



Mémoire de fin d'étude

Pour l'obtention du diplôme de Master

Filière : Automatique
Spécialité : Automatique

Présenté par :
Abderrahmane AOUIMEUR et Toufik AISSAOUI

Thème

Application d'observateurs non linéaires sur le
modèle AM2

Soutenu publiquement, le 26 / 10 /2020, devant le jury composé de :

Dr. Fayçal ARICHI	MCB	ESSA. Tlemcen	Président
Dr. Boumediene BENYAHIA	MCA	Univ. de Tlemcen	Directeur de mémoire
Dr. Ibtisem DIDI ep BEMMOUSSAT	MCB	ESSA. Tlemcen	Co-Directeur de mémoire
Dr. Amel GHOUALI ep BEJAOU	MCB	ESSA. Tlemcen	Examineur 1
Dr. Rida MOKHTARI	MCB	ESSA. Tlemcen	Examineur 2

Année universitaire: 2019 / 2020

Dédicaces

Nous dédions ce mémoire à nos chers parents qui nous ont éclairé notre chemin et qui nous ont encouragé et soutenu tout au long de nos études.

A tous les membres de nos familles.

A tous nos amis, pour leur soutien aux moments difficiles de notre travail.

Abderrehmen AOUIMER

Toufik AISSAOUI

Remerciements

Nos remerciements s'adressent en premier lieu à notre Dieu pour avoir données l'esprit et les moyens pour arriver à ce stade de connaissance, nous le prions pour que nous restions fidèles à lui.

Nous exprimons toute notre gratitude à notre encadrant Mr Boumediène BENYAHIA pour l'effort fourni, les conseils prodigués, sa patience et sa persévérance dans le suivi. Il n'a jamais cessé de nous encourager, conseiller et guider pour atteindre nos objectifs scientifiques et éthiques.

Nous tenons à remercier également notre Co-encadrante Mme Ibtissem DIDI ep BENMOUSSAT, à qui nous avons demandé depuis notre deuxième année préparatoire de nous procurer un sujet et de nous mettre en contact avec un encadreur compétant et distingué par ses qualités humaines et professionnelles dans son travail. Sans elle nous n'aurions jamais eu l'honneur de rencontrer le premier dirigeant de notre travail.

Nous remercions très sincèrement, les membres de jury d'avoir bien accepté de juger ce travail.

Nous tenons à remercier le directeur de l'école, M. Boucherit ROUISSAT et l'ancien directeur M. Brahim CHERKI, qui ont veillé à offrir une excellente formation aux élèves de l'école dans les meilleures conditions.

Nous remercions notre cher ami M. Mohamed Radjeb OUDAINIA, qui nous a fourni des conseils moraux, des encouragements et un soutien non seulement dans ce travail mais aussi durant l'université.

Nous tenons également à remercier tous nos collègues d'étude dans notre école pour leur soutien, leur motivation, leurs ambiances et bien sûr le bon temps et les bons souvenirs dans tout notre parcours universitaire.

Nos remerciements vont enfin à toute personne qui a contribué de près ou de loin à l'élaboration de ce travail.

Table des matières

1	Rappel du système AM2 et des principes généraux	10
1.1	introduction	10
1.2	Intérêt de la modélisation mathématique pour les écosystèmes et les bioprocédés	10
1.3	Le modèle AM2	11
1.4	Équilibres du modèle AM2	13
1.5	Simulation du modèle AM2	14
1.6	Conclusion	17
2	État de l'art sur les observateurs appliqués aux bioprocédés	18
2.1	Introduction	18
2.2	Principe des observateurs	18
2.2.1	Observabilité	19
2.3	Observateurs non linéaires	20
2.3.1	Observateur de Luenberger étendu	20
2.3.2	Filtre de Kalman étendu	20
2.3.3	Observateur à grand gain	21
2.3.4	Observateur asymptotique	22
2.3.5	Observateur hybride entre le filtre de Kalman étendu et l'observateur asymptotique	23
2.3.6	Observateurs par intervalles	23
2.3.7	Observateurs invariants	24
2.3.8	Observateur non linéaire de Luenberger à dynamique d'erreur linéaire	26
2.4	Conclusion	26
3	Observateurs pour le modèle AM2	27
3.1	Modèle général	27
3.2	Observateur asymptotique	28
3.2.1	Synthèse d'observateurs asymptotique	28
3.3	Observateur par intervalles	30

3.3.1	Synthèse d'observateur par intervalles	30
3.4	Application au modèle AM2	31
3.4.1	Observabilité du modèle AM2	31
3.4.2	Observateur asymptotique	32
3.4.3	Résultats de simulation	33
3.4.4	Étude de la robustesse de l'observateur asymptotique	36
3.4.5	Observateur par intervalle	38
3.4.6	Résultats de simulation	39
3.4.7	Étude de la robustesse de l'observateur par intervalles	40
3.5	Étude comparative des observateurs	41
3.6	Conclusion	42

Liste des tableaux

1.1	Valeurs indicatives des paramètres cinétiques du modèle AM2	13
1.2	S'il y a lessivage de x_1	14
1.3	S'il n'y a pas lessivage de x_1	14
1.4	Valeurs indicatives des paramètres du modèle AM2	15
1.5	Les condition initiales	15
3.1	Les condition initiales de l'observateur asymptotique	33
3.2	Les condition initiales de l'observateur par intervalles	39

Table des figures

1.1	schéma représentatif des étapes du modèle AM2	12
1.2	Cinétique de Monod	13
1.3	Cinétique de Haldane	13
1.4	Le taux de dilution	15
1.5	La concentration du substrat s_1	16
1.6	La concentration du substrat s_2	16
1.7	La concentration de la biomasse x_1	16
1.8	La concentration de biomasse x_2	17
2.1	Principe de l'observateur	19
3.1	Le taux de dilution	34
3.2	Concentration de x_1 et son estimation \hat{x}_1	34
3.3	Erreur correspondant à la biomasse x_1	35
3.4	Concentration de x_2 et son estimation \hat{x}_2	35
3.5	Erreur correspondant à la biomasse x_2	36
3.6	Concentration de la biomasse x_1 et son estimation \hat{x}_1 en présence de sortie bruité	37
3.7	Erreur correspondant à la biomasse x_1	37
3.8	Concentration de la biomasse x_2 et son estimation \hat{x}_2 en présence de sortie bruité	38
3.9	Erreur correspondant à la biomasse x_2	38
3.10	Le taux de dilution	39
3.11	Concentration de la biomasse x_1 avec l'observateur par intervalles . . .	39
3.12	Concentration de la biomasse x_2 avec l'observateur par intervalles . . .	40
3.13	Concentration de la biomasse x_1 avec des perturbation en sortie de s_1 . . .	40
3.14	Concentration de la biomasse x_2 avec des perturbation en sortie de s_2 . . .	41
3.15	Concentration de la biomasse x_1 avec les estimations des observateurs . . .	41
3.16	Concentration de la biomasse x_2 avec les estimations des observateurs . . .	42

Introduction générale

Environ 1,1 milliard de personnes dans le monde n'ont toujours pas accès à l'eau potable et 400 enfants (de moins de 5 ans) meurent toutes les heures cause des eaux polluées [1]. L'eau domestique dans le monde est très inégale. Avec l'amélioration du niveau de vie des populations, les pays industrialisés sont plus importants. Ces pays gaspillent les ressources en eau d'innombrables façons, loin devant les autres pays. Face au problème de manque d'eau et de pollution, une technique est imposée : traiter les eaux usées par voie biologique (digestion aérobie ou anaérobie) et réutiliser les eaux pures.

Dans ce mémoire, nous nous intéressons à la digestion anaérobie, qui présente plus d'avantages que la digestion aérobie, notamment la production de biogaz (méthane) et la faible production de boues. L'un des modèles de la digestion anaérobie le plus connu est le modèle ADM1 (Anaerobic Digestion Model N1), ce modèle est le plus complet mais malheureusement le plus complexe, et donc non dédié pour faire du contrôle automatique. Il existe un autre modèle de digestion anaérobie plus simple, qui décrit le processus de digestion anaérobie en deux étapes :

1. la production des acides gras volatiles (AGV) à partir de la matière organique.
2. conversion des AGV en biogaz.

Dans le cadre du projet de recherche AMOCCO, un modèle appelé **AM2** (Acidogenèse-Méthanogenèse 2 étapes) a été développé, qui considère deux processus biologiques et quatre variables d'état principales s_1 , x_1 , s_2 et x_2 . Le modèle **AM2** est principalement basé sur des données expérimentales et prouve son efficacité à fournir un contrôle automatique des processus au niveau de la simulation et de l'expérimentation. Dans le cadre de notre master, nous proposons d'appliquer quelques observateurs sur le modèle **AM2** dont le but d'estimer x_1 et x_2 à partir des sorties mesurées s_1 et s_2 . Ensuite, nous allons simuler chacun des observateurs, voir et tester leurs robustesse face à des bruits de mesures de type bruit blanc. A la fin, une comparaison entre ces observateurs sera mise au point.

Ce rapport est constitué des chapitres suivants :

Chapitre 1 : On parle de l'intérêt de la modélisation mathématique. Puis, on introduit le modèle AM2 et on calcule ses points d'équilibres avec les simulation.

Chapitre 2 : Nous allons présenter un état de l'art sur les observateurs qui ont été appliqués aux modèles de bioprocédés.

Chapitre 3 : Nous allons appliquer deux types d'observateurs, le premier est l'observateur asymptotique et le second et l'observateur par intervalle. Nous allons par la suite étudier la robustesse de chacun et faire à la fin une étude comparative entre les deux observateurs.

Évidemment, nous terminerons notre mémoire par une conclusion générale et des quelques perspectives

Chapitre 1

Rappel du système AM2 et des principes généraux

1.1 introduction

Dans le but d'utiliser les capteurs logiciels, il est essentiel de connaître les principes généraux du modèle à étudié et son fonctionnement. Dans ce chapitre nous allons définir le modèle **AM2** avec une analyse mathématique de ce dernier.

1.2 Intérêt de la modélisation mathématique pour les écosystèmes et les bioprocédés

Un modèle mathématique est une traduction d'une observation d'un système physique en schéma fonctionnel ou en équations mathématiques, dans le but de faire une analyse du comportement du système et de lui appliquer un contrôle automatique.

Aujourd'hui, les ingénieurs et techniciens doivent souvent faire face à des problèmes mal définis et des centaines de tests lors de la conception de leurs systèmes avant de les mettre en service. Dans ce contexte, les modèles développés pour les systèmes permettent de faire des simulations numériques des différents comportements du système sous différentes conditions de fonctionnement. Dans le monde des écosystèmes en général et des bioprocédés en particulier, la modélisation mathématique joue un rôle primordial résumé dans les points suivants :

- mieux faire la conception et le dimensionnement du système (bioprocédé).
- analyser le comportement sous différentes conditions de fonctionnement (étude stabilité des équilibres possibles).
- prédire l'extinction, l'existence et la coexistence des espèces microbiennes. Ceci est très important lors de l'étude des écosystèmes maritimes ou forestiers par

exemple, pour estimer le nombre ou la quantité d'une espèce donnée ou l'avenir d'une espèce vulnérable.

- mieux caractériser le fonctionnement du système en fonction des paramètres opératoires (paramètres de contrôle). Ceci permettrait à l'opérateur de mieux prendre les décisions et les actions

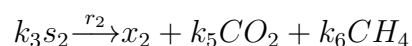
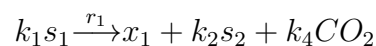
1.3 Le modèle AM2

Des modèles réduits qui peuvent être utilisés pour le contrôle sont disponibles dans la littérature ; ils comprennent l'**AM2** qui est un bon compromis entre la complexité d'un modèle et sa correspondance avec l'information expérimentale disponible. Étant donné que dans plusieurs applications de l'industrie le processus est non linéaire, il est important que cette caractéristique soit préservée. Dans ce sens, l'originalité de notre approche est d'utiliser le modèle **AM2** et de conserver les caractéristiques non linéaires et les équations d'équilibre qui sont bien connues en biotechnologie pour arriver à un modèle réduit non linéaire simple. Cette approche utilise évidemment des approches systématiques que nous avons traitées jusqu'à présent.

Le modèle **AM2** a été développé dans le cadre du projet Européen *AMOCO* et comme l'**ADM1**, il est basé sur la loi de bilan de matières. Ce modèle considère deux processus biologiques (deux étapes) représentés dans la figure 1.1, deux substrats et deux populations bactériennes. Dans la première étape d'acidogénèse, la biomasse acidogène x_1 consomme le substrat organique s_1 et produit les acides gras volatiles **AGV** (s_2) et le CO_2 . Dans la deuxième étape de méthanogénèse, la biomasse méthanogène x_2 consomme les **AGV** et produit du méthane CH_4 et du dioxyde de carbone CO_2 .

Avantage du modèle **AM2** : conserve le sens physique des variables, contient le minimum de variables d'état principales, capable de simuler le comportement macroscopique du processus (digestion anaérobie), facile d'un point de vue mathématique pour faire du contrôle automatique.

Voici les schémas réactionnels définissant le modèle **AM2** :



Avec r est la vitesse de réaction définie par :

$$r = \mu(\cdot)x$$

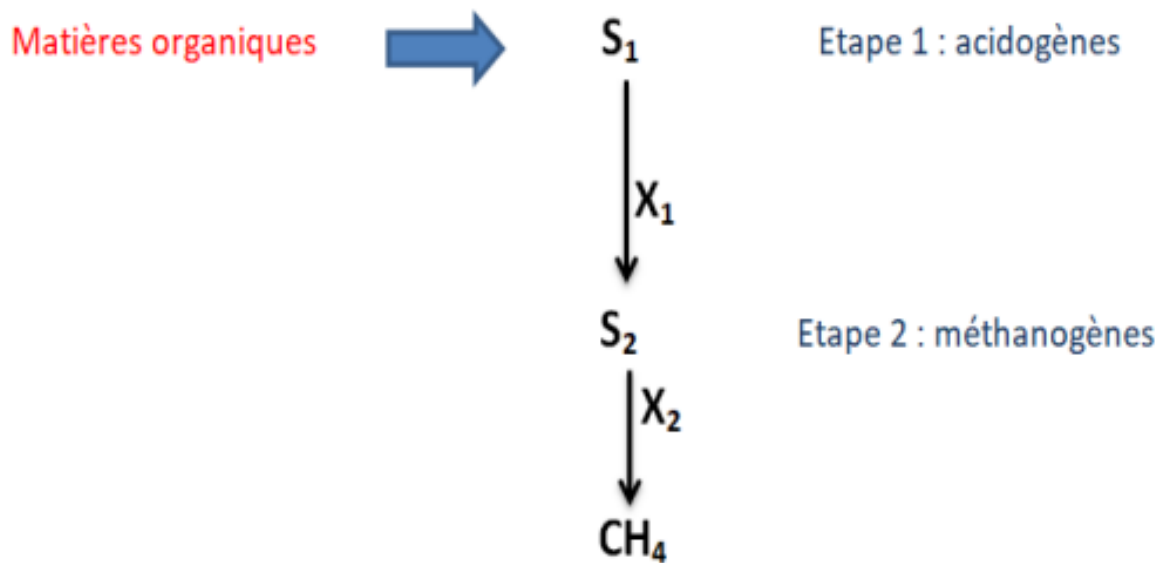


FIGURE 1.1 – schéma représentatif des étapes du modèle AM2

Ainsi, en appliquant la loi de bilan de matières, le modèle **AM2** s'écrit comme suit :

$$\begin{cases} \dot{s}_1 = D(t)(s_{1in} - s_1) - k_1\mu_1(s_1)x_1 \\ \dot{x}_1 = (\mu_1(s_1) - D(t))x_1 \\ \dot{s}_2 = D(t)(s_{2in} - s_2) + k_2\mu_1(s_1)x_1 - k_3\mu_2(s_2)x_2 \\ \dot{x}_2 = (\mu_2(s_2) - D(t))x_2 \end{cases}$$

Où :

s_1 : la concentration du premier substrat.

x_1 : la concentration de la première biomasse.

s_2 : la concentration du second substrat.

x_2 : la concentration de la seconde biomasse.

D : le taux de dilution.

s_{1in} : le débit d'entrée de la première biomasse.

s_{2in} : le débit d'entrée de la seconde biomasse.

k_1, k_2 et k_3 : des coefficients stoechiométriques.

μ_1 et μ_2 : les cinétiques de croissances de Monod et de Haldane respectivement, définies par les expressions suivantes :

$$\mu_1(s_1) = \mu_{1max} \frac{s_1}{s_1 + K_1}$$

$$\mu_2(s_2) = \mu_{2max} \frac{s_2}{s_2 + K_2 + \frac{s_2^2}{K_i}}$$

Avec

μ_{1max} et μ_{2max} sont les taux de croissance maximaux des cinétiques de Monod et de Haldane respectivement.

K_1 et K_2 sont des constantes de demi saturation et K_i est la constante d'inhibition.

Pour tracer les allures des deux cinétiques, on prend les valeurs des paramètres [2] mentionnées dans le tableau (1.1).

Paramètres	Valeurs	Unités
K_1	7.1	Kg COD/ m^3
K_2	9.28	mol VFA/ m^3
K_i	80	mol VFA/ m^3
μ_{1max}	0.5	jour ⁻¹
μ_{2max}	0.74	jour ⁻¹

TABLE 1.1 – Valeurs indicatives des paramètres cinétiques du modèle AM2

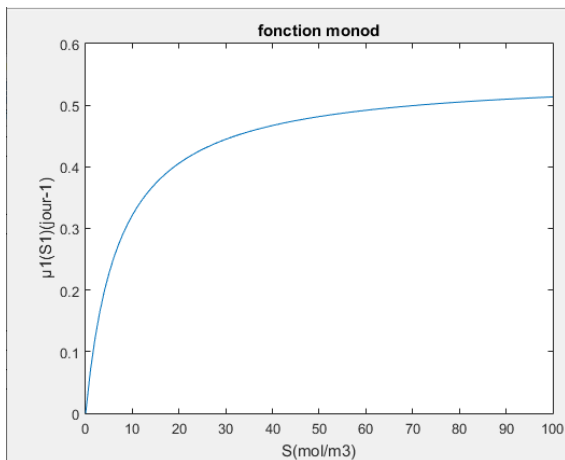


FIGURE 1.2 – Cinétique de Monod

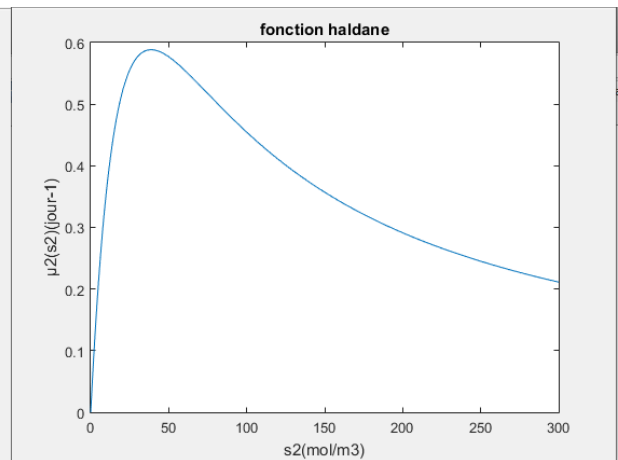


FIGURE 1.3 – Cinétique de Haldane

1.4 Équilibres du modèle AM2

On note un point d'équilibre par la notation suivante :

$$E_i = (s_1^*, x_1^*, s_2^*, x_2^*)$$

Les équilibres s'obtiennent en mettant les dérivées égales à 0, c'est-à-dire

$$\begin{cases} D(s_{1in} - s_1) - k_1\mu_1(s_1)x_1 = 0 \\ (\mu_1(s_1) - D)x_1 = 0 \\ D(s_{2in} - s_2) + k_2\mu_1(s_1)x_1 - k_3\mu_2(s_2)x_2 = 0 \\ (\mu_2(s_2) - D)x_2 = 0 \end{cases}$$

Dans ce type de modèle on obtient 6 points d'équilibres qui sont résumé dans les deux tableaux 1.2 et 1.3 :

$s_{1in} < s_1$	E_0	E_1	E_2
$s_{2in} < s_2^1$	S		
$s_2^1 < s_{2in} < s_2^2$	I	S	
$s_2^2 < s_{2in}$	S	S	I

TABLE 1.2 – S'il y a lessivage de x_1

$s_{1in} > s_1$	E_0	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5
$s_{2in}^* < s_2^1$	I			S		
$s_{2in} < s_2^1 < s_{2in}^* < s_2^2$	I			I	S	
$s_{2in} < s_2^1 < s_2^2 < s_{2in}^*$	I			S	S	I
$s_2^1 < s_{2in} < s_{2in}^* < s_2^2$	I	I		S		
$s_2^1 < s_{2in} < s_2^2 < s_{2in}^*$	I	I		I	S	
$s_2^1 < s_2^2 < s_{2in}$	I	I	I	S	S	I

TABLE 1.3 – S'il n'y a pas lessivage de x_1

1.5 Simulation du modèle AM2

Les simulations sont faites pour les valeurs des paramètres fournies dans [15] et donnés par le tableau (1.4). Les conditions initiales sont donnés dans [4] et motionnés par le tableau (1.5).

Les simulations sont faite dans un intervalle de temps de 50 jours.

Paramètres	Valeurs	Unités
k_1	42.14	Kg COD/Kg
k_2	116.5	mol VFA/Kg
k_3	268	mol VFA/Kg
K_1	7.1	Kg COD/ m^3
K_2	9.28	mol VFA/ m^3
K_i	256	mol VFA/ m^3
μ_{1max}	1.2	jour ⁻¹
μ_{2max}	0.74	jour ⁻¹
s_{1in}	15	Kg / m^3
s_{2in}	80	mol / m^3

TABLE 1.4 – Valeurs indicatives des paramètres du modèle AM2

	$s_1(0)$	$x_1(0)$	$s_2(0)$	$x_2(0)$
Valeurs	3	0.5	15	0.12

TABLE 1.5 – Les condition initiales

Dans notre travaille nous considérons le taux de dilution variable comme le montre la figure (1.4).

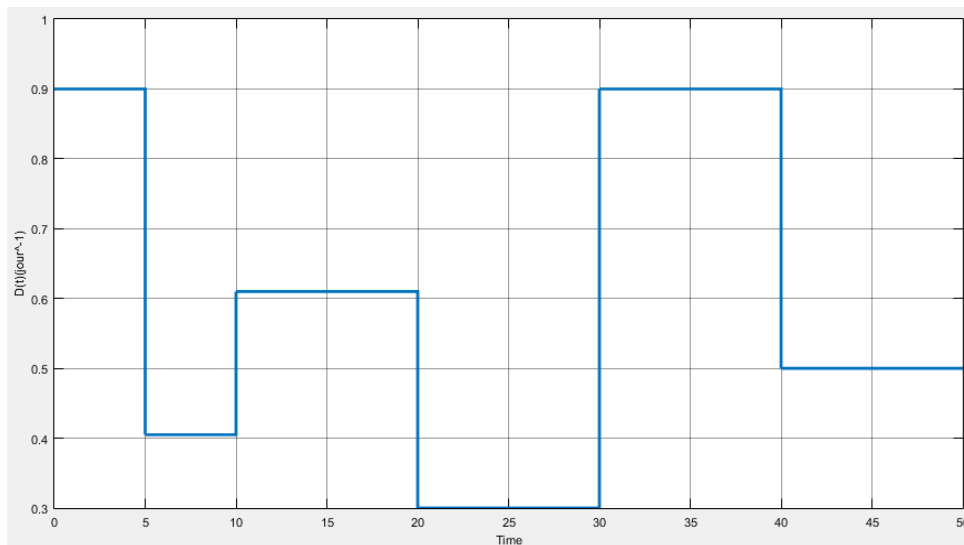


FIGURE 1.4 – Le taux de dilution

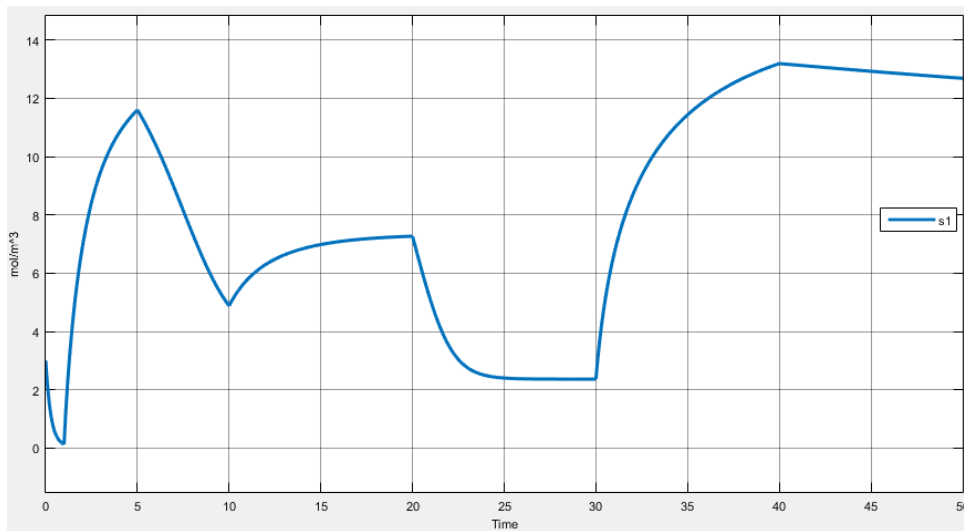


FIGURE 1.5 – La concentration du substrat s_1

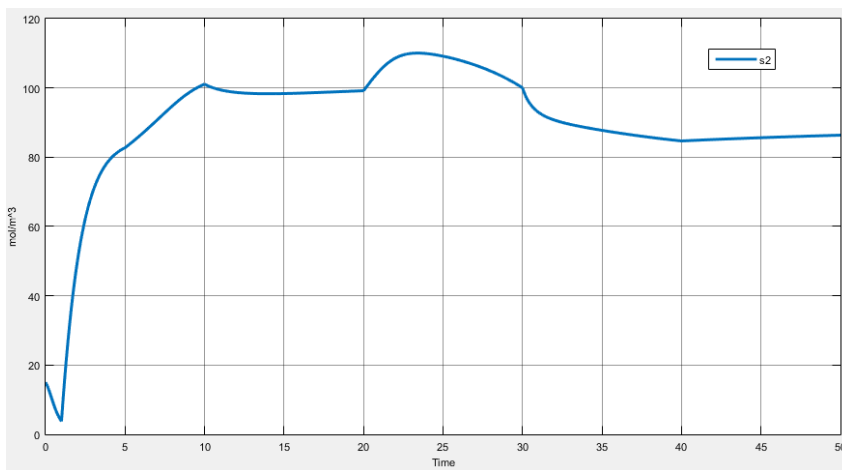


FIGURE 1.6 – La concentration du substrat s_2

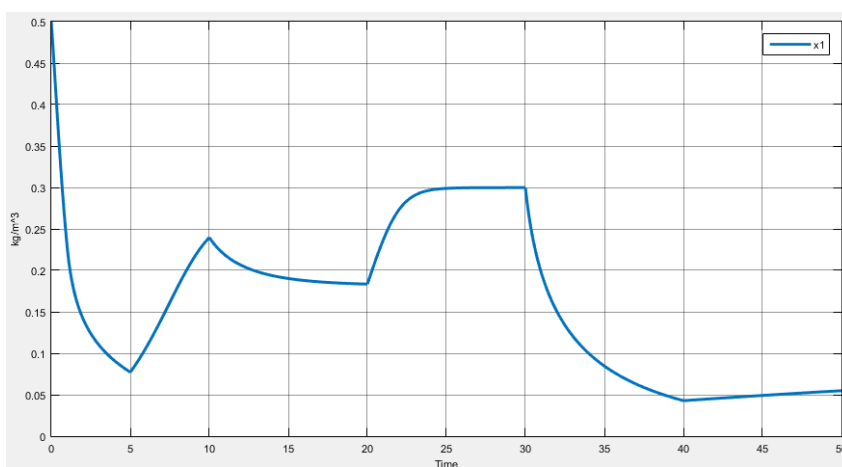


FIGURE 1.7 – La concentration de la biomasse x_1

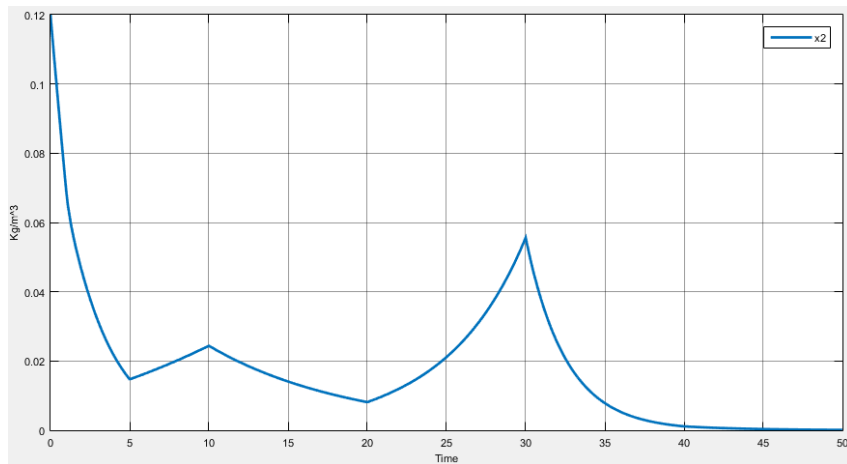


FIGURE 1.8 – La concentration de biomasse x_2

Au stade de l'acidogénèse, les bactéries productrices d'acide x_1 utilisent la matière organique s_1 comme le montre les graphes (1.5) et (1.7), plus la concentration de substrat s_1 diminue plus la concentration de biomasse x_1 augmente.

Au stade de la méthanogénèse, les bactéries productrices de gaz x_2 utilisent la matière organique s_2 pour la convertir en méthane CH_4 et en dioxyde de carbone CO_2 ce qui est montré dans les figures (1.6) et (1.8), la concentration du substrat s_2 est inversement proportionnelle à la concentration de la biomasse x_2 .

1.6 Conclusion

Dans ce chapitre le modèle AM2 est un modèle à 4 dimensions, 6 points d'équilibre et plusieurs points de stabilité donc le choix d'observateur doit être bien étudié.

Chapitre 2

État de l'art sur les observateurs appliqués aux bioprocédés

2.1 Introduction

Dans un processus biologique, la mesure directe d'une variable peut être une concentration des composants pendant la réaction, une fonction chimique ou des paramètres de réponse biologique, tels que le rendement, le taux de croissance, etc. Besoin de capteurs physiques, cet itinéraire serait difficile, voire parfois impossible surtout parce que les coûts sont généralement très chers. Dans ce cas, nous utilisons un capteur logiciel également appelé *observateur*. Ce type d'observateurs logiciels est largement utilisé dans les bioprocédés.

2.2 Principe des observateurs

Soit le système dynamique non linéaire décrit par :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) \\ y(t) = h(x(t), u(t)) \end{cases} \quad (2.2.1)$$

où : $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ et $h : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^p$.

L'exécution de commande par retour d'état $u(t)$ nécessite des capteurs pour qu'une valeur approximative de l'état $x(t)$ puisse être donnée à chaque instant t . Deux types de capteurs différents sont utilisés : le premier est un capteur physique sous forme d'instrument. Ces capteurs sont parfois trop chers ou difficiles à réaliser pour des raisons techniques. Par conséquent, nous avons été guidés pour concevoir le deuxième type de capteur dit capteur logiciel, généralement appelé observateur. Il s'agit d'algorithmes basés sur des modèles mathématiques en utilisant des informations pertinentes four-

nies par des capteurs physiques. Ces capteurs logiciels peuvent estimer à tout moment les variables d'état non mesurées du système en ligne comme le montre la figure (2.1).

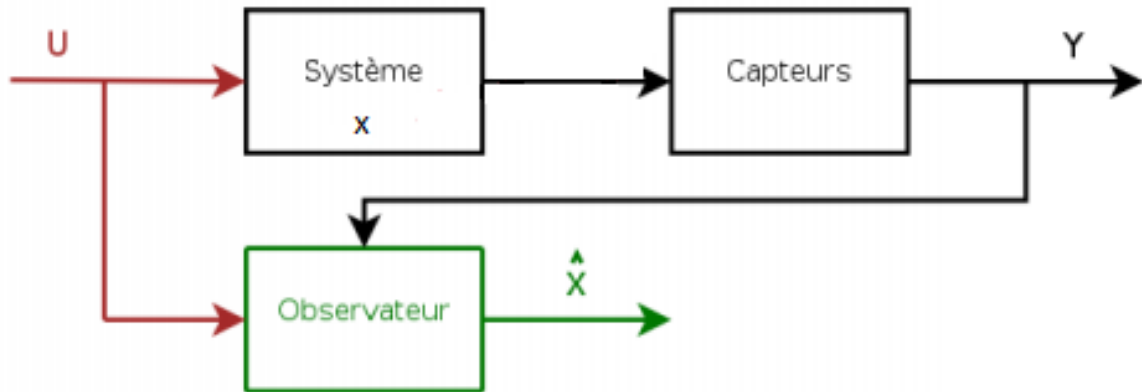


FIGURE 2.1 – Principe de l'observateur

L'état est estimé par copie virtuelle de la dynamique du système, en considérant non seulement la commande u , mais également la sortie (valeur mesurée) y du système afin de corriger les écarts.

Avant de commencer le processus de conception d'observateurs pour un système dynamique, il est important et nécessaire de s'assurer que l'état du système dynamique peut être estimé à partir des informations d'entrée et de sortie, en d'autre terme vérifie l'observabilité du système. L'observabilité du système est l'attribut qui permet de dire si l'état ne peut être déterminé qu'en fonction de la connaissance des signaux d'entrée et de sortie. Pour les systèmes non linéaires, la définition est liée aux conditions d'entrée et initiales [3].

2.2.1 Observabilité

Définition 1 (Indistinguabilité) : Soient $y_u^0(t), (t \geq 0)$ et $y_u^1(t), (t \geq 0)$ deux signaux de sortie générés par l'application du signal d'entrée $u(t), (t \geq 0)$ au système avec les conditions initiales x^0 et x^1 , respectivement. On dit que x^0 et x^1 sont indistinguables si

$$y_u^0(t) = y_u^1(t), \forall t \geq 0 \text{ pour toute entrée } u$$

Définition 2 (Observabilité) : Le système est dit observable en x^0 , si x^0 est distinguable de tout $x \in \mathbb{R}^n$. En outre, le système est observable si $\forall x \in \mathbb{R}^n$, le système est observable en x^0 .

Deux grands types d'observateurs sont utilisés : les observateurs linéaires et les observateurs non linéaires, d'où l'application de ce dernier fera l'objet de notre étude.

2.3 Observateurs non linéaires

Au départ, le système utilisé était un système linéaire, pour lequel les observateurs de Kalman et Luenberger ont donné de bons résultats. La synthèse d'observateurs non linéaires est plus complexe et reste un domaine de recherche actif. Dans cette partie, on va présenter l'historique des observateurs appliqués aux bioprocédés. Ces derniers ont été proposés au départ par G. Bastin, D. Dochain en 1990 [5].

2.3.1 Observateur de Luenberger étendu

Son principe est directement inspiré de la situation linéaire. L'observateur Luenberger étendu nécessite des connaissances du modèle, y compris la dynamique et les entrées du système.

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t)); x(t_0) = x_0 \\ y(t) = h(x(t)) \end{cases}$$

Où $x \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur d'état, $u \in \mathbb{R}^m$ est le vecteur d'entrée, $y \in \mathbb{R}^p$ est le vecteur de sortie, x_0 est la condition initiale à l'instant initial t_0 , $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ et $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$. La synthèse de l'observateur de Luenberger étendu basée sur le système donne lieu à la structure suivante :

$$\dot{\hat{x}}(t) = f(\hat{x}(t), u(t)) + K[y(t) - h(\hat{x}(t))]; \hat{x}(t_0) = \hat{x}_0$$

En supposant que l'état restera près de la zone où le modèle linéaire est approximativement valide et où le placement des pôles a été effectué. Bien que cette méthode soit bien maîtrisée, elle est rarement utilisée en bioprocédés, car si l'observateur quitte le point de fonctionnement deviendra rapidement instable, ce qui signifie que la stabilité et la convergence sont locales.

2.3.2 Filtre de Kalman étendu

L'idée est de linéariser le système non linéaire autour de sa trajectoire estimée. Alors le problème équivaut à construire un filtre de Kalman Système non stationnaire. Considérons le système non linéaire autonome suivant :

$$\dot{x}(t) = f(x(t)) + \omega(t); x(t_0) = x_0$$

$$y(t) = h(x(t)) + v(t)$$

- $\omega(t)$ et $v(t)$ sont des bruits blancs avec des covariances $Q(t)$ et $R(t)$, respectivement. Supposons que la distribution initiale est Gaussienne, telle que :

$$E[x_0] = \hat{x}_0; E((x_0 - \hat{x}_0)(x_0 - \hat{x}_0))^T = P_0 \quad (2.3.1)$$

- E représente l'espérance mathématique et P_0 est la matrice de covariance initiale de l'erreur

L'algorithme de filtre de kalman consiste en :

- Initialisation :

$$\dot{x}(t) = f(x(t)) + \omega(t); x(t_0) = x_0$$

- Estimation du vecteur d'état :

$$\dot{\hat{x}}(t) = f(\hat{x}(t)) + K[y(t) - h(\hat{x}(t))]; \hat{x}(t_0) = \hat{x}_0$$

- Avec les matrices de linéarisée sont :

$$A(t) = \left. \frac{\partial f(x(t))}{\partial x(t)} \right|_{x(t)=\hat{x}(t)} \quad C(t) = \left. \frac{\partial h(x(t))}{\partial x(t)} \right|_{x(t)=\hat{x}(t)}$$

- Calcul de gain K :

$$K(t) = P(t)C^T R(t)^{-1}$$

2.3.3 Observateur à grand gain

En 1992, Ces observateurs ont été mis en forme par Gauthier et *al.* [6]. Tenant compte de la structure non linéaire du système, ils assurent la convergence et la stabilité avec une vitesse de convergence réglable. Par contre, la synthèse de ces observateurs est complexe et sensible au bruit.

Principe : Rappelons brièvement la notion de l'observateur à grand gain pour un système en général. Considérons le système différentiel défini dans un domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^n$

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) \\ y = h(x) \end{cases} \quad (2.3.2)$$

- f est une fonction continue $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, h une fonction continue $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Pour construire un observateur à grand gain, des hypothèses doivent être vérifiées.

Hypothèses

1. Le système (2.3.2) est observable.

2. L'application Φ est défini comme suit : $\Phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, x \mapsto \begin{pmatrix} z_1 = y \\ z_2 = \dot{y} \\ \vdots \\ z_n = y^{(n-1)} \end{pmatrix}$ est un
difféomorphisme de $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ sur $\Phi(\Omega)$.

Sous l'hypothèse 2, le système (2.3.2) devient :

$$\begin{cases} \dot{z} = \begin{pmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \\ \vdots \\ \dot{z}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_2 \\ z_3 \\ \vdots \\ \varphi(z) \end{pmatrix} = F(z) \\ y = z_1 \end{cases} \quad (2.3.3)$$

3. φ peut être prolongée de $\Phi(\Omega)$ en une fonction C^∞ globalement Lipschitzienne sur \mathbb{R}^n .

Ces hypothèses sont vérifiées en général pour les systèmes biologiques. Ainsi nous obtenons l'observateur à grand gain.

Proposition : Pour un θ assez grand le système différentiel suivant (2.3.3) est un observateur exponentiel pour (2.3.2) :

$$\dot{\hat{z}} = F(\hat{z}) + S_\theta^{-1} C^T (y - Cz)$$

— S_θ est la solution de l'équation $\theta S_\theta + A^t S_\theta + S_\theta A = C^t C$ avec $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$

et $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$

2.3.4 Observateur asymptotique

En 1992, Chain [7] a proposé une extension d'observateur pour des systèmes plus complexes. La synthèse de l'observateur est assez simple car elle ne nécessite presque aucune connaissance du modèle cinétique, assurant ainsi la stabilité si l'entrée est persistante et limitée. Cependant, les inconvénients de cette méthode incluent l'incapacité d'ajuster le taux de convergence. De plus, cela dépend également du coefficient stoechiométrique. Par conséquent, ce n'est pas très fiable. Plus tard, Gouzé et al. [8] et [9] ont proposé un observateur où des fonctions plus puissantes peuvent

être obtenues grâce à des vitesses de convergence partiellement réglables.

2.3.5 Observateur hybride entre le filtre de Kalman étendu et l'observateur asymptotique

Le filtre étendu de Kalman et l'observateur asymptotique ont montré qu'ils sont en fait complémentaires, les avantages de l'un compense les inconvénients de l'autre et vice versa. Par conséquent, il existe une solution hybride entre les deux méthodes [10].

Principe : L'idée était d'introduire un degré de confiance ($0 \leq \zeta \leq 1$) dans le modèle cinétique. Ce nouveau paramètre sera estimé conjointement avec l'ensemble des autres états du système, l'estimateur constituant un filtre de Kalman étendu légèrement transformé. Pour $\zeta = 1$, l'estimateur correspondra rigoureusement au filtre de Kalman (et pourra donc tirer parti de la connaissance du modèle cinétique vis-à-vis duquel il a marqué sa confiance) et, pour $\zeta = 0$, il correspondra rigoureusement à un observateur asymptotique (qui n'utilise donc plus du tout le modèle cinétique vis-à-vis duquel il a marqué sa défiance).

2.3.6 Observateurs par intervalles

Ces observateurs devraient fournir de bonnes solutions pour les systèmes avec une plus grande incertitude. En fait, ce genre d'observateur est l'union de deux observateurs asymptotiques : l'un observe la borne inférieure de l'état et l'autre observe la borne supérieure du système. Il est nécessaire de connaître les limites d'incertitude du modèle. Si l'entrée est persistante et limitée, ces observateurs sont stables et convergents. Ils sont robustes aux entrées inconnues et la vitesse de convergence peut être partiellement ajustée [11].

Principe : L'idée est d'utiliser la plage dynamique d'incertitude connue : La plage dynamique d'incertitude du modèle est utilisée pour calculer (en Situation intéressante) La plage dynamique de la variable d'état à estimer. Considérez le système suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t), w(t); x(t_0) = x_0 \\ y(t) = h(x(t), u(t), v(t)) \end{cases} \quad (2.3.4)$$

- $x \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur d'état, $y \in \mathbb{R}^p$ est le vecteur de sortie, $u \in \mathbb{R}^m$ le vecteur d'entrée, x_0 est la condition initiale en t_0 , $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^n$ et $h : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^p$

Les quantités inconnues $w \in \mathbb{R}^r$ et $v \in \mathbb{R}^s$ sont des incertitudes caractérisées par leurs bornes supérieure et inférieure.

$$\begin{aligned} w^-(t) &\leq w(t) \leq w^+(t), \forall t \leq t_0 \\ v^-(t) &\leq v(t) \leq v^+(t), \forall t \leq t_0 \end{aligned}$$

En se basant sur la structure du modèle (2.3.4) et l'ensemble des variables connues, le système dynamique auxiliaire peut être construit comme suit :

$$\begin{cases} \dot{z}^- = f^-(t, z^-, z^+, u, y) \\ \dot{z}^+ = f^+(t, z^-, z^+, u, y) \\ x^- = h^-(t, z^-, z^+, u, y) \\ x^+ = h^+(t, z^-, z^+, u, y) \end{cases} \quad (2.3.5)$$

Cela signifie que si nous pouvons construire des conditions initiales inconnues, Incertitude $w(\cdot)$ Et $v(\cdot)$, Alors nous pouvons construire des variables non testées Recherche sur les systèmes dynamiques. Ces propriétés de cadre sont basées sur La nature coopérative des systèmes dynamiques. La théorie des systèmes coopératifs permet de comparer plusieurs solutions d'un système. Équations différentielles ordinaires. Considérons la synergie du système $x = f(x, t)$. Utilisez $\Phi(t, a)$ pour représenter la solution correspondant à la condition initiale a de $t = 0$ et $\Phi(t, b)$ correspondent à la solution de la condition initiale b de $t = 0$. Si $a \leq b$, alors la solution du système sera obtenue telle que $\Phi(t, a) \leq \Phi(t, b)$. La collaboration est définie comme suit :

Définition : Soit $x = f(x, t)$, ce système est dit coopératif si $\frac{\partial f_i}{\partial f_j}(t, x) \geq 0, \forall i \neq j$. Ce qui implique que si $x(0) \geq 0$ alors $x(t) \geq 0, \forall t \geq 0$

2.3.7 Observateurs invariants

P. Rouchon, S. Bonnabel et J. Martin ont proposé un nouveau type d'observateur non linéaire, appelé observateur invariant [12]. La synthèse de cet observateur est basée sur le concept de systèmes invariants, ces observateurs possèdent une forme canonique et une vitesse de convergence réglable. Ils ont été appliqués sans de nombreux domaines, en particulier sur des système de bioprocédés [4] et [13].

Considérons le système dynamique suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, u) \\ y = h(x, u) \end{cases} \quad (2.3.6)$$

- u est le vecteur d'entrée du système, x le vecteur d'état et y la sortie mesurée
- $x \in X \subset \mathbb{R}^n$, $u \in U \subset \mathbb{R}^m$ et $y \in Y \subset \mathbb{R}^p$.

Soit G un groupe de Lie de transformations, agissant sur X par $\phi_g : X \rightarrow X \forall g \in G$,

ϕ_g est un difféomorphisme (au moins C^1) sur X avec $(\phi_g)^{-1} = \phi_g^{-1}$ et $\phi_{g1} \circ \phi_{g2} = \phi_{g1.g2}$. Nous considérons aussi l'action du même groupe G sur U par $(\Psi_g)_{g \in G}$ et sur Y par $(\rho_g)_{g \in G}$.

définition : G est un groupe de symétries de (2.3.6) si, pour chaque solution $(x(t), u(t))$ de (2.3.6) et $\forall g \in G, (\phi_g(x(t)), \Psi_g(u(t)))$ est aussi une solution.

Par conséquent, le système (2.3.6) est dit invariant si et seulement si :

$$f(\phi_g(x), \Psi_g(u)) = D_{\phi_g}(x)f(x, u), \text{ pour tout } g, x \text{ et } u.$$

— D_{ϕ_g} est la matrice jacobienne de $\phi_g(x)$. La sortie y est dite equi-variante si et seulement si :

$$h(\phi_g(x), \Psi_g(u)) = \rho_g(h(x, u)), \text{ pour tout } g, x \text{ et } u.$$

Le système dynamique $\frac{d}{dt}\hat{x} = F(\hat{x}, u, \hat{y})$ est dit pré-observateur si et seulement si :

$$F(x, u, h(x, u)) = f(x, u), \text{ pour tout } x \text{ et } u.$$

Il est invariant si et seulement si :

$$F(\phi_g(\hat{x}), \Psi_g(u), \rho_g(\hat{y})) = D_{\phi_g}(\hat{x})F(\hat{x}, u, \hat{y}) \text{ pour tout } g, \hat{x}, u \text{ et } \hat{y}.$$

Forme générale d'un pré-observateur invariant

Pour construire un pré-observateur, nous avons besoin de deux éléments Important : Fonction scalaire invariante et champ vectoriel invariant.

Une fonction J définie sur $X \times U \times Y$, est dite invariante si et seulement si :

$$J(\phi_g x), \Psi_g(u), \rho_g(y)) = J(x, u, y) \text{ pour tout } g, x, u \text{ et } y$$

Un champ de vecteur w est dit invariant sur $X \subset \mathbb{R}^n$ si et seulement si :

$$w(\phi_g(x)) = D_{\phi_g}(x)w(x) \text{ pour tout } g \text{ et } x$$

Le système dynamique suivant :

$$\frac{d}{dt}x = f(\hat{x}) + \sum_i j_i(\hat{x}, y)w_i(\hat{x}) \quad (2.3.7)$$

Est l'observateur invariant du système (2.3.6), si on choisit Une fonction scalaire invariante de J_i satisfaisant $J_i(\hat{x}, h(\hat{x}, u)) = 0$ et w_i a Vecteur invariant. Cette formule re-

présente la forme générale du pré-observateur Si la constante pré-observateur (2.3.7) converge vers le modèle de \dot{x} , alors (2.3.7) est appelé un observateur invariant.

2.3.8 Observateur non linéaire de Luenberger à dynamique d'erreur linéaire

L'idée principale était de construire un observateur non linéaire avec une dynamique d'erreur linéaire. Cet observateur est facile à écrire, il a un caractère global de convergence et utilise une cinétique de croissance μ quelconque. Il est robuste face aux bruits de mesures avec une vitesse de convergence réglable. Un des inconvénients, est qu'il n'est valable que si la sortie est le substrat s [14].

2.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous nous limitons aux observateurs qui s'appliquent aux processus biologiques. Ensuite, nous allons appliquer quelques observateurs.

Chapitre 3

Observateurs pour le modèle AM2

Dans le déroulement d'un processus biologique l'extraction de la mesure des variables d'état est difficile et voire impossible. Dans ce cas là, nous avons besoin de capteurs physiques ou logiciels "observateurs". Dans ce chapitre nous allons appliquer deux types d'observateurs au modèle AM2.

3.1 Modèle général

Dans les bioprocédés, on définit le modèle comme un système d'équations différentielles :

$$\dot{x}(t) = C\phi(x(t), t) + A(t)x(t) + B(t) \quad (3.1.1)$$

où :

$x(t) \in \mathbb{R}^n$ représente le vecteur d'état, $C \in \mathbb{R}^{n \times r}$ représente la matrice des coefficients stoechiométriques, $A(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ représente la matrice d'état, $B(t) \in \mathbb{R}^n$ représente la matrice des entrées du système et $\phi(x(t), t) \in \mathbb{R}^r$ représente le vecteur de non-linéarité.

Les processus biologiques sont des systèmes complexes utilisés pour décrire les êtres vivants. Ces systèmes biologiques sont difficiles à gérer car les organismes peuvent être très sensibles même aux plus petits changements de l'environnement. En raison de sa dynamique incertaine, une description formelle est nécessaire pour synthétiser l'observateur. Par conséquent, les hypothèses suivantes sont introduites :

Hypothèse H1

1. $\phi(x(t), t)$ est inconnu.
2. $A(t)$ est connue pour chaque $t \geq 0$
3. m variables d'états sont mesurées en ligne.
4. C est connue.
5. $A(t)$ est bornée, il existe 2 matrices A^- et A^+ telle que $A^- \leq A(t) \leq A^+$

6. Les conditions initiales du vecteur d'état sont inconnues mais bornées telles que $x^-(0) \leq x(0) \leq x^+(0)$

7. $B(t)$ est inconnue mais bornée telle que $B^- \leq B(t) \leq B^+$

L'hypothèse **H1.3** suppose que l'espace d'état peut être divisé de tel sorte que le modèle général (3.1.1) s'écrit sous la forme :

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= C_1\phi(x(t), t) + A_{11}(t)x_1(t) + A_{12}(t)x_2(t) + B_1(t) \\ \dot{x}_2(t) &= C_2\phi(x(t), t) + A_{21}(t)x_1(t) + A_{22}(t)x_2(t) + B_2(t) \end{aligned} \quad (3.1.2)$$

Avec :

- m variables mesurées sont regroupées dans $x_2(t)$ telle que $\dim(x_2(t)) = m$
- s variables estimées sont regroupées dans $x_1(t)$ telle que $\dim(x_1(t)) = m - n = s$
- Les matrices $A_{11}(t) \in \mathbb{R}^{s \times s}$, $A_{12}(t) \in \mathbb{R}^{s \times m}$, $A_{21}(t) \in \mathbb{R}^{m \times s}$, $A_{22}(t) \in \mathbb{R}^{m \times m}$, $C_1 \in \mathbb{R}^{s \times r}$, $C_2 \in \mathbb{R}^{m \times r}$, $B_1(t) \in \mathbb{R}^s$, $B_2(t) \in \mathbb{R}^m$ sont respectivement les partitions de $A(t)$, C et $B(t)$.

3.2 Observateur asymptotique

Afin d'assurer la convergence de l'observateur il suffit que la condition de persistance suivante soit vérifiée, pour chaque t :

$$0 < c_1 \leq \int_t^{t+c_2} D(\tau) d\tau \quad (3.2.1)$$

Où c_1 et c_2 sont des constantes positives.

3.2.1 Synthèse d'observateurs asymptotique

Puisque $\phi(x(t), t)$ est inconnue , l'observateur asymptotique est synthétisé dont le but de reconstruire les états non mesurés à partir des états mesurés. Donc nous cherchons une combinaison linéaire adéquate des variables d'état $\omega(t) = Nx(t)$ avec $N \in \mathbb{R}^{s \times n}$ telle que :

$$NC = 0 \quad (3.2.2)$$

Hypothèse H2

$$\text{Rang } C_2 = c \quad (3.2.3)$$

Cette hypothèse implique les trois propriétés suivantes :

Propriété 1 : m et s sont tels que : $m \geq c \Rightarrow s \leq n - c$

Propriété 2 : C_1 peut être écrite sous la forme d'une combinaison linéaire de C_2 telle que $C_1 = KC_2$ avec $K \in \mathbb{R}^{s \times m}$

Propriété 3 : La solution non triviale de (3.2.2) admet au moins s colonnes de N arbitrairement choisies.

La matrice N est définie par

$$N = [N_1 \ N_2]$$

telle que $N_1 \in \mathbb{R}^{s \times s}$, $N_2 \in \mathbb{R}^{s \times m}$

De ce fait, l'équation (3.2.2) peut s'écrire : $N_1C_1 + N_2C_2 = 0$

où :

- N_1 est choisie arbitrairement.
- $N_2 = -N_1C_1C_2^\perp$ où C_2^\perp est la pseudo-inverse généralisée de C_2 qui vérifie $C_2C_2^\perp C_2 = C_2$.

Donc on obtient la solution de (3.2.2) comme suit :

$$\dot{\hat{\omega}}(t) = N\dot{\hat{x}}(t) \quad (3.2.4)$$

$$\dot{\hat{\omega}} = NC\phi(\hat{x}(t), t) + NA(t)\hat{x}(t) + NB(t) \quad (3.2.5)$$

D'après (3.2.2) on sait que $NC = 0$ donc :

$$\dot{\hat{\omega}} = NA(t)\hat{x}(t) + NB(t) \quad (3.2.6)$$

D'après L'hypothèse **H1.3**, l'espace d'état peut être divisé de tel sorte que le modèle général (3.2.6) s'écrit sous la forme :

$$\dot{\hat{\omega}}(t) = (N_1A_{11}(t) + N_2A_{21}(t))\hat{x}_1(t) + (N_1A_{12}(t) + N_2A_{22}(t))\hat{x}_2(t) + NB(t) \quad (3.2.7)$$

On sait que :

$$\hat{\omega}(t) = N\hat{x} \Rightarrow \hat{x}_1(t) = N_1^{-1}(\hat{\omega}(t) - N_2\hat{x}_2(t))$$

En remplaçant dans (3.2.7) on obtient :

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\omega}}(t) &= W(t)\hat{\omega}(t) + X(t)\hat{x}_2(t) + NB(t) \\ \hat{\omega}(0) &= N\hat{x}(0) \end{aligned} \quad (3.2.8)$$

où :

$$\begin{aligned} W(t) &= (N_1 A_{11}(t) + N_2 A_{21}(t)) N_1^{-1} \\ X(t) &= N_1 A_{12}(t) + N_2 A_{22}(t) - W(t) N_2 \end{aligned} \quad (3.2.9)$$

3.3 Observateur par intervalles

L'observateur par intervalles consiste à dire que les entrées de l'observateur existent et sont connus. Ainsi que ce dernier est basé sur l'observateur asymptotique. La principale caractéristique dans les observateurs par intervalles est d'utiliser la propriété de la coopérative.

3.3.1 Synthèse d'observateur par intervalles

Supposons que les hypothèses **H1.6** et **H1.7** sont vérifiées. En d'autres termes, d'une part, quelques bornes sont disponibles aux conditions initiales, d'autre part, le vecteur $B(t)$ est considéré non mesuré mais ces bornes supérieur et inférieur sont connues.

L'idée principale est de synthétiser les observateurs pour établir des limites pour les variables non mesurées, plutôt que de les estimer.

Considérons le systèmes dynamique suivants :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t), \omega(t)); x(t_0) = x_0 \\ y(t) = h(x(t), u(t), v(t)) \end{cases}$$

— Pour la borne supérieure :

$$\begin{cases} \dot{\omega}^+(t) = W(t)\hat{\omega}^+(t) + X(t)\hat{x}_2(t) + Mv^+(t) \\ \hat{\omega}^+(0) = N\hat{x}^+(0) \\ \hat{x}_1^+(t) = N_1^{-1}(\omega^+(t) - N_2x_2(t)) \end{cases}$$

— Pour la borne inférieur :

$$\begin{cases} \dot{\omega}^-(t) = W(t)\hat{\omega}^-(t) + X(t)\hat{x}_2(t) + Mv^-(t) \\ \hat{\omega}^-(0) = N\hat{x}^-(0) \\ \hat{x}_1^-(t) = N_1^{-1}(\omega^-(t) - N_2x_2(t)) \end{cases}$$

où :

$$v^\pm(t) = \left[B_1^\pm(t) \frac{1}{2} (B_2^+(t) - B_2^-(t)) \pm \frac{1}{2} (B_2^+(t) - B_2^-(t)) \right]^T, \tilde{N}_2 = [|N_{2,ij}|] \text{ et } M = \begin{bmatrix} N_1 & N_2 & \tilde{N}_2 \end{bmatrix}$$

3.4 Application au modèle AM2

Dans notre étude nous considérons :

- $\xi(t)$ le vecteur d'état du système tel que : $\xi(t) = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & s_1 & s_2 \end{bmatrix}^T$.
- La sortie du système : $y = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} s_1 & s_2 \end{bmatrix}^T$.
- Les deux biomasses x_1 et x_2 ne sont pas mesurables.

3.4.1 Observabilité du modèle AM2

Dont le but d'appliquer un observateur au modèle **AM2**, il faut s'assurer de son observabilité. Ainsi, l'espace d'observabilité est comme suit :

$$O(h) = \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ \dot{s}_1 \\ \dot{s}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ D(s_{1in} - s_1) - k_1\mu_1(s_1)x_1 \\ D(s_{2in} - s_2) + k_2\mu_1(s_1)x_1 - k_3\mu_2(s_2)x_2 \end{bmatrix}$$

la matrice d'observabilité $dO(h)$:

$$dO(h) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -D - \frac{K_1 k_1 \mu_{1 \max} x_1}{(s_1 + K_1)^2} & 0 & -\frac{k_1 \mu_{1 \max} s_1}{s_1 + K_1} & 0 \\ -\frac{K_1 k_2 \mu_{1 \max} x_1}{(s_1 + K_1)^2} & -D - \frac{k_3 \mu_{2 \max} x_2 \left(-\frac{s_2^2}{K_i} + K_2 \right)}{\left(\frac{s_2^2}{K_i} + s_2 + K_2 \right)^2} & \frac{k_2 \mu_{1 \max} s_1}{s_1 + K_1} & \frac{k_3 \mu_{2 \max} s_2}{\frac{s_2^2}{K_i} + s_2 + K_2} \end{bmatrix}$$

Calculons le déterminant de cette matrice :

$$\det(dO(h)) = k_1 k_3 \mu_{1 \max} \mu_{2 \max} \frac{s_1 s_2}{\left(\frac{s_2^2}{K_i} + s_2 + K_2 \right) (s_1 + K_1)} \Rightarrow \det(O(h)) \neq 0$$

Nous remarquons bien que le déterminant est toujours non nul car s_1 et s_2 sont des quantités strictement positives donc notre modèle **AM2** est observable.

3.4.2 Observateur asymptotique

En remplaçant le vecteur d'état $\xi(t)$ dans l'équation (3.1.1), le système d'équations différentielles du modèle **AM2**, s'écrit :

$$\dot{\xi}(t) = C\phi(\xi(t), t) + A(t)\xi(t) + B(t) \quad (3.4.1)$$

d'après l'hypothèse **H1.3** l'équation (3.4.1) devient :

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_1(t) &= C_1\phi(\xi(t), t) + A_{11}(t)\xi_1(t) + A_{12}(t)\xi_2(t) + B_1(t) \\ \dot{\xi}_2(t) &= C_2\phi(\xi(t), t) + A_{21}(t)\xi_1(t) + A_{22}(t)\xi_2(t) + B_2(t) \end{aligned} \quad (3.4.2)$$

La forme matricielle du modèle **AM2** est donnée par :

$$\dot{\xi}(t) = \begin{bmatrix} -D(t) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -D(t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -D(t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -D(t) \end{bmatrix} \xi(t) + \begin{bmatrix} \mu_1(s_1)x_1 \\ \mu_2(s_2)x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ D(t)s_{1in} \\ D(t)s_{2in} \end{bmatrix}$$

$$\text{Avec : } A_{11}(t) = \begin{bmatrix} -D(t) & 0 \\ 0 & -D(t) \end{bmatrix}, A_{12}(t) = 0, A_{21}(t) = 0, A_{22}(t) = \begin{bmatrix} -D(t) & 0 \\ 0 & -D(t) \end{bmatrix}$$

$$B(t) = \begin{bmatrix} \mu_1(s_1)x_1 \\ \mu_2(s_2)x_2 \end{bmatrix}, C_1 = 0 \text{ et } C_2 = \begin{bmatrix} D(t)s_{1in} \\ D(t)s_{2in} \end{bmatrix}$$

Pour synthétiser l'observateur asymptotique à notre modèle, on applique directement l'observateur (3.2.8).

Il faut tout d'abord calculer La matrice pseudo-inverse¹ généralisée de C_2 comme suit :

$$\begin{cases} -k_1 = k_1^2 C_{11}^\perp - k_1 k_2 C_{12}^\perp \\ 0 = k_1 k_3 C_{12}^\perp \\ k_2 = -k_1 k_2 C_{11}^\perp - k_1 k_3 C_{21}^\perp + k_1^2 C_{12}^\perp + k_2 k_3 C_{22}^\perp \\ -k_3 = -k_2 k_3 C_{12}^\perp + k_3^2 C_{22}^\perp \end{cases}$$

Donc :

$$C_2^\perp = \begin{bmatrix} -\frac{1}{k_1} & 0 \\ -\frac{1}{k_2} & -\frac{1}{k_3} \end{bmatrix}$$

1. En mathématiques, et plus précisément en algèbre linéaire, la notion de pseudo-inverse (ou inverse généralisé) généralise celle d'inverse d'une application linéaire ou d'une matrice aux cas non inversibles en lui supprimant certaines des propriétés demandées aux inverses, ou en l'étendant aux espaces non algébriques plus larges

N_1 est choisi arbitrairement telle que $N_1 = I_2$, on calcule N_2 à partir de l'équation $N_2 = -N_1 C_1 C_2^\perp$:

$$N_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{k_1} & 0 \\ \frac{1}{k_1 k_3} & \frac{1}{k_3} \end{bmatrix}$$

Nous identifions N :

$$N = \begin{bmatrix} N_1 & N_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{k_1} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{k_1 k_3} & \frac{1}{k_3} \end{bmatrix}$$

Pour appliquer l'observateur (3.2.8), nous calculons $W(t)$ et $X(t)$ par l'expression (3.2.9) :

$$W(t) = \begin{bmatrix} -D(t) & 0 \\ 0 & -D(t) \end{bmatrix}$$

$$X(t) = 0$$

En remplaçant par les matrices définie ci-dessus, l'observateur asymptotique du modèle **AM2** est décrit par le système (3.4.3) suivant :

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\omega}}_1(t) &= D(t) \left(-\hat{\omega}_1(t) + \frac{s_{1in}}{k_1} \right) \\ \dot{\hat{\omega}}_2(t) &= D(t) \left(-\hat{\omega}_2(t) + \frac{s_{1in} k_2}{k_1 k_3} + \frac{s_{2in}}{k_3} \right) \end{aligned} \quad (3.4.3)$$

Pour observer les deux biomasse x_1 et x_2 , nous utilisons l'équation $\hat{\omega}(t) = N \hat{\xi}(t)$, on obtient :

$$\begin{aligned} \hat{x}_1(t) &= \hat{\omega}_1(t) - \frac{s_1}{k_1} \\ \hat{x}_2(t) &= \hat{\omega}_2(t) - \frac{s_1 k_2}{k_1 k_3} + \frac{s_2}{k_3} \end{aligned} \quad (3.4.4)$$

3.4.3 Résultats de simulation

Pour appliquer l'observateur asymptotique nous considérons les conditions initiales montré dans le tableau (3.1).

	$x_1(t)$	$x_2(t)$
Modèle	0.5	0.12
Observateur	1.5	0.5

TABLE 3.1 – Les condition initiales de l'observateur asymptotique

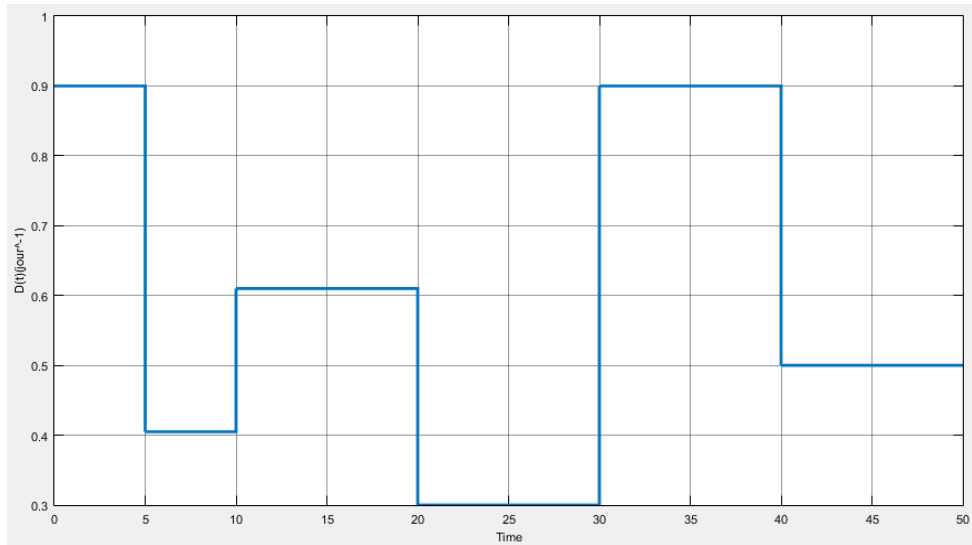


FIGURE 3.1 – Le taux de dilution

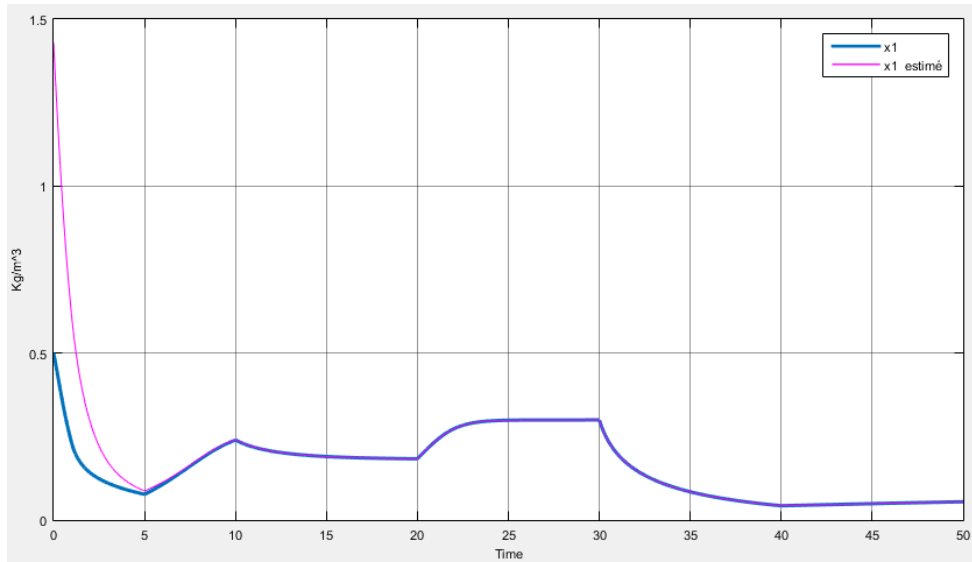


FIGURE 3.2 – Concentration de x_1 et son estimation \hat{x}_1

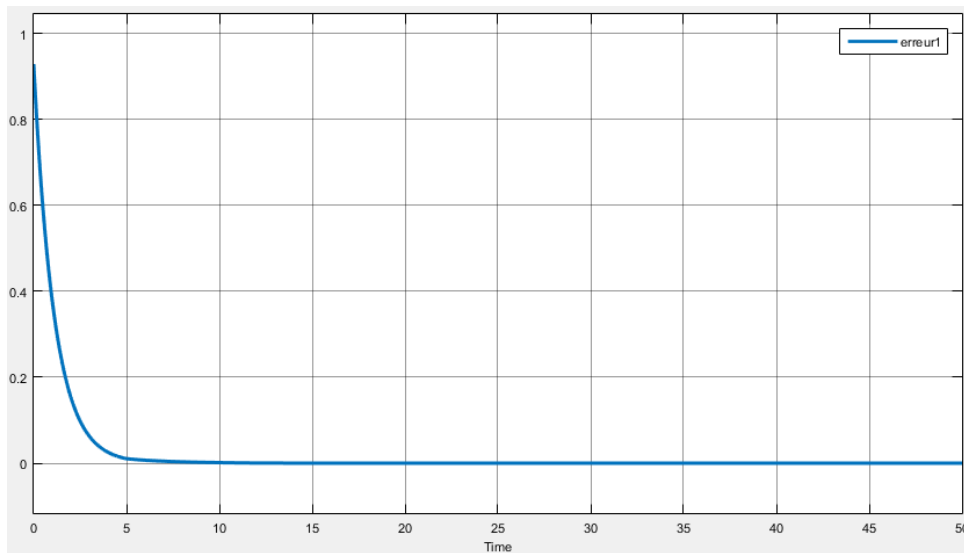


FIGURE 3.3 – Erreur correspondant à la biomasse x_1

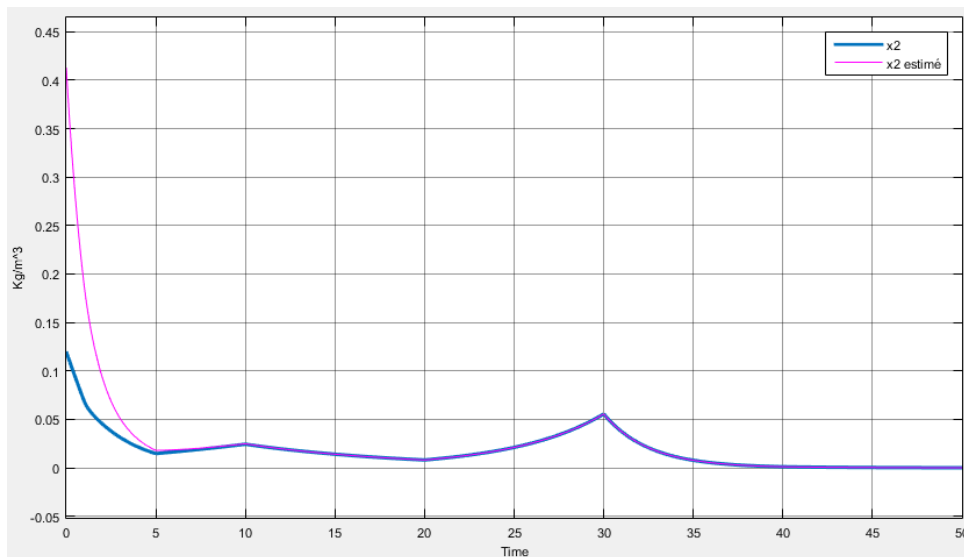


FIGURE 3.4 – Concentration de x_2 et son estimation \hat{x}_2

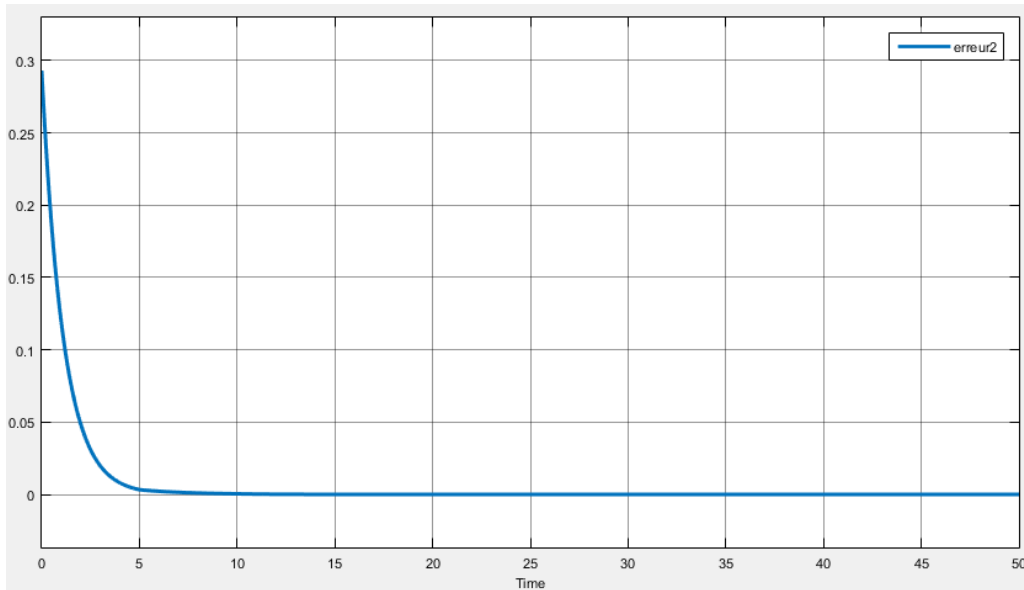


FIGURE 3.5 – Erreur correspondant à la biomasse x_2

Les figures (3.2) et (3.4) représentent les concentrations des biomasses x_1 et x_2 et ces estimations \hat{x}_1 et \hat{x}_2 respectivement, on remarque d'après ces graphes que les valeurs estimées convergent vers les valeurs réelles avant 5 jours.

Les figures (3.3) et (3.5) représentent les erreurs des estimations de x_1 et x_2 , notons que l'erreur de chaque estimation prend le même temps de convergence d'observateur.

3.4.4 Étude de la robustesse de l'observateur asymptotique

Pour discuter la robustesse d'un tel observateur, nous avons perturbé la sortie $(s_1, s_2)^T$ par un bruit blanc gaussien puis nous avons visualisé les résultats de simulation comme le montre les figures (3.6, 3.7, 3.8 et 3.9).

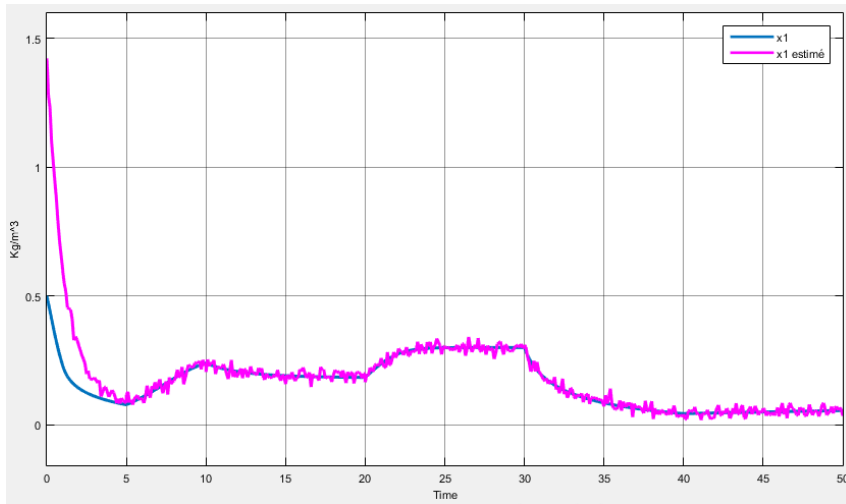


FIGURE 3.6 – Concentration de la biomasse x_1 et son estimation \hat{x}_1 en présence de sortie bruité

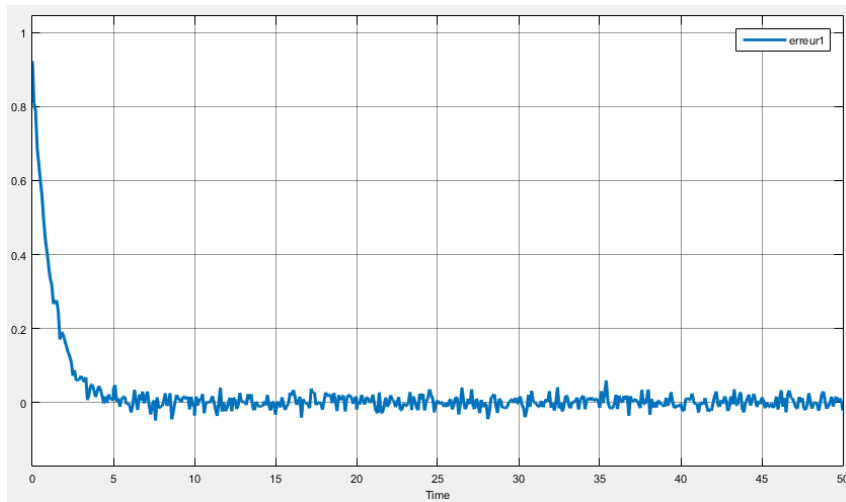


FIGURE 3.7 – Erreur correspondant à la biomasse x_1

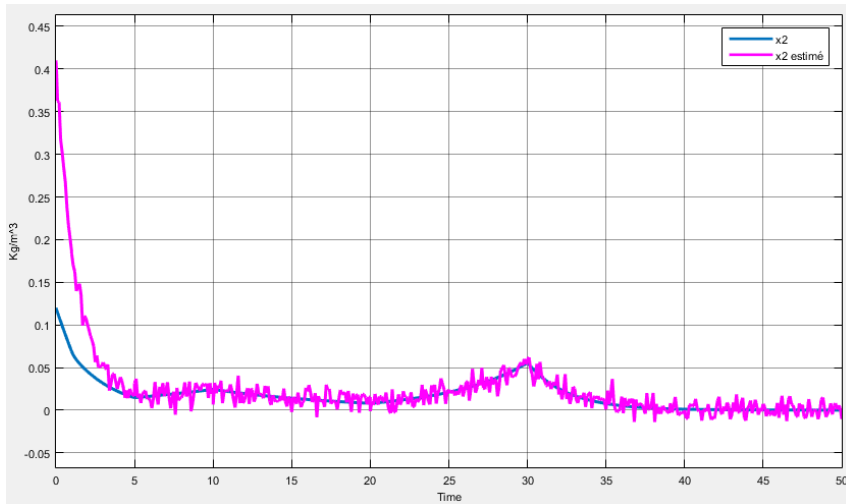


FIGURE 3.8 – Concentration de la biomasse x_2 et son estimation \hat{x}_2 en présence de sortie bruité

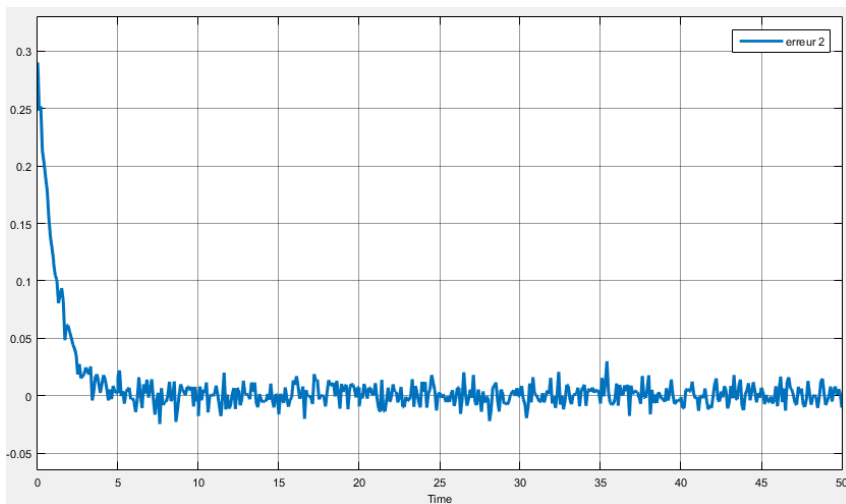


FIGURE 3.9 – Erreur correspondant à la biomasse x_2

Nous avons obtenu une réponse satisfaisante de l'observateur, ce qui signifie que notre observateur asymptotique est très robuste face aux des bruits de mesures.

3.4.5 Observateur par intervalle

Posent $D^-(t) \leq D(t) \leq D^+(t)$, en Basent sur l'hypothèse **H1.5** on obtient $A^- = A|_{D=D^-}$ et $A^+ = A|_{D=D^+}$ La matrice M est comme suit :

$$M = \begin{bmatrix} N_1 & N_2 & \tilde{N}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{k_1} & 0 & \frac{1}{k_1} \\ 0 & 1 & \frac{1}{k_3} & \frac{k_1}{k_1 k_3} & \frac{1}{k_3} & \frac{k_1}{k_1 k_3} \end{bmatrix}$$

3.4.6 Résultats de simulation

Pour appliquer l'observateur par intervalles nous considérons les conditions initiales montré dans le tableau (3.2).

	$x_1(t)$	$x_2(t)$	$x_1^-(t)$	$x_2^-(t)$	$x_1^+(t)$	$x_2^+(t)$
Modèle	0.5	0.12	0.2	0.05	0.7	0.2
Observateur	1.5	0.5	1.12	0.34	1.87	0.77

TABLE 3.2 – Les condition initiales de l'observateur par intervalles

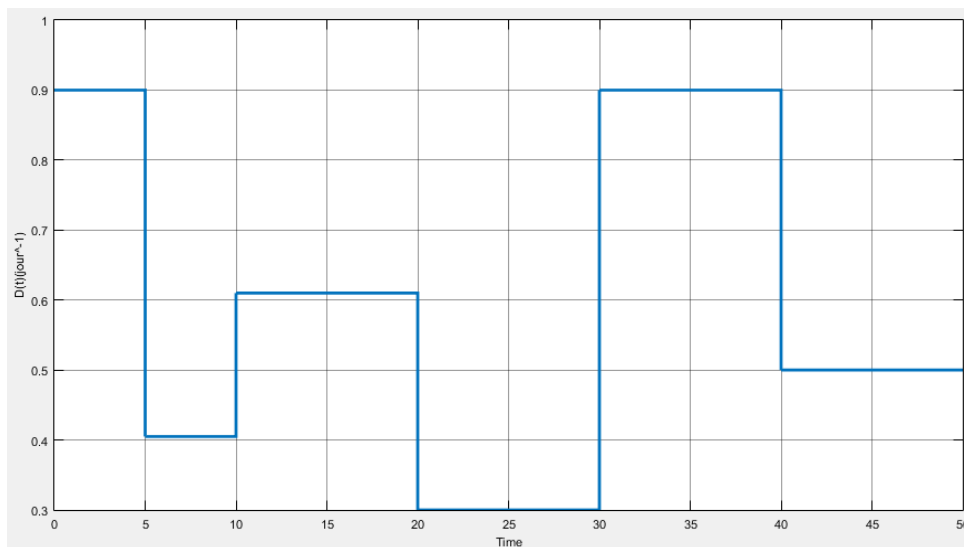


FIGURE 3.10 – Le taux de dilution

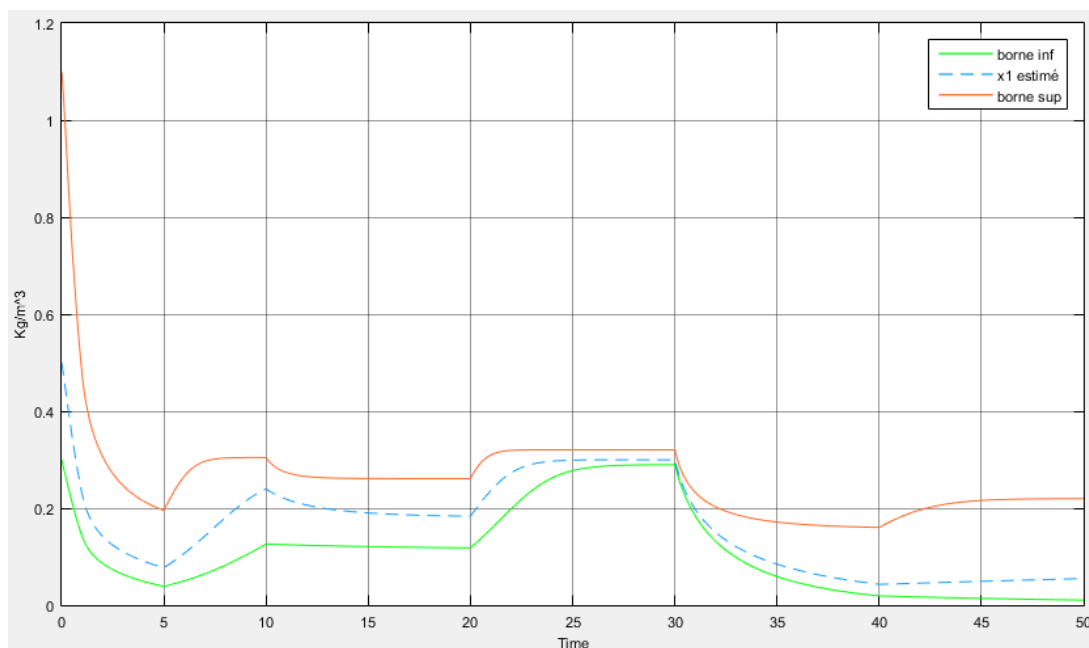


FIGURE 3.11 – Concentration de la biomasse x_1 avec l'observateur par intervalles

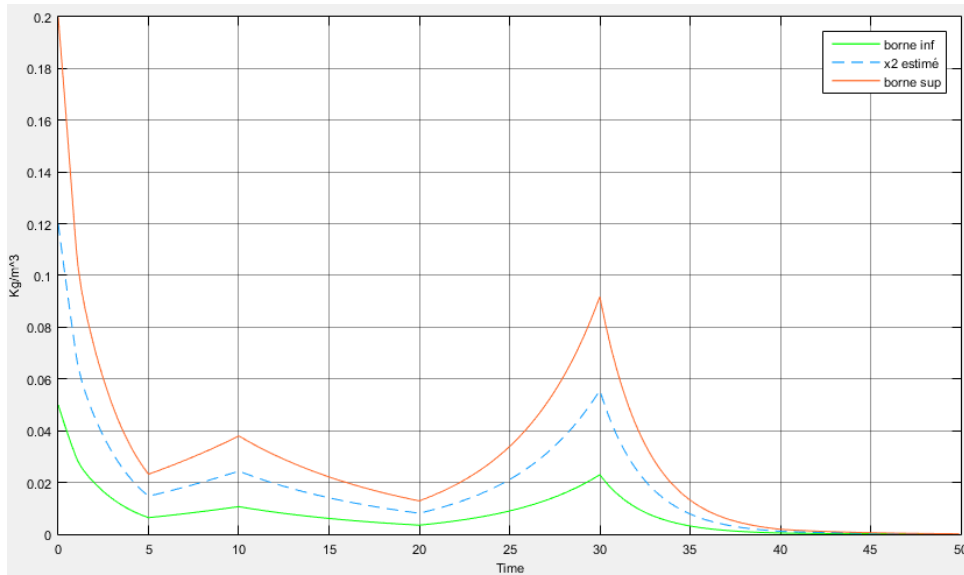


FIGURE 3.12 – Concentration de la biomasse x_2 avec l'observateur par intervalles

Les figures (3.11) et (3.12) représente les concentrations des deux biomasses x_1 et x_2 avec des bornes supérieur et inférieur, tenant compte que les deux influents s_{1in} et s_{2in} , ainsi que leurs bornes supérieure et inférieure sont connue. Ceci nous permet de dire que notre observateur est robuste face au entrées inconnues.

3.4.7 Étude de la robustesse de l'observateur par intervalles

A fin de discuter la robustesse d'observateur par intervalles , nous avons perturbé la sortie $(s_1, s_2)^T$ par un bruit blanc gaussien puis nous avons visualiser les résultats de simulation comme le montre les figures (3.13 et 3.14).

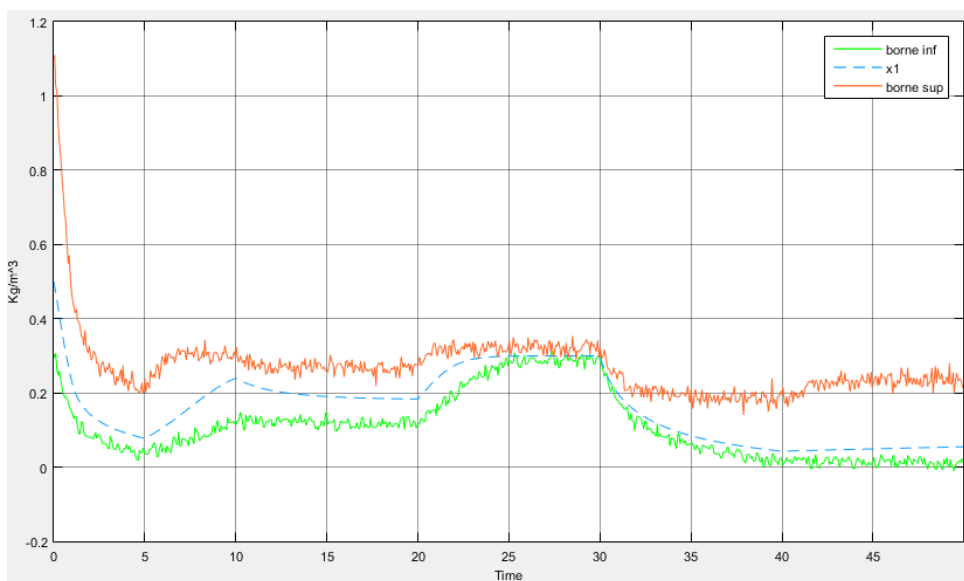


FIGURE 3.13 – Concentration de la biomasse x_1 avec des perturbation en sortie de s_1

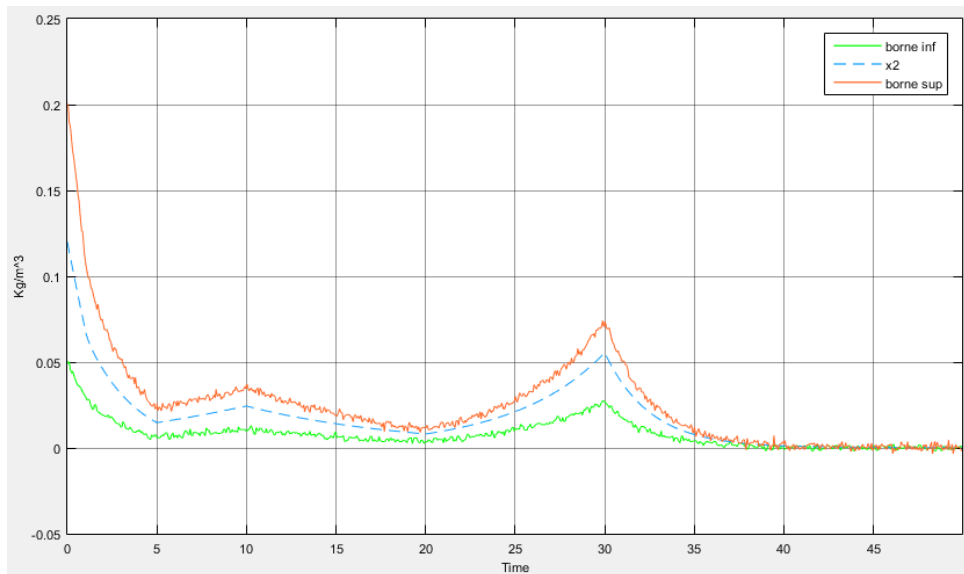


FIGURE 3.14 – Concentration de la biomasse x_2 avec des perturbation en sortie de s_2

Nous avons obtenu une réponse satisfaisante de l'observateur, ce qui signifie que notre observateur par intervalles est très robuste face aux bruits de mesures ainsi que les entrées inconnues.

3.5 Étude comparative des observateurs

Dans cette partie nous comparerons les différents comportements des observateurs présenter dans ce chapitre.

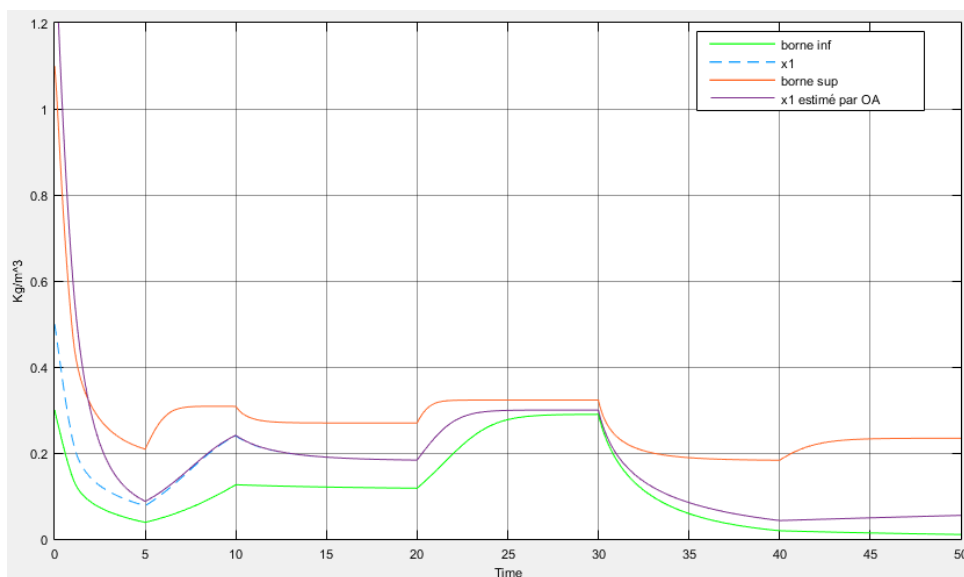


FIGURE 3.15 – Concentration de la biomasse x_1 avec les estimations des observateurs

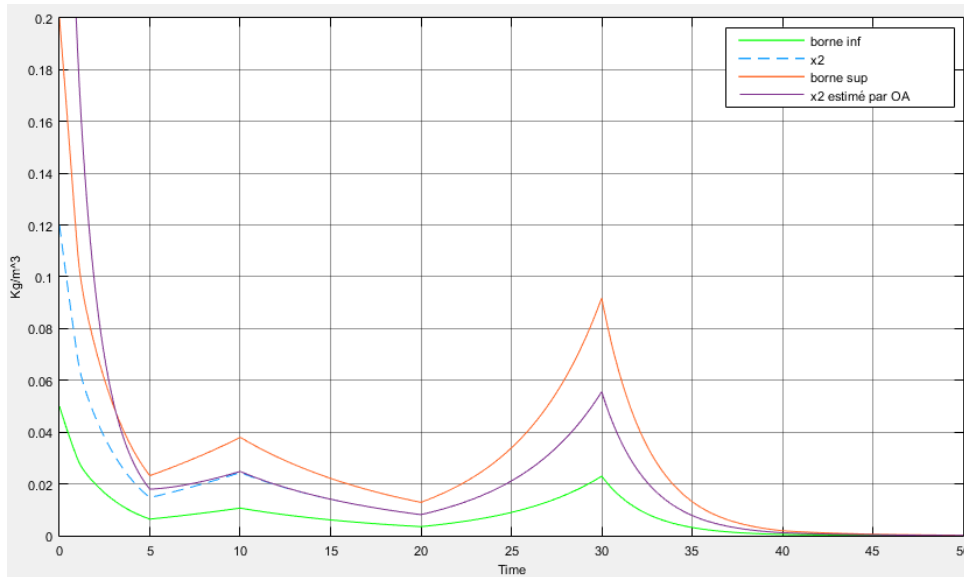


FIGURE 3.16 – Concentration de la biomasse x_2 avec les estimations des observateurs

3.6 Conclusion

Le but de ce chapitre est d'introduire les deux observateurs utilisé dans les bio-procédés à notre modèle **AM2**. En premier lieu, nous avons étudié l'observabilité de notre modèle pour s'assurer qu'il est possible d'utiliser un capteur logiciel. Puis, nous avons appliqué l'observateur asymptotique et voir sa robustesse face aux perturbation de mesures. Après, on a passé a l'observateur par intervalle ainsi que l'étude de sa robustesse. A la fin, une comparaison entre ces observateurs a été mise au point.

Conclusion générale

Conformément à l'état de l'art des observateurs qui sont utilisés dans les bioprocédés, il existe une multitude d'outils et de techniques qui sont à la fois flexibles et puissants que l'on peut adapter à la résolution des problèmes posés.

Dans ce mémoire, nous avons utilisé et adapté certains de ces observateurs pour résoudre le problème des composants chimiques ou biologique non mesurés dans le bioréacteur. Ainsi, notre choix du modèle été le modèle **AM2** car il est simple à étudié et garde les états principaux du système. Nous avons présenté le modèle général d'un système physique non linéaire, puis nous avons introduit la théorie de l'observateur asymptotique et l'observateur par intervalle car il y a un manque de connaissance relatives aux entrées du système, puis nous avons visualisé les deux observateurs avec une étude de leur robustesse face à des perturbations de mesures ou d'entrées. Finalement, une étude comparative entre les deux observateur nous a conduit à dire que les résultats obtenus sont satisfaisants. Nous avons constaté que Le choix de l'observateur dépend du type de problème, dans notre cas on peut dire que le meilleur observateur est choisis selon l'incertitude du modèle et des données (mesures).

Quelques perspectives peuvent être pensées :

1. L'application de ces observateurs au système complexe **ADM1**. Test de robustesse de ces observateurs sous plusieurs conditions de fonctionnement et, comparaisons des résultats avec d'autres observateurs, notamment celles dits robustes.
2. Synthèse d'un contrôleur basé sur les variables estimées par ces observateurs.

Bibliographie

- [1] A. Gadgil, *Drinking water in developing countries. Annual review of energy and the environment* , 23(1), 253-286, 1998.
- [2] B. Benyahia, T. Sari, B. Cherki, J. Harmand, *Bifurcation and stability analysis of a two step model for monitoring anaerobic digestion processes*, Journal of Process Control, 22(6), 1008-1019, 2012
- [3] A. Isidori, *Nonlinear Control Systems* (3rd ed.), Springer, 1995.
- [4] I. Didi, *Sur l'observation des systèmes non linéaires invariants : Application aux Bioprocédés*, Thèse de doctorat, université de Tlemcen, 2015.
- [5] G. Bastin, D. Dochain, *On-line Estimation and Adaptive Control of Bioreactors*, Elsevier, 1990
- [6] J. P. Gauthier, H. Hammouri et S. Othman, *A simple observer for nonlinear systems applications to bioreactors*, IEEE Transactions on Automatic Control, vol 37(6), pp 875-880, 1992.
- [7] L. Chen, *Modelling, Identifiability and Control of Complex Biotechnological Systems*, Ph.D. thesis, Université Catholique Louvain, Belgique, 1992.
- [8] J. L. Gouzé, O. BERNARD et Z. HADJ-ZADOK, *Observers with modelling uncertainties for the wastewater treatment process*, Journées thématiques, Automatique et Environnement, 9-10 mars, Nancy, France, 2000.
- [9] J. L. Gouzé et V. Lemesle, *A bounded error observer with adjustable rate for a class of bioreactor models*, European Control Conference, ECC2001, 5 pages sur CD-ROM, Porto, Portugal, 2001.
- [10] Ph. Bogaerts, *A hybrid asymptotic-Kalman observer for bioprocesses*, *Bioprocess Engineering* 20, 249-255, 1999.
- [11] A. Maloum, *Commandes et observateurs robustes pour les systèmes non linéaires incertains : Application à la dépollution biologique*, Thèse de Doctorat, 221 pages, Université de Nice-Sophia Antipolis, Nice, 2001.
- [12] P. Rouchon, S. Bonnabel, O. Martin, *Invariant asymptotic observers*, IEEE Transactions on Automatic Control, 53, 2514–2526, 2008.

- [13] I. Didi, H. Dib, B.Cherki, *An invariant observer for a chemostat model*, Automatica, 50, 2321-2326, 2014.
- [14] I. Didi, H. Dib, B.Cherki, *A Luenberger-type observer for the AM2 model*, JPC, 32, 117-126, 2015.
- [15] O. Bernard, Z. Hadj-Sadok, D. Dochain, A. Genovesi, et J. P. Steyer, *Dynamical model development and parameter identification for an anaerobic wastewater treatment process*. Biotechnology and bioengineering, 75(4) :424–438, 2001.

Résumé :

Ce travail a consisté à l'application d'observateur non linéaire sur le modèle AM2. Nous introduisons le système AM2 dans un premier temps tout en étudiant ses équilibres et leurs stabilités. Nous allons présenter un état de l'art sur les observateurs qui ont été appliqués aux modèles de bioprocédés. Par la suite, nous appliquons sous Matlab l'observateur asymptotique et l'observateur par intervalles sur le système AM2. Les résultats obtenus montrent l'efficacité des observateurs, nous avons constaté que Le choix de l'observateur dépend du type de problème.

Abstract:

This work consisted of the application of non-linear observers on the AM2 model. We first introduce the AM2 system while studying its equilibria and their stabilities. We will present a state of the art on observers that have been applied to bioprocess models. Thereafter, we apply under Matlab the asymptotic observer and the interval observer on the AM2 system. The results obtained show the efficiency of the observers, we found that the choice of the observer depends on the type of problem.

ملخص:

يتكون هذا العمل من تطبيق مراقب غير خطي على نموذج AM2. نقدم نظام AM2 أولاً أثناء دراسة توازنه واستقراره. سوف نقدم حالة من الفن على المراقبين التي تم تطبيقها على نماذج العمليات الحيوية. بعد ذلك ، نطبق تحت Matlab المراقب المقارب والمراقب الفاصل على نظام AM2. النتائج التي تم الحصول عليها تظهر فاعلية المراقبين ، وجدنا أن اختيار المراقب يعتمد على نوع المشكلة.