

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

MINISTRY OF HIGHER EDUCATION
AND SCIENTIFIC RESEARCH

HIGHER SCHOOL IN APPLIED SCIENCES
--T L E M C E N--



المدرسة العليا في العلوم التطبيقية
École Supérieure en
Sciences Appliquées

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

المدرسة العليا في العلوم التطبيقية
-تلمسان-

Mémoire de fin d'étude

Pour l'obtention du diplôme d'Ingénieur

Filière : Automatique
Spécialité : Automatique

Présenté par : AISSAT Nesrine

Thème

**Modélisation et commande d'un
système non linéaire : Application au
pendule inversé rotatif**

Soutenu publiquement, le 09 / 09 / 2020 , devant le jury composé de :

Mme Ibtissem DIDI	Maitre de conférence	ESSA. Tlemcen	Présidente
Mr Fayssal ARICHI	Maitre de conférence	ESSA. Tlemcen	Directeur de mémoire
Mr Ahmed TAHOUR	Professeur	ESSA. Tlemcen	Co- Directeur de mémoire
Mme Amel GHOUALI	Maitre de conférence	ESSA. Tlemcen	Examinatrice 1
Mr Réda MOKHTARI	Maitre de conférence	ESSA. Tlemcen	Examineur 2

Année universitaire : 2019 / 2020

Dédicaces et Remerciement

Je dédie ce travail et je remercie infiniment

- Ma très chère maman pour son amour et son soutien éternel, à mon cher père pour son encouragement, son soutien et son amour éternel aussi. Je saisis ces quelques mots cette occasion pour leur exprimer mon amour, mes remerciements et mon honneur d'avoir les meilleurs « Papa et Mama » au monde.
- Ma sœur, ma petite chère sœur je la remercie pour sa présence dans ma vie pour son amour, son encouragement et son sourire spécial qui m'a accompagné toute ma vie.
- Mon petit frère pour les moments spéciaux que nous avons passé ensemble lors de la préparation de ce mémoire
- Mon meilleur ami Abdelwahab, pour tous ces bons moments qu'on a partagés ensemble pendant toutes ces années.
- Enfin mes amies pour le rire la joie la bonne humeur qu'elles mettent dans mes journées.

Remerciement

Ce travail est l'aboutissement d'un dur labeur et de beaucoup de sacrifices; mes remerciements vont d'abord au Créateur de l'univers qui m'a doté d'intelligence, et m'a maintenu en santé pour mener à bien cette année d'étude.

En premier lieu, je tiens à exprimer ma gratitude et mes vifs remerciements à mon encadreur Mr F.Arichi, Vous avez bien voulu me confier ce travail riche d'intérêt et me guider à chaque étape de sa réalisation. Je saisis cette occasion pour remercier mon co-encadreur Mr A.Tahour, vous m'avez réservé de votre temps malgré vos obligations professionnels.

Je souhaite également adresser mes remerciements aux membres de jury Mme I.DIDI, Mme A.GHOUALI et Mr R.MOKHTARI pour l'intérêt qu'ils ont manifesté pour notre travail et d'avoir acceptés de le juger. Vous nous faites l'honneur d'accepter avec une très grande amabilité de siéger parmi notre jury.

J'offre de sincères et chaleureux remerciements à Mr MSIRDI pour sa contribution et son temps précieux qui a consacré pour m'aider à réaliser ce travail.

En fin nous exprimons nos remerciements à tous ceux qui ont contribué de près et de loin à l'élaboration de ce travail.

Sommaire

Dédicaces et Remerciement	c
1 Introduction générale	1
2 Généralité sur les pendules inversés	3
2.1 Introduction	3
2.2 Les pendules	3
2.3 Exemples d'applications des systèmes de pendule	9
2.4 Conclusion	13
3 Modélisation du pendule inversé rotatif	14
3.1 Introduction	14
3.1.1 Présentation du pendule inversé rotatif	14
3.2 Le modèle mathématique du PIR	15
3.3 Représentation d'état :	20
3.4 Linéarisation de système autour de point d'équilibre:	21
3.4.1 Les points d'équilibres :	22
3.4.2 Les matrices de la représentation d'état	23
3.5 Résultats de simulations:	24
3.6 Conclusion :	27

4	La Commande du système	28
4.1	Introduction	28
4.2	Commandabilité du système	28
4.3	La commande PID	29
4.3.1	Historique	29
4.3.2	Définition	29
4.3.3	Principe de la commande PID	30
4.3.4	Coefficient de réglage	30
4.3.4.1	Approche expérimentale	30
4.3.4.1.1	Ziegler-Nichols pour les systèmes en boucle fermée	30
4.3.4.1.2	Ziegler-Nichols pour les systèmes en boucle ouverte	31
4.3.4.1.3	Méthode de Ziegler empirique	31
4.3.4.1.3.1	Essai en boucle fermée	31
4.3.4.2	Approche par modélisation	31
4.4	Application de la commande PID sur le PIR	32
4.4.1	Méthode de correction en parallèle	32
4.4.2	Méthode de correction en cascade	34
4.5	Commande par retour d'état :	35
4.5.1	Définition [9]	35
4.5.2	Etude de commandabilité du PIR	36
4.5.3	Cahier de charge :	36
4.5.4	Détermination des pôles	37
4.5.5	Résultats de simulation	37
4.6	Commande linéaire quadratique	39
4.6.1	Résultat des simulations de PIR	39
4.7	Comparaison entre les trois commandes :	41
4.7.1	Interprétation des résultats:	42
4.7.2	Rejet de perturbation :	43
4.8	Conclusion	44

5 Conclusion et perspectives	45
5.1 Conclusion générale	45
A Les annexes	i
A.1 Programme Matlab pour la commande par placement de poles	i
A.2 Programme Matlab pour la commande LQR	ii
A.3 Les composant de la maquette	iv
A.4 Les spécifications du servomoteur et du pendule	v

List of Figures

2.1	Pendule simple [16]	3
2.2	Pendule de Newton	4
2.3	Schéma d'un pendule élastique	4
2.4	Pendule de Pohl	5
2.5	Pendule de torsion (a) Schéma d'un pendule de torsion (b)Photo du pendule de torsion	6
2.6	Pendule inversé classique(a)Schémas de l'ensemble chariot et pendule inversé (b)Photo réelle d'un pendule inversé classique	6
2.7	Double pendule inversé en parallèle (a) Photo du pendule (b) Schéma explicatif	7
2.8	Double pendule inversé en cascade,(a)Photo du pendule (b) Schéma de principe	7
2.9	Pendule inversé sur deux roues, (a) Photo du pendule (b) Schéma de principe	8
2.10	Pendule inversé stabilisé par volant d'inertie,(a) Photo du pendule (b) Schéma explicatif	8
2.11	Legway	9
2.12	Jœ-le Pendule	9
2.13	Nbot	10
2.14	Segway	10
2.15	iBot4000	11
2.16	a)EMIEW b) EMIEW2	11

2.17	Les fusées (a)R-7 Semiorka,(b) Falcon 9	12
2.18	Le corps humain un pendule	12
2.19	WABOT-1(à gauche), ASIMO(à droite)	13
3.1	Quanser QUBE-Servo 2	15
3.2	Schéma bras-pendule	15
3.3	Schéma pendule-bras-moteur	16
3.4	Schéma fonctionnel	20
3.5	Résultat de simulation	24
3.6	Angle du pendule	25
3.7	Angle du bras	26
3.8	Angle du pendule	26
4.1	Schéma explicatif de la commandabilité	29
4.2	Schéma d'une boucle de régulation	30
4.3	Diagramme du systeme corrigé avec PID en parallele	32
4.4	La position du pendule en degré	33
4.5	La position du bras en degré	33
4.6	Schéma du systeme corrigé avec PID en cascade	34
4.7	Angle du pendule corrigé avec PID en cascade	34
4.8	Angle du bras corrigé avec PID en cascade	35
4.9	Représentation schématique du concept de la commande par retour d'état	36
4.10	Évolution de l'angle du pendule avec la commande par placement de pôles	37
4.11	Évolution de l'angle du bras corrigé avec la commande par placement de pôles	38
4.12	Évolution de la tension délivrée avec la commande par placement de pôles	38
4.13	Influence de q_1 sur l'évolution de l'angle du pendule	40
4.14	Influence de q_1 sur l'évolution de l'angle du bras	40
4.15	Évolution de l'angle du pendule avec les trois commandes	41
4.16	Évolution de l'angle du bras avec les trois commandes	42

4.17 Tension délivrée au système pour les trois commandes	42
4.18 Évolution de la commande par les trois correcteurs	43
4.19 Le rejet de perturbation avec les trois commandes	44

Introduction générale

Le développement scientifique et technologique s'introduit de plus en plus dans la vie quotidienne de l'homme, l'automatique a pour but de minimiser l'intervention humaine pour accomplir des missions difficiles ou nécessitant des efforts qui dépassent ses capacités physiques. L'automatique est une science qui traite de la modélisation, de l'analyse, de la commande et, de la régulation des systèmes dynamiques, elle a souvent recours à des cas d'études particuliers, qui sont représentatifs de grandes classes d'applications. Parmi ces cas les plus étudiés en automatique, le pendule inversé est le plus célèbre, en effet il représente un benchmark pour tester les nouvelles méthodes de commande, car il possède plusieurs caractéristiques attrayantes : c'est un système fortement non linéaire, couplé, instable et il possède plusieurs implications pratiques.

Il existe de nombreuses formes du Pendule Inversé, les plus connus sont : le Pendule Inversé Simple, le Pendule Inversé Double, le Pendule Inversé rotatif, le Pendule Inversé gyroscopique, le Pendule Inversé stabilisé par une Roue d'Inertie, etc. Dans notre cas, notre choix s'est porté sur le Pendule Inversé rotatif.

Le pendule inversé rotatif appelé pendule de Furuta consiste en un bras dans le plan horizontal qui est actionné par un moteur à courant continu. Au bout de ce bras horizontal, un second bras est attaché et est libre de tourner dans le plan vertical (les plans de rotation des deux bras sont perpendiculaires) . A l'aide d'un contrôleur, il est possible de maintenir le bras vertical en équilibre instable [8].

L'objectif de ce projet est la stabilisation verticale du pendule, le but est d'assurer la stabilité du pendule autour de son point d'équilibre instable (pointant vers le haut). Plusieurs contrôleurs seront synthétisés afin de réaliser cette tâche pour déterminer le plus performant.

Le travail est organisé de la manière suivante :

Dans le premier chapitre, nous présentons un état de l'art sur les différents types des pendules, et plus particulièrement les pendules inversés, ainsi que leurs applications dans plusieurs domaines pour montrer l'intérêt major de l'étude d'un pendule inversé.

Dans le deuxième chapitre, nous décrivons dans la première partie le modèle du pendule inversé rotatif par un modèle mathématique non linéaire sous forme d'équations

différentielles et sous forme d'une représentation d'état en utilisant le formalisme d'Euler-Lagrange. Nous présentons dans la deuxième partie une linéarisation du modèle non linéaire obtenu, autour de son point d'équilibre instable.

Le troisième chapitre est consacré à la synthèse de différents types de contrôleurs. Il s'agit d'un contrôleur linéaire optimal LQR, un contrôleur par placement de pôles et un contrôleur proportionnel-intégral-dérivé. La dernière partie du chapitre est consacrée à la comparaison entre les performances de chaque contrôleur.

A la fin nous, donnons une conclusion pour ce projet, discutant l'intérêt de cette étude, les difficultés rencontrés et les travaux futurs à considérer.

Généralité sur les pendules inversés

2.1 Introduction

Ce chapitre comporte deux parties essentielles : nous présentons dans la première partie quelques types des pendules notamment les pendules inversés. Nous nous intéressons dans la deuxième partie à la représentation de quelques exemples de systèmes réels inspirés et basés sur le principe des pendules inversés.

2.2 Les pendules

Le pendule est un exemple de base pour l'étude des systèmes non-linéaires. Il existe plusieurs types de pendule qui sont considérés comme des prototypes académiques largement étudiés dans le domaine de l'automatique. Parmi ceux on peut citer :

- Le pendule simple

C'est un pendule pesant idéal composé d'une masse m_g (Fig 2.1) accrochée à un point fixe par un fil inextensible de masse négligeable et de longueur l et qui oscille grâce à l'effet de la gravité appelé aussi pendule à gravité idéale.

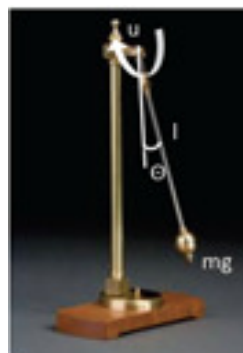


Figure 2.1: Pendule simple [16]

- Le Pendule de Newton

C'est un pendule qui se compose de cinq billes (Fig 2.2), il est généralement utilisé pour illustrer les théories de conservation de la quantité de mouvement et de l'énergie.



Figure 2.2: Pendule de Newton
[23]

- Le pendule élastique

Un pendule élastique est constitué d'une tige mince de poids négligeable sur laquelle s'enroule un ressort de constante de raideur k de longueur à vide l_0 . A l'extrémité du ressort est accrochée une masselotte A considérée comme 'ponctuelle' de masse m . La figure (2.3) représente un schéma du pendule élastique

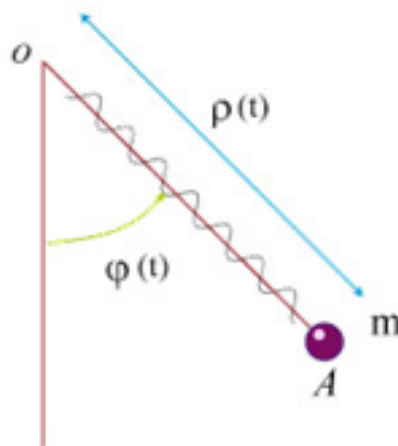


Figure 2.3: Schéma d'un pendule élastique
[21]

- Le pendule de Pohl

Le pendule de Pohl (Fig 2.4); appelé du nom de son inventeur Robert Wichard Pohl est un oscillateur de torsion constitué de quatre éléments :

- 1) Un disque en rotation autour de son centre.
- 2) Un ressort spiral, exerçant un couple mécanique qui tend à ramener le disque vers sa position d'équilibre.
- 3) Un système de freinage électromagnétique pour amortir plus ou moins les oscillations.
- 4) Un moteur, relié au ressort spiral, qui permet de forcer les oscillations à une fréquence ajustable par l'utilisateur.



Figure 2.4: Pendule de Pohl
[20]

- Le pendule de torsion

Le pendule de torsion se constitue d'une barre horizontale, fixée à un support par l'intermédiaire d'un fil de torsion. Ce fil d'acier exerce un couple de rappel, proportionnel à l'angle de torsion(Fig 2.5).

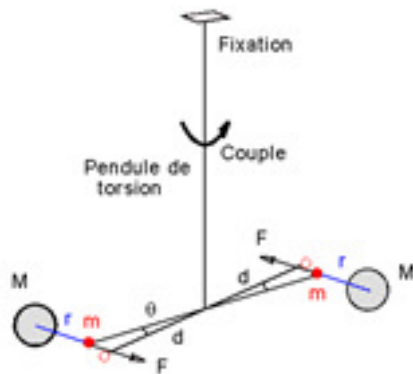


Figure 2.5: Pendule de torsion (a) Schéma d'un pendule de torsion (b)Photo du pendule de torsion

[24] [18]

- Les pendules inversés

On définit le pendule inversé comme une tige posée en position d'équilibre instable (verticale à $\pi(180^\circ)$) sur une base fixe ou mobile. Il existe plusieurs aspects et formes de pendule inversé car c'est un système à dynamique non linéaire instable ce qui fait de lui un système d'étude très intéressant pour la communauté des automaticiens.

1- Pendule inversé classique

Un pendule inversé classique ou chariot équilibriste est un système dynamique considéré comme un très bon exemple pour les systèmes instables et non linéaires. Il est constitué d'un chariot mobile surmonté d'un pendule inversé (Fig 2.6), librement articulé autour d'un axe transversal. Le schéma de la figure 2.6 explicite le principe de fonctionnement de ce pendule.

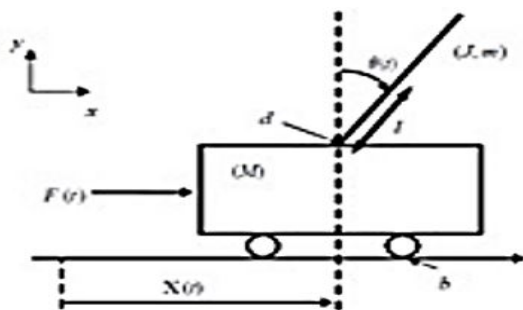


Figure 2.6: Pendule inversé classique(a)Schémas de l'ensemble chariot et pendule inversé (b)Photo réelle d'un pendule inversé classique

[1] [4]

2- Le double Pendule inversé
 On distingue deux architectures

- En parallèle

Dans ce cas les deux tiges sont indépendantes comme indiqué dans la figure 2.7. Le déplacement du chariot engendre des déviations par rapport à la verticale d'un angle de θ_l et θ_B de la première et la deuxième tige respectivement.

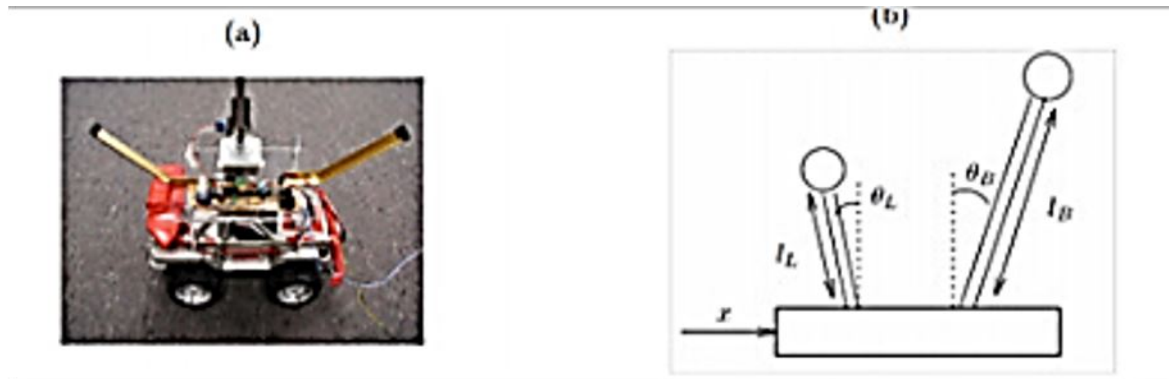


Figure 2.7: Double pendule inversé en parallèle (a) Photo du pendule (b) Schéma explicatif [4]

- En cascade

Ce système dispose de deux tiges en rotation libre. La première a le même mouvement que le pendule simple c'est à dire: elle tourne autour du pivot de la base d'un angle θ_1 (Fig 2.8), la deuxième tourne autour de l'articulation entre les deux tiges.

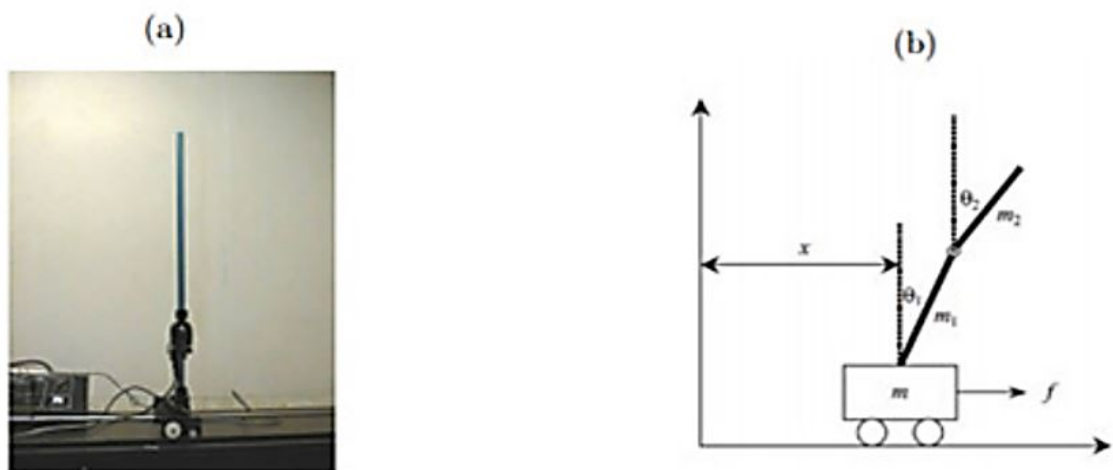


Figure 2.8: Double pendule inversé en cascade,(a)Photo du pendule (b) Schéma de principe

[4]

3- Le pendule inversé sur deux roues

Le pendule inversé à deux roues est constitué d'un pendule inversé en rotation libre, posé sur une base mobile (l'essieu et les deux roues) ; comme montré dans la figure 2.9. Ce système fait l'objet de plusieurs études pour la communauté d'automatique.

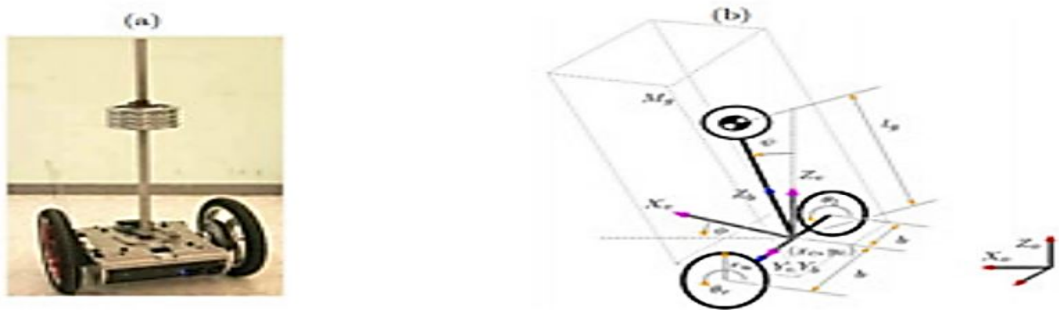


Figure 2.9: Pendule inversé sur deux roues, (a) Photo du pendule (b) Schéma de principe [4]

4- Le pendule inversé stabilisé par volant d'inertie

C'est un système composé de deux corps mécaniques (Fig 2.10) : un pendule inversé en rotation libre autour d'un pivot lié au bâti et un volant actionné (roue d'inertie) dont le centre de masse coïncide avec l'extrémité du pendule. Le principe de fonctionnement de ce système est basé sur le mouvement de rotation du volant d'inertie qui provoque, par les effets dynamiques qu'il induit, la rotation de pendule.



Figure 2.10: Pendule inversé stabilisé par volant d'inertie, (a) Photo du pendule (b) Schéma explicatif

[4]

2.3 Exemples d'applications des systèmes de pendule

- Le legway
Ce robot basé également sur le principe du pendule inversé, est inventé par Steven Hassenplug. Il utilise deux détecteurs de proximité électro-optique pour la mesure de l'angle d'inclinaison



Figure 2.11: Legway
[2]

- Jœ-le Pendule
C'est un modèle inspiré du système du pendule inversé classique. Il a été conçu en 1996.



Figure 2.12: Jœ-le Pendule
[2]

- Le Nbot

Inventé par David P. Anderson, c'est un autre système basé sur le principe du pendule inversé. Il a comme particularité l'utilisation d'un capteur inertielle et des codeurs pour mesurer la position pour son équilibrage.



Figure 2.13: Nbot
[2]

- Le segway

Le segway présenté dans la figure 2.12 est un moyen de transport inventé par Dean Kamen, il représente l'application la plus courante du principe du pendule inversé à deux roues. Son principe de fonctionnement est simple : lorsque l'utilisateur se penche en avant le véhicule accélère et lorsqu'il se penche en arrière il ralentit.



Figure 2.14: Segway
[5]

- iBot 4000

C'est un fauteuil roulant électrique automatisé inventé par Dean Kamen et commercialisé par Johnson & Johnson. Il est le seul fauteuil roulant automatisé commercialisé grâce à sa nouvelle technologie.

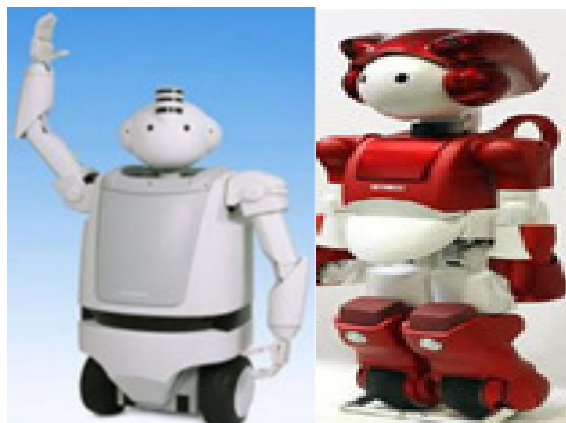


Figure 2.15: iBot4000

[22]

- Robots EMIEW et EMIEW2

Emiew - Excellent Mobility and Interactive Existence as Workmate, c'est un robot humanisé qui utilise des roues au lieu de pieds pour se déplacer. Ces roues sont placées comme un pendule inversé sur deux roues.



[19]

Figure 2.16: a)EMIEW b) EMIEW2

- Les fusées

La conception des fusées qui décollent à la verticale est basée sur l'étude des systèmes de pendule inversé. Une autre révolution des fusées est l'atterrissage verticale porté par la société Space X et sa fusée Falcon 9



Figure 2.17: Les fusées (a)R-7 Semiorka,(b) Falcon 9
[3]

Le corps humain

Le mouvement d'un corps humain est similaire à un double pendule inversé en cascade

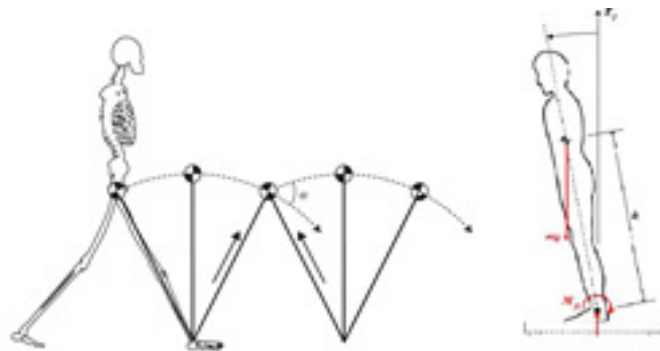


Figure 2.18: Le corps humain un pendule
[8]

Robots humanoïdes

"ASIMO" (2000) est l'un des robots humanoïdes les plus célèbres, il dispose d'une grande habilité manuelle. Tandis que WABOT-1 est l'un des premiers, il a été conçu à l'université de Waseda (1973).



Figure 2.19: WABOT-1(à gauche), ASIMO(à droite)
[3]

2.4 Conclusion

Le pendule est un système mécanique très intéressant et largement étudié en automatique. Les pendules inversés, par leurs natures sous-actionnée, leurs dynamiques non linéaires et instables constituent particulièrement un défi pour les contrôler. Dans ce chapitre nous avons présenté quelques types de pendules et nous avons présenté quelques exemples d'application afin de démontrer l'intérêt de l'étude des pendules.

Dans notre cas, l'étude se porte sur le pendule inversé rotatif, alors nous allons le présenter et le modéliser mathématiquement dans le chapitre suivant.

Modélisation du pendule inversé rotatif

3.1 Introduction

Ce chapitre dédié à la modélisation du pendule inversé rotatif (PIR) sur lequel nous orientons notre travail. La première partie est consacrée à l'utilisation du lagrangien pour trouver un modèle non linéaire sous forme d'équations différentielles et sous forme d'une représentation d'état. Nous présentons par la suite une linéarisation autour du point d'équilibre, imposée implicitement par la complexité du système. Pour justifier l'utilité de ce travail, nous présentons une simulation qui montre clairement l'instabilité du système dans la dernière partie.

3.1.1 Présentation du pendule inversé rotatif

Le pendule inversé rotatif appelé pendule de Furuta, fait partie de la famille des systèmes pendulaires, c'est un système multivariables sous-actionné non-linéaire qui paraît simple à première vue mais à cause de son comportement fortement non linéaire il présente encore un problème ouvert en commande.

Le Quanser QUBE-Servo 2 est une plate-forme de servomoteur portable et entièrement intégrée conçue spécifiquement pour l'enseignement des concepts de commande. Le système est équipé d'un moteur courant continu brossé à entraînement direct de haute qualité, de deux encodeurs, d'un système d'acquisition de données interne et d'un amplificateur. La sélection de l'un des trois panneaux d'interface QFLEX 2 disponibles nous permet de connecter l'unité à un PC via USB, un périphérique embarqué NI myRIO et d'autres microcontrôleurs tels qu'un Arduino ou un Raspberry Pi en utilisant le protocole SPI.



Figure 3.1: Quanser QUBE-Servo 2

3.2 Le modèle mathématique du PIR

Le PIR est représenté par le schéma suivant (Fig 3.2)

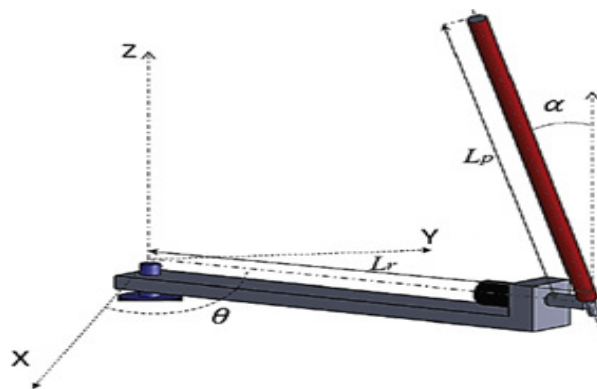


Figure 3.2: Schéma bras-pendule

[6]

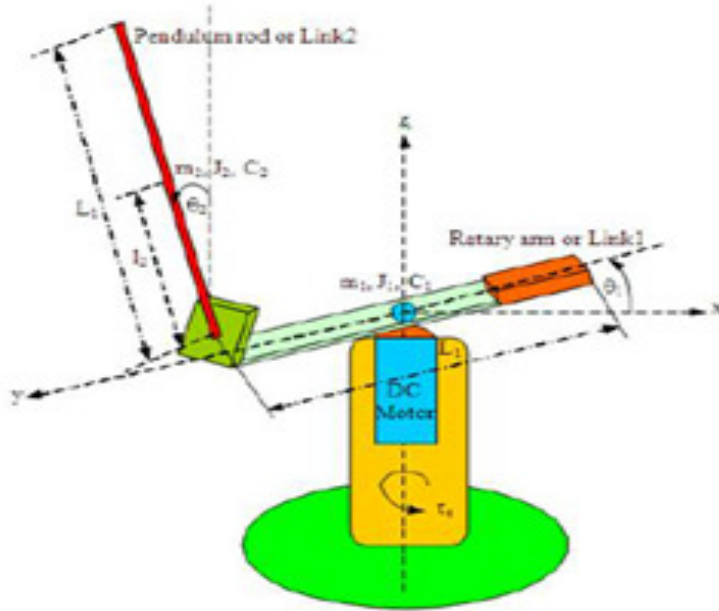


Figure 3.3: Schéma pendule-bras-moteur

La modélisation se fait par le formalisme de Lagrange qui permet d'obtenir directement les équations d'évolution en fonction des forces appliquées.

Ce système a deux degrés de liberté donc il est décrit par deux coordonnées généralisées (α, θ) avec α est l'angle du pendule, θ est l'angle du bras.

$$L = E_c - E_p \quad (3.1)$$

E_c : l'énergie cinétique

E_p : l'énergie potentielle

$$E_c = E_{\text{pendule}} + E_{\text{bras}}$$

$$E_{\text{pendule}} = \frac{1}{2} m_p \dot{P}^2 + \frac{1}{2} J_p \dot{\alpha}^2$$

$$E_{\text{bras}} = \frac{1}{2} J_r \dot{\theta}^2$$

$$E_c = \frac{1}{2} m_p \dot{P}^2 + \frac{1}{2} J_p \dot{\alpha}^2 + \frac{1}{2} J_r \dot{\theta}^2 \quad (3.2)$$

$$E_p = E_{\text{pendule}} + E_{\text{Pbras}}$$

$$E_{\text{Pbras}} = 0$$

$$E_p = \frac{1}{2} m_p g L_p \cos$$

Avec P est la position du centre de masse donnée par les équations suivantes :

$$P_x = L_r \cos \theta + \frac{1}{2} L_p \sin \alpha \sin \theta$$

$$P_y = L_r \sin \theta - \frac{1}{2} L_p \sin \alpha \cos \theta$$

$$P_z = L_p \cos \alpha .$$

On dérive pour obtenir l'équation de Lagrange

$$\dot{P}_x = -L_r \dot{\theta} \sin \theta + \frac{1}{2} L_p (\dot{\alpha} \cos \alpha \sin \theta + \dot{\theta} \cos \theta \sin \alpha) .$$

$$\dot{P}_y = L_r \dot{\theta} \cos \theta - \frac{1}{2} L_p (\dot{\alpha} \cos \alpha \cos \theta + \dot{\theta} \sin \theta \sin \alpha) .$$

$$\dot{P}_z = -\frac{1}{2} L_p \dot{\alpha} \sin \alpha .$$

On a :

$$\dot{P}^2 = \dot{P}_x^2 + \dot{P}_y^2 + \dot{P}_z^2$$

Alors en remplaçant dans (3.2) on trouve :

$$E_c = \frac{1}{2} \left(J_r + m_p L_r^2 + \frac{1}{4} m_p L_p^2 \sin^2 \alpha \right) \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} \left(J_p + \frac{1}{4} m_p L_p^2 \right) \dot{\alpha}^2 - \frac{1}{2} m_p L_r L_p \cos \alpha \dot{\theta} \dot{\alpha}$$

Alors L devient :

$$L = \frac{1}{2} \left(J_r + m_p L_r^2 + \frac{1}{4} m_p L_p^2 \sin^2 \alpha \right) \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} \left(J_p + \frac{1}{4} m_p L_p^2 \right) \dot{\alpha}^2 - \frac{1}{2} m_p L_r L_p \cos \alpha \dot{\theta} \dot{\alpha} - \frac{1}{2} m_p g L_p \cos \alpha$$

Pour aboutir à des équations différentielles, nous utilisons la formule d'Euler-Lagrange.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{dL}{dx} \right) - \frac{dL}{dx} = Q$$

Avec Q est la force extérieure (comme le frottement) et x est une coordonnée généralisée. Pour un système à n degrés de liberté, on trouve n équations.

Dans le cas du PIR possédant deux degrés de liberté, décrit donc par deux coordonnées généralisées on a deux équations :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{dL}{d\dot{\theta}} \right) - \frac{dL}{d\theta} = Q_1$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{dL}{d\dot{\alpha}} \right) - \frac{dL}{d\alpha} = Q_2$$

On trouve alors deux forces extérieures, une force en relation avec θ donc c'est la force appliquée à la tige (couple du moteur et frottement) notée Q_1 et une force de frottement en relation avec α notée Q_2

$$\begin{aligned} Q_1 &= \tau - B_r \dot{\theta} \\ Q_2 &= -B_p \dot{\alpha} \end{aligned}$$

Avec B_r , B_p sont les coefficients des frottements visqueux du bras et du pendule respectivement et τ représente le moment du couple appliqué à la tige rotative généré par le servomoteur, il est donné par :

$$\tau = \frac{\eta_g \eta_m K_g K_t (V_m - K_g K_m \dot{\theta})}{R_m}$$

On arrive finalement à établir deux équations différentielles qui décrivent le mouvement du système:

$$\begin{aligned} \ddot{\theta} \left(J_r + m_p L_r^2 + \frac{1}{4} m_p L_p^2 \sin^2 \alpha \right) + \ddot{\alpha} \left(-\frac{1}{2} m_p L_r L_p \cos \alpha \right) + \dot{\alpha} \dot{\theta} \left(\frac{1}{2} m_p L_p^2 \sin \alpha \cos \alpha \right) \\ + \dot{\alpha}^2 \left(\frac{1}{2} m_p L_r L_p \sin \alpha \right) = Q_1 \end{aligned} \quad (3.5)$$

$$\ddot{\theta} \left(-\frac{1}{2} m_p L_r L_p \cos \alpha \right) + \ddot{\alpha} \left(J_p + \frac{1}{4} m_p L_p^2 \right) + \dot{\theta}^2 \left(-\frac{1}{4} m_p L_p^2 \sin \alpha \cos \alpha \right) - \frac{1}{2} m_p g L_p \sin \alpha = Q_2 \quad (3.6)$$

Le modèle est écrit sous forme d'un système de deux équations à deux inconnues :

$$\begin{cases} a\ddot{\theta} + b\ddot{\alpha} = c \\ a_1\dot{\theta} + b_1\dot{\alpha} = c_1 \end{cases} \quad (3.7)$$

Avec :

- $a = \left(J_r + m_p L_r^2 + \frac{1}{4} m_p L_p^2 \sin^2 \alpha \right)$
- $a_1 = \left(-\frac{1}{2} m_p L_r L_p \cos \alpha \right)$
- $b = \left(-\frac{1}{2} m_p L_r L_p \cos \alpha \right)$
- $b_1 = \left(J_p + \frac{1}{4} m_p L_p^2 \right)$
- $c = \tau - B_r \dot{\theta} - \left[\dot{\alpha} \dot{\theta} \left(\frac{1}{2} m_p L_p^2 \sin \alpha \cos \alpha \right) + \dot{\alpha}^2 \left(\frac{1}{2} m_p L_r L_p \sin \alpha \right) \right]$
- $c_1 = -B_p \dot{\alpha} - \left[\dot{\theta}^2 \left(-\frac{1}{4} m_p L_p^2 \sin \alpha \cos \alpha \right) - \frac{1}{2} m_p g L_p \sin \alpha \right]$

Pour résoudre le système (3.7) on utilise la méthode de Cramer afin de tirer $\ddot{\alpha}$ et $\ddot{\theta}$.

$$\ddot{\theta} = \frac{\begin{vmatrix} a & c \\ a_1 & c_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}} = \frac{ac_1 - a_1c}{ab_1 - a_1b} = \frac{det1}{det}$$

$$\ddot{\alpha} = \frac{\begin{vmatrix} b & c \\ b_1 & c_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}} = \frac{bc_1 - b_1c}{ab_1 - a_1b} = \frac{det2}{det}$$

$$det = (J_r + m_p L_r^2) \left(J_p + \frac{1}{2} m_p L_p^2 \right) + \frac{1}{4} m_p L_p^2 \sin^2 \left(J_p + \frac{1}{4} m_p L_p^2 \right) + \frac{1}{4} (m_p L_p L_r \cos \alpha)^2$$

$$det1 = \left[\tau - B_r \dot{\theta} - \left(\frac{1}{2} m_p L_p^2 \sin \alpha \cos \alpha \right) \dot{\alpha} \dot{\theta} - \left(\frac{1}{2} m_p L_r \sin \alpha \right) \dot{\alpha}^2 \right] \left(J_p + \frac{1}{4} m_p L_p^2 \right) \times$$

$$- \left[-B_p \dot{\alpha} + \left(\frac{1}{4} m_p L_p^2 \sin \alpha \cos \alpha \right) \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m_p g L_p \sin \alpha \right] \left(-\frac{1}{2} m_p L_r L_p \cos \alpha \right) \quad (3.8)$$

$$det2 = \left[-B_p \dot{\alpha} + \left(\frac{1}{4} m_p L_p^2 \sin \alpha \cos \alpha \right) \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m_p g L_p \sin \alpha \right] \left(J_r + m_p L_p^2 + \frac{1}{4} m_p L_p^2 \sin \alpha^2 \right)$$

$$- \left[\tau - B_r \dot{\theta} - \left(\frac{1}{2} m_p L_p^2 \sin \alpha \cos \alpha \right) \dot{\alpha} \dot{\theta} - \left(\frac{1}{2} m_p L_r \sin \alpha \right) \dot{\alpha}^2 \right] \left(-\frac{1}{2} m_p L_r L_p \cos \alpha \right) \quad (3.9)$$

Alors

$$\ddot{\theta} = \left[\tau - B_r \dot{\theta} - \left(\frac{1}{2} m_p L_p^2 \sin \alpha \cos \alpha \right) \dot{\alpha} \dot{\theta} - \left(\frac{1}{2} m_p L_r \sin \alpha \right) \dot{\alpha}^2 \right] \frac{\left(J_p + \frac{1}{4} m_p L_p^2 \right)}{det}$$

$$- \left[-B_p \dot{\alpha} + \left(\frac{1}{4} m_p L_p^2 \sin \alpha \cos \alpha \right) \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m_p g L_p \sin \alpha \right] \frac{\left(-\frac{1}{2} m_p L_r L_p \cos \alpha \right)}{det} \quad (3.10)$$

$$\ddot{\alpha} = \left[-B_p \dot{\alpha} + \left(\frac{1}{4} m_p L_p^2 \sin \alpha \cos \alpha \right) \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m_p g L_p \sin \alpha \right] \frac{\left(J_r + m_p L_p^2 + \frac{1}{4} m_p L_p^2 \sin \alpha^2 \right)}{det}$$

$$- \left[\tau - B_r \dot{\theta} - \left(\frac{1}{2} m_p L_p^2 \sin \alpha \cos \alpha \right) \dot{\alpha} \dot{\theta} - \left(\frac{1}{2} m_p L_r \sin \alpha \right) \dot{\alpha}^2 \right] \frac{\left(-\frac{1}{2} m_p L_r L_p \cos \alpha \right)}{det} \quad (3.11)$$

Le mouvement du système est assuré par un servomoteur, alors l'entrée est la tension délivrée au moteur. Pour expliciter l'application la tension dans notre système il est nécessaire d'avoir recours à la formule du couple moteur τ

$$\tau = \frac{\eta_g \eta_m K_g K_t (V_m - K_g K_m \dot{\theta})}{R_m} \Rightarrow \tau = \frac{\eta_g \eta_m K_g K_t}{R_m} V_m - \frac{\eta_g \eta_m K_m K_t K_g^2}{R_m} \dot{\theta} \quad (3.12)$$

3.3 Représentation d'état :

Généralement la présentation des systèmes dynamiques en automatique s'effectue par une représentation dans l'espace d'état, parce que la représentation d'état permet de connaître le comportement interne du système ainsi que son comportement externe. Cette dernière décrit le système entier à travers un ensemble de significations physiques, ces quantités sont appelées variables d'état.

D'une manière générale, l'évolution d'un système linéaire dans l'espace d'état est donnée:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax(t) + Bu(t) \\ y = Cx(t) + Du(t) \end{cases} \quad (3.13)$$

Avec x est le vecteur d'état, $u \in \mathbb{R}^m$ est le vecteur d'entrée et $y \in \mathbb{R}^p$ est le vecteur de sortie.

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$: Matrice d'état.

$B \in \mathbb{R}^{n \times m}$: Matrice d'entrée.

$C \in \mathbb{R}^{n \times p}$: Matrice de sortie.

$D \in \mathbb{R}^{n \times m}$: Matrice de transfert direct (ou couplage) entrée/sortie. Il est rare que la sortie du système soit directement reliée a son entrée. On a donc très souvent $D = 0$.

- La représentation d'état parfaitement adaptée a l'étude d'un système multi-variables.
- La représentation d'état permet d'accéder a la connaissance de variables internes.

Le schéma fonctionnel du système (2.13) est représenté comme suit(Fig 3.4) :

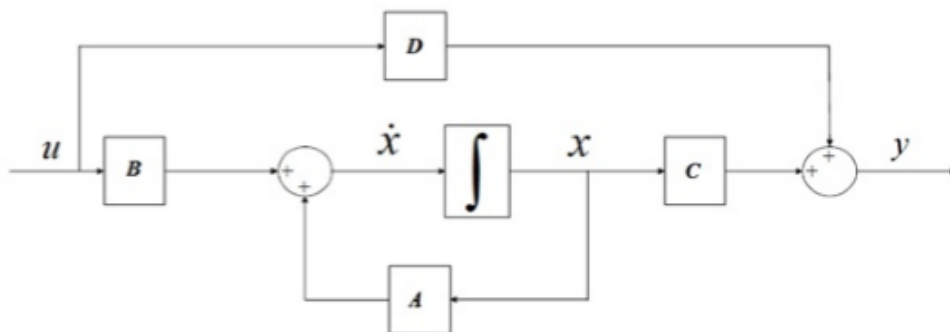


Figure 3.4: Schéma fonctionnel

On choisit souvent comme variables d'états, des éléments du système susceptibles d'être des réservoirs d'énergie. Dans le cas du PIR le vecteur d'état est pris donc :

$$x = (x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4)^T = (\theta \ \alpha \ \dot{\theta} \ \dot{\alpha})^T$$

La représentation d'état est donnée par:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_3 \\ \dot{x}_2 = x_4 \\ \dot{x}_3 = f_1(x) + g_1(x)u \\ \dot{x}_4 = f_2(x) + g_2(x)u \end{cases}$$

Avec u est la commande appliquée au système donnée par

$$u = \tau = \frac{\eta_g \eta_m K_g K_t (V_m - K_g K_m \dot{\theta})}{R_m} \Rightarrow \tau = \frac{\eta_g \eta_m K_g K_t}{R_m} V_m - \frac{\eta_g \eta_m K_m K_t K_g^2}{R_m} \dot{\theta}$$

et les fonctions $f_1(x)$, $f_2(x)$, $g_1(x)$ et $g_2(x)$ sont données comme suites :

$$f_1(x) = \left[-\frac{\eta_g \eta_m K_m K_t K_g^2}{R_m} x_3 - B_r x_3 - \left(\frac{1}{2} m_p L_p^2 \sin x_2 \cos x_2 \right) x_4 x_3 - \left(\frac{1}{2} m_p L_r \sin x_2 \right) x_4^2 \right] \frac{(J_p + \frac{1}{4} m_p L_p^2)}{\det} - \left[-B_p x_3 + \left(\frac{1}{4} m_p L_p^2 \sin x_2 \cos x_2 \right) x_3^2 + \frac{1}{2} m_p g L_p \sin x_2 \right] \frac{(\frac{1}{2} m_p L_r L_p \cos x_2)}{\det} \quad (3.15)$$

$$g_1(x) = \frac{(J_p + \frac{1}{4} m_p L_p^2)}{\det} * z$$

$$f_2(x) = \left[-B_p x_4 + \left(\frac{1}{4} m_p L_p^2 \sin x_2 \cos x_2 \right) x_3^2 + \frac{1}{2} m_p g L_p \sin x_2 \right] \frac{(J_r + m_p L_p^2 + \frac{1}{4} m_p L_p^2 \sin^2 x_2)}{\det} - \left[-\frac{\eta_g \eta_m K_m K_t K_g^2}{R_m} x_3 - B_r x_3 - \left(\frac{1}{2} m_p L_p^2 \sin x_2 \cos x_2 \right) x_4 x_3 - \left(\frac{1}{2} m_p L_r \sin x_2 \right) x_4^2 \right] \frac{(-\frac{1}{2} m_p L_r L_p \cos x_2)}{\det} \quad (3.16)$$

$$g_2(x) = \frac{(-\frac{1}{2} m_p L_r L_p \cos x_2)}{\det} * z$$

$$\det = (J_r + m_p L_r^2) \left(J_p + \frac{1}{2} m_p L_p^2 \right) + \frac{1}{4} m_p L_p^2 \sin^2 x_2 \left(J_p + \frac{1}{4} m_p L_p^2 \right) + \frac{1}{4} (m_p L_p L_r \cos x_2)^2$$

3.4 Linéarisation de système autour de point d'équilibre:

Le modèle du PIR est trop complexe, non linéaire et sous actionné car on a une seule entrée u (la tension délivrée au moteur) dans le but de commander deux sorties (la stabilisation de la tige et du pendule). Il est alors évident que la commande du système est relativement difficile. Alors, une linéarisation du système autour de ses points d'équilibre est nécessaire.

3.4.1 Les points d'équilibres :

Les points d'équilibre sont les points correspondants à $\dot{x} = 0$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 0 \\ \dot{x}_2 = 0 \\ \dot{x}_3 = 0 \\ \dot{x}_4 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \\ f_1(x) = 0 \\ f_2(x) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \dot{\theta} = 0 \\ \dot{\alpha} = 0 \\ f_1(x) = 0 \\ f_2(x) = 0 \end{cases} \quad (3.17)$$

On injecte les valeurs d'équilibre $\dot{\theta} = 0, \dot{\alpha} = 0, \tau = 0$ dans les équations de $\ddot{\alpha}$ et $\ddot{\theta}$ données auparavant et on trouve:

$$\begin{cases} \dot{\theta} = 0 \\ \dot{\alpha} = 0 \\ \frac{1}{2}m_p g L_p \sin \alpha \left(\frac{1}{2}m_p L_r L_p^2 \cos \alpha \right) = 0 \\ \sin \alpha (J_r + m_p L_p^2 \sin^2) = 0 \end{cases} \quad (3.18)$$

La résolution de système donne $\alpha = k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Physiquement il n'existe que deux cas $\alpha = 0$ et $\alpha = \pi$ alors l'ensemble des points d'équilibre de ce système est donné par $\{x_1 = (\theta, \pi, 0, 0), x_2 = (\theta, 0, 0, 0)\}$

Intuitivement, on peut déduire que le premier point d'équilibre est stable (correspondant à la position du pendule en bas) tandis que le deuxième est instable (correspondant à la position du pendule en haut). Cette déduction peut être confirmée mathématiquement de la procédure suivante :

- 1) Linéarisation du système autour de chaque point d'équilibre.
- 2) Calcul des valeurs propres de chaque système linéarisé.
- 3) Discussion de la stabilité selon le signe de la partie réelle des valeurs propres selon le théorème suivant:

Soit $\{\lambda_0 \dots \lambda_n\}$ l'ensemble des valeurs propres du système

- a) si $\forall i \in [0, n]$
- b) $\text{Re}(\lambda_i) < 0$ alors le point d'équilibre est globalement asymptotiquement stable
- c) $\text{Re}(\lambda_i) \leq 0$ alors le point d'équilibre est stable mais n'est pas asymptotiquement stable.
- d) Si $\exists i$ tq $\text{Re}(\lambda_i) > 0$ alors le point d'équilibre est instable.

Il est inutile d'étudier le système autour d'un point d'équilibre stable alors on va focaliser le travail sur le deuxième point $x = (\theta, 0, 0, 0)$

3.4.2 Les matrices de la représentation d'état

Le système linéaire s'écrit sous la forme:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases} \quad (3.19)$$

Pour obtenir cette forme en utilise la formule de Taylor-Young donnée comme suite :

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + f''(0)\frac{x^2}{2!} + \dots + f^{(n)}(0)\frac{x^n}{n!} + x^n\epsilon(x)$$

En utilisant le développement d'ordre 01 on obtient :

$$f(x) = f(0) + f'(0)x$$

$$\text{Avec } A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{df_1}{dx_1} & \frac{df_1}{dx_2} & \frac{df_1}{dx_3} & \frac{df_1}{dx_4} \\ \frac{df_2}{dx_1} & \frac{df_2}{dx_2} & \frac{df_2}{dx_3} & \frac{df_2}{dx_4} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{dx_3}{du} \\ \frac{dx_4}{du} \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{\left(\frac{1}{2}m_p g L_p\right) \left(\frac{1}{2}m_p L_p L_r\right)}{De} & \frac{(-B_r - K_g K_m Z) \left(J_p + \frac{1}{4}m_p L_p^2\right)}{De} & \frac{B_p \left(-\frac{1}{2}m_p L_p L_r\right)}{De} \\ 0 & \frac{\left(\frac{1}{2}m_p g L_p\right) \left(J_r + m_p L_p^2\right)}{De} & \frac{(B_r - -K_g K_m Z) \left(-\frac{1}{2}m_p L_r L_p\right)}{De} & \frac{-B_p \left(J_r + m_p L_r^2\right)}{De} \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \left(\frac{Z \left(J_p + \frac{1}{4}m_p L_p^2\right)}{De}\right) \\ \left(\frac{\frac{1}{2}m_p L_r L_p Z}{De}\right) \end{bmatrix}$$

Avec

$$De = J_p J_r + J_p m_p L_r^2 + \frac{1}{4} J_r m_p L_p^2 \text{ et } Z = \frac{n_g n_m K_g K_t}{R_m}$$

On prend les positions (θ, α) comme sorties et on utilise les valeurs données précédemment, le système s'écrit

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 81.3429 & -28.8115 & 0.9312 \\ 0 & -271.1981 & 25.8545 & -3.1046 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 51.8078 \\ 387.9960 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ et } D=0$$

3.5 Résultats de simulations:

Pour voir le comportement du système linéaire sans aucune commande, nous allons utiliser le simulink (Fig 3.5):

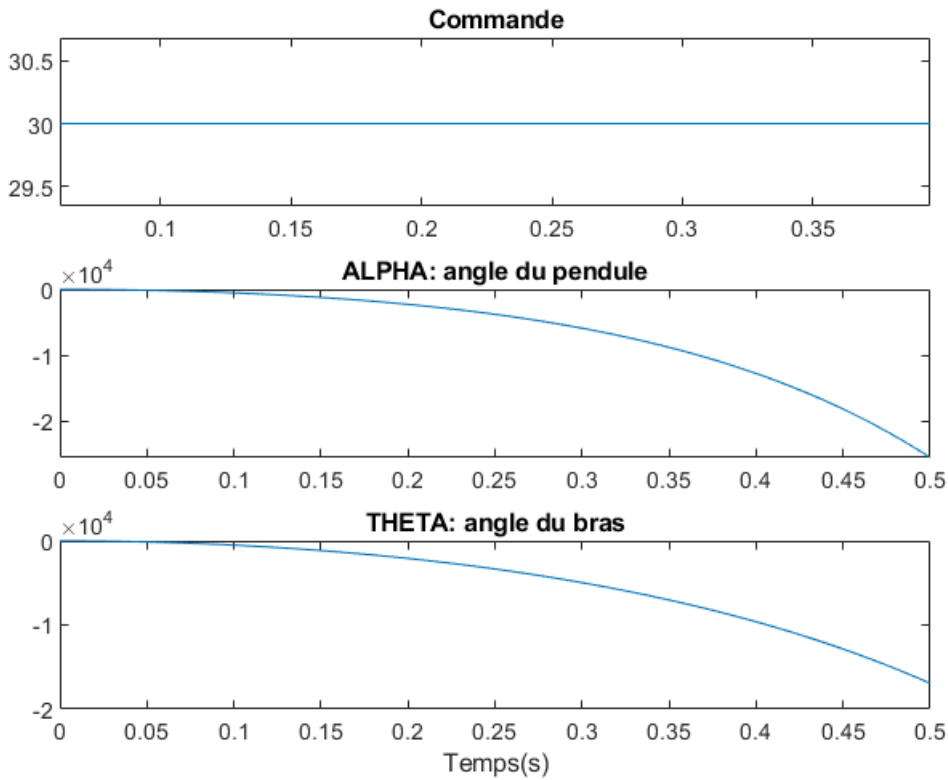


Figure 3.5: Résultat de simulation

Nous avons simulé le modèle linéarisé du pendule autour de son point d'équilibre instable $(\theta, 0, 0, 0)$. Ce point a donné un modèle linéaire avec une valeur propre à partie réelle positive donc un système instable. Le point d'équilibre pris est un point d'équilibre dit répulsif donc le fait de lancer le pendule de n'importe quelle condition initiale il ne voit que le $(\theta, 0, 0, 0)$ mais celui la est instable et répulsif (dans sa zone de linéarité) alors il pousse le pendule vers le bas et ainsi de suite il fait un tour ensuite 2 tours jusqu'une infinité, ce qui explique l'allure obtenue par la simulation (Fig 3.5). Donc ce modèle a besoin d'une commande pour le stabiliser.

Les figures 3.6 et 3.7 représentent le comportement du système non linéaire autonome avec comme condition initiale $x=(0,0,0,0)$.

On remarque dans la figure 3.6 que le modèle revient à 180 (pendule pointant vers le bas) à partir de la condition initiale à 0 (en haut) ce qui est compatible avec le comportement

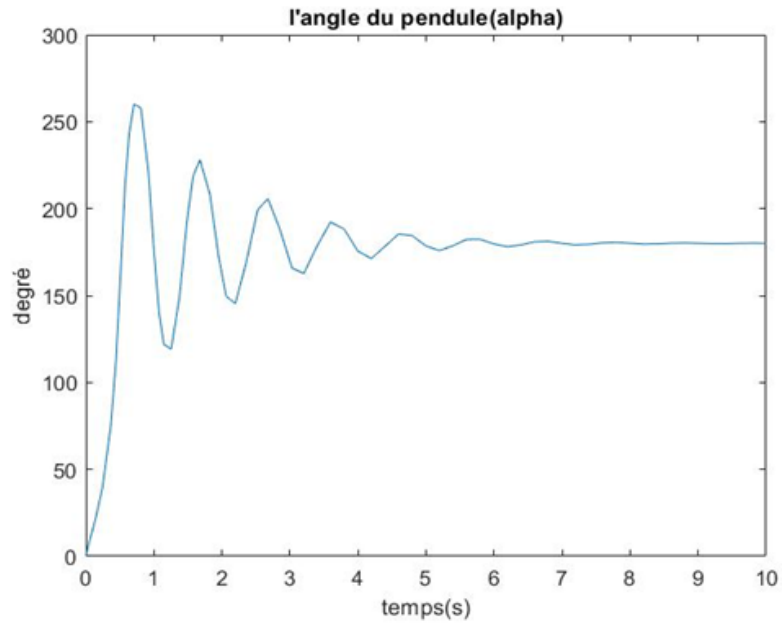


Figure 3.6: Angle du pendule

réel du pendule. Il revient toujours a son point d' équilibre stable par l'effet de la gravité. Pour le bras (Fig 3.7)du pendule il s'éloigne du 0 à cause des forces opposées appliquées sur lui ; ceci est montré clairement par le graphe.

La figure 3.8 montre le comportement obtenu par la simulation des deux modèles en même temps.

La figure 3.8 montre que le modèle linéaire décrit bien le système pour les premiers 15° après il commence à diverger du modèle non linéaire.

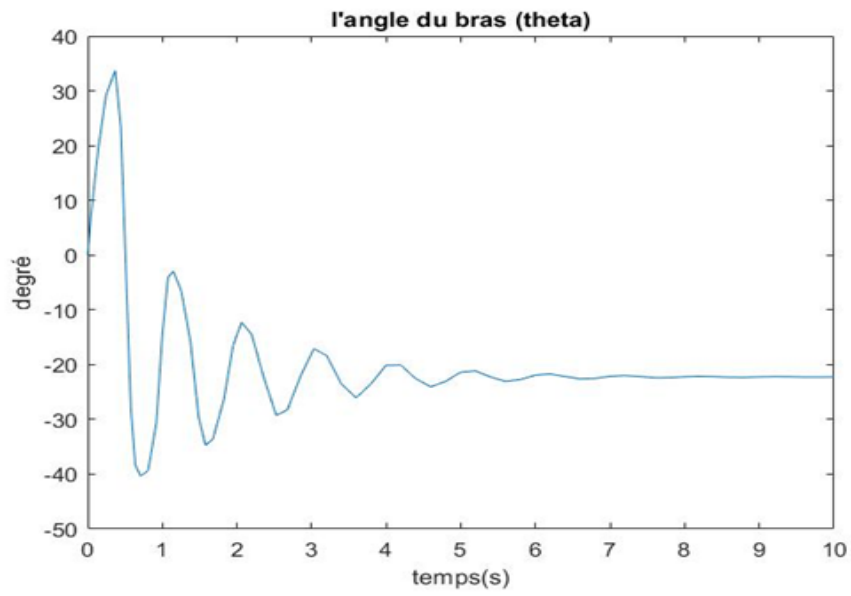


Figure 3.7: Angle du bras

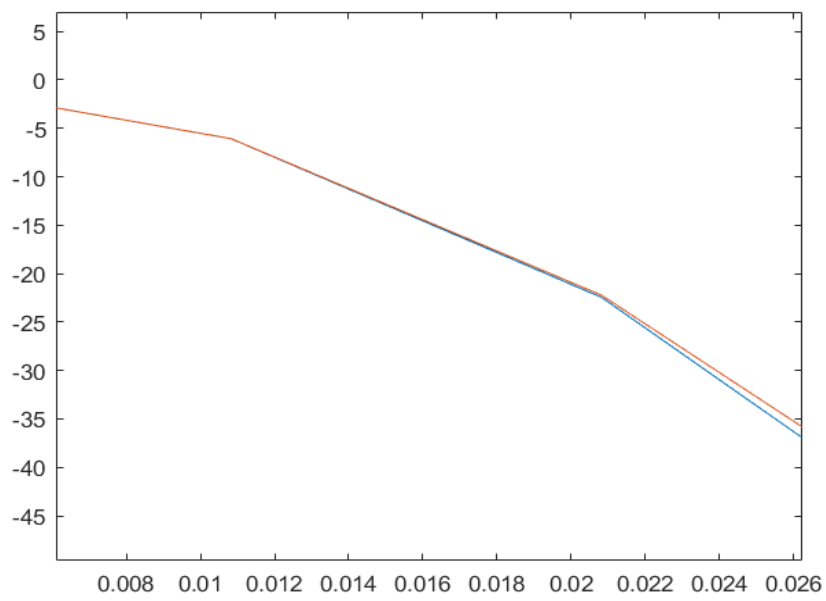


Figure 3.8: Angle du pendule

3.6 Conclusion :

Dans ce chapitre, nous avons établi la modélisation du système dynamique pendule inversé rotatif et nous avons linéarisé le système pour pouvoir faciliter la synthèse de commande vu que c'est un système fortement non-linéaire et sous actionné.

Dans le chapitre suivant nous allons établir une loi de commande linéaire à ce système.

La Commande du système

4.1 Introduction

La stabilisation du pendule PIR consiste à synthétiser une loi de commande capable de le maintenir autour de son point d'équilibre instable. Par ailleurs, il faut respecter les contraintes énergétiques et assurer une certaine robustesse envers toutes incertitudes présentes dans les modèles et toutes perturbations ou variations paramétriques.

Dans la littérature scientifique, plusieurs synthèses de commandes rapides et simples ont été présentées pour la stabilisation du pendule, tout en respectant le cahier de charge défini au préalable.

Ce chapitre fait l'objet d'une présentation de trois types de commandes proposées afin de stabiliser le pendule inversé rotatif. Il s'agit de la commande par correcteur proportionnel-intégral-dérivé (PID), par retour d'état (placement de pôles) et la commande linéaire quadratique.

4.2 Commandabilité du système

La commande d'un système c'est le fait de forcer la trajectoire du système à converger vers une trajectoire de référence.

Définition : Un système linéaire

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax(t) + Bu(t) \\ y = Cx(t) + Du(t) \end{cases} \quad (4.1)$$

est complètement commandable, si et seulement si pour tout état initial $x(t_0) = x_0$ et tout état x_f , il existe une commande $u(t)$ sur $[t_0, t_f]$ et un temps fini $t_f > t_0$, qui permet au système de passer de l'état x_0 à l'état $x(t_f) = x_f$

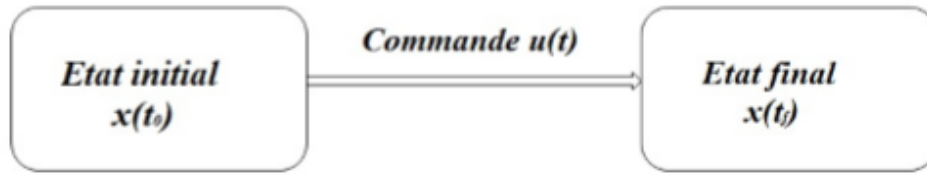


Figure 4.1: Schéma explicatif de la commandabilité

Le théorème ci-après donne les propriétés d'un système commandable. Les assertions suivantes sont équivalentes :

- 1) (A, B) est commandable.
- 2) La matrice de commandabilité $C = [B \ AB \ A^2 B \ \dots \ A^{n-1} B]$ est de rang complet.
- 3) La matrice $(A - \lambda I \ B)$ est de rang complet $\forall \lambda \in \mathbb{C}$
- 4) Les valeurs propres de $(A + BF)$ peuvent être arbitrairement choisies par un choix judicieux de F .

4.3 La commande PID

Le PID est un contrôleur très utilisé dans le domaine de l'automatique. Cette commande est composée de trois actions ; P correspond à l'action proportionnelle, I à l'action intégrale ayant pour but l'élimination de la compensation de l'état d'équilibre, et D à l'action dérivé qui sert à anticiper le futur. Le régulateur PID est une simple implémentation retour d'information (feedback). Dans cette partie, nous allons présenter brièvement les techniques de cette commande ainsi que son application au pendule inversé rotatif.

4.3.1 Historique

Le début des régulateurs remonte au 18ème siècle; puis en 1942, Ziegler et Nichols ont proposé deux démarches permettant de trouver facilement les paramètres optimaux pour une installation donnée [13]. Ces propositions ont été modifiées au fil des ans. En 1963, Horowitz a ajouté un degré de liberté supplémentaire au régulateur PID afin de mieux contrôler les dépassements obtenus lors d'une réponse indicielle.[12]

Au début des années 1990 et dans le but de fournir des règles d'ajustement simples mais plus performantes que celles de Ziegler-Nichols, Aström et ses collaborateurs ont analysé le comportement dynamique d'un grand nombre de processus. Cette analyse a conduit à l'établissement de tableaux servant aux calculs des paramètres P, I et D à partir de mesures simples. [15]

4.3.2 Définition

Le contrôleur PID est un moyen d'auto régulation (boucle fermée), qui cherche à réduire l'erreur entre la consigne et la mesure. Il est obtenu par l'association des trois actions P, I et D et il remplit essentiellement les trois fonctions suivantes :

- fournir un signal de commande en tenant compte de l'évolution du signal de sortie par rapport à la consigne.

- éliminer l'erreur statique grâce au terme intégrateur.
- anticiper les variations de la sortie grâce au terme dérivateur.

4.3.3 Principe de la commande PID

Le principe du correcteur PID est la modification intentionnelle de la valeur de l'erreur qui subsiste entre la consigne et la mesure effectuée; le schéma suivant illustre ce principe:

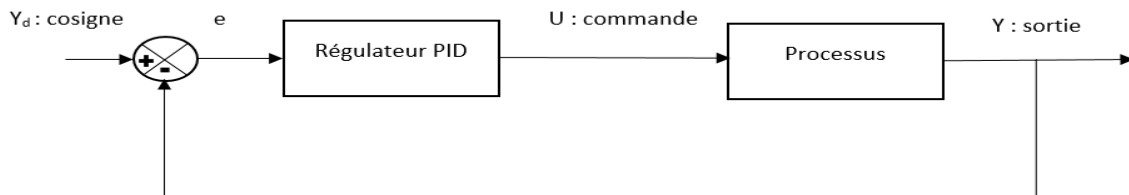


Figure 4.2: Schéma d'une boucle de régulation

Alors on voit bien que la régulation avec PID consiste à corriger l'erreur $e = y_d - y$ avec y_d est la consigne donnée par l'utilisateur et y est la sortie fourni à partir d'un capteur afin d'élaborer une commande $U(t)$ au processus.

4.3.4 Coefficient de réglage

On distingue deux approches principales pour le choix des coefficients de réglage :

- 1)Expérimentation
- 2)Modélisation

4.3.4.1 Approche expérimentale

Elle se base essentiellement sur trois méthodes :

4.3.4.1.1 Ziegler-Nichols pour les systèmes en boucle fermée

Le principe général est d'amener le système à un état d'oscillation puis en déduire les valeurs des coefficients via un calcul simple.

Cette méthode se base sur la connaissance du point critique du processus. Expérimentalement, on boucle le processus sur un simple régulateur proportionnel dont on augmente le gain jusqu'à la limite de stabilité ce qui correspond à amener le système à osciller de manière permanente. On peut calculer les paramètres du régulateur choisi à l'aide du tableau 4.1 après avoir relevé le gain critique K_{cr} du régulateur et la période d'oscillation T_{cr} de la réponse. Ici également, les valeurs proposées conduisent à un temps de montée relativement court malheureusement assorti d'un dépassement élevé. Cette situation n'étant pas toujours satisfaisante, on peut être amené à corriger les coefficients proposés et, en particulier, à diminuer le gain K_p . On notera que les paramètres T_i et T_d proposés par les deux méthodes de Ziegler-Nichols sont dans un rapport constant égal à 4. Le régulateur possède donc deux zéros confondus valant $\frac{-1}{2T_d} = \frac{-2}{T_i}$ [10].

Type	Kp	Ti	Td
P	0.5 Kcr		
PI	0.4 Kcr	0.8 Tcr	
PID	0.6 Kcr	0.5 Tcr	0.125 Tcr

Table 4.1: Paramètres Zeigler Nichols en boucle fermée

4.3.4.1.2 Ziegler-Nichols pour les systemes en boucle ouverte :

Le principe est d'enregistrer la réponse du systeme non régulé à un échelon puis en déduire la valeur des coefficients par analyse de la réponse ("lecture graphique").

Cette méthode est dite aussi méthode de la réponse indicielle : on enregistre la réponse indicielle du processus seul (sans le régulateur), puis de tracer la tangente au point d'inflexion de la courbe. On mesure ensuite sa pente p , le retard apparent L correspondant au point d'intersection de la tangente avec l'abscisse et le gain $K_0 = \frac{Y_\infty}{E}$

On peut alors calculer les coefficients du régulateur choisi à l'aide du tableau 4.2. Généralement, les gains K_p proposés par Ziegler-Nichols sont trop élevés et conduisent à un dépassement supérieur à 20%. Il ne faut donc pas craindre de réduire K_p d'un facteur 2 pour obtenir une réponse satisfaisante [10].

Type	Kp	Ti	Td
P	$1/(Plk_0) = 1/(aK_0)$		
PI	$0.9/(pLK_0) = 0.9/(aK_0)$	3L	
PID	$1.2/(pLK_0) = 1.2/(aK_0)$	2L	0.5 L

Table 4.2: Paramètres Zeigler Nichols en boucle ouverte

4.3.4.1.3 Méthode de Ziegler empirique :

Il s'agit de la méthode Ziegler la plus ancienne, basée sur l'observation de la réponse du processus et la connaissance de la structure du correcteur. Le modele supposé du système a commander est :

$$F(S) = K \frac{e^{-Ts}}{S}$$

4.3.4.1.3.1 Essai en boucle fermée Cette méthode est utilisée quand le processus est instable en boucle ouverte, où qu'il n'est pas techniquement possible d'ouvrir la boucle. On réalise alors un test de pompage. Pour cela, on regle

- Le gain proportionnel jusqu'au gain critique K_{pc}
- L'action intégrale à ∞
- L'action dérivée à 0.

4.3.4.2 Approche par modélisation

Cette approche est utilisée dans le cas de systèmes simples ou de systèmes dangereux pour avoir une première idée sur les coefficients. Elle est basée sur l'utilisation de la fonction de transfert du système et celle du régulateur pour la satisfaction du cahier de charges.

Régulateur	Réglage
P	$K_p = 0.5 K_{pc}$
PI	$K_p = 0.45 K_{pc}$, $T_i = 0.83$
PID	$K_p = 0.6 K_{pc}$, $T_i = 0.5 T_{osc}$, $T_d = 0.125 T_{osc}$

Table 4.3: Méthode de Zeigler empirique en boucle fermée

4.4 Application de la commande PID sur le PIR

Pour le système du pendule inversé rotatif, nous avons utilisé la méthode de Ziegler-Nichols. Dans la figure 3.5, nous remarquons que le système donne un comportement similaire à un système de premier ordre instable, donc nous utilisons une méthode directe de Ziegler Nichols pour le calcul de coefficients de réglage.

4.4.1 Méthode de correction en parallèle

La régulation du PIR consiste à maintenir le pendule en position haute (0°) et le bras dans l'angle désiré. On applique le PID sur le système linéarisé. Dans ce cas, on établit une correction parallèle pour chaque angle comme indiqué sur la figure 4.3.

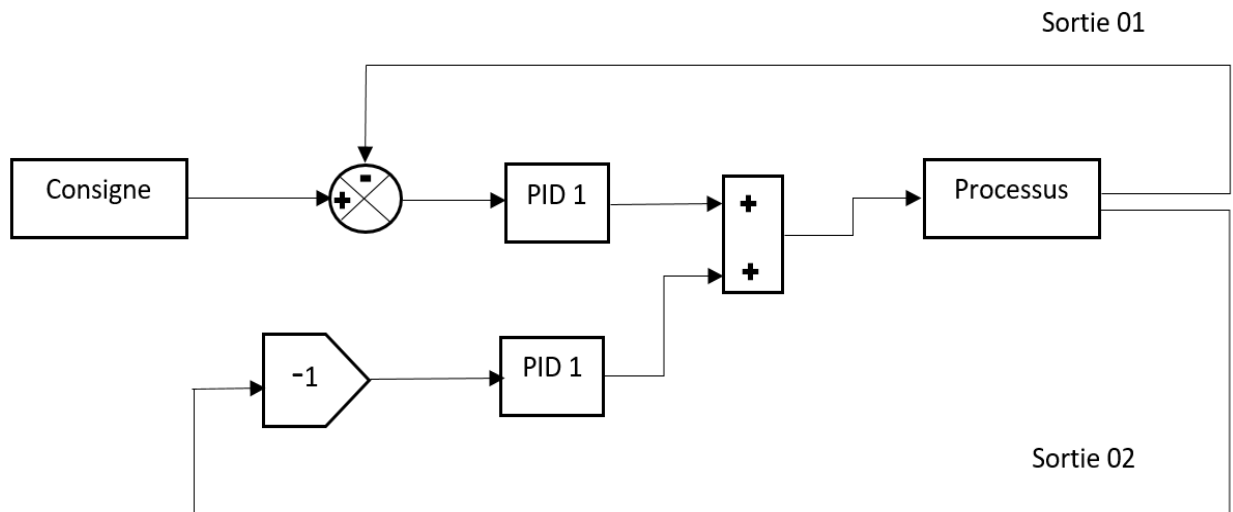


Figure 4.3: Diagramme du système corrigé avec PID en parallèle

Pour obtenir les paramètres des correcteurs PID, nous utilisons en premier lieu la méthode de Ziegler-Nichols pour un système instable ou évolutif, puis nous faisons des essais heuristiques pour aboutir aux performances attendues.

Nous avons utilisé des correcteurs PD parce que le système présente un intégrateur en lui-même.

L'action dérivée ne peut pas être réalisée directement, alors nous utilisons des filtres pour l'effet dérivé. Le résultat de simulation d'une réponse du système corrigé pour une référence de 20 pour l'angle du bras est donné par les figures (4.4) et (4.5) :

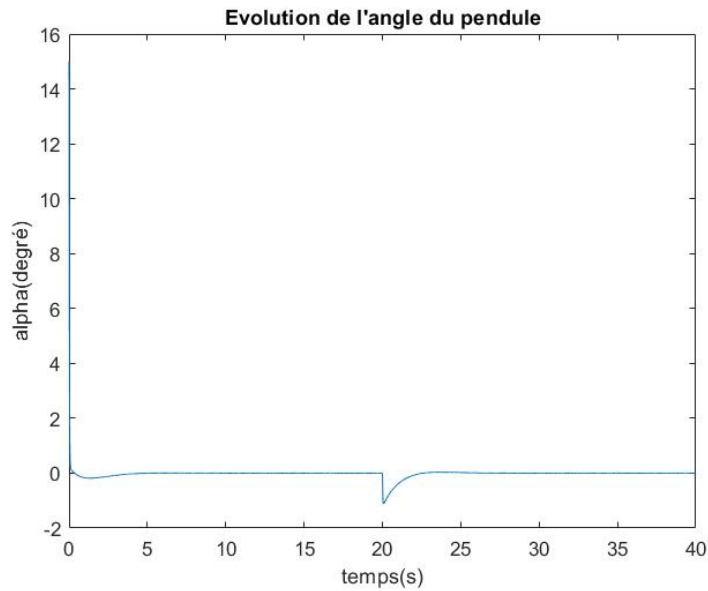


Figure 4.4: La position du pendule en degré

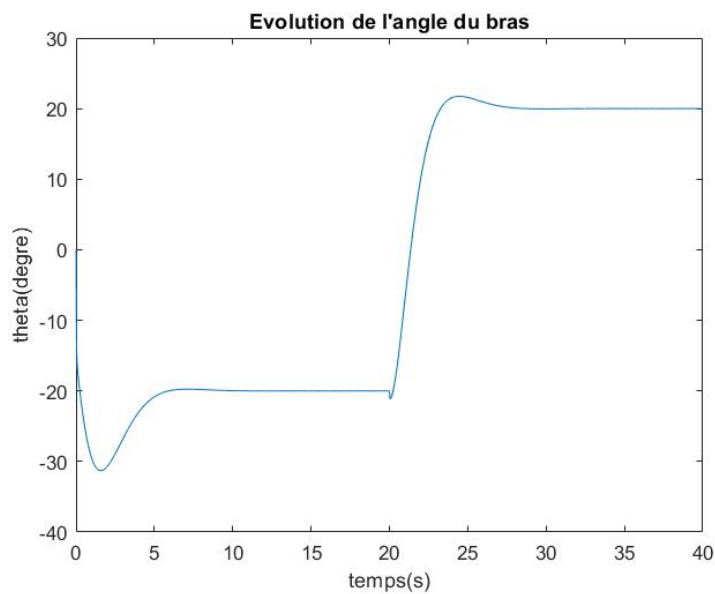


Figure 4.5: La position du bras en degré

Alors nous remarquons que le régulateur PID a permis d'obtenir un système stable avec :

- $\epsilon = 0$: Erreur statique nulle
- $T_r = 3.6s$: temps de réponse rapide
- $-1.116deg < \alpha < 15deg$: Angle du pendule dans la zone de linéarité
- $|V_{max}| = |24|$: ne dépasse pas la tension nominale du moteur

4.4.2 Méthode de correction en cascade

Nous avons utiliser aussi deux correcteurs pid en cascade comme indiqué sur la figure 4.6:

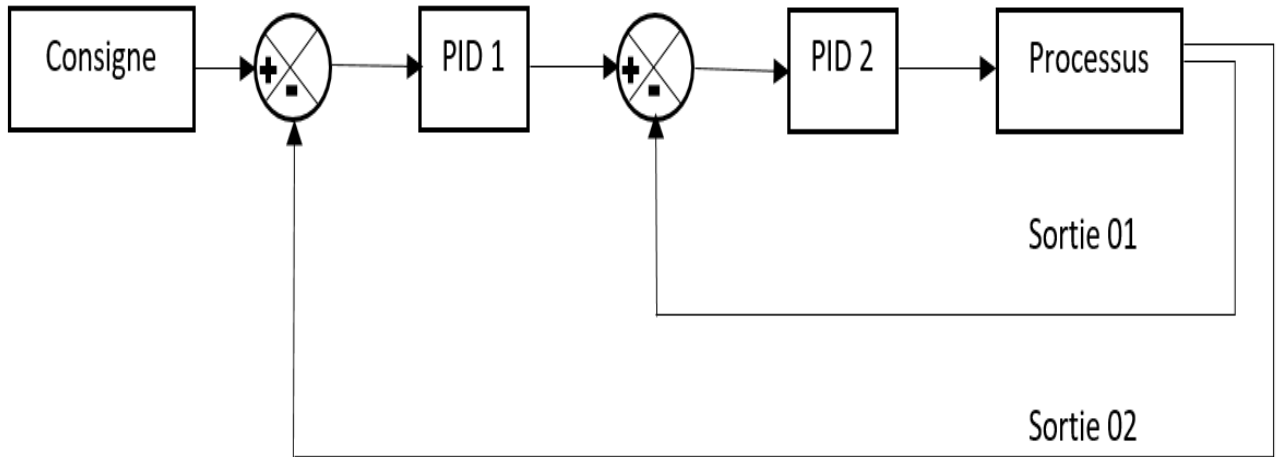


Figure 4.6: Schéma du systeme corrigé avec PID en cascade

Les résultats de cette méthodes sont les suivants (Fig 4.7,4.8 et 4.9:

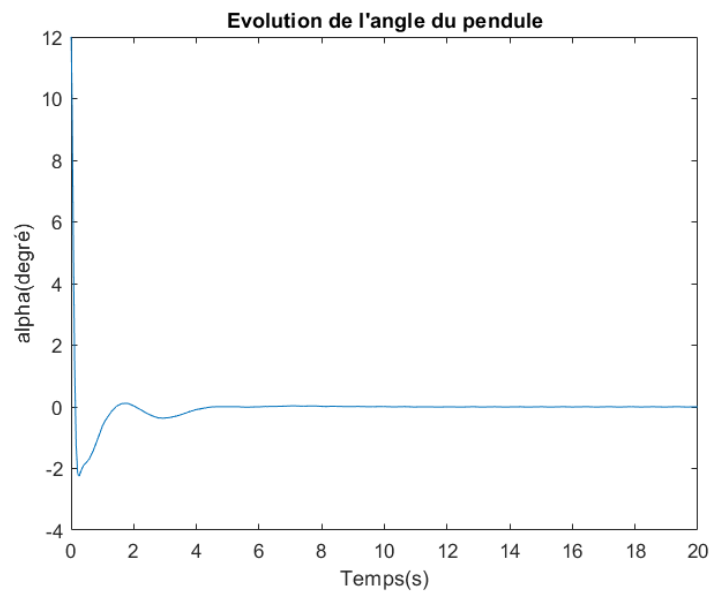


Figure 4.7: Angle du pendule corrigé avec PID en cascade

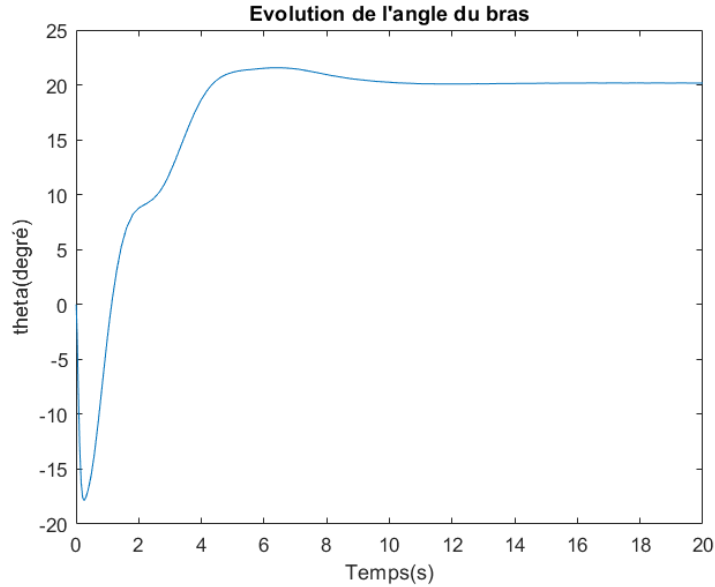


Figure 4.8: Angle du bras corrigé avec PID en cascade

4.5 Commande par retour d'état :

La commande par placement de pôles est une commande par retour d'état qui permet d'imposer la dynamique du système en boucle fermée.

4.5.1 Définition [9]

La commande par retour d'état consiste à utiliser les variables d'état en contre réaction dans le but d'améliorer les performances du processus ou d'assurer au moins la stabilisation de n'importe quel système linéaire invariant. La commande par retour d'état nécessite la connaissance de toutes les variables d'état. On considère le système linéaire décrit par l'équation :

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax(t) + Bu(t) \\ y = Cx(t) + Du(t) \end{cases} \quad (4.2)$$

Avec $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$, $y \in \mathbb{R}^p$ et pour lequel on suppose que les composantes du vecteur d'état $x(t)$ sont accessibles (directement ou par reconstruction). Une commande par retour d'état est une commande de la forme :

$$u(t) = \beta.v - Fx$$

Où $v \in \mathbb{R}^m$ est la consigne, $F \in \mathbb{R}^{mn}$ et $\beta \in \mathbb{R}^{mm}$ sont des matrices constantes. La figure suivante présente une représentation schématique de ce concept.

La commande par retour d'état consiste à déterminer une commande telle que les pôles du système en boucle fermée soient correctement placés dans le plan complexe.

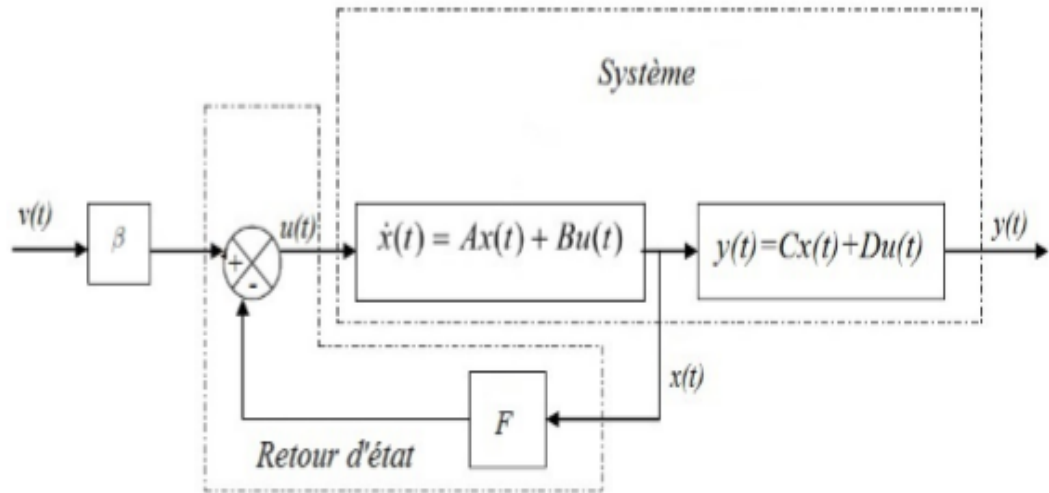


Figure 4.9: Représentation schématique du concept de la commande par retour d'état

4.5.2 Etude de commandabilité du PIR

La matrice de commandabilité du PIR est donnée comme suite :

$$C = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B & A^3B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 403 & 0 & 31561 \\ 0 & 388 & -166 & 47553 \\ 403 & 0 & 31561 & -13544 \\ 388 & -166 & 47553 & -57271 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{rang}(C) = 4$$

Le rang de la matrice de commandabilité C égale à 4, donc le système est complètement commandable.

Dans le cas du pendule inversé rotatif, le système est d'ordre quatre, pour pouvoir le commander par le placement de pôles, on doit le rendre similaire à un système de deuxième ordre par le placement de deux pôles réels négatifs loin à gauche pour qu'ils soient insignifiants et les deux autres seront placés de telle sorte à satisfaire le cahier de charge.

4.5.3 Cahier de charge :

En premier lieu, nous imposons le cahier de charge suivant pour pouvoir choisir les pôles désirés.

- Voltage maximal du moteur $|V_m| < 24V$: imposé par le matériel disponible
- Déviation maximale du pendule $|\alpha| < 15^\circ$: pour rester dans la zone de linéarité
- Le coefficient d'amortissement : $z=0.7$

Le comportement transitoire dépend fortement du coefficient d'amortissement, on considère 3 cas :

- * $z > 1$: régime apériodique et temps de réponse important
- * $z = 1$: régime apériodique critique.

- * $0 < z < 1$: régime oscillatoire amorti : les amplitudes des oscillations décroissent au fil du temps et leur rapidité dépend de la valeur de z . Généralement on prend $z=0.7$ parce qu'au-delà de cette valeur, le temps de réponse augmente rapidement.

- o La pulsation propre : $\omega_n = 4 \text{ rad}$

4.5.4 Détermination des pôles

Le placement de pôles consiste à déterminer la matrice K telle que le spectre de $(A-BK)$ soit égal au spectre désiré.

Le pendule inversé rotatif possède 4 pôles, deux peuvent être calculés en tenant compte du cahier de charges :

$$\begin{aligned} p1 &= -\sigma + j\omega_d \\ p2 &= -\sigma - j\omega_d \\ \text{Où } \sigma &= \xi\omega_n \text{ et } \omega_d = \omega_n\sqrt{1-\xi^2} \end{aligned}$$

Pour les 2 autres pôles, on peut les choisir de telle sorte qu'ils soient sur la partie gauche de l'axe réel et suffisamment loin de $p1$ et $p2$ pour être insignifiants. Nous choisissons $p3 = -30$ et $p4 = -40$. Pour déterminer le vecteur K nous utilisons l'instruction `acker` de matlab (annexe1).

4.5.5 Résultats de simulation

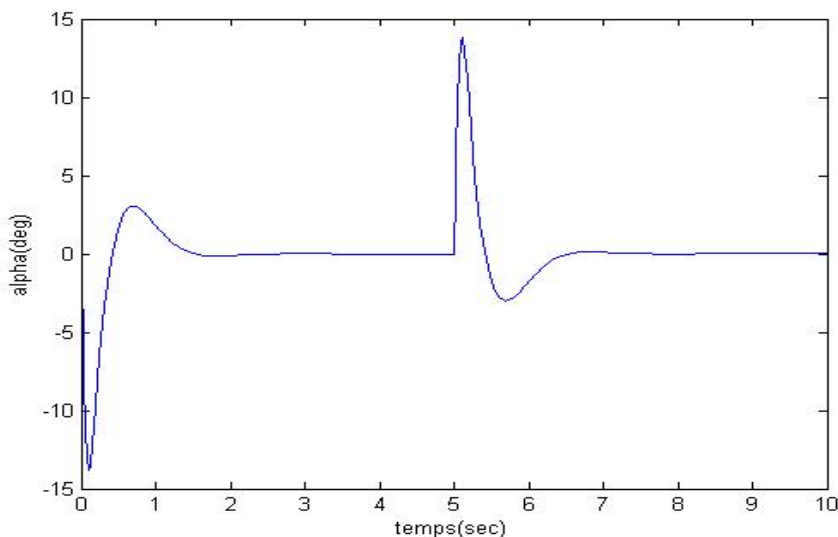


Figure 4.10: Évolution de l'angle du pendule avec la commande par placement de pôles

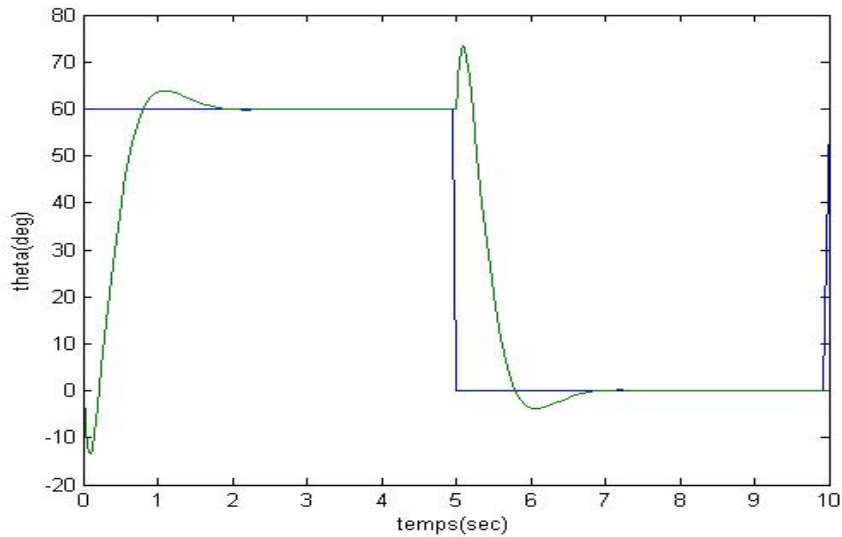


Figure 4.11: Évolution de l'angle du bras corrigé avec la commande par placement de pôles

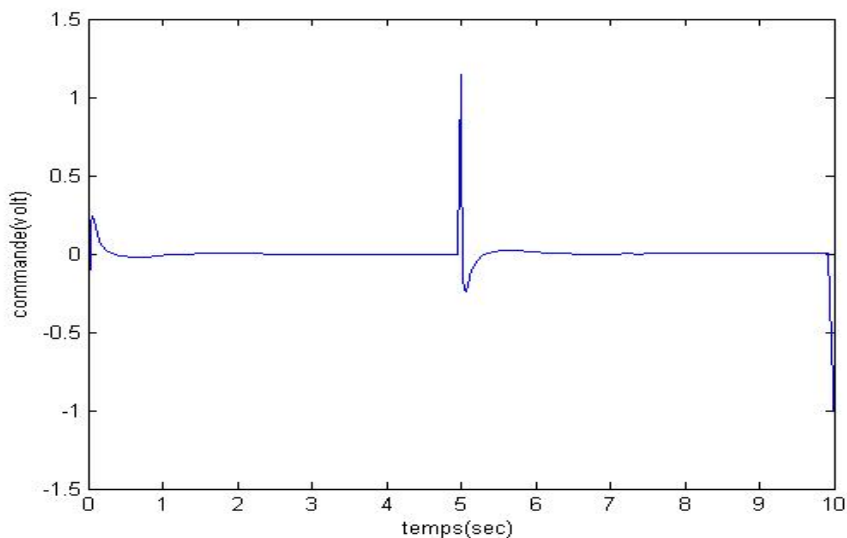


Figure 4.12: Évolution de la tension délivrée avec la commande par placement de pôles

Le résultat de simulation de la commande de l'angle de pendule est donné par la figure 4.11. On remarque dans la figure 4.11 que la spécification du cahier de charge concernant l'angle du pendule $|\alpha| < 15^\circ$ est respecté.

Le résultat de simulation de la commande de l'angle du bras pour une référence de 60° est donné par la figure 4.12.

La figure 4.12 montre que l'angle du bras donné en consigne est atteint avec une précision de 100% (erreur nulle) en moins de 2s.

On constate à partir des résultats présentés par les figures (4.11 jusqu'à 4.13) que le régulateur par retour d'état assure bien l'objectif de stabilisation du pendule.

La tension délivrée au système ne dépasse pas les 24V comme il est indiqué dans le cahier de charge (Fig4.13).

4.6 Commande linéaire quadratique

La commande linéaire quadratique (LQ ou LQR (Linear-Quadratic-Regulator)) est une loi de commande optimale $u(t)$ en boucle fermée qui permet d'assurer les performances désirées. Elle est connue sous le nom de la commande optimale car elle réalise un bon compromis entre performance et impact énergétique. Le calcul de la matrice de gain K optimal pour une commande par retour d'état $u(t)=Kx(t)$ est déterminé par la minimisation du critère quadratique suivant :

$$J = \int_0^{\infty} (x^T Q x + u^T R u) dt \quad (4.3)$$

Avec Q est une matrice de pondération du vecteur d'état x , elle est symétrique, définie (ou semi-définie) positive et R est une matrice de pondération de la commande u , symétrique, définie positive. Cette optimisation représente un compromis entre le temps de convergence qui est affecté par le choix de Q et l'énergie utilisée qui est affectée par le choix de R . Le gain K est obtenu par la relation suivante :

$$K = R^{-1} B^T P_C \quad (4.4)$$

Avec P_C est la solution de l'équation de Riccati donnée par [14]

$$P_C A + A^T P_C - P_C B R^{-1} B^T P_C + Q = 0 \quad (4.5)$$

4.6.1 Résultat des simulations de PIR

Dans le cas de ce travail, nous avons choisi $R=1$, pour se concentrer sur l'effet de cette commande sur le pendule. La matrice Q est supposée diagonale pour simplifier la tâche et avoir un impact direct sur les états du système. La matrice Q est donnée comme suite:

$$Q = \begin{bmatrix} q_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La forme de la matrice Q montre que dans le cas de la commande qu'on désire appliquée, on s'intéresse qu'aux deux premiers états (x_1 et x_2) correspondants à l'angle du bras et l'angle du pendule respectivement c-à-d q_1 est principalement associé à x_1 et q_2 à x_2 . Pour cette raison, nous avons utilisé une boucle avec Matlab qui a permis de conclure que le paramètre q_2 n'a aucun effet sur les performances, ensuite nous avons passé à la recherche d'un q_1 permettant d'avoir un contrôle optimal. Dans la pratique, la méthode dite essais-erreur reste la plus évidente, donc il faut varier tous les éléments de la matrice Q pour obtenir une commande optimale.

Le schéma bloc utilisé dans les simulations est identique de celui de la commande par retour d'état. Dans les figures suivantes, on montre l'influence du choix de q_1 sur les performances du système

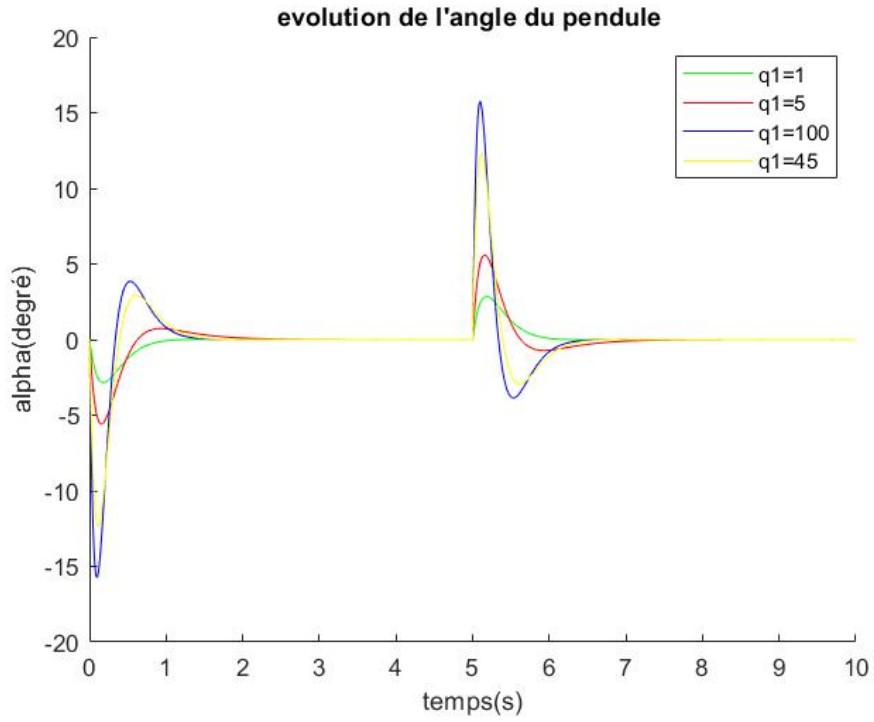


Figure 4.13: Influence de q_1 sur l'évolution de l'angle du pendule

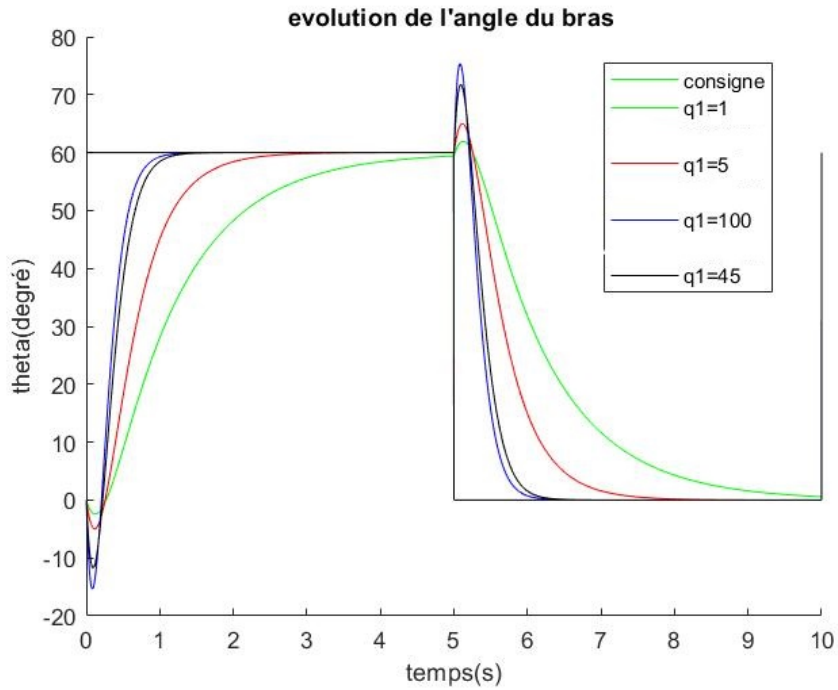


Figure 4.14: Influence de q_1 sur l'évolution de l'angle du bras

On voit bien que plus la pondération q_1 est importante plus le système est rapide et il demande plus d'énergie.
Pour la suite on a choisi de prendre $R=1$

$$Q = \begin{bmatrix} 45 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

4.7 Comparaison entre les trois commandes :

Dans cette section, nous allons faire une comparaison entre les trois commandes. Les résultats de cette simulation sont représentés dans les figures suivantes:

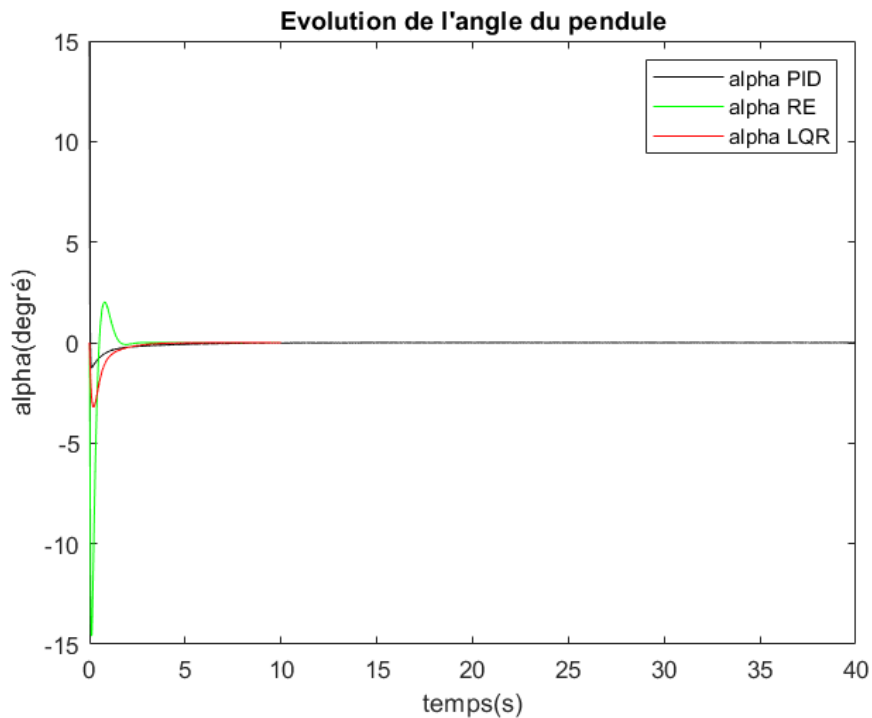


Figure 4.15: Évolution de l'angle du pendule avec les trois commandes

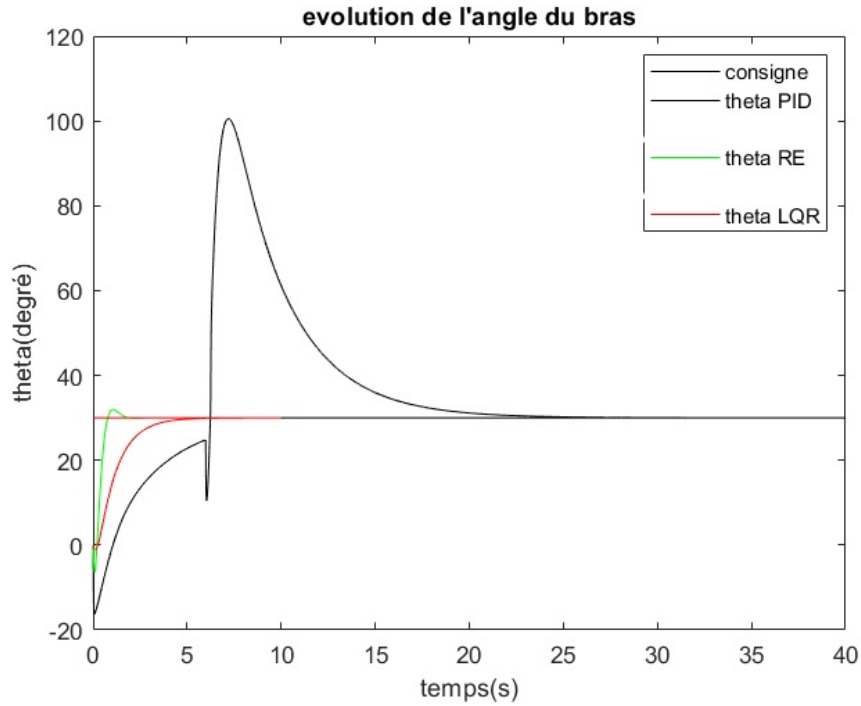


Figure 4.16: Évolution de l'angle du bras avec les trois commandes

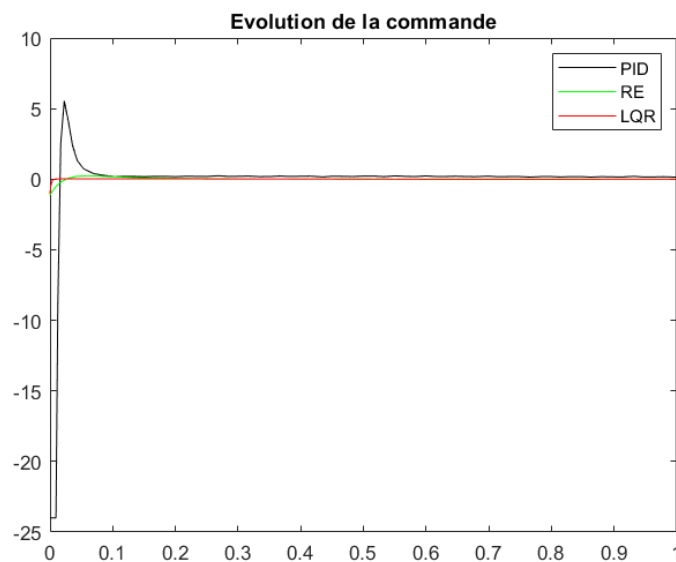


Figure 4.17: Tension délivrée au système pour les trois commandes

4.7.1 Interprétation des résultats:

On remarque que le système converge bien vers la position d'équilibre instable et garde sa stabilité avec une erreur statique nulle que ce soit avec la commande PID, RE ou LQR, la différence réside dans le temps de convergence et l'énergie dissipée.

En terme de rapidité; le correcteur PID donne la réponse la plus lente, tandis que la

commande par placement de pôles est la plus rapide entre les trois pour la correction de l'angle du bras. Cependant pour la stabilisation du pendule, on remarque que le PID est le plus rapide.

En terme d'énergie la tension maximale atteinte par les trois commandes est:

- La commande PID: $|U_{max}| = 24V$
La commande RE : $|U_{max}| = 1.14V$
- La commande LQR: $|U_{max}| = 1.04V$

Nous remarquons alors que la commande LQR est optimale en énergie par rapport au deux autres correcteurs.

4.7.2 Rejet de perturbation :

Pour voir le comportement du système avec chacune des trois commandes, on lui applique une perturbation externe au bout de 6s. Cette perturbation est introduite par une impulsion ajoutée à l'angle du pendule représentant une simulation d'une force appliquée pour décaler le pendule de sa position. Les résultats obtenus sont représentés par les figures suivantes :

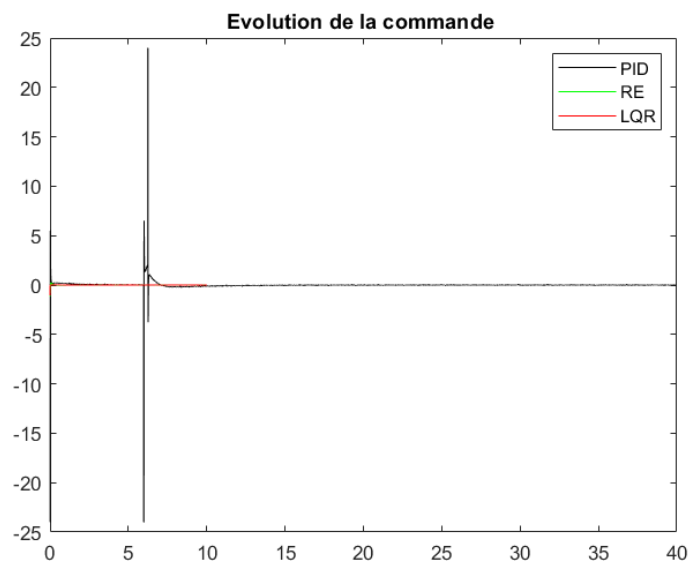


Figure 4.18: Évolution de la commande par les trois correcteurs

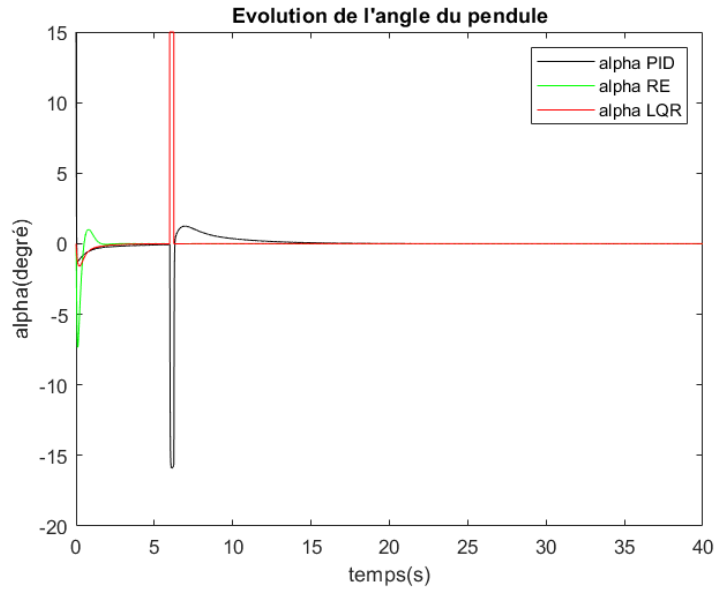


Figure 4.19: Le rejet de perturbation avec les trois commandes

Les figures précédentes montrent que la commande LQR est la plus rapide pour le rejet de perturbation et elle consomme moins d'énergie que les deux autres commande pour le faire.

4.8 Conclusion

Nous avons synthétisé dans ce chapitre trois commandes différentes dans le but de stabiliser le système autour de son point d'équilibre instable (pendule pointant vers le haut) et nous avons comparé entre ces correcteurs pour trouver le plus performant. Nous avons trouvé qu'avec les paramètres pris dans ce travail le correcteurs linéaire quadratique a donné les meilleurs resultats en terme d'énergie et de robustesse, tandis que le correcteur PID est le plus rapide en stabilisation du pendule.

Les différentes simulations faites montrent que le système de régulation donne de bonnes performances.

Conclusion et perspectives

5.1 Conclusion générale

Les travaux exposés dans ce mémoire concernent principalement la modélisation et l'élaboration des lois de commande afin de stabiliser un système non linéaire sous actionné, le cas du pendule inversé rotatif.

Le pendule inversé rotatif est un système non-linéaire, sous-actionné à dynamique interne instable. Il fait l'objet de plusieurs études, car il représente un moyen pratique à faible coût pour la synthèse des commandes.

Le formalisme d'Euler-Lagrange nous a permis d'obtenir un modèle mathématique représentant la dynamique du système.

Nous avons stabilisé le système à travers la mise en œuvre de trois commandes différentes à savoir le contrôleur PID, la commande par retour d'état et la commande linéaire quadratique.

La nature complexe du système rend la synthèse de commande difficile alors nous avons procédé par la linéarisation du système autour de son point d'équilibre pour pouvoir le contrôler à l'aide des développements de Taylor.

Les perspectives de ce travail sont :

- L'étude des effets de linéarisation pour améliorer la robustesse des commandes
- La proposition d'autres lois de commande non-linéaire
- L'implémentation sur un prototype réel des commandes proposées

A.1 Programme Matlab pour la commande par placement de poles

```
clear all
close all
clc
ng=0.9
nm=0.69
kt=0.007683
kg=70
km=0.0076777
Rm=2.6
mp=0.127
lr=0.2159
lp=0.33655
jr=0.0009983
jp=0.0012
br=0.0024
bp=0.0024
g= 9.81
De=jp*jr+jp*mp*lr^2+0.25*jr*mp*lp^2
a32=(0.5*mp*g*lp)*(0.5*mp*lp*lr)/De
a33=-br*(jp*0.25*mp*lp^2)/De
a34=bp*(-0.5*mp*lr*lp)

a42=(0.5*mp*g*lp)*(jr+mp*lr^2)/De
a43=br*(0.5*mp*lr*lp)/De
a44=-bp*(jr+mp*lr^2)/De

b3=(jp+0.25*mp*lp^2)/De
b4=(0.5*mp*lr*lp)/De
A=[0 0 1 0;
```

```

    0 0 0 1;
    0 a32 a33 bp*(-0.5*mp*lr*lp);
    0 a42 a43 a44;]
B=[0;0;b3;b4]

at=(ng*nm*kg*kt)/Rm
bt=(-ng*nm*kg*kt*kg*km)/Rm
a=poly(A)
Ac = [ 0 1 0 0;
0 0 1 0;
0 0 0 1;
-a(5) -a(4) -a(3) -a(2)]
Bc = [0; 0; 0; 1]
T = ctrb(A,B)
rank(T)
Tc = ctrb(Ac,Bc)
rank(Tc)
W=T*inv(Tc)
% % caracteristiques de controle
zeta = 0.7;
wn = 4;
% placement de la partie reelle des poles
sigma = zeta*wn;
% placement de la partie imaginaire des poles
wd = wn*sqrt(1-zeta^2);
% poles desirs
DP = [-sigma+j*wd, -sigma-j*wd, -30, -40];

%Trouver le gain de controle utilisant la commande matlab de
placement de
%poles
K = acker(A,B,DP)
open('poles')
sim('poles')

plot(T,alpha)
figure;

plot(T,theta)
figure;
plot(T,commande)

```

A.2 Programme Matlab pour la commande LQR


```

clear all
close all
clc
ng=0.9
nm=0.69
kt=0.007683
kg=70
km=0.0076777
Rm=2.6
mp=0.127
lr=0.2159
lp=0.33655
jr=0.0009983
jp=0.0012
br=0.0024
bp=0.0024
g= 9.81
De=jp*jr+jp*mp*lr^2+0.25*jr*mp*lp^2
a32=(0.5*mp*g*lp)*(0.5*mp*lp*lr)/De
a33=-br*(jp*0.25*mp*lp^2)/De
a34=bp*(-0.5*mp*lr*lp)

a42=(0.5*mp*g*lp)*(jr+mp*lr^2)/De
a43=br*(0.5*mp*lr*lp)/De
a44=-bp*(jr+mp*lr^2)/De

b3=(jp+0.25*mp*lp^2)/De
b4=(0.5*mp*lr*lp)/De
A=[0 0 1 0;
    0 0 0 1;
    0 a32 a33 bp*(-0.5*mp*lr*lp);
    0 a42 a43 a44;]
B=[0;0;b3;b4]

at=(ng*nm*kg*kt)/Rm
bt=(-ng*nm*kg*kt*kg*km)/Rm
R=1;
hold on
for i=1:10:100
Q=diag([60 i 1 1]);
K=lqr(A,B,Q,R)
open('poles')
sim('poles')

plot(T,alpha)

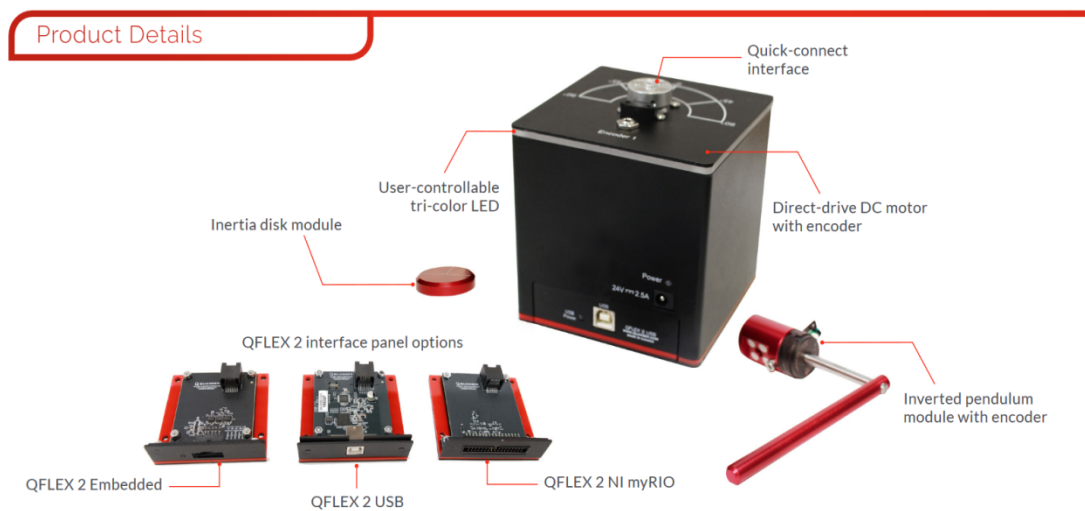
```

figure;

```
plot(T,theta)
figure;
plot(T,commande)
end
```

A.3 Les composant de la maquette

Les composants de la maquette utilisée dans ce travail sont résumés dans la figure suivante



A.4 Les spécifications du servomoteur et du pendule

Les spécifications du servomoteur et du pendule sont résumé dans le tableau suivant

Tableau 1 parametres du systeme

Symboles	Paramètres	Valeurs	unité
η_g	Rendement des engrenages	0.9	-
η_m	Rendement du moteur	0.69	-
k_t	Constante du couple moteur	0.007683	N.m/A
k_g	Constante des engrenages	70	-
k_m	Constante de la f.e.m	0.0076777	V.s/rad
R_m	Résistance d'induit du moteur	2.6	Ω
m_p	Masse du pendule	0.127	Kg
L_r	Longueur de bras	0.2159	m
L_p	Longueur de pendule	0.33655	m
J_r	Moment d'inertie du bras de son centre de masse	0.0009983	Kg.m ²
J_p	Moment d'inertie du pendule de son centre de masse	0.0012	Kg.m ²
B_r	coefficient de viscosité d'amortissement du bras	0.0024	N.m.s/rad
B_p	coefficient de viscosité d'amortissement du pendule	0.0024	N.m.s/rad
g	Gravité	9.81	Kg.m ²

Bibliography

- [1] Aissani, F. Iamarene , S. « Commande d'un pendule inversé». Mémoire Master : Electronique, option : Automatique. Université Abderrahmane Mira Bejaia.(2015) .
- [2] Benariba, H. « Commande d'un robot mobile(Mobrob) sur deux roues » .Mémoire magister : automatique. université Abou Bekr Belkaid Tlemcen . (2013).
- [3] Benyelles,S .Mechernene, A.. « Commande en temps réel d'un pendule inversé rotatif avec la carte dSPACE DS1104 ». Mémoire master 2 : automatique et informatique industrielle. université Abou Bekr Belkaid Tlemcen (2017).
- [4] Brahim,K. « Analyse et modélisation: du pendule inversé sur deux roues au fauteuil roulant automatisé FreeMove ». Rapport de Stage de Master 2 Recherche : " Automatique et Robotique". Montpellier..
- [5] Brechet,T .Tribino,J. « Pendule inversé en robotique ».(2008).
- [6] Burak, M. ÖKSÜZ, M. ÖNAL.HALICIOĞLU, R. DÜLGER, LC. « Alternative Controller Design for Rotary Inverted Pendulum » .ISSN 1846-6168 (Print), ISSN 1848-5588 (Online) « <https://doi.org/10.31803/tg-20180208152214> »
- [7] Dasu, B. Kumar, M. et Ramesh, G. (2016). « Design Of LQR Based Stabilizer For Rotary Inverted Pendulum System ». IJCTA, 9(29), pp. 21-29, 2016.
- [8] DEHAK, S. KAHOUADJI, M. « Modélisation et stabilisation d'un pendule inversé rotatif ». Mémoire master 2 : automatique et informatique industrielle. Tlemcen : université Abou Bekr Belkaid Tlemcen (2016).
- [9] F.Arichi. « systèmes linéaires multivariables continus et discrets ».Cours à: École Supérieure en sciences appliquées.Tlemcen.
- [10] F. Mudry. Note d'application: « Ajustage des Paramètres d'un Régulateur PID ».École d'ingénieur de Canton de Vaud,2002.
- [11] G.Cabodevila. « Identification des systèmes ».France: École Nationale Supérieure de Mécanique et des Micro-techniques gonzalo.cabodevila@femto-st.fr
- [12] I.M. Horowitz and M. Sidi.Synthesis of feedback systems with large plant ignorancefor prescribed time-domain tolerances. International Journal of Control16(2), 287–309(1972)

- [13] J.G. Ziegler and N.B. Nichols. Optimum settings for automatic controllers. Transactions ASME 64(11) (1942)
- [14] Katsuhiko Ogata, Modern Control Engineering (5th Edition), Prentice Hall, 2009
- [15] K.J. Åström, T. Hägglund, C.C. Hang, and W.K. Ho. Automatic tuning and adaptation for pid controllers-a survey. Control Engineering Practice 1(4), 699–714 (1993)
- [16] Sanchez, CA. « Représentation et analyse des systèmes non linéaires ». LAAS-CNRS (2019).
Les sites web
- [17] <http://mecaspa.cannes-aero-patrimoine.net/COURS_SA/gravitat/gravitat.htm>
- [18] <<http://www.entec-dz.com/produit/pendule-de-torsion/>>
- [19] . (Consulté le 15/06/2020). "BBC NEWS - Technology - Hitachi unveils 'fastest robot'"
- [20] <<https://www.leybold-shop.fr/pendule-de-pohl-34600.html>>
- [21] <http://res-nlp.univ-lemans.fr/NLP_EM03G0301/co/NLP_EM03G0301.html>
- [22] « <https://robots.ieee.org/robots/ibot/?gallery=photo2> »
- [23] .< <https://www.amazon.fr/pendule-newton/s?k=pendule+newton>>]
- [24] <http://mecaspa.cannes-aero-patrimoine.net/COURS_SA/gravitat/gravitat.htm>

Résumé :

Le travail présenté dans ce mémoire porte sur la synthèse des lois de commande pour un système non linéaire. Notre choix s'est porté sur le pendule inversé rotatif (PIR) à cause de sa dynamique instable et fortement non linéaire. L'élaboration de ces commandes fait appel à une modélisation mathématique que nous avons conçue à l'aide du formalisme de Lagrange. En linéarisant le système autour de son point d'équilibre instable, nous avons appliquées trois types de commandes linéaires à savoir la commande par placement de pôles, la commande linéaire quadratique et la commande proportionnelle intégrale dérivée (PID). Les résultats de simulations faites montrent que les différentes lois de commande arrivent à stabiliser le système sous actionné dans sa zone de linéarité.

Mots clés : Système non linéaire ; Pendule inversé rotatif ; Commandes linéaires ; modélisation mathématique, Point d'équilibre.

Abstract:

The work presented in this thesis focuses on the synthesis of control laws for a nonlinear system. Our choice fell on the Rotary Inverted Pendulum because of its unstable and strongly nonlinear dynamics. The development of these commands is based on a mathematical modeling that we designed using Lagrange's formalism. By linearizing the system around its unstable equilibrium point, we have applied three types of linear controls, namely the pole-placement control, the linear-quadratic control and the proportional-integral-derivative control. The various simulations show that the different control systems are able to stabilize the system in its linearity zone.

Key words: nonlinear system; Rotary inverted pendulum; Linear controls; Mathematical model; Equilibrium point;

ملخص:

يتناول العمل المقدم في هذه الأطروحة صياغة قوانين التحكم لنظام غير خطي (النواس المقلوب الدوار). وعاختيارنا على البندول الدوار المقلوب بسبب ديناميكياتها غير المستقرة وغير الخطية بشدة إن صياغة هذه الأوامر تحتاج نموذج رياضي قمنا بتصميمه باستخدام صيغة لاجرانج. من خلال تمثيل النظام حول نقطة التوازن غير المستقرة، قمنا بتطبيق ثلاثة أوامر خطية هي التحكم في وضع القطب والتحكم الخطي التريبيعي والتحكم النسبي المتكامل المشتق.

توضح عمليات المحاكاة المختلفة التي أجريت أن أنظمة التحكم المختلفة تمكنت من التحكم في النظام قيد التشغيل في منطقتة الخطية.

