{2in} - D(t)\xi_3$$

ainsi

$$\dot{\xi}_3 + D(t)\xi_3 = D(t)s_{2in}$$

En multipliant les deux membres par  $e^{\int_0^t D(\tau)d\tau}$  et en intégrant entre 0 et t :

$$\xi_3 e^{\int_0^t D(\tau)d\tau} \leq \xi_3(0) + s_{2in}[e^{\int_0^t D(\tau)d\tau} - 1]$$

En multipliant les deux membres par  $e^{-\int_0^t D(\tau)d\tau}$ , on trouve :

$$\xi_3 \leq \xi_3(0)e^{-\int_0^t D(\tau)d\tau} + s_{2in}[1 - e^{-\int_0^t D(\tau)d\tau}]$$

Comme  $e^{-\int_0^t D(\tau)d\tau} < 1$  et  $1 - e^{-\int_0^t D(\tau)d\tau} < 1$  car  $D(\tau) \geq 0$ , donc :

$$\xi_3 \leq \xi_3(0) + s_{2in}$$

En remplaçant l'expression de  $\xi_3$ , on obtient :

$$s_2 - k_2x_1 + k_3x_2 \leq s_2(0) - k_2x_1(0) + k_3x_2(0) + s_{2in}$$

puisque  $s_2 > 0$ , alors :

$$x_2 \leq x_2(0) + \frac{2}{k_3} \left( s_{2in} + \frac{k_2}{k_1} s_{1in} \right)$$

## Chapitre 2

# Synthèse d'observateur invariant pour le modèle du AM2

Après avoir établi le modèle, nous avons directement étudié ses points d'équilibre et leurs stabilités par bon sens de la théorie des systèmes. Le bon sens mathématique nous pousse plus loin, en cherchant les caractéristiques de ce modèle. Des recherches ont montré que tout comme le modèle du chemostat, le modèle AM2 est un modèle invariant [2]. Cette caractéristique permet d'explorer un type d'observateur appelé *observateur invariant* que nous allons développer dans ce paragraphe.

Mais avant de synthétiser un observateur pour un système quelconque, il est primordiale de s'assurer que ce système est observable, nous allons donc entamer le chapitre par des généralités sur les systèmes invariants et le critère d'observabilité d'un système non linéaire que nous allons par la suite l'appliquer sur le modèle AM2. Par ailleurs, nous allons prouver que notre système est en effet invariant par homothétie, ce après quoi nous enchaînons les définitions des entités mathématiques invariantes qui composent l'observateur invariant pour pouvoir construire un pré-observateur. Nous pourrons à la fin présenter le théorème qui définit un observateur invariant pour le modèle AM2 après avoir prouvé que le pré-observateur est convergent et faire des simulations pour visualiser les performances de notre observateur.

### 2.1 Systèmes invariants

L'invariance est une notion relative, par exemple nous avons longtemps traité durant notre cursus les systèmes linéaires invariants dans le temps (*SLIT*).

L'invariance qui nous intéresse dans la synthèse d'observateur invariant pour le modèle du AM2 est l'invariance sous l'action d'un groupe<sup>1</sup>.

Pour bien assimiler la forme générale d'un pré-observateur invariant, commençons par définir les entités mathématiques qui le composent, et qui sont : un système invariant, une fonction scalaire invariante et un champs de vecteurs invariant. (*nous allons voir dans la section qui suit pourquoi nous avons choisi ces entités en particulier*).

---

1. L'action de groupe sur un ensemble veut dire que le groupe est munit d'une loi de composition lui permettant d'opérer sur un ensemble

Pour que ces entités soient définies, elles font appel à leurs tours à un groupe de transformation que nous notons  $G$ , avec les caractéristiques suivantes :  
 Considérons la forme générale d'un système non linéaire

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, u) & (2.1.1a) \\ y = h(x, u) & (2.1.1b) \end{cases}$$

avec  $x \in X \subset \mathbb{R}^n$ ,  $u \in U \subset \mathbb{R}^m$  et  $y \in Y \subset \mathbb{R}^p$   
 $G$  est un groupe de Lie de transformation tel que :

$G$  agit sur  $X$  par  $\varphi_g : X \rightarrow X$

$G$  agit sur  $U$  par  $\psi_g : U \rightarrow U$

$G$  agit sur  $Y$  par  $\rho_g : Y \rightarrow Y$ ,  $\forall g \in G$  avec  $\varphi_g$ ,  $\psi_g$  et  $\rho_g$  des difféomorphismes<sup>2</sup> (de classe au moins  $C^1$ ) sur  $X$ ,  $U$  et  $Y$  respectivement, ayant les propriétés suivantes :

$$(\varphi_g)^{-1} = \varphi_{g^{-1}}$$

$$\varphi_{g_1} \circ \varphi_{g_2} = \varphi_{g_1 \cdot g_2}$$

**Définition 1**  $G$  est un groupe de symétries de (2.1.1a) si, pour chaque solution  $(x(t), u(t))$  de (2.1.1a) et  $\forall g \in G$ ,  $(\varphi_g(x(t)), \psi_g(u(t)))$  est aussi une solution.

Nous pouvons maintenant définir qu'est-ce qu'un : système invariant, une fonction scalaire invariante et un champs de vecteurs invariant.

### Système invariant

Le système (2.1.1a) est dit invariant si

$$f(\varphi_g(x), \psi_g(u)) = D_{\varphi_g} f(x, u)$$

Où  $D_{\varphi_g}$  est la matrice jacobienne de  $\varphi_g(x)$

### Fonction scalaire invariante

Une fonction scalaire  $J$  est dite invariante si et seulement si

$$J(\varphi_g(x), \psi_g(u), \rho_g(y)) = J(x, u, y)$$

### Champ de vecteurs invariant

Un champ de vecteurs est dit invariant si et seulement si

$$w(\varphi_g(x)) = D_{\varphi_g} w(x)$$

---

2. Si  $U$  et  $V$  sont deux ouverts de  $\mathbb{R}^n$ , et  $f$  une fonction de  $U$  dans  $V$ , on dit que  $f$  est un  $C^K$ -difféomorphisme si  $f$  est bijective et si  $f$  et  $f^{-1}$  sont de classe  $C^K$

## 2.2 Forme générale d'un pré-observateur invariant

Après avoir défini les systèmes invariants il faut mettre en évidence l'intérêt de ces derniers dans la synthèse d'observateur.

Nous avons mentionné dans ce chapitre que l'intérêt pour les systèmes invariants été dû à l'invariance du modèle AM2. Sachant que le but d'un observateur est de donner la meilleure estimation des états inconnus, il serait très intéressant qu'il ait les mêmes caractéristiques du modèle.

Nous avons vu dans l'état de l'art que beaucoup d'observateurs s'écrivent en deux parties : une copie du modèle et un terme correctif. Le modèle étant déjà invariant, il faudrait que le terme correctif soit invariant.

Le terme correctif est généralement une expression d'erreur que nous essayons de faire tendre vers 0, pondérée par un gain pour régler la vitesse de convergence.

Notons le pré-observateur  $\hat{\mathcal{F}}$  tel que

$$\hat{\mathcal{F}}(\hat{x}, y) = f(\hat{x}, y) + f_{correction} \quad (2.2.1)$$

Nous savons que  $f(\varphi_g(x), \psi_g(u)) = D_{\varphi_g} f(x, u)$  et nous voulons que  $\hat{\mathcal{F}}(\varphi_g(x), \psi_g(u)) = D_{\varphi_g} \hat{\mathcal{F}}(x, u)$  il faut donc que  $f_{correction}(\varphi_g(x), \psi_g(u)) = D_{\varphi_g} f_{correction}(x, u)$

Pour obtenir cette forme et sachant que nous devons la former à partir d'une expression d'erreur pondérée par un gain, nous posons l'expression d'erreur une fonction scalaire invariante pondérée par un champs de vecteurs invariant

$$\begin{aligned} f_{correction}(\varphi_g(x), \psi_g(u)) &= J(\varphi_g(x), \psi_g(u), \rho_g(y)) \cdot w(\varphi(x)) \\ &= J(x, u, y) \cdot D_{\varphi_g} w(x) \\ &= D_{\varphi_g} f_{correction}(x, u) \end{aligned} \quad (2.2.2)$$

nous obtenons donc la forme du pré-observateur

$$\hat{\mathcal{F}} = f + wJ \quad (2.2.3)$$

où :

- $w$  est le champ de vecteurs.
- $J$  est la fonction scalaire.

Donc, le système dynamique

$$\frac{d}{dt} \hat{x} = f(\hat{x}) + \sum_i J_i(\hat{x}, y) w_i(\hat{x}) \quad (2.2.4)$$

est un pré-observateur pour le système (2.1.1a)-(2.1.1b) [10] si nous choisissons  $J_i$  une fonction scalaire invariante satisfaisant  $J_i(\hat{x}, h(\hat{x}, u)) = 0$  et  $w_i$  un champs de vecteurs invariant.

## 2.3 Application au modèle AM2

### 2.3.1 Observabilité

La notion d'observabilité est l'une des premières notions apprises en théorie des systèmes linéaires. Pour les systèmes non linéaires le principe reste le même mais le calcul se fait différemment.

Le principe d'observabilité est le suivant : pour qu'un état soit observable, il faut qu'on soit capables de reconstruire l'état de manière unique à partir d'une sortie mesurée.

Pour les systèmes non linéaires un état est observable si pour toute entrée, on est capable de reconstruire l'état (initial) de manière unique à partir d'une sortie mesurée. Mathématiquement, cela veut dire que  $x_0 \rightarrow y(t)|_{t \geq t_0}$  est une application injective<sup>3</sup> [8].

Le plus par rapport aux systèmes linéaires est que l'observabilité dans les systèmes non linéaires dépend de l'entrée du système, certains systèmes seront donc observables pour certaines entrées mais pas pour d'autres, ce qui complique énormément le problème d'observation [8].

Nous allons maintenant citer quelques définitions qui nous permettront de mieux comprendre l'observabilité afin de vérifier mathématiquement l'observabilité d'un système non linéaire [11]. Pour cela, nous considérons la forme générale d'un système non linéaire suivante :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, u) \\ y = h(x, u) \end{cases} \quad (2.3.1)$$

**Définition 2 (Indistingabilité (Indiscernabilité))** Soient  $y_u^0(t)$  et  $y_u^1(t)$ , ( $t \geq 0$ ) deux signaux de sortie générés par l'application du signal d'entrée  $u(t)$ ,  $t \geq 0$  au système (2.3.1) avec les conditions initiales  $x^0$  et  $x^1$ , respectivement. On dit que  $x^0$  et  $x^1$  sont indistingables si  $y_u^0(t) = y_u^1(t)$ ,  $\forall t \geq 0$  pour toute entrée  $u$ . Dans le cas contraire, on dit que  $x^0$  et  $x^1$  sont distinguables.

**Définition 3 (Observabilité)** Le système (2.3.1) est dit observable en  $x^0$ , si  $x^0$  est distinguable de tout  $x \in \mathbb{R}^n$ . En outre, le système (2.3.1) est observable si  $\forall x^0 \in \mathbb{R}^n$ , le système (2.3.1) est observable en  $x^0$ .

#### Espace d'observation

L'espace d'observation est défini comme suit

$$O(h) = \begin{bmatrix} h \\ L_f h \\ \vdots \\ L_f^{n-1} h \end{bmatrix}$$

tel que  $n$  est le nombre d'états du système et les  $L_f h$  sont les crochets de Lie

$$L_f h = \sum_{i=1}^n f_i(x) \frac{\partial h}{\partial x_i}$$

---

3. Une application  $f$  est injective si tout élément de son ensemble d'arrivée a au plus un antécédent par  $f$ .

où  $f_i(x)$  est la fonction qui représente la cinétique de l' $i^{me}$  état.

### Observabilité au sens du rang

Généralement, lors de l'étude d'observabilité d'un système réel non linéaire on utilise le critère de rang qui dit qu'un système est observable si le rang de la dérivé de l'espace d'état est complet. C'est-à-dire :

$$\text{rang} \begin{pmatrix} dh \\ dL_f h \\ \vdots \\ dL_f^{n-1} h \end{pmatrix} = n$$

avec

$$dL_f^k h = \left( \frac{\partial L_f^k h}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial L_f^k h}{\partial x_n} \right)$$

### Observabilité forte

**Définition 4** La composante de l'état  $x_i$  (respectivement de l'entrée  $u_j$ ) du système linéaire structuré  $\sum_{\Lambda}$  est génériquement fortement observable lorsque pour tout état initial  $x_0$  et pour tout signal d'entrée  $u(t)$ , l'égalité  $y(t) = 0, \forall t \geq 0$  implique  $x_i(t) = 0, \forall t \geq 0$  (respectivement  $u_j(t) = 0, \forall t > 0$ ) [12] et [13].

Cela revient à dire qu'un état est fortement observable si on arrive à l'exprimer seulement en fonction des mesures et de leurs dérivées [14].

**Remarque 1** Il est important de noter qu'un état observable ne signifie pas nécessairement que l'on est capable de lui synthétiser un observateur [8].

On peut vérifier l'observabilité de ce modèle en utilisant la définition cité dans [9]. Nous avons la sortie :

$$y = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix}$$

$$\dot{y} = \begin{pmatrix} D(t)(s_{1in} - s_1) - \frac{k_1 \mu_{1max} s_1 x_1}{s_1 + K_1} \\ D(t)(s_{2in} - s_2) + \frac{k_2 \mu_{1max} s_1 x_1}{s_1 + K_1} - \frac{k_3 \mu_{2max} s_2 x_2}{s_2 + K_2 + \left(\frac{s_2^2}{K_i}\right)} \end{pmatrix}$$

ainsi

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{s_1 + K_1}{k_1 \mu_{1max} s_1} [D(t)(s_{1in} - s_1) - \dot{s}_1] \\ \frac{s_2 + K_2 + \left(\frac{s_2^2}{K_i}\right)}{k_3 \mu_{2max} s_2} \left[ D(t)(s_{2in} - s_2) + \frac{k_2}{k_1} (D(t)(s_{1in} - s_1) - \dot{s}_1) - \dot{s}_2 \right] \end{pmatrix}$$

Donc, à partir de  $y$  et sa dérivée, nous avons pu déduire les deux variables non mesurées  $x_1$  et  $x_2$ , ce qui implique que le modèle est algébriquement observable.

**Remarque 2** Nous remarquons que lorsqu'un état est fortement observable nous pouvons déduire son estimation seulement en dérivant les mesures, ceci dit le résultat est très souvent médiocre.

### 2.3.2 Invariance du modèle AM2

Lorsque nous avons établi la forme générale du pré-observateur invariant nous avons supposé que le modèle sur lequel nous l'appliquions était invariant. maintenant que nous l'appliquons sur le modèle AM2 il nous faut prouver son invariance.

Pour prouver l'invariance d'un modèle il faut trouver mathématiquement le groupe de transformation agissant sur l'ensemble. Cependant, nombreuses preuves ont été établi après avoir remarqué que leurs résultats étaient vérifiés et cela peut s'appliquer sur le modèle AM2.

Dans ce qui suit nous allons établir une conjecture<sup>4</sup> qui nous permettra de prendre en considération des paramètres du modèle comme entrées virtuelles pour trouver le groupe de transformation assurant l'invariance du modèle AM2.

**Conjecture 1** Supposons que ce système est invariant par homothétie, tel que :

$$\begin{cases} s_1 \longrightarrow \lambda_1 s_1 \\ x_1 \longrightarrow \lambda_2 x_1 \\ s_2 \longrightarrow \lambda_3 s_2 \\ x_2 \longrightarrow \lambda_4 x_2 \end{cases}$$

où  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$  sont les rapports de transformation par homothétie.

Il nous faut l'invariance de  $\dot{s}_1 = f_{s1}, \dot{x}_1 = f_{x1}, \dot{s}_2 = f_{s2}, \dot{x}_2 = f_{x2}$  ainsi que de  $\mu_1(s_1)$  et  $\mu_2(s_2)$  :

Commençons par l'invariance de  $\mu_1(s_1)$  et  $\mu_2(s_2)$  pour pouvoir ensuite l'utiliser pour prouver l'invariance de  $\dot{s}_1, \dot{x}_1, \dot{s}_2$  et  $\dot{x}_2$  :

$$\begin{cases} \mu_1(s_1) = \mu_{1max} \frac{s_1}{s_1 + K_1} \\ \mu_2(s_2) = \mu_{2,max} \frac{s_2}{\frac{s_2^2}{K_i} + s_2 + K_2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mu_1(\lambda_1 s_1) = \mu_{1max} \frac{\lambda_1 s_1}{\lambda_1 s_1 + K_1} \\ \mu_2(\lambda_3 s_2) = \mu_{2max} \frac{\lambda_3 s_2}{\frac{\lambda_3^2 s_2^2}{K_i} + \lambda_3 s_2 + K_2} \end{cases}$$

Nous remarquons que ces équations ne peuvent être invariantes que pour des valeurs bien précises de  $\lambda_1$  et  $\lambda_3$ , nous considérons alors  $K_1, K_2$  et  $K_i$  comme entrées virtuelles pour pouvoir la pondérer par un rapport  $\lambda_a, \lambda_b, \lambda_c$  que nous cherchons à déterminer :

4. Une conjecture est une prévision et une prospective fondée sur des apparences.

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu_1(\lambda_1 s, \lambda_a K) = \mu_{1max} \frac{\lambda_1 s}{\lambda_1 s + \lambda_a K} \\ \mu_2(\lambda_3 s_2, \lambda_b K_2, \lambda_c K_i) = \mu_{2max} \frac{\lambda_3 s_2}{\frac{\lambda_3^2 s_2^2}{\lambda_c K_i} + \lambda_3 s_2 + \lambda_b K_2} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu_1(\lambda_1 s, \lambda_1 K_1) = \mu_{max} \frac{\lambda_1 s}{\lambda_1 s + \lambda_1 K} = \mu_1(s, K_1) \\ \mu_2(\lambda_3 s_2, \lambda_3 K_2, \lambda_3 K_i) = \mu_{2max} \frac{\lambda_3 s_2}{\frac{\lambda_3^2 s_2^2}{\lambda_3 K_i} + \lambda_3 s_2 + \lambda_3 K_2} = \mu_2(s_2, K_2) \end{array} \right.$$

Passons maintenant à l'invariance de  $\dot{s}_1$ ,  $\dot{x}_1$ ,  $\dot{s}_2$  et  $\dot{x}_2$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{s}_1(t) = D(t)(s_{1in} - s_1) - k_1 \mu_1(s_1) x_1 \\ \dot{x}_1(t) = [\mu_1(s_1) - D(t)] x_1 \\ \dot{s}_2(t) = D(t)(s_{2in} - s_2) + k_2 \mu_1(s_1) x_1 - k_3 \mu_2(s_2) x_2 \\ \dot{x}_2(t) = [\mu_2(s_2) - D(t)] x_2 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda_1 \dot{s}_1(t) = D(t)(s_{1in} - \lambda_1 s_1) - k_1 \mu_1(s_1) \lambda_2 x_1 \\ \lambda_2 \dot{x}_1(t) = [\mu_1(s_1) - D(t)] \lambda_2 x_1 \\ \lambda_3 \dot{s}_2(t) = D(t)(s_{2in} - \lambda_3 s_2) + k_2 \mu_1(s_1) \lambda_2 x_1 - k_3 \mu_2(s_2) \lambda_4 x_2 \\ \lambda_4 \dot{x}_2(t) = [\mu_2(s_2) - D(t)] \lambda_4 x_2 \end{array} \right.$$

Pareil que pour  $K_1$ ,  $K_2$  et  $K_i$  nous devons considérer  $s_{1in}$ ,  $s_{2in}$ ,  $k_1$ ,  $k_2$  et  $k_3$  comme des entrées virtuelles pour pouvoir les pondérer un rapport  $\lambda_d$ ,  $\lambda_e$ ,  $\lambda_f$ ,  $\lambda_g$ ,  $\lambda_h$  que nous cherchons à déterminer :

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda_1 \dot{s}_1(t) = D(t)(\lambda_d s_{1in} - \lambda_1 s_1) - \lambda_f k_1 \mu_1(s_1) \lambda_2 x_1 \\ \lambda_2 \dot{x}_1(t) = [\mu_1(s_1) - D(t)] \lambda_2 x_1 \\ \lambda_3 \dot{s}_2(t) = D(t)(\lambda_e s_{2in} - \lambda_3 s_2) + \lambda_g k_2 \mu_1(s_1) \lambda_2 x_1 - \lambda_h k_3 \mu_2(s_2) \lambda_4 x_2 \\ \lambda_4 \dot{x}_2(t) = [\mu_2(s_2) - D(t)] \lambda_4 x_2 \end{array} \right.$$

il faut donc que  $\lambda_d = \lambda_1$ ,  $\lambda_e = \lambda_3$ ,  $\lambda_f = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}$ ,  $\lambda_g = \frac{\lambda_3}{\lambda_2}$ ,  $\lambda_h = \frac{\lambda_3}{\lambda_4}$

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda_1 \dot{s}_1(t) = D(t)(\lambda_1 s_{1in} - \lambda_1 s_1) - \frac{\lambda_1}{\lambda_2} k_1 \mu_1(s_1) \lambda_2 x_1 \\ \lambda_2 \dot{x}_1(t) = [\mu_1(s_1) - D(t)] \lambda_2 x_1 \\ \lambda_3 \dot{s}_2(t) = D(t)(\lambda_3 s_{2in} - \lambda_3 s_2) + \frac{\lambda_3}{\lambda_2} k_2 \mu_1(s_1) \lambda_2 x_1 - \frac{\lambda_3}{\lambda_4} k_3 \mu_2(s_2) \lambda_4 x_2 \\ \lambda_4 \dot{x}_2(t) = [\mu_2(s_2) - D(t)] \lambda_4 x_2 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{s}_1(t) \cdot \lambda_1 = [D(t)(s_{1in} - s_1) - k_1 \mu_1(s_1, K_1) x_1] \cdot \lambda_1 \\ \dot{x}_1(t) \cdot \lambda_2 = [[\mu_1(s_1, K_1) - D(t)] x_1] \cdot \lambda_2 \\ \dot{s}_2(t) \cdot \lambda_3 = [D(t)(s_{2in} - s_2) + k_2 \mu_1(s_1, K_1) x_1 - k_3 \mu_2(s_2, K_2) x_2] \cdot \lambda_3 \\ \dot{x}_2(t) \cdot \lambda_4 = [[\mu_2(s_2, K_2) - D(t)] x_2] \end{array} \right.$$

$$X = \begin{pmatrix} \lambda_1 s_1 \\ \lambda_2 x_1 \\ \lambda_3 s_2 \\ \lambda_4 x_2 \end{pmatrix}$$

$$U = \begin{pmatrix} \lambda_1 s_{1in} \\ \lambda_3 s_{2in} \\ \frac{\lambda_1}{\lambda_2} k_1 \\ \frac{\lambda_3}{\lambda_2} k_2 \\ \frac{\lambda_3}{\lambda_4} k_3 \\ \lambda_1 K_1 \\ \lambda_3 K_2 \\ \lambda_3 K_i \end{pmatrix}$$

$$Y = \begin{pmatrix} \lambda_1 s_1 \\ \lambda_3 s_2 \end{pmatrix}$$

Cette conjecture nous a permis de chercher le groupe de transformation agissant sur le vecteur des variables du système en prenant en considération les paramètres  $s_{1in}$ ,  $s_{2in}$ ,  $k_1$ ,  $k_2$ ,  $k_3$ ,  $K_1$ ,  $K_2$  et  $K_i$  comme entrées virtuelle.

Nous aurons alors à chercher une matrice  $A$  tel que

$$\begin{pmatrix} \tilde{s}_1 \\ \tilde{x}_1 \\ \tilde{s}_2 \\ \tilde{x}_2 \\ \tilde{s}_{1in} \\ \tilde{s}_{2in} \\ \tilde{k}_1 \\ \tilde{k}_2 \\ \tilde{k}_3 \\ \tilde{K}_1 \\ \tilde{K}_2 \\ \tilde{K}_i \end{pmatrix} = e^{\nu A} \begin{pmatrix} s_1 \\ x_1 \\ s_2 \\ x_2 \\ s_{1in} \\ s_{2in} \\ k_1 \\ k_2 \\ k_3 \\ K_1 \\ K_2 \\ K_i \end{pmatrix}, \nu \in \mathbb{R} \quad (2.3.2)$$

Après résolution [2] nous obtenons la matrice :

$$A = \text{diag}(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \alpha, \gamma, \alpha - \beta, \gamma - \beta, \gamma - \delta, \alpha, \gamma, \gamma) \quad (2.3.3)$$

où  $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$  quelconques. Donc le plus grand groupe linéaire qui rend le système du modèle AM2 invariant est le groupe des homothéties  $G = (R_+^* \times R_+^* \times R_+^* \times R_+^*, \cdot)$ , qui agit sur  $(s_1, x_1, s_2, x_2)$  avec quatres paramètres  $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$  où  $\lambda_1 = e^\alpha, \lambda_2 = e^\beta, \lambda_3 = e^\gamma$  et  $\lambda_4 = e^\delta$ .

**Remarque 3** Ayant posé la matrice  $A$  sans écrire les détails de résolution, il est nécessaire de faire une vérification. Cependant, la conjecture que nous avons posé a vérifié au préalable les résultats.

### 2.3.3 Les fonctions scalaires invariantes

$$\begin{aligned} J \left( \lambda_1 s_1, \lambda_2 x_1, \lambda_3 s_2, \lambda_4 x_2, \lambda_1 s_{1in}, \lambda_3 s_{2in}, \frac{\lambda_1}{\lambda_2} k_1, \frac{\lambda_3}{\lambda_2} k_2, \frac{\lambda_3}{\lambda_4} k_3, \lambda_1 K_1, \lambda_3 K_2, \lambda_3 K_i, \lambda_1 y_1, \lambda_3 y_2 \right) \\ = J(s_1, x_1, s_2, x_2, s_{1in}, s_{2in}, k_1, k_2, k_3, K_1, K_2, K_i, y_1, y_2) \end{aligned}$$

Pour  $\lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 1$  et  $\lambda_1$  quelconque, nous avons :

$$\begin{aligned} J(\lambda_1 s_1, x_1, s_2, x_2, \lambda_1 s_{1in}, s_{2in}, \lambda_1 k_1, k_2, k_3, \lambda_1 K_1, K_2, K_i, \lambda_1 y_1, y_2) \\ = J(s_1, x_1, s_2, x_2, s_{1in}, s_{2in}, k_1, k_2, k_3, K_1, K_2, K_i, y_1, y_2) \end{aligned}$$

par dérivation par rapport à  $\lambda_1$  en  $\lambda_1 = 1$  :

$$s_1 \frac{\partial J}{\partial s_1} + s_{1in} \frac{\partial J}{\partial s_{1in}} + k_1 \frac{\partial J}{\partial k_1} + K_1 \frac{\partial J}{\partial K_1} + y_1 \frac{\partial J}{\partial y_1} = 0$$

l'expression obtenue ci-dessus est une équation aux dérivées partielles, dont la résolution par la méthode caractéristique nous donne le résultat suivant :

$$\frac{ds_1}{s_1} = \frac{ds_{1in}}{s_{1in}} = \frac{dk_1}{k_1} = \frac{dK_1}{K_1} = \frac{dy_1}{y_1}$$

d'où

$$\begin{aligned} & J(s_1, x_1, s_2, x_2, s_{1in}, s_{2in}, k_1, k_2, k_3, K_1, K_2, K_i, y_1, y_2) \\ = & Q \left( \underbrace{x_1}_{z_1}, \underbrace{s_2}_{z_2}, \underbrace{x_2}_{z_3}, \underbrace{s_{2in}}_{z_4}, \underbrace{k_2}_{z_5}, \underbrace{k_3}_{z_6}, \underbrace{K_2}_{z_7}, \underbrace{K_i}_{z_8}, \underbrace{y_2}_{z_9}, \underbrace{\frac{s_{1in}}{s_1}}_{z_9}, \underbrace{\frac{k_1}{s_1}}_{z_{11}}, \underbrace{\frac{K_1}{s_1}}_{z_{12}}, \underbrace{\frac{y_1}{s_1}}_{z_{13}} \right) \end{aligned}$$

Pour  $\lambda_1 = \lambda_3 = \lambda_4 = 1$  et  $\lambda_2$  quelconque, nous avons :

$$\begin{aligned} Q \left( \lambda_2 z_1, z_2, z_3, z_4, \frac{1}{\lambda_2} z_5, z_6, z_7, z_8, z_9, z_{10}, \frac{1}{\lambda_2} z_{11}, z_{12}, z_{13} \right) \\ = Q(z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6, z_7, z_8, z_9, z_{10}, z_{11}, z_{12}, z_{13}) \end{aligned}$$

par dérivation par rapport à  $\lambda_2$  en  $\lambda_2 = 1$  :

$$z_1 \frac{\partial Q}{\partial z_1} - z_5 \frac{\partial Q}{\partial z_5} - z_{11} \frac{\partial Q}{\partial z_{11}} = 0$$

donc, l'équation caractéristique s'écrit comme suit :

$$\frac{dz_1}{z_1} = -\frac{dz_5}{z_5} = -\frac{dz_{11}}{z_{11}}$$

ainsi

$$\begin{aligned} & Q(z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6, z_7, z_8, z_9, z_{10}, z_{11}, z_{12}, z_{13}) \\ = & L \left( \underbrace{z_2}_{u_1}, \underbrace{z_3}_{u_2}, \underbrace{z_4}_{u_3}, \underbrace{z_6}_{u_4}, \underbrace{z_7}_{u_5}, \underbrace{z_8}_{u_6}, \underbrace{z_9}_{u_7}, \underbrace{z_{10}}_{u_8}, \underbrace{z_{12}}_{u_9}, \underbrace{z_{13}}_{u_{10}}, \underbrace{z_1 z_5}_{u_{11}}, \underbrace{z_1 z_{11}}_{u_{12}} \right) \end{aligned}$$

Pour  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_4 = 1$  et  $\lambda_3$  quelconque, nous avons :

$$\begin{aligned} & L(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, u_7, u_8, u_9, u_{10}, u_{11}, u_{12}) \\ = & L(\lambda_3 u_1, u_2, \lambda_3 u_3, \lambda_3 u_4, \lambda_3 u_5, \lambda_3 u_6, \lambda_3 u_7, u_8, u_9, u_{10}, \lambda_3 u_{11}, u_{12}) \end{aligned}$$

par dérivation par rapport à  $\lambda_3$  en  $\lambda_3 = 1$  :

$$u_1 \frac{\partial L}{\partial u_1} + u_3 \frac{\partial L}{\partial u_3} + u_4 \frac{\partial L}{\partial u_4} + u_5 \frac{\partial L}{\partial u_5} + u_6 \frac{\partial L}{\partial u_6} + u_7 \frac{\partial L}{\partial u_7} + u_{11} \frac{\partial L}{\partial u_{11}} = 0$$

Nous avons ainsi, l'équation caractéristique :

$$\frac{du_1}{u_1} = \frac{du_3}{u_3} = \frac{du_4}{u_4} = \frac{du_5}{u_5} = \frac{du_6}{u_6} = \frac{du_7}{u_7} = \frac{du_{11}}{u_{11}}$$

donc

$$L(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, u_7, u_8, u_9, u_{10}, u_{11}, u_{12}) \\ = R \left( \underbrace{u_2}_{v_1}, \underbrace{u_8}_{v_2}, \underbrace{u_9}_{v_3}, \underbrace{u_{10}}_{v_4}, \underbrace{u_{12}}_{v_5}, \underbrace{\frac{u_3}{u_1}}_{v_6}, \underbrace{\frac{u_4}{u_1}}_{v_7}, \underbrace{\frac{u_5}{u_1}}_{v_8}, \underbrace{\frac{u_6}{u_1}}_{v_9}, \underbrace{\frac{u_7}{u_1}}_{v_{10}}, \underbrace{\frac{u_{11}}{u_1}}_{v_{11}} \right)$$

Pour  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$  et  $\lambda_4$  quelconque, nous avons :

$$R(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8, v_9, v_{10}, v_{11}) = R \left( \lambda_4 v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, \frac{1}{\lambda_4} v_7, v_8, v_9, v_{10}, v_{11} \right)$$

par dérivation par rapport à  $\lambda_4$  en  $\lambda_4 = 1$  :

$$v_1 \frac{\partial R}{\partial v_1} - v_7 \frac{\partial R}{\partial v_7} = 0$$

L'équation caractéristique s'écrit comme suit :

$$\frac{dv_1}{v_1} = -\frac{dv_7}{v_7}$$

alors

$$R(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8, v_9, v_{10}, v_{11}, v_1 v_7) = N(v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_8, v_9, v_{10}, v_{11}, v_1 v_7)$$

Ainsi, nous obtenons toutes les fonctions scalaires invariantes :

$$J(s_1, x_1, s_2, x_2, s_{1in}, s_{2in}, k_1, k_2, k_3, K_1, K_2, K_i, y_1, y_2) \\ = N \left( \frac{s_{1in}}{s_1}, \frac{K_1}{s_1}, \frac{y_1}{s_1}, \frac{k_1 x_1}{s_1}, \frac{s_{2in}}{s_2}, \frac{K_2}{s_2}, \frac{K_i}{s_2}, \frac{y_2}{s_2}, \frac{k_2 x_1}{s_2}, \frac{k_3 x_2}{s_2} \right)$$

Dans ce travail nous allons prendre une fonction invariante particulière :

$$J(s_1, x_1, s_2, x_2, s_{1in}, s_{2in}, k_1, k_2, k_3, K_1, K_2, K_i, y_1, y_2) = H \left( \frac{y_1}{s_1}, \frac{y_2}{s_2} \right)$$

### 2.3.4 Les champs de vecteurs invariants

à partir de la définition des champs de vecteurs invariants, nous avons :

$$\begin{aligned}\omega_1(\lambda_1 s_1, \lambda_2 x_1, \lambda_3 s_2, \lambda_4 x_2) &= \lambda_1 \omega_1(s_1, x_1, s_2, x_2) \\ \omega_2(\lambda_1 s_1, \lambda_2 x_1, \lambda_3 s_2, \lambda_4 x_2) &= \lambda_2 \omega_2(s_1, x_1, s_2, x_2) \\ \omega_3(\lambda_1 s_1, \lambda_2 x_1, \lambda_3 s_2, \lambda_4 x_2) &= \lambda_3 \omega_3(s_1, x_1, s_2, x_2) \\ \omega_4(\lambda_1 s_1, \lambda_2 x_1, \lambda_3 s_2, \lambda_4 x_2) &= \lambda_4 \omega_4(s_1, x_1, s_2, x_2)\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}\omega_1(s_1, x_1, s_2, x_2) &= a_1 s_1 \\ \omega_2(s_1, x_1, s_2, x_2) &= a_2 x_1 \\ \omega_3(s_1, x_1, s_2, x_2) &= a_3 s_2 \\ \omega_4(s_1, x_1, s_2, x_2) &= a_4 x_2\end{aligned}$$

où  $a_1, a_2, a_3$  et  $a_4$  sont des constantes qui joueront le rôle de gain.

$$\begin{cases} \dot{\hat{s}}_1(t) = D(t)(s_{1in} - \hat{s}_1) - k_1 \mu_1(\hat{s}_1) \hat{x}_1 + a_1 \hat{s}_1 \left[ H_1 \left( \frac{y_1}{\hat{s}_1} \right) - H_1 \left( \frac{\hat{y}_1}{\hat{s}_1} \right) \right] \\ \dot{\hat{x}}_1(t) = [\mu_1(\hat{s}_1) - D(t)] \hat{x}_1 + a_2 \hat{x}_1 \left[ H_1 \left( \frac{y_1}{\hat{s}_1} \right) - H_1 \left( \frac{\hat{y}_1}{\hat{s}_1} \right) \right] \\ \dot{\hat{s}}_2(t) = D(t)(s_{2in} - \hat{s}_2) + k_2 \mu_1(\hat{s}_1) \hat{x}_1 - k_3 \mu_2(\hat{s}_2) \hat{x}_2 + a_3 \hat{s}_2 \left[ H_2 \left( \frac{y_2}{\hat{s}_2} \right) - H_2 \left( \frac{\hat{y}_2}{\hat{s}_2} \right) \right] \\ \dot{\hat{x}}_2(t) = [\mu_2(\hat{s}_2) - D(t)] \hat{x}_2 + a_4 \hat{x}_2 \left[ H_2 \left( \frac{y_2}{\hat{s}_2} \right) - H_2 \left( \frac{\hat{y}_2}{\hat{s}_2} \right) \right] \end{cases}$$

### 2.3.5 Le pré-observateur

Nous choisissons

$$\begin{aligned}H_1 \left( \frac{y_1}{s_1} \right) &= \ln \left( \frac{y_1}{s_1} \right) \\ H_2 \left( \frac{y_2}{s_2} \right) &= \ln \left( \frac{y_2}{s_2} \right)\end{aligned}$$

ainsi

$$\ln \left( \frac{y_1}{\hat{s}_1} \right) - \ln \left( \frac{\hat{y}_1}{\hat{s}_1} \right) = \ln \left( \frac{y_1 \hat{s}_1}{\hat{s}_1 \hat{y}_1} \right) = \ln(y_1) - \ln(\hat{y}_1)$$

puisque la sortie  $y_1 = s_1$  donc nous obtenons

$$\left[ H_1 \left( \frac{y_1}{\hat{s}_1} \right) - H_1 \left( \frac{\hat{y}_1}{\hat{s}_1} \right) \right] = \ln(s_1) - \ln(\hat{s}_1) = \ln \left( \frac{s_1}{\hat{s}_1} \right)$$

de même puisque la sortie  $y_2 = s_2$  nous obtenons

$$\left[ H_2 \left( \frac{y_2}{\hat{s}_2} \right) - H_2 \left( \frac{\hat{y}_2}{\hat{s}_2} \right) \right] = \ln(s_2) - \ln(\hat{s}_2) = \ln \left( \frac{s_2}{\hat{s}_2} \right)$$

En remplaçant les cinétiques de Monod et Haldane par leur expressions, le système (2.3.2) devient :

$$\begin{cases} \dot{s}_1(t) = D(t)(s_{1in} - s_1) - k_1\mu_{1max} \frac{s_1 x_1}{s_1 + K_1} \\ \dot{x}_1(t) = \left[ \mu_{1max} \frac{s_1}{s_1 + K_1} - D(t) \right] x_1 \\ \dot{s}_2(t) = D(t)(s_{2in} - s_2) + k_2\mu_{1max} \frac{s_1 x_1}{s_1 + K_1} - k_3\mu_{2max} \frac{s_2 x_2}{s_2 + K_2 + \frac{s_2^2}{K_i}} \\ \dot{x}_2(t) = \left[ \mu_{2max} \frac{s_2}{s_2 + K_2 + \frac{s_2^2}{K_i}} - D(t) \right] x_2 \end{cases} \quad (2.3.4)$$

Nous avons pris comme sortie  $y = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix}$

**Théorème 1** [2] Pour (2.3.4), le système :

$$\begin{cases} \dot{\hat{s}}_1(t) = D(t)(s_{1in} - \hat{s}_1) - k_1\mu_{1max} \frac{\hat{s}_1 \hat{x}_1}{\hat{s}_1 + K_1} + a_1 \hat{s}_1 \ln \left( \frac{s_1}{\hat{s}_1} \right) \\ \dot{\hat{x}}_1(t) = \left[ \mu_{1max} \frac{\hat{s}_1 \hat{x}_1}{\hat{s}_1 + K_1} - D(t) \right] \hat{x}_1 + a_2 \hat{x}_1 \ln \left( \frac{s_1}{\hat{s}_1} \right) \\ \dot{\hat{s}}_2(t) = D(t)(s_{2in} - \hat{s}_2) + k_2\mu_{1max} \frac{\hat{s}_1 \hat{x}_1}{\hat{s}_1 + K_1} - k_3\mu_{2max} \frac{\hat{s}_2 \hat{x}_2}{\hat{s}_2 + K_2 + \frac{\hat{s}_2^2}{K_i}} + a_3 \hat{s}_2 \ln \left( \frac{s_2}{\hat{s}_2} \right) \\ \dot{\hat{x}}_2(t) = \left[ \mu_{2max} \frac{\hat{s}_2}{\hat{s}_2 + K_2 + \frac{\hat{s}_2^2}{K_i}} - D(t) \right] \hat{x}_2 + a_4 \hat{x}_2 \ln \left( \frac{s_2}{\hat{s}_2} \right) \end{cases} \quad (2.3.5)$$

est un observateur. Définissons  $e_1 = \ln s_1 - \ln \hat{s}_1$ ,  $e_2 = \ln x_1 - \ln \hat{x}_1$ ,  $e_3 = \ln s_2 - \ln \hat{s}_2$  et  $e_4 = \ln x_2 - \ln \hat{x}_2$

La dynamique des erreurs est donnée par :

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \dot{e}_1 = -a_1 e_1 - \frac{D(t)s_{1in}}{s_1} (e^{e_1} - 1) - \frac{k_1 \mu_{1max} s_1 x_1}{(s_1 + K_1)(s_1 e^{-e_1} + K_1)} (e^{-e_1} - 1) + \frac{k_1 \mu_{1max} x_1}{s_1 e^{-e_1} + K_1} (e^{-e_2} - 1) \\
 \dot{e}_2 = -a_2 e_1 - \frac{K_1 \mu_{1max} s_1}{(s_1 + K_1)(s_1 e^{-e_1} + K_1)} (e^{-e_1} - 1) \\
 \dot{e}_3 = -a_3 e_3 - \frac{D(t)s_{2in}}{s_2} (e^{e_3} - 1) + \frac{k_2 \mu_{1max} s_1^2 x_1}{s_2 (s_1 + K_1)(s_1 e^{-e_1} + K_1)} (e^{-e_1} - 1) \\
 \quad - \frac{k_2 \mu_{1max} s_1 x_1}{s_2 (s_1 e^{-e_1} + K_1)} (e^{-e_1 - e_2 + e_3} - 1) \\
 \quad - \frac{k_3 \mu_{2max} s_2 x_2}{\left(s_2 + K_2 + \frac{s_2^2}{K_i}\right) \left(s_2 e^{-e_3} + K_2 + \frac{s_2^2}{K_i} e^{-2e_3}\right)} (e^{-e_3} - 1) \\
 \quad - \frac{k_3 \mu_{2max} x_2}{\left(s_2 e^{-e_3} + K_2 + \frac{s_2^2}{K_i} e^{-2e_3}\right)} (e^{-e_4} - 1) \\
 \quad - \frac{k_3 \mu_{2max} s_2^2 x_2}{K_i \left(s_2 + K_2 + \frac{s_2^2}{K_i}\right) \left(s_2 e^{-e_3} + K_2 + \frac{s_2^2}{K_i} e^{-2e_3}\right)} (e^{-2e_3} - 1) \\
 \dot{e}_4 = -a_4 e_3 - \frac{K_2 \mu_{2max} s_2}{\left(s_2 + K_2 + \frac{s_2^2}{K_i}\right) \left(s_2 e^{-e_3} + K_2 + \frac{s_2^2}{K_i} e^{-2e_3}\right)} (e^{-e_3} - 1) \\
 \quad + \frac{\mu_{2max} s_2^3}{K_i \left(s_2 + K_2 + \frac{s_2^2}{K_i}\right) \left(s_2 e^{-e_3} + K_2 + \frac{s_2^2}{K_i} e^{-2e_3}\right)} (e^{-e_3} - 1) e^{-e_3}
 \end{array} \right. \quad (2.3)$$

Supposons  $a_1 > 0$  et  $a_3 > 0$  assez grands et  $a_2 < 0$  et  $a_4 < 0$  avec  $|a_2|$  et  $|a_4|$  assez grands, alors  $(0,0,0,0)$  est un point d'équilibre localement uniformément asymptotiquement stable.

### 2.3.6 Convergence du pré-observateur

**Preuve.** Posons :

$$\begin{aligned}
 u_1 &= \frac{D(t)s_{1in}}{s_1}, & u_2 &= \frac{k_1\mu_{1max}s_1x_1}{(s_1 + K_1)^2}, & u_3 &= \frac{k_1\mu_{1max}x_1}{(s_1 + K_1)}, \\
 u_4 &= \frac{K_1\mu_{1max}s_1}{(s_1 + K_1)^2}, & u_5 &= \frac{D(t)s_{2in}}{s_2}, & u_6 &= \frac{k_2\mu_{1max}s_1^2x_1}{s_2(s_1 + K_1)^2}, \\
 u_7 &= \frac{k_2\mu_{1max}s_1x_1}{s_2(s_1 + K_1)}, & u_8 &= \frac{k_3\mu_{2max}s_2x_2}{\left(s_2 + K_2 + \frac{s_2^2}{K_i}\right)^2}, \\
 u_9 &= \frac{k_3\mu_{2max}x_2}{\left(s_2 + K_2 + \frac{s_2^2}{K_i}\right)}, & u_{10} &= \frac{2k_3\mu_{2max}s_2^2x_2}{K_i\left(s_2 + K_2 + \frac{s_2^2}{K_i}\right)^2}, \\
 u_{11} &= \frac{\left(K_2 + \frac{s_2^2}{K_i}\right)\mu_{2max}s_2}{\left(s_2 + K_2 + \frac{s_2^2}{K_i}\right)^2}, & u_{12} &= \frac{2\mu_{2max}s_2^3}{K_i\left(s_2 + K_2 + \left(\frac{s_2^2}{K_i}\right)^2\right)}, \\
 v_1 &= \frac{s_1 + K_1}{s_1e^{-e_1} + K_1}, & v_2 &= \frac{s_1}{s_1e^{-e_1} + K_1}, \\
 v_3 &= \frac{s_2 + K_2 + \frac{s_2^2}{K_i}}{s_2e^{-e_3} + K_2 + \frac{s_2^2}{K_i}e^{-2e_3}}, & v_4 &= \frac{s_2}{s_2e^{-e_3} + K_2 + \frac{s_2^2}{K_i}e^{-2e_3}}, \\
 v_5 &= \frac{s_2^2}{K_i\left(s_2e^{-e_3} + K_2 + \frac{s_2^2}{K_i}e^{-2e_3}\right)}
 \end{aligned}$$

Le système (2.3.6) devient :

$$\left\{ \begin{aligned}
 \dot{e}_1 &= (-a_1 - u_1 + u_2)e_1 - u_3e_2 - u_1(e^{e_1} - e_1 - 1) \\
 &\quad - u_2[v_1(e^{-e_1} + e_1 - 1) + v_2(e^{-e_1} - 1)e_1] + u_3[v_1(e^{-e_2} + e_2 - 1) + v_2(e^{-e_1} - 1)e_2] \\
 \dot{e}_2 &= (-a_2 + u_4)e_1 - u_4[v_1(e^{-e_1} + e_1 - 1) + v_2(e^{-e_1} - 1)e_1] \\
 \dot{e}_3 &= (-u_6 + u_7)e_1 + u_7e_2 + (-a_3 - u_5 - u_7 + u_8 + u_10)e_3 - u_9e_4 - u_5(e^{e_3} - e_3 - 1) \\
 &\quad + u_6[v_1(e^{-e_1} + e_1 - 1) + v_2(e^{-e_1} - 1)e_1] \\
 &\quad - u_7[v_1(e^{-e_1 - e_2 + e_3} + (e_1 + e_2 - e_3) - 1) + v_2(e^{-e_1} - 1)(e_1 + e_2 - e_3)] \\
 &\quad - u_8[v_3(e^{-e_3} + e_3 - 1) + v_4(e^{-e_3} - 1)e_3 + v_5(e^{-2e_3} - 1)e_3] \\
 &\quad - u_{10}[v_3(e^{-2e_3} + 2e_3 - 1) + 2v_4(e^{-e_3} - 1)e_3 + 2v_5(e^{-2e_3} - 1)e_3] \\
 &\quad + u_9[v_3(e^{-e_4} + e_4 - 1) + v_4(e^{-e_3} - 1)e_4 + v_5(e^{-2e_3} - 1)e_4] \\
 \dot{e}_4 &= (-a_4 + u_11 - u_12)e_3 - u_11[v_3(e^{-e_3} + e_3 - 1) + v_4(e^{-e_3} - 1)e_3 + v_5(e^{-2e_3} - 1)e_3] \\
 &\quad + u_{12}[v_3(e^{-2e_3} + 2e_3 - 1) + v_4(e^{-e_3} - 1)2e_3 + v_5(e^{-2e_3} - 1)2e_3]
 \end{aligned} \right. \quad (2.3.7)$$

On va utiliser le théorème ci-dessous pour montrer que l'équilibre  $(0, 0, 0, 0)$  est localement uniformément asymptotiquement stable.

**Théorème 2** Soit  $(1) \frac{dx}{dt} = A(t)x$  un système linéaire sur  $\mathbb{R}^n$ , uniformément asymptotiquement stable pour  $t_0 \geq T$ .

Soit

$$F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d; (t, x) \longmapsto F(t, x)$$

une fonction continue et  $F(t, 0) = 0$  telle que :

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta_\epsilon > 0 : \|x\| \leq \delta_\epsilon \implies \|F(t, x)\| \leq \epsilon \|x\|, \forall t \geq T$$

Soit  $(2) \frac{dx}{dt} = A(t)x + F(t, x)$ . Alors la solution  $x \equiv 0$  de (2) est uniformément asymptotiquement stable pour  $t_0 \geq T$  [15].

Alors le système s'écrit :

$$\dot{e} = A(t)e + \psi(t, e)$$

où  $A(t)$  est une matrice  $(4 \times 4)$  qui contient la partie linéaire et  $\psi(t, e)$  est la partie non linéaire du système.

Avec

$$A(t) = \begin{pmatrix} -a_1 - u_1 + u_2 & -u_3 & \vdots & 0 & 0 \\ -a_2 + u_4 & 0 & \vdots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \vdots & \dots & \dots \\ -u_6 + u_7 & u_7 & \vdots & -a_3 - u_5 - u_7 + u_8 + u_{10} & -u_9 \\ 0 & 0 & \vdots & -a_4 + u_{11} - u_{12} & 0 \end{pmatrix}$$

et

$$\psi(t, e) = \begin{pmatrix} -u_1(e^{-e_1} + e_1 - 1) - u_2[v_1(e^{-e_1} + e_1 - 1) + v_2(e^{-e_1} - 1)e_1] \\ +u_3[v_1(e^{-e_2} + e_2 - 1) + v_2(e^{-e_1} - 1)e_2] \\ -u_4[v_1(e^{-e_1} + e_1 - 1) + v_2(e^{-e_1} - 1)e_1] \\ -u_5(e^{-e_3} + e_3 - 1) + u_6[v_1(e^{-e_1} + e_1 - 1) + v_2(e^{-e_1} - 1)e_1] \\ -u_7[v_1(e^{-e_1 - e_2 + e_3} + (e_1 + e_2 - e_3) - 1) + v_2(e^{-e_1} - 1)(e_1 + e_2 - e_3)] \\ -u_8[v_3(e^{-e_3} + e_3 - 1) + v_4(e^{-e_3} - 1)e_3 + v_5(e^{-2e_3} - 1)e_3] \\ -u_{10}[v_3(e^{-2e_3} + 2e_3 - 1) + 2v_4(e^{-e_3} - 1)e_3 + 2v_5(e^{-2e_3} - 1)e_3] \\ +u_9[v_3(e^{-e_4} + e_4 - 1) + v_4(e^{-e_3} - 1)e_4 + v_5(e^{-2e_3} - 1)e_4] \\ -u_1[v_3(e^{-e_3} + e_3 - 1) + v_4(e^{-e_3} - 1)e_3 + v_5(e^{-2e_3} - 1)e_3] \\ +u_{12}[v_3(e^{-2e_3} + 2e_3 - 1) + v_4(e^{-e_3} - 1)2e_3 + v_5(e^{-2e_3} - 1)2e_3] \end{pmatrix}$$

Ici, nous allons prendre la norme  $\|e\| = |e_1| + |e_2| + |e_3| + |e_4|$ , i.e. nous devons montrer que

$$\forall t \geq T \forall \epsilon > 0, \exists \delta_\epsilon > 0 \text{ tel que } (|e_1| + |e_2| + |e_3| + |e_4|) \leq \delta_\epsilon$$

ce qui implique

$$(|\psi_1| + |\psi_2| + |\psi_3| + |\psi_4|) \leq \epsilon(|e_1| + |e_2| + |e_3| + |e_4|)$$

Nous avons [2] :

$$\begin{aligned} 0 < \vartheta_1 \leq s_1(t) \leq s_{1in}, & & 0 < \vartheta_2 \leq s_2(t) \leq s_{2in} \\ 0 < x_1(t) \leq \sigma_1, & & 0 < x_2(t) \leq \sigma_2 \\ \\ 0 < D_{min} \leq u_1(t) \leq \frac{D_{max}s_{1in}}{\vartheta_1}, & & 0 < u_2(t) \leq \frac{k_1\mu_{1max}\sigma_1}{K_1}, & & 0 < u_3(t) \leq \frac{k_1\mu_{1max}\sigma_1}{K_1} \\ 0 < u_4(t) \leq \mu_{1max}, & & 0 < D_{min} \leq u_5(t) \leq \frac{D_{max}s_{2in}}{\vartheta_2}, & & 0 < u_6(t) \leq \frac{k_2\mu_{1max}\sigma_1}{\vartheta_1} \\ 0 < u_7(t) \leq \frac{k_2\mu_{1max}\sigma_1}{\vartheta_1}, & & 0 < u_8(t) \leq \frac{k_3\mu_{2max}\sigma_2}{K_2}, & & 0 < u_9(t) \leq \frac{k_3\mu_{2max}\sigma_2}{K_2} \\ 0 < u_{10}(t) \leq \frac{2k_3\mu_{2max}\sigma_2}{K_i}, & & 0 < u_{11}(t) \leq \left(1 + \frac{s_{2in}^2}{K_2K_i}\right) \mu_{2max}, & & 0 < u_{12} \leq \frac{2\mu_{2max}s_{2in}}{K_i} \\ \\ 0 < v_1(t) \leq \frac{s_{1in} + K_1}{K_1}, & & 0 \leq v_2(t) \leq \frac{s_{1in}}{K_1} \\ 0 \leq v_3(t) \leq \frac{s_{2in} + K_2}{K_2} + \frac{s_{2in}^2}{K_2K_i}, & & 0 \leq v_4(t) \leq \frac{s_{2in}}{K_2}, & & 0 \leq v_5(t) \leq \frac{s_{2in}^2}{K_2K_i} \end{aligned}$$

Le développement de Taylor de  $e^{e_i}$  est

$$e^{e_i} = 1 + e_i + e_i^2 \int_0^1 (1 - \tau) e^{e_i\tau} d\tau$$

ce qui nous donne :  $|e^{\pm e_i} \pm e_i - 1| \leq \frac{1}{2} e^{\delta_\epsilon} \delta_\epsilon |e_i|$  et  $|e^{-e_i} - 1| \leq \delta_\epsilon + \frac{1}{2} e^{\delta_\epsilon} \delta_\epsilon^2$

Après calcul, nous aurons :

$$|\psi_1| \leq \frac{1}{2} \left( \frac{D_{max}s_{1in}}{\vartheta_1} e^{\delta_\epsilon} + \frac{k_1\mu_{1max}\sigma_1}{K_1^2} [s_{1in}((\delta_\epsilon + 1) + K_1)e^{\delta_\epsilon} + 2s_{1in}] \right) \delta_\epsilon |e_1| \\ + \frac{k_1\mu_{1max}\sigma_1}{2K_1^2} ((\delta_\epsilon + 1) + K_1)e^{\delta_\epsilon} + 2s_{1in} \delta_\epsilon |e_2|$$

$$|\psi_2| \leq \frac{\mu_{1max}}{2K_1} [s_{1in}((\delta_\epsilon + 1) + K_1)e^{\delta_\epsilon} + 2s_{1in}] \delta_\epsilon |e_1|$$

$$|\psi_3| \leq \frac{k_2\mu_{1max}\sigma_1}{2\vartheta_1 K_1} [s_{1in}((\delta_\epsilon + 1) + K_1)e^{\delta_\epsilon} + 2s_{1in}] \delta_\epsilon (|e_1| + |e_2|) \\ + \left( \frac{D_{max}s_{2in}}{2\vartheta_2} e^{\delta_\epsilon} + \frac{k_2\mu_{1max}\sigma_1}{2\vartheta_1 K_1} [s_{1in}((\delta_\epsilon + 1) + K_1)e^{\delta_\epsilon} + 2s_{1in}] + \frac{k_3\mu_{2max}\sigma_2}{2K_2^2} \right. \\ \left. \left[ \left( s_{2in} \left( 1 + \frac{4s_{2in}}{K_i} \right) \delta_\epsilon + \frac{s_{2in}^2}{K_i} + s_2 + K_2 \right) e^{\delta_\epsilon} + 2s_{2in} \left( 1 + \frac{s_{2in}}{K_i} \right) \right] + \frac{4k_3\mu_{2max}\sigma_2}{K_2 K_i} \right. \\ \left. \left[ \left( s_{2in} \left( \frac{1}{2} + \frac{2s_{2in}}{K_i} \right) \delta_\epsilon + \frac{s_{2in}^2}{K_i} + s_2 + K_2 \right) e^{\delta_\epsilon} + 2s_{2in} \left( 1 + \frac{s_{2in}}{K_i} \right) \right] \right] \delta_\epsilon |e_3| \\ + \frac{k_3\mu_{2max}\sigma_2}{2K_i} \\ \left[ \left( s_{2in} \left( 1 + \frac{4s_{2in}}{K_i} \right) \delta_\epsilon + \frac{s_{2in}^2}{K_i} + s_2 + K_2 \right) e^{\delta_\epsilon} + 2s_{2in} \left( 1 + \frac{s_{2in}}{K_i} \right) \right] \delta_\epsilon |e_4|$$

$$|\psi_4| \leq \left( \left( 1 + \frac{s_{2in}^2}{K_2 K_i} \right) \frac{\mu_{2max}}{2K_2} \left[ \left( s_{2in} \left( 1 + \frac{4s_{2in}}{K_i} \right) \delta_\epsilon + \frac{s_{2in}^2}{K_i} + s_2 + K_2 \right) e^{\delta_\epsilon} + 2s_{2in} \left( 1 + \frac{s_{2in}}{K_i} \right) \right] \right. \\ \left. + \frac{4\mu_{2max}s_{2in}}{K_2 K_i} \left[ \left( s_{2in} \left( \frac{1}{2} + \frac{2s_{2in}}{K_i} \right) \delta_\epsilon + \frac{s_{2in}^2}{K_i} + s_2 + K_2 \right) e^{\delta_\epsilon} + 2s_{2in} \left( 1 + \frac{s_{2in}}{K_i} \right) \right] \right) \delta_\epsilon |e_3|$$

Alors

$$|\psi_1| + |\psi_2| + |\psi_3| + |\psi_4| \leq l_1(\delta_\epsilon)\delta_\epsilon |e_1| + l_2(\delta_\epsilon)\delta_\epsilon |e_2| + l_3(\delta_\epsilon)\delta_\epsilon |e_3| + l_4(\delta_\epsilon)\delta_\epsilon |e_4|$$

où

$$l_1(\delta_\epsilon) = \frac{1}{2} \left( \frac{D_{max}s_{1in}}{\vartheta_1} e^{\delta_\epsilon} + \frac{\mu_{1max}}{K_1} \left[ \frac{2k_1\vartheta_1 + k_2K_1}{\vartheta_1 K_1} \sigma_1 + 1 \right] [s_{1in}((\delta_\epsilon + 1) + K_1)e^{\delta_\epsilon} + 2s_{1in}] \right) \delta_\epsilon$$

$$l_2(\delta_\epsilon) = \left( \frac{\mu_{1max}\sigma_1}{2K_1} \left[ \frac{k_1\vartheta_1 + k_2K_1}{\vartheta_1 K_1} \right] [s_{1in}((\delta_\epsilon + 1) + K_1)e^{\delta_\epsilon} + 2s_{1in}] \right) \delta_\epsilon$$

$$l_3(\delta_\epsilon) = \left( \frac{D_{max}s_{2in}}{2\vartheta_2} + \frac{k_2\mu_{1max}\sigma_1}{2\vartheta_1 K_1} [s_{1in}((\delta_\epsilon + 1) + K_1)e^{\delta_\epsilon} + 2s_{1in}] + \frac{\mu_{2max}}{2K_2} \right. \\ \left. \left[ 1 + \frac{1}{K_2} \left( k_3\sigma_2 + \frac{s_{2in}^2}{K_i} \right) \right] \left[ \left( s_{2in} \left( 1 + \frac{4s_{2in}}{K_i} \right) \delta_\epsilon + \frac{s_{2in}^2}{K_i} + s_2 + K_2 \right) + 2s_{2in} \left( 1 + \frac{s_{2in}}{K_i} \right) \right] \right. \\ \left. + \frac{4\mu_{2max}}{K_2 K_i} (k_3\sigma_2 + s_{2in}) \left[ \left( s_{2in} \left( \frac{1}{2} + \frac{2s_{2in}}{K_i} \right) \delta_\epsilon + \frac{s_{2in}^2}{K_i} + s_2 + K_2 \right) e^{\delta_\epsilon} + 2s_{2in} \left( 1 + \frac{s_{2in}}{K_i} \right) \right] \right) \delta_\epsilon$$

$$l_4(\delta_\epsilon) = \frac{k_3\mu_{2max}\sigma_2}{2K_2^2} \left[ \left( s_{2in} \left( 1 + \frac{4s_{2in}}{K_i} \right) \delta_\epsilon + \frac{s_{2in}^2}{K_i} + s_2 + K_2 \right) e^{\delta_\epsilon} + 2s_{2in} \left( 1 + \frac{s_{2in}}{K_i} \right) \right] \delta_\epsilon$$

Alors

$$|\psi_1| + |\psi_2| + |\psi_3| + |\psi_4| \leq \underbrace{\max(l_1(\delta_\epsilon), l_2(\delta_\epsilon), l_3(\delta_\epsilon), l_4(\delta_\epsilon))}_{l(\delta_\epsilon)} (|e_1| + |e_2| + |e_3| + |e_4|)$$

Notons que la fonction  $l(\delta_\epsilon)$  est continue en  $\delta_\epsilon$  et  $l(0) = 0$ , alors pour tout  $\epsilon > 0$  il existe  $\delta_\epsilon > 0$  tel que  $l(\delta_\epsilon) < \epsilon$ .

Il reste à montrer que  $(0, 0, 0, 0)$  est uniformément asymptotiquement stable pour le système linéaire

$$\frac{de}{dt} = A(t)e$$

Pour cela réécrivons la partie linéaire du système (2.3.7) :

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = (-a_1 - u_1 + u_2)e_1 - u_3e_2 \\ \dot{e}_2 = (-a_2 + u_4)e_1 \\ \dot{e}_3 = (-u_6 + u_9)e_1 + u_7e_2 + (-a_3 - u_5 - u_7 + u_8 + u_{10})e_3 - u_9e_4 \\ \dot{e}_4 = (-a_4 + u_{11} - u_{12})e_3 \end{cases} \quad (2.3.8)$$

Dans cette partie nous allons définir la fonction de Lyaounov candidate suivante :

$$V(e_1, e_2, e_3, e_4) = V_\alpha(e_1, e_2)V_\beta(e_3, e_4)$$

où  $\alpha$  et  $\beta$  sont strictement positives. Avec

$$V_\alpha(e_1, e_2) = (e_2^2 + (e_1 + \alpha e_2)^2)$$

et

$$V_\beta(e_3, e_4) = (e_4^2 + (e_3 + \beta e_4)^2)$$

Donc

$$\dot{V} = \dot{V}_\alpha V_\beta + V_\alpha \dot{V}_\beta$$

Nous avons :

$$\dot{V}_\alpha = \begin{pmatrix} e_1 & e_2 \end{pmatrix} M_\alpha \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix}$$

où

$$M_\alpha = \begin{pmatrix} 2[-(2a_1 + \alpha a_2) + 2(u_2 - u_1) + \alpha u_4] & -\alpha(a_1 + \alpha a_2) + \alpha^2 u_4 + \alpha(u_2 - u_1) - 2u_3 \\ -\alpha(a_1 + \alpha a_2) + \alpha^2 u_4 + \alpha(u_2 - u_1) - 2u_3 & -2\alpha u_3 \end{pmatrix}$$

On a la trace de  $M_\alpha$

$$tr(M_\alpha) = -2[-(2a_1 + \alpha a_2) + 2(u_2 - u_1) + \alpha(u_4 - 2u_3)]$$

Le déterminant de  $M_\alpha$

$$\begin{aligned} \det(M_\alpha) &= 2\alpha u_3(2a_1 + \alpha a_2) - 2\alpha u_3[\alpha u_4 + 2(u_2 - u_1)] \\ &\quad - [-\alpha(a_1 + \alpha a_2) + \alpha^2 u_4 + \alpha(u_2 - u_1) - 2u_3]^2 \\ \det(M_\alpha) &= -\alpha^2(a_1 + \alpha a_2)^2 + 2\alpha[\alpha^2 u_4 + \alpha(u_2 - u_1) - 2u_3](a_1 + \alpha a_2) + 4\alpha u_3 a_1 + 2\alpha^2 u_3 a_2 \\ &\quad - [\alpha^2 u_4 + \alpha(u_2 - u_1) - 2u_3]^2 - 2\alpha u_3[\alpha u_4 + 2(u_2 - u_1)] \\ \det(M_\alpha) &= -\alpha^2(a_1 + \alpha a_2)^2 + \underbrace{[4\alpha u_3 + 2\alpha^3 u_4 + 2\alpha^2(u_2 - u_1) - 4\alpha u_3]}_{r_1} a_1 \\ &\quad + [2\alpha u_3 + 2\alpha^4 u_4 + 2\alpha^3(u_2 - u_1) - 4\alpha^2 u_3] a_2 + r_1 \\ \det(M_\alpha) &= -\alpha^2(a_1 + \alpha a_2)^2 + p_1 a_1 + q_1 a_1 + r_1 \end{aligned}$$

où

$$p_1 = 2\alpha^3 u_4 + 2\alpha^2(u_2 - u_1)$$

$$q_1 = 2\alpha^4 u_4 + 2\alpha^3(u_2 - u_1) - 2\alpha^2 u_3$$

si on pose  $a_1 + \alpha a_2 = 0 \Rightarrow a_2 = -\frac{1}{\alpha} a_1$

$$\det(M_\alpha) = 2\alpha u_3 + r_1$$

$\det(M_\alpha) > 0$  pour  $a_1 \gg 0$ , alors la trace devient

$$\begin{aligned} \text{tr}(M_\alpha) &= -2(2a_1 - a_1) + 4(u_2 - u_1) + 2\alpha(u_4 - 2u_3) \\ \text{tr}(M_\alpha) &= -2a_1 + 4(u_2 - u_1) + 2\alpha(u_4 - 2u_3) \end{aligned}$$

$\text{tr}(M_\alpha) < 0$  si est seulement si  $a_1 \gg 0$ .

Avec un  $a_1$  suffisamment grand, on a  $\text{tr}(M_\alpha) < 0$  et  $\det(M_\alpha) > 0$  alors :  $M_\alpha$  est définit négative.

Donc

$$\dot{V}_\alpha \leq \lambda_{\max}(M_\alpha)(e_1^2 + e_2^2) \leq c\lambda_{\max}(M_\alpha)V_\alpha$$

où  $\lambda_{\max}(M_\alpha)$  est la plus grande valeur propre négative de  $M_\alpha$ . Les normes sont équivalentes dans  $\mathbb{R}$ , ce qui implique que  $\dot{V}_\alpha(e_1, e_2)$  est négative.

Et nous avons :

$$\dot{V}_\beta = \begin{pmatrix} e_3 & e_4 \end{pmatrix} M_\beta \begin{pmatrix} e_3 \\ e_4 \end{pmatrix} + 2[(u_7 - u_6)e_1 + u_7 e_2](2e_1 + \beta e_4)$$

où

$$M_\beta = \begin{pmatrix} 2[-(2a_3 + \beta a_4) - 2(u_5 + u_7 - u_8 - u_{10}) + \beta(u_{11} - u_{12})] & -\beta(a_3 + \beta a_4) + \beta^2(u_{11} - u_{12}) - 2u_9 + \beta(u_{10} + u_8 - u_5 - u_7) \\ -\beta(a_3 + \beta a_4) + \beta^2(u_{11} - u_{12}) - 2u_9 + \beta(u_{10} + u_8 - u_5 - u_7) & -2\beta u_9 \end{pmatrix}$$

$$\text{tr}(M_\beta) = -2(2a_3 + \beta a_4) \underbrace{-4(u_5 + u_7 - u_8 - u_{10}) + 2\beta(u_{11} - u_9 - u_{12})}_{r_2}$$

$$\det(M_\beta) = 4\beta(2a_3 + \beta a_4)u_9 + 8\beta u_9(u_5 + u_7 - u_8 - u_{10}) - 4\beta^2 u_9(u_{11} - u_{12}) - [-\beta(a_3 + \beta a_4) + \beta^2(u_{11} - u_{12}) - 2u_9 + \beta(u_{10} + u_8 - u_5 - u_7)]^2$$

$$\begin{aligned} \det(M_\beta) &= -\beta^2(a_3 + \beta a_4)^2 + 2\beta[\beta^2(u_{11} - u_{12}) - 2u_9 + \beta(u_{10} + u_8 - u_5 - u_7)](a_3 + \beta a_4) \\ &\quad + 4\beta u_9(2a_3 + \beta a_4) - [\beta^2(u_{11} - u_{12}) - 2u_9 + \beta(u_{10} + u_8 - u_5 - u_7)]^2 \\ &\quad + 8\beta u_9(u_5 + u_7 - u_8 - u_{10}) - 4\beta^2 u_9(u_{11} - u_{12}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \det(M_\beta) &= -\beta^2(a_3 + \beta a_4)^2 + 2\beta[\beta^2(u_{11} - u_{12}) + \beta(u_{10} + u_8 - u_5 - u_7) + 2u_9] a_3 \\ &\quad + \underbrace{2\beta^2[\beta^2(u_{11} - u_{12}) + \beta(u_{10} + u_8 - u_5 - u_7)]}_{q_2} a_4 + r_3 \end{aligned}$$

où

$$r_3 = [\beta^2(u_{11}-u_{12})-2u_9+\beta(u_{10}+u_8-u_5-u_7)]^2+8\beta u_9(u_5+u_7-u_8-u_{10})-4\beta^2 u_9(u_{11}-u_{12})$$

si on pose  $a_3 + \beta a_4 = 0 \Rightarrow a_4 = -\frac{1}{\beta} a_3$

Alors

$$\det(M_\beta) = 4\beta u_9 + r_2$$

$\det(M_\beta) > 0$  pour  $a_3 \gg 0$

alors la trace devient

$$\text{tr}(M_\beta) = -2a_3 + r_3$$

Avec un  $a_3$  suffisamment grand, on a  $\text{tr}(M_\beta) < 0$  et  $\det(M_\beta) > 0$  alors :  $M_\beta$  est définit négative.

$$2[(u_7 - u_6)e_1 + u_7 e_2](2e_1 + \beta e_4) \leq 2 \underbrace{\sqrt{(u_7 - u_6)^2 + u_7^2}}_{\leq c_2} \underbrace{\sqrt{e_1^2 + e_2^2}}_{\sqrt{V_\alpha}} \sqrt{V_\beta}$$

$$\dot{V}_\beta \leq c_3 \lambda_{max}(M_\beta) V_\beta + 2c_2 \sqrt{V_\alpha} \sqrt{V_\beta}$$

où  $\lambda_{max}(M_\beta)$  est la plus grande valeur propre négative de  $M_\beta$ . Alors  $\dot{V}_\beta$  est négative. On peut donc dire que ce système est localement uniformément asymptotiquement stable en  $(0,0,0,0)$ . ■

### 2.3.7 Résultats de simulations

Pour juger les performances de l'observateur invariant nous utiliserons l'entrée  $D$  variable pour toutes les simulations qui viennent. Ceci nous permettra de remplir la condition d'opération réelle de persistance de l'entrée, mais ça nous permettra surtout de visualiser la capacité de l'observateur à suivre le changement *relativement rapide* des valeurs des états.

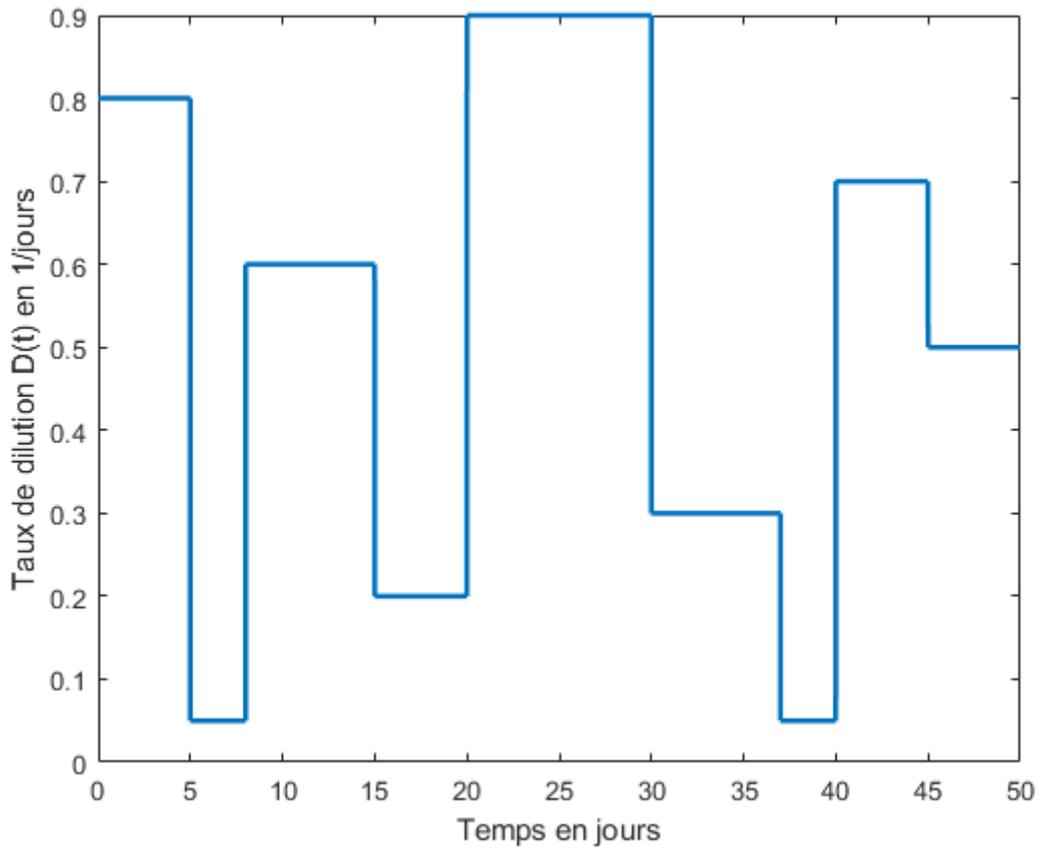


FIGURE 2.1 – Taux de dilution  $D(t)$

Les simulations ont été réalisées en utilisant les paramètres (1.3) et les condition initiales suivantes [2] :

	$s_1(0)$	$x_1(0)$	$s_2(0)$	$x_2(0)$
Modèle	3	0.5	15	0.12
Observateur	3	3	15	0.5
Unités	$Kg/m^3$	$Kg/m^3$	$mol/m^3$	$Kg/m^3$

TABLE 2.1 – Conditions initiales du modèle et de l'observateur

Nous allons visualiser dans un premier temps la réponse du système et de son estimation à l'entrée (2.1) :

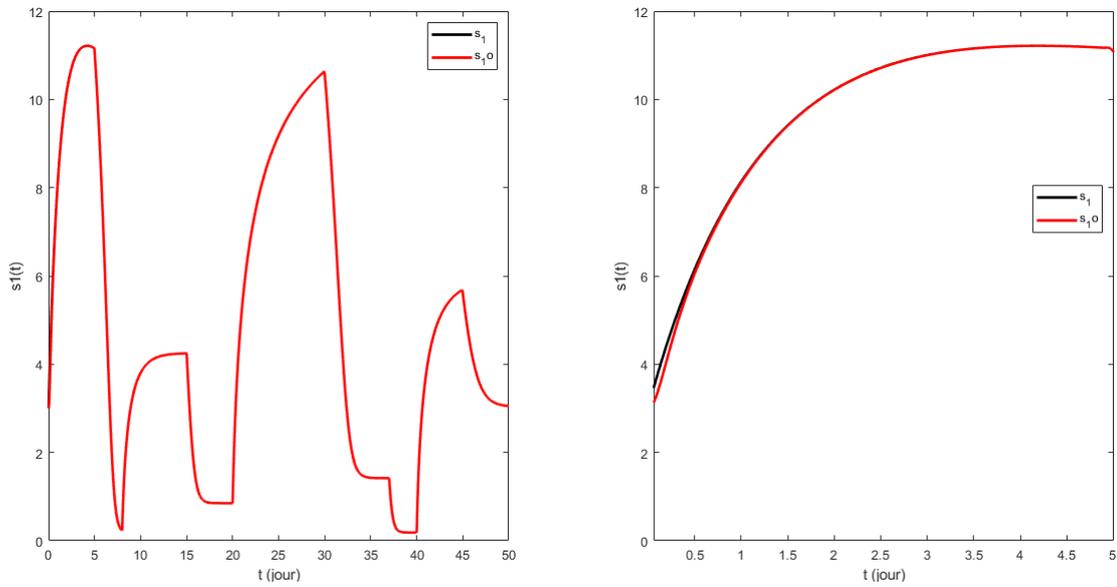


FIGURE 2.2 – Concentration du substrat  $s_1$  et de son estimation  $S_{1o}$  pour  $a_1 = 10$  ,  $\alpha = 0.2$ ,  $a_3 =$  et  $\beta = 0.3$

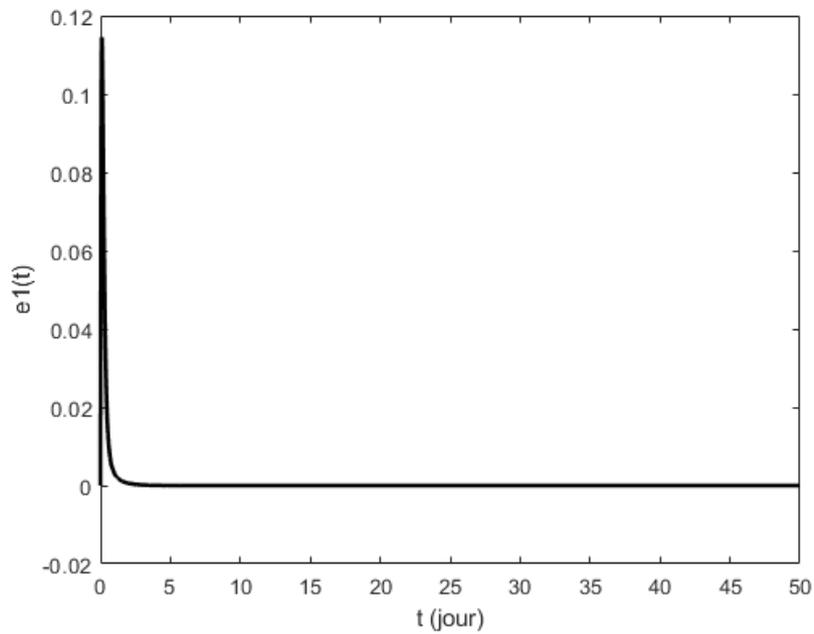


FIGURE 2.3 – Erreur d'estimation du substrat  $s_1$

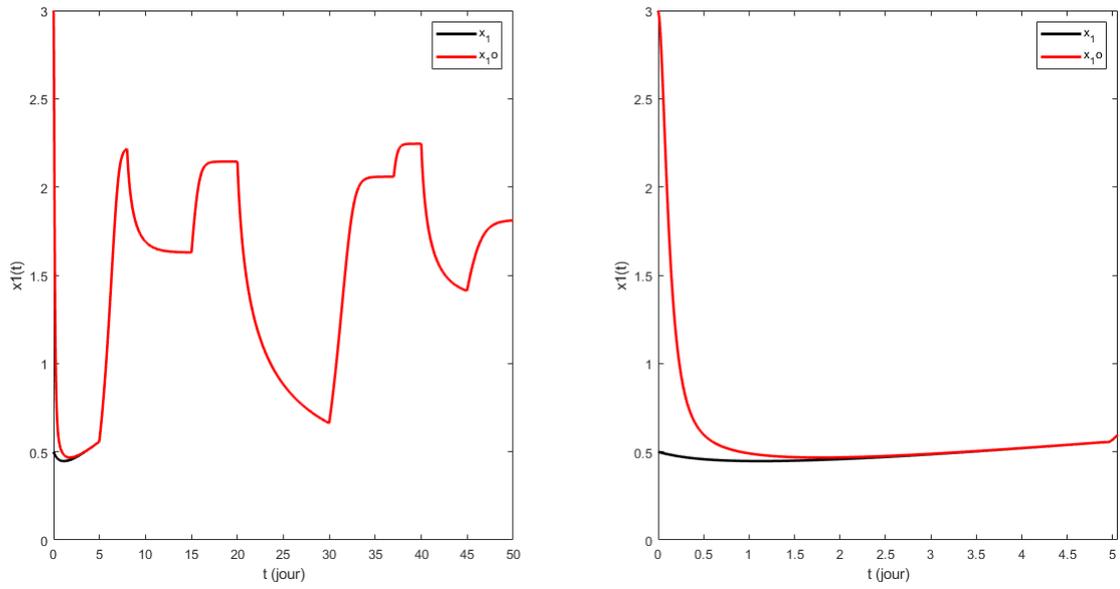


FIGURE 2.4 – Concentration de la biomasse  $x_1$  et de son estimation  $x_{1o}$  pour  $a_1 = 10$ ,  $\alpha = 0.2$ ,  $a_3 =$  et  $\beta = 0.3$

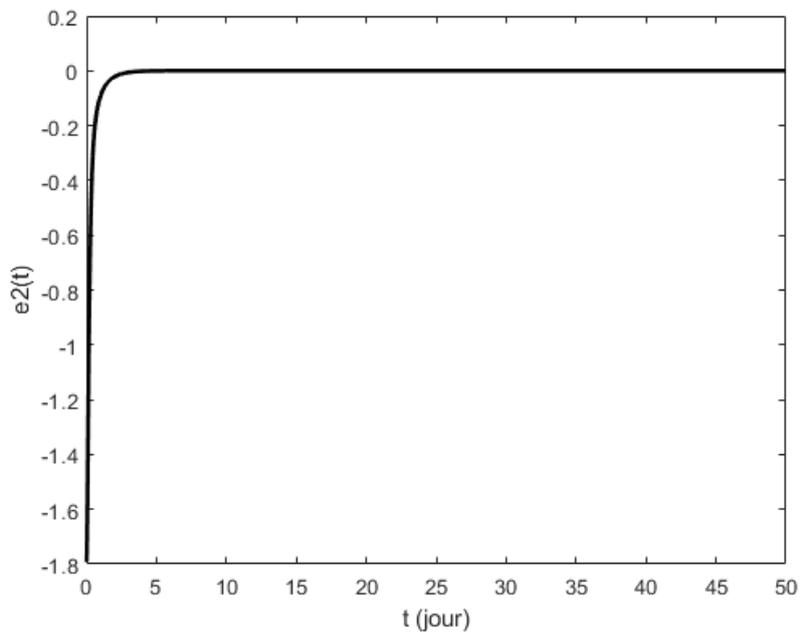


FIGURE 2.5 – Erreur d'estimation de la biomasse  $x_1$

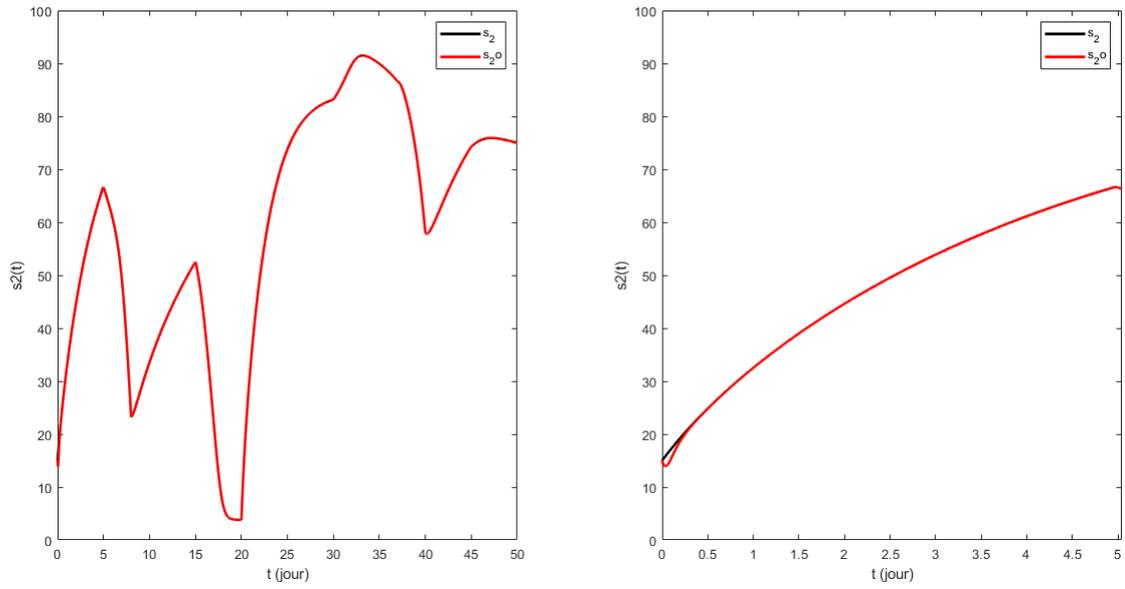


FIGURE 2.6 – Concentration du substrat  $s_2$  et de son estimation  $S_{2o}$  pour  $a_1 = 10$ ,  $\alpha = 0.2$ ,  $a_3 =$  et  $\beta = 0.3$

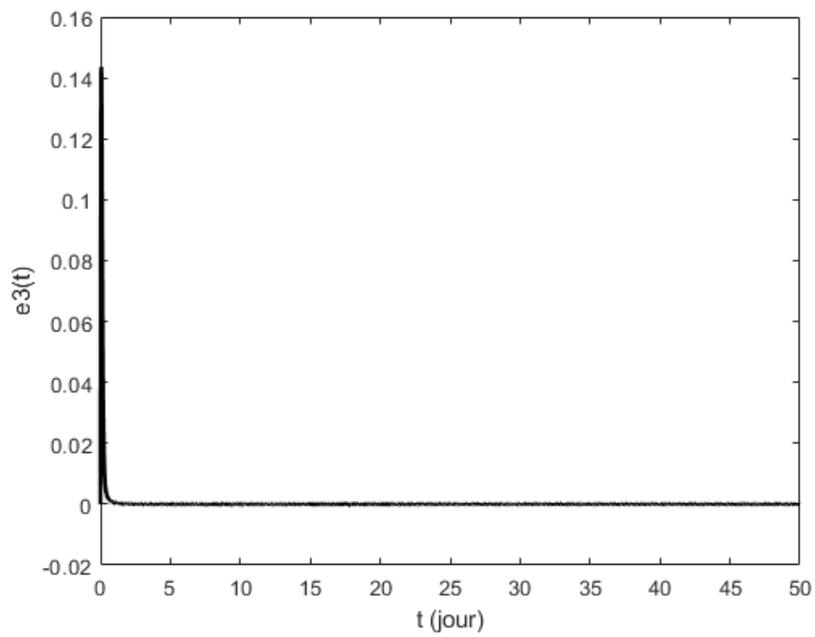


FIGURE 2.7 – Erreur d'estimation du substrat  $s_2$

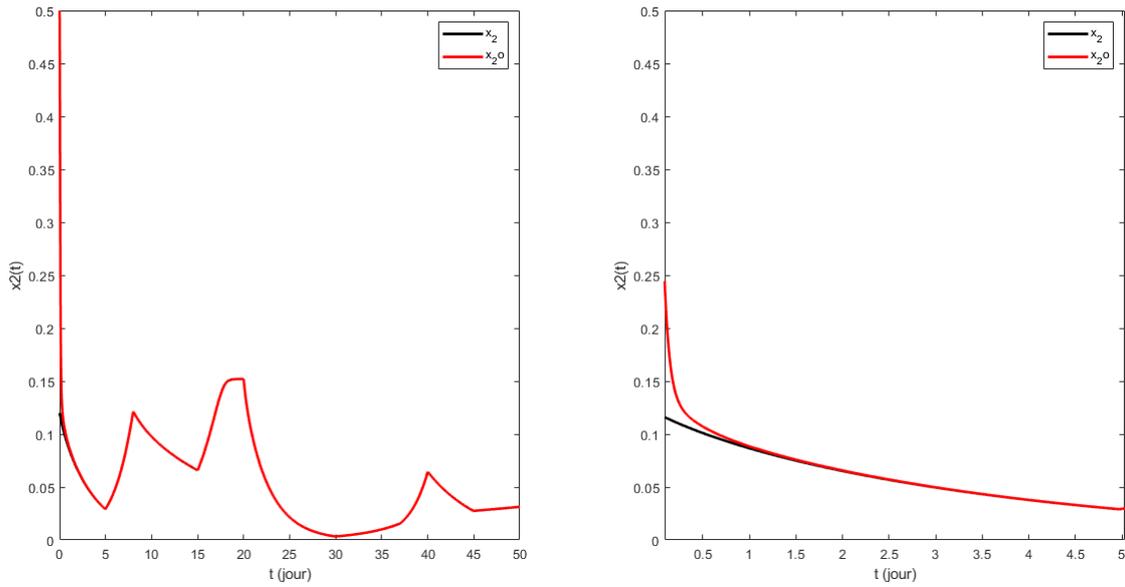


FIGURE 2.8 – Concentration de la biomasse  $x_2$  et de son estimation  $x_{2o}$  pour  $a_1 = 10$ ,  $\alpha = 0.2$ ,  $a_3 =$  et  $\beta = 0.3$

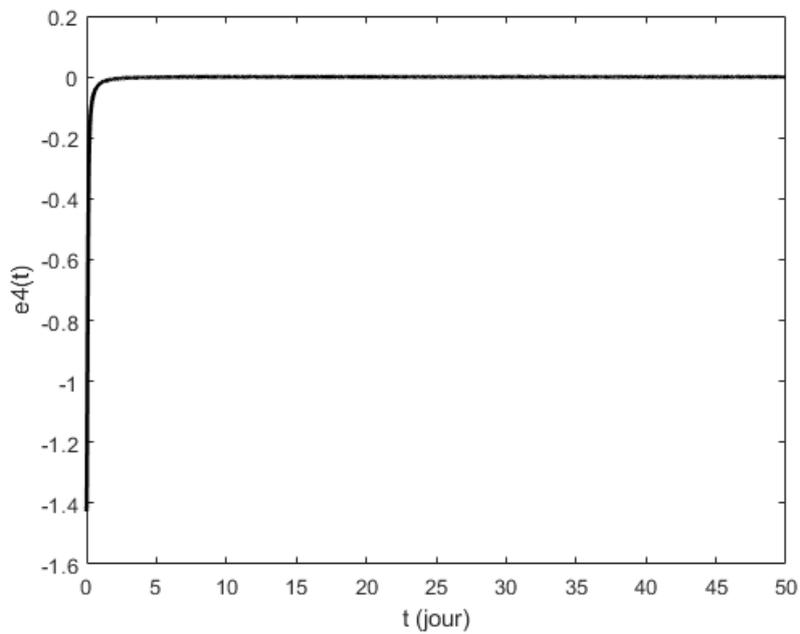


FIGURE 2.9 – Erreur d'estimation de la biomasse  $x_2$

On remarque que tout les états estimer convergent rapidement, ceci en moins d'une journée pour 3 d'entre eux et 2 jours pour l'estimation de  $x_1$  (2.4), cette petite différence peu s'expliquer par une plus grande différence de conditions initiales (2.1). Après la convergence les états estimer et ceux du système son indistinguable, les figures des erreurs d'estimation (2.3, 2.5, 2.7 et 2.9) confirme que l'erreur est nulle. Notre observateur donne des résultats satisfaisant malgré les changement brusque de la consigne (2.1).

### 2.3.8 Discussion autour de la robustesse

Nous allons tester la robustesse de l'observateur au bruit de mesure en introduisant un bruit blanc sur  $s_1$  puis sur  $s_2$  :

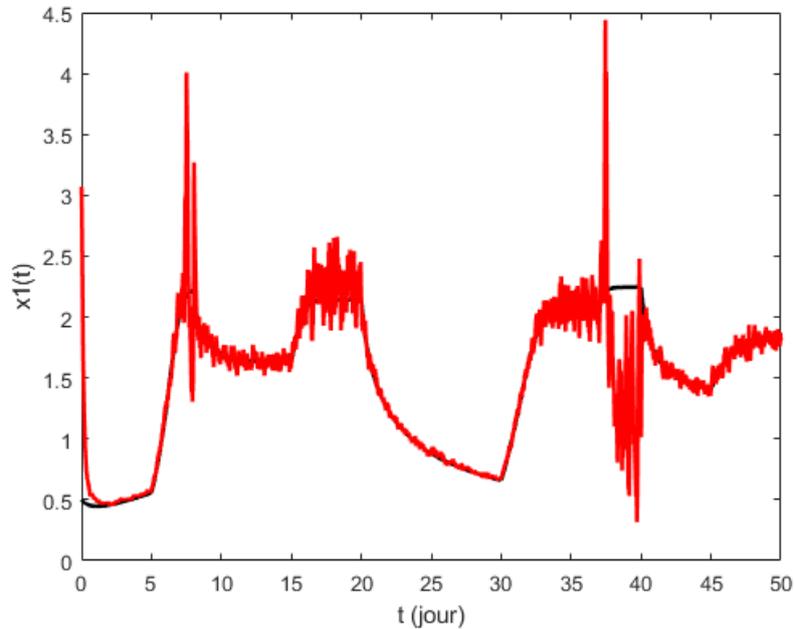


FIGURE 2.10 – Concentration de la biomasse  $x_1$  et de son estimation  $x_{1o}$  avec bruit sur  $s_1$  pour  $a_1 = 10$ ,  $\alpha = 0.2$ ,  $a_3 =$  et  $\beta = 0.3$

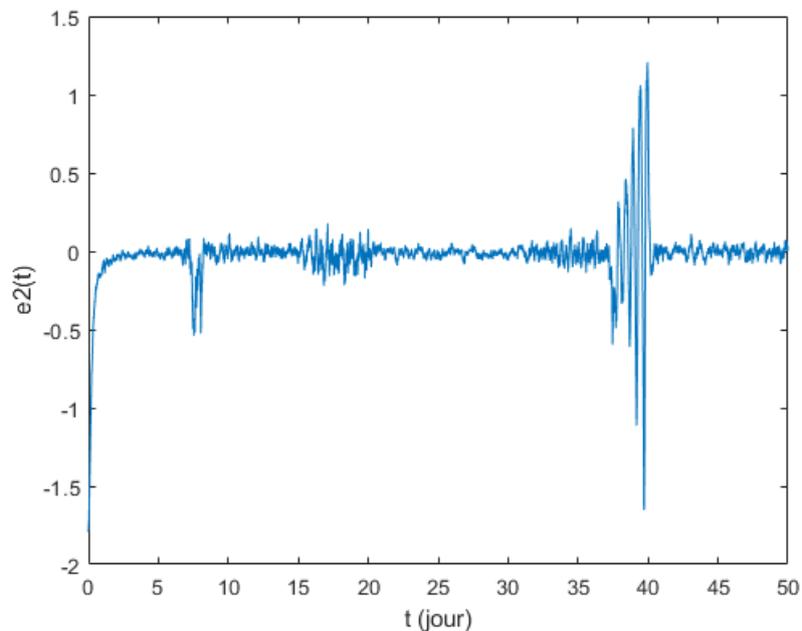


FIGURE 2.11 – Erreur d'estimation de la biomasse  $x_1$  avec bruit sur  $s_1$

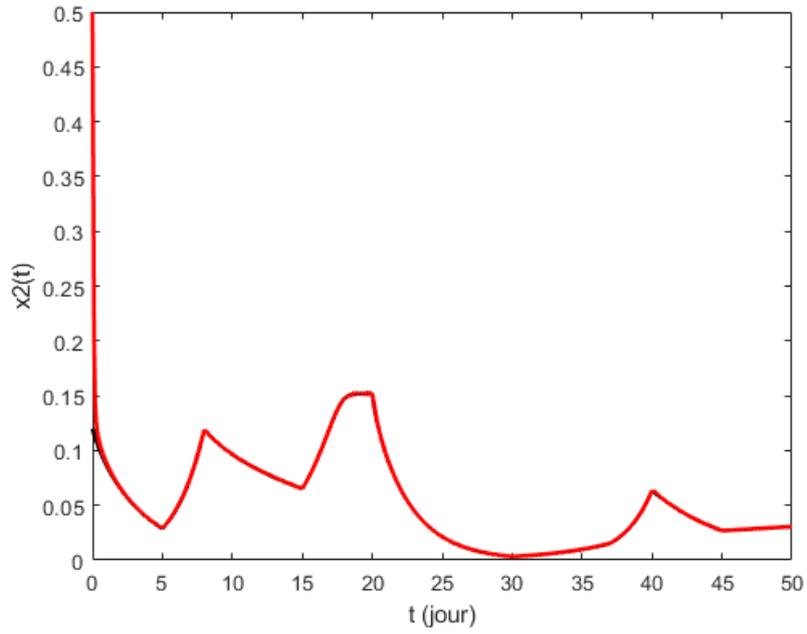


FIGURE 2.12 – Concentration de la biomasse  $x_2$  et de son estimation  $x_{2o}$  avec bruit sur  $s_1$  pour  $a_1 = 10$ ,  $\alpha = 0.2$ ,  $a_3 =$  et  $\beta = 0.3$

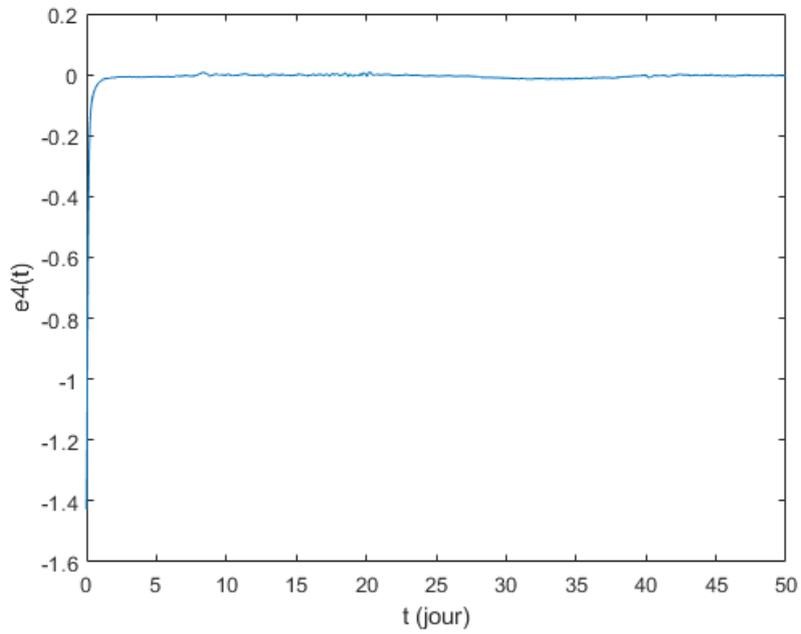


FIGURE 2.13 – Erreur d'estimation de la biomasse  $x_2$  avec bruit sur  $s_1$

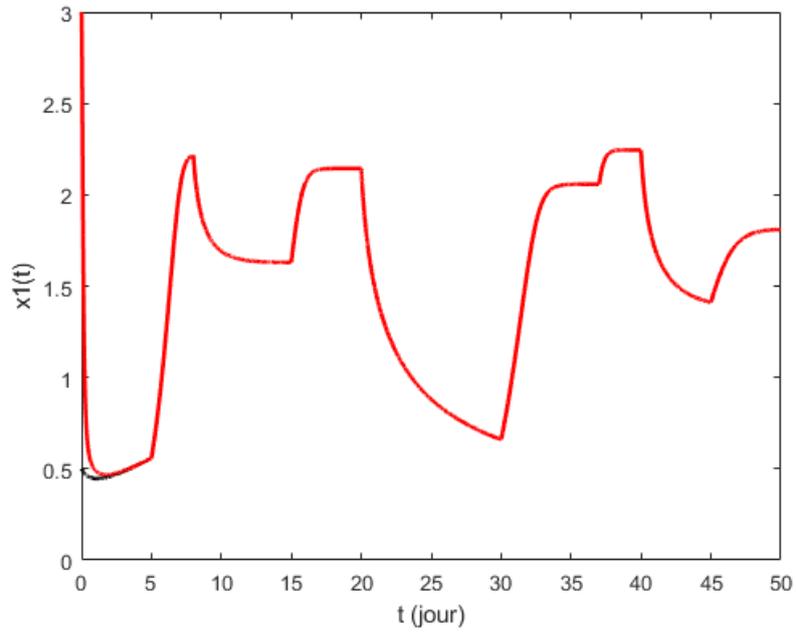


FIGURE 2.14 – Concentration de la biomasse  $x_1$  et de son estimation  $x_{1o}$  avec bruit sur  $s_2$  pour  $a_1 = 10$ ,  $\alpha = 0.2$ ,  $a_3 =$  et  $\beta = 0.3$

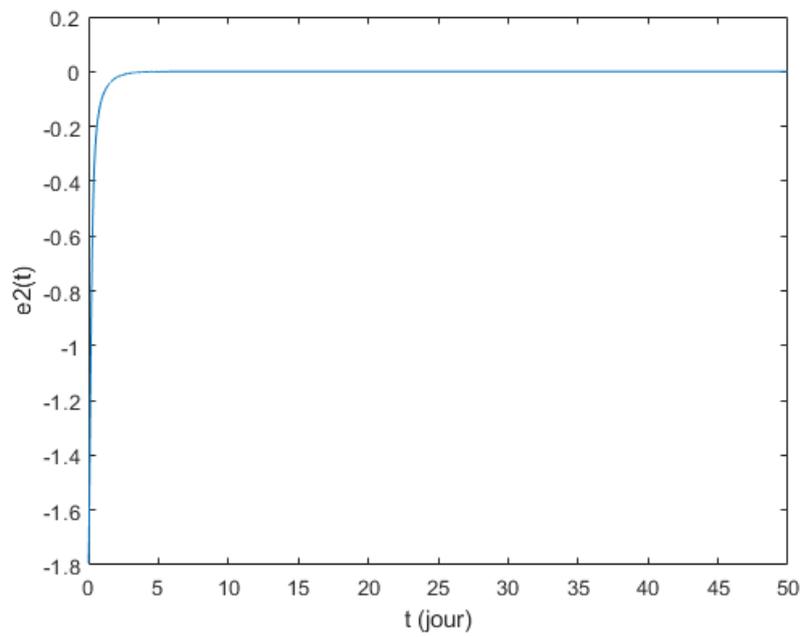


FIGURE 2.15 – Erreur d'estimation de la biomasse  $x_1$  avec bruit sur  $s_2$

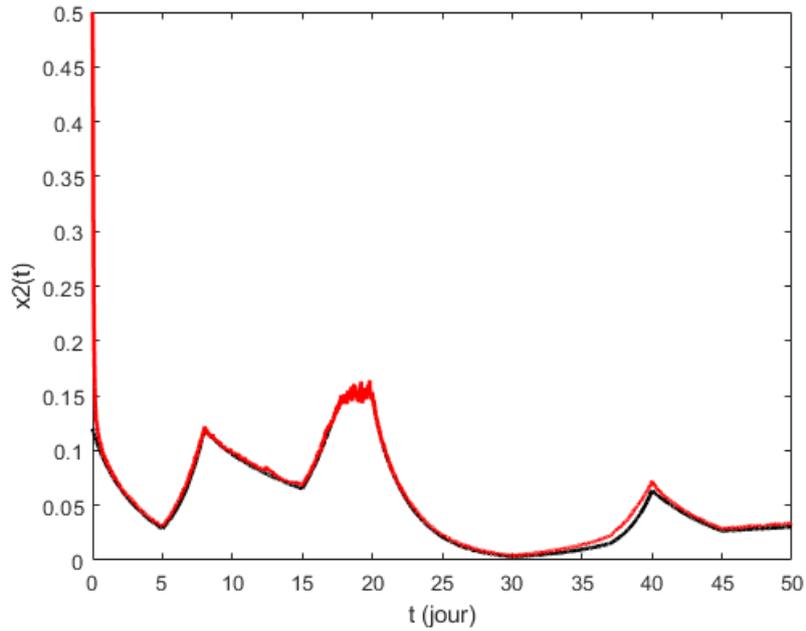


FIGURE 2.16 – Concentration de la biomasse  $x_2$  et de son estimation  $x_{2o}$  avec bruit sur  $s_2$  pour  $a_1 = 10$ ,  $\alpha = 0.2$ ,  $a_3 =$  et  $\beta = 0.3$

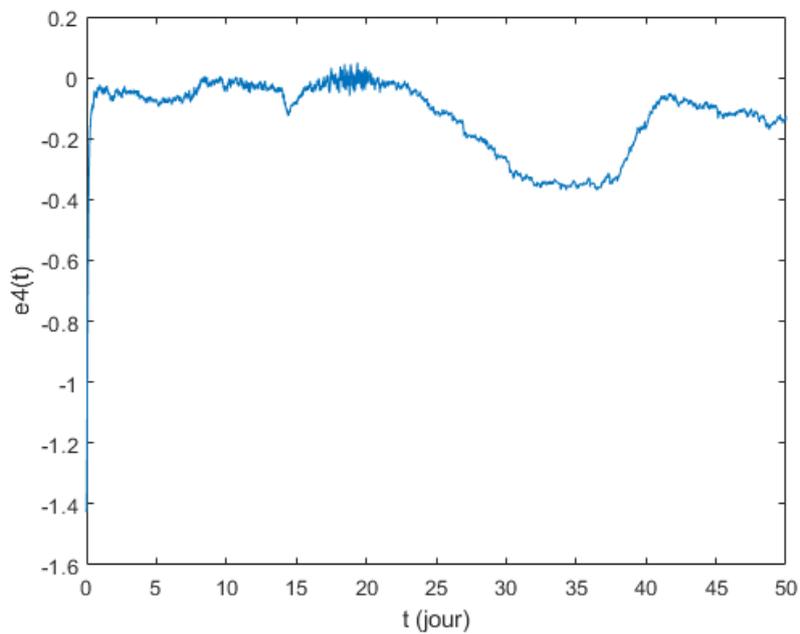


FIGURE 2.17 – Erreur d'estimation de la biomasse  $x_2$  avec bruit sur  $s_2$

Nous allons maintenant tester la robustesse aux bruits sur des paramètres du modèle : nous allons mettre un bruit sur  $\mu_{1max}$  et après sur  $\mu_{2max}$  :

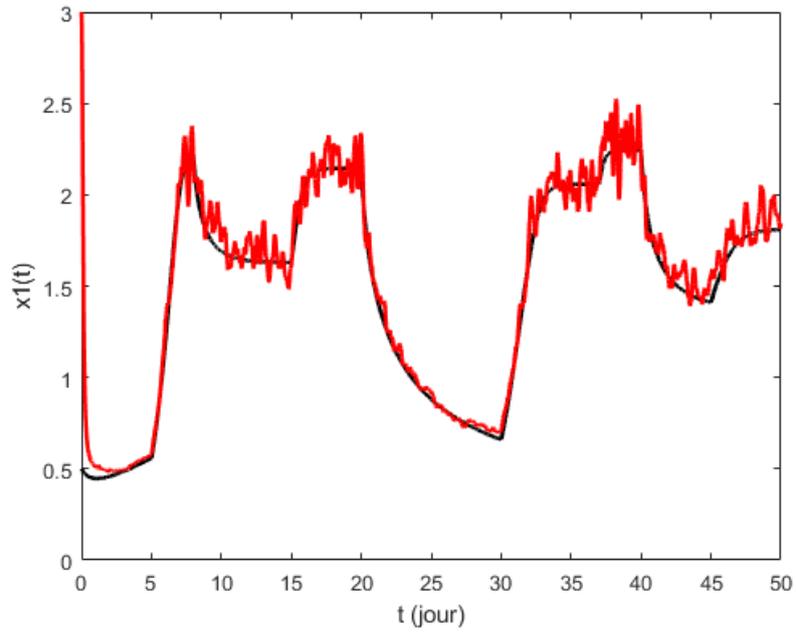


FIGURE 2.18 – Concentration de la biomasse  $x_1$  et de son estimation  $x_{1o}$  avec bruit sur  $\mu_{1max}$  pour  $a_1 = 10$ ,  $\alpha = 0.2$ ,  $a_3 =$  et  $\beta = 0.3$

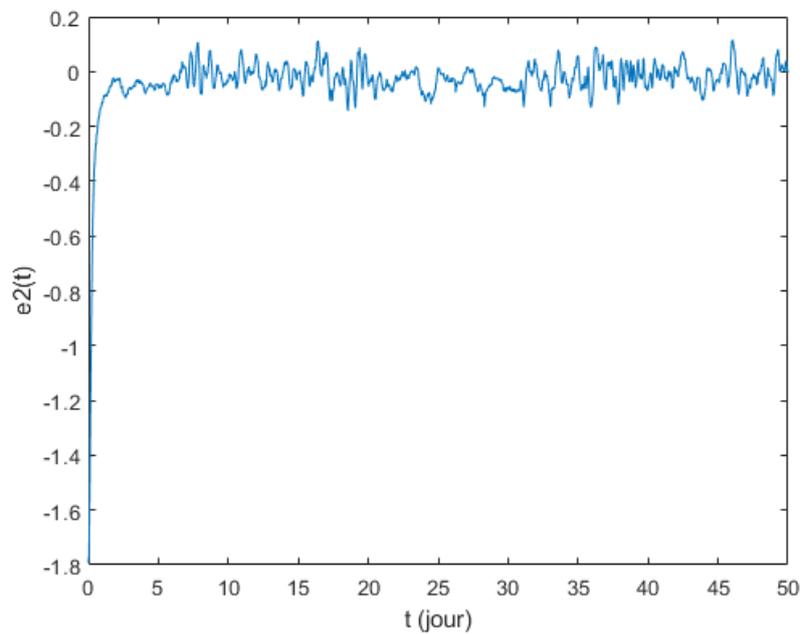


FIGURE 2.19 – Erreur d'estimation de la biomasse  $x_1$  avec bruit sur  $\mu_{1max}$

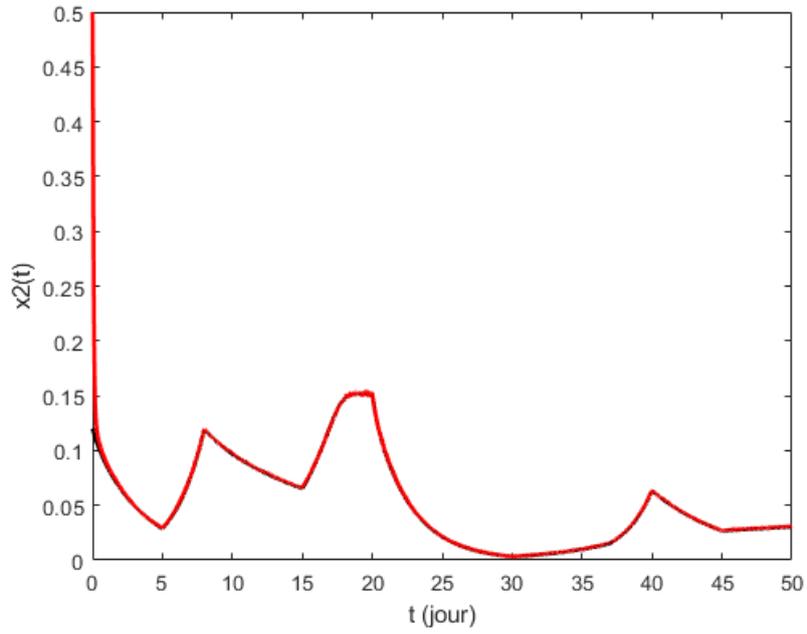


FIGURE 2.20 – Concentration de la biomasse  $x_2$  et de son estimation  $x_{2o}$  avec bruit sur  $\mu_{1max}$  pour  $a_1 = 10$ ,  $\alpha = 0.2$ ,  $a_3 =$  et  $\beta = 0.3$

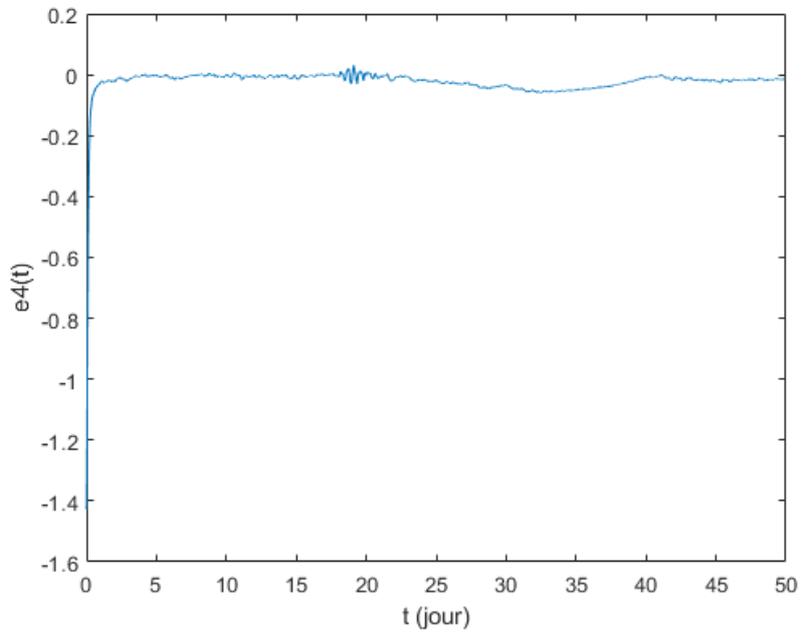


FIGURE 2.21 – Erreur d'estimation de la biomasse  $x_2$  avec bruit sur  $\mu_{1max}$

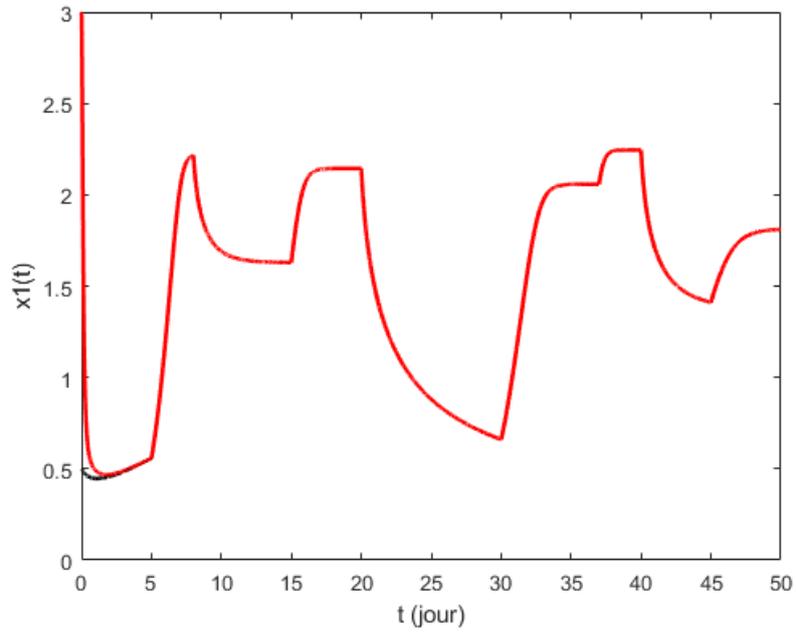


FIGURE 2.22 – Concentration de la biomasse  $x_1$  et de son estimation  $x_{1o}$  avec bruit sur  $\mu_{2max}$  pour  $a_1 = 10$ ,  $\alpha = 0.2$ ,  $a_3 =$  et  $\beta = 0.3$

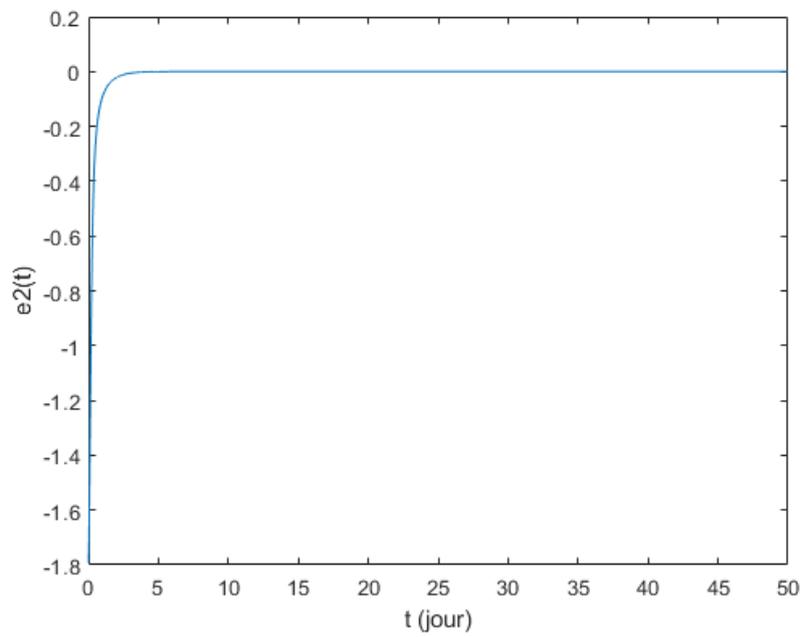


FIGURE 2.23 – Erreur d'estimation de la biomasse  $x_1$  avec bruit sur  $\mu_{2max}$

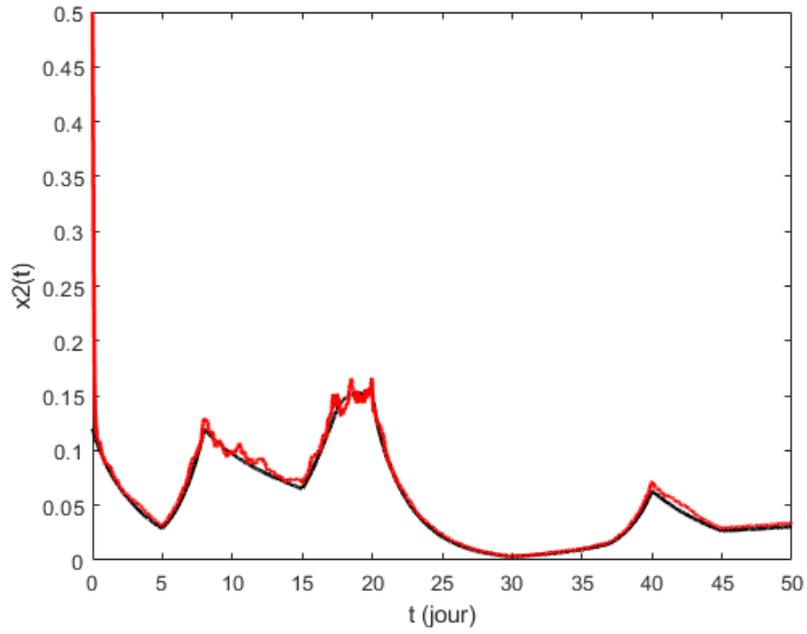


FIGURE 2.24 – Concentration de la biomasse  $x_2$  et de son estimation  $x_{2o}$  avec bruit sur  $\mu_{2max}$  pour  $a_1 = 10$ ,  $\alpha = 0.2$ ,  $a_3 =$  et  $\beta = 0.3$

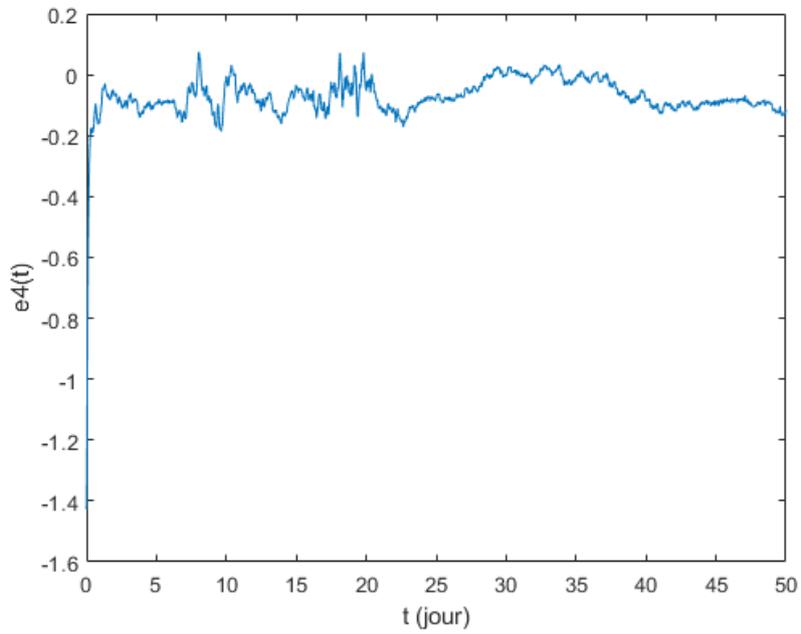


FIGURE 2.25 – Erreur d'estimation de la biomasse  $x_2$  avec bruit sur  $\mu_{2max}$

Dans les figures (2.10) et (2.11), on remarque que l'observateur reste stable et que l'estimation de  $x_1$  suit le système mais a des piques d'erreur, lorsque  $D$  le taux de dilution est très bas, on peut résoudre cela en choisissant de meilleurs gain de correction pour l'observateur. Dans les figures (2.12) et (2.13) on constate que le bruit sur  $s_1$  n'a aucun effet sur l'estimation  $x_2$ , cela peut s'expliquer par l'expression de  $\hat{x}_2$  2.3.5 qui dépend principalement de  $s_2$  qui n'est pas bruité et de l'estimation de  $s_2$  qui n'est aussi pas affecté par le bruit sur  $s_1$ . Dans les figures (2.14) et (2.15) on note que le bruit sur  $s_2$  n'a aucun impact sur l'estimation de  $x_1$  car elle ne dépend pas de  $s_2$ . Dans les figures (2.16) et (2.17) on peut voir que le bruit sur  $s_2$  a un faible effet sur l'estimation de  $x_2$  qui peut être négliger. Dans les figures (2.18) et (2.19) on observe que le bruit sur  $\mu_{1max}$  ne déstabilise pas l'observateur et on a une faible erreur d'estimation de  $x_1$ . De (2.20) on ne vois aucun effet du bruit sur  $\mu_{1max}$  pour l'estimation de  $x_2$  et de (2.21) on remarque une très faible erreur d'estimation de  $x_2$ . Dans les figures (2.22) et (2.23), on remarque que le bruit sur  $\mu_{2max}$  n'a aucun impact sur l'estimation de  $x_1$  car elle ne dépend pas de  $\mu_{2max}$  (2.3.5). Dans les figures (2.24) et (2.25), on constate que le bruit sur  $\mu_{2max}$  n'a qu'un faible effet sur l'estimation de  $x_2$ .

On note que notre observateur invariant est très robuste aux bruits sur les paramètres qu'aux bruits sur la mesure la sortie).

# Conclusion générale

Le but de ce projet de fin d'étude est la synthèse d'observateur invariant pour le modèle AM2. Avant de pouvoir arriver à synthétiser notre observateur il a fallu définir le modèle AM2 et les cinétiques de croissance qu'il utilise. Nous avons aussi étudié ses équilibres autour desquels nous avons simulé le système et tracé le diagramme opératoire en considérant une relation proportionnelle entre les deux types de substrats.

En arrivant au chapitre de la synthèse d'observateur, il a fallu obligatoirement passer par la preuve d'observabilité du système et la preuve de son invariance qui est souvent délicat, pour pouvoir poser le pré-observateur invariant, prouver sa convergence et faire des simulations, tester notre observateur avec des bruit sur la sortie et des paramètres, pour conclure que l'observateur invariant est un bon observateur pour l'estimation des concentrations des biomasses du modèle AM2, il est robuste et converge rapidement.

Comme perspectives pour des travaux futures, il serait intéressant de choisir d'autres fonctions scalaires invariantes et comparer leur performances, synthétiser des observateurs invariants avec la sortie méthane et introduire notre observateur dans une boucle de commande.

# Bibliographie

- [1] B. BENYAHIA, *Modélisation et Observation des Bioprocédés à Membranes : Application à la digestion anaérobie*, thèse de doctorat, Université de Tlemcen et Université de Montpellier 2, 2012.
- [2] I. DIDI *Sur l'observation des systèmes non linéaires invariants, application aux bioprocédés*, thèse, Université de Tlemcen, 2014.
- [3] B. BENYAHIA , T. SARI , B. CHERKI, J. HARMAND. *Sur le modèle AM2 de digestion anaérobie*, CARI, 2010.
- [4] O. BERNARD, et al. *Dynamical model development and parameter identification for an anaerobic wastewater treatment process*. *Biotechnology and bioengineering* 75.4 (2001) : 428-429.
- [5] Z. KHEDIM, *Contribution à la modélisation et au contrôle des systèmes de digestion anaérobie*, thèse de doctorat, Université Aboubekr Belkaid de Tlemcen, 2018
- [6] G. Conte, C.H. Moog, A.M. Perdon, *Algebraic Methods for Nonlinear Control Systems*, Second edition, Springer, 2007.
- [7] S.TEWFIK , B.BENYAHIA, *The Operating Diagram For A Two-Step Anaerobic Digestion Model*, Preprint, 2020.
- [8] J. HARMAND, *Contribution à l'analyse et au contrôle des systèmes biologiques : application aux bioprocédés de dépollution*, habilitation à diriger des recherches, Université Claude Bernard, 2004.
- [9] G. CONTE, C.H. MOOG, A.M.PERDON, *Algebraic Methods for Nonlinear Control Systems*, Second edition, Springer, 2007.
- [10] P. ROUCHON, S. BONNABEL, Ph. MARTIN, *Invariant Asymptotic Observers*, *IEEE Trans. Automatic Control*, vol.53, 2514-2526, 2008.
- [11] A. ISODIRI, *Nonlinear Control Systems*, 3rd edition, Springer, 1995.
- [12] G. BASILE, G. MARRO, *On observability of linear time-invariant systems with unknown inputs* *Journal of Optimization Theory and Applications*, 3 :410–415, 1969.
- [13] M. HAUTUS, *Strong detectability and observers*, *Linear Algebra and its Applications*, 50 :353–360, 1983.
- [14] S. M. MARTINEZ, *Analyse des propriétés structurelles d'observabilité de l'état et de l'entrée inconnue des systèmes linéaires par approche graphique*, thèse de doctorat, Université de Henri Poincaré, 2008.
- [15] H. REINHARD, *Equations différentielles*, Gautier-Villars, 1982.

- [16] J.P. GAUTHIER, H. HAMMOURI and S. OTHMAN, *A simple observer for nonlinear systems applications to bioreactors*, IEEE Transactions on Automatic Control. vol 37(6), pp 875-880, 1992.
- [17] I. DIDI, H. DIB, B.CHERKI, *A Luenberger-type observer for the AM2 model*, Journal Of Process Control, 32, 117-126, 2015.
- [18] G. Bastin, D. Dochain, *On Line Estimation and Adaptive Control Of Bioreactors*. Elsevier, Amsterdam. (1990)
- [19] HADJ-SADOK, M. Z. et GOUZÉ, J. L. *Estimation of uncertain models of activated sludge processes with interval observers*. Journal of Process Control, 2001, vol. 11, no 3.
- [20] R.E. Kalman, "A new approach to linear filtering and prediction problems", J. Basic Eng., vol. 82, March 1960.
- [21] Ph. Bogaerts, *A hybrid asymptotic-Kalman observer for bioprocesses*. Bioprocess Engineering 20, 1999.
- [22] V Lemesle, JL Gouzé, *Bioprocess and Biosystems Engineering*, Springer, 2005.
- [23] P. ROUCHON, *Symmetry preserving asymptotic observers : theory and examples*, 2nd Mediterranean Conference on Intelligent Systems and Automation (CISA09), Zarzis, Tunisia, March 23-25, 2009.
- [24] J. HARMAND, *Contribution à l'analyse et au contrôle des systèmes biologiques : application aux bioprocédés de dépollution*, habilitation à diriger des recherches, Université Claude Bernard, 2004.
- [25] J. HESS, *Modélisation de la qualité de biogaz produit par un fermenteur méthanogène et stratégie de régulation en vue de sa valorisation*, thèse de doctorat, Université de Nice - Sophia Antipolis, 2007.
- [26] V. LEMESLE, *Modélisation mathématique structurée de la croissance cellulaire en chemostat : analyse et estimation*, thèse de doctorat, Université de Nice - Sophia Antipolis, 2004.
- [27] Y. DAOUD, *Analyse de modèles de la digestion anaérobie : Application à la modélisation et au contrôle des bioréacteurs*, thèse de doctorat, Université de Montpellier, 2018.
- [28] E. Tilley, L. Ulrich, C. Lüthi, P. Reymond, R. Schertenleib, C. Zurbrügg, *Compendium of Sanitation Systems and Technologies*. 2nd Revised Edition. Swiss Federal Institute of Aquatic Science and Technology (Eawag). Dübendorf, Switzerland, 2014. Edition française 2016.
- [29] <https://www.ecophylle.org/l-accompagnement-de-demarches-3/53-fiches-resources/812-la-technique-du-lagunage>

## Résumé

La finalité de ce mémoire d'ingénieur est la synthèse d'observateurs invariants pour le modèle du AM2. Ce modèle est un modèle de la digestion anaérobie dont l'application peut prendre plusieurs formes et dont quelques unes sont citées dans l'introduction générale.

Étant un modèle à deux étapes, il utilise deux modèles de cinétiques de croissances. Ses étapes et ses cinétiques de croissance ont été définies pour pouvoir établir le modèle, ses points d'équilibre et établir leurs existences et leurs stabilités. Pour bien installer le modèle AM2 et passer à la synthèse d'observateur, le modèle a été simulé autour de ses points d'équilibres suivi d'une simulation pour tracer le diagramme opératoire permettant de visualiser les zones d'existence et de stabilité des points d'équilibres. Enfin une analyse mathématique a été faite pour vérifier que les états du modèle obéissent aux lois biologiques.

La synthèse d'observateurs invariants pour le modèle AM2 a été introduite par la définition de l'invariance au sens des groupes suivie de la forme générale d'un pré-observateur invariant. Puis une vérification de l'observabilité et de l'invariance du modèle AM2 a été faite et à la fin du projet le pré-observateur invariant a été posé, sa convergence a été prouvée et il a été mis à l'épreuve avec des simulations ayant en entrée un signal persistant et différents bruits.

## Abstract

The purpose of this engineering thesis is the synthesis of invariant observers for the AM2 model. This model is a model of anaerobic digestion whose application can take several forms and some of which are cited in the general introduction.

Being a two-stage model, it uses two models of growth kinetics. Its stages and growth kinetics have been defined in order to establish the model, its equilibrium points and establish their existence and stability. To install the AM2 model and to pass to the synthesis of observer, the model was simulated around its points of equilibrium followed by a simulation to draw the operating diagram allowing to visualize the zones of existence and stability of the points of equilibrium. Finally, a mathematic analysis was made to verify that the states of the model obey the biological laws.

The synthesis of invariant observers for the AM2 model was introduced by the definition of invariance in the sense of groups followed by the general form of an invariant pre-observer. Then a verification of the observability and invariance of the AM2 model was done and at the end of the project the invariant pre-observer was posed, its convergence was proved and it was tested with simulations having in input a persistent signal and different noises.

## ملخص

الغرض من هذه الرسالة الهندسية هو تليفق جهاز استشعاري ميرمج خاضع لنظرية الثوابت لنموذج AM2. هذا النموذج هو نموذج للهضم اللاهوائي، والذي يمكن أن يتخذ تطبيقه عدة أشكال، بعضها مذكور في المقدمة العامة. كونه نموذجاً من خطوتين، فإنه يستخدم نموذجين حركيين للنمو. تم تحديد مراحل وحركية نموه للقدرة على تأسيس النموذج ونقاط توازنه وإثبات وجودها واستقرارها. لتثبيت نموذج AM2 بشكل صحيح والانتقال إلى تليفق الجهاز الاستشعاري المبرمج، تمت محاكاة النموذج حول نقاط توازنه متبوعة بمحاكاة لرسم مخطط التشغيل مما يجعل من الممكن تصور مناطق الوجود واستقرار النقاط. أخيراً، تم إجراء تحليل رياضي للتحقق من أن حالات النموذج تخضع للقوانين البيولوجية. تم تقديم الجهاز الاستشعاري المبرمج الخاضع لنظرية الثوابت لنموذج AM2 من خلال تعريف الثوابت بمعنى المجموعات متبوعاً بالشكل العام للجهاز المبرمج الخاضع لنظرية الثوابت. ثم تم التحقق من قابلية الملاحظة والثبات في النموذج AM2 وفي نهاية المشروع تم تعيين الجهاز الاستشعاري المبرمج المسبق، وتم إثبات تقاربه وتم اختباره مع عمليات المحاكاة التي تحتوي على إشارات متغيرة في المدخل و في بيئات صاخبة.