

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

MINISTRY OF HIGHER EDUCATION
AND SCIENTIFIC RESEARCH

HIGHER SCHOOL IN APPLIED SCIENCES
--T L E M C E N--



المدرسة العليا في العلوم التطبيقية
École Supérieure en
Sciences Appliquées

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

المدرسة العليا في العلوم التطبيقية
-تمسان-

Mémoire de fin d'étude

Pour l'obtention du diplôme de Master

Filière : Automatique
Spécialité : Automatique

Présenté par : Ikram BELLAMRI

Thème

**Synthèse d'observateurs non linéaire
pour le modèle du chemostat**

Soutenu publiquement, le 06 / 07 / 2020 , devant le jury composé de :

M L. MERAD	Professeur	ESSA. Tlemcen	Président
Mme I. DIDI ep BEMMOUSSAT	MCB	ESSA. Tlemcen	Directeur de mémoire
Mme A. GHOUALI ep BEDJAOUI	MCB	ESSA. Tlemcen	Co- Directeur de mémoire
M B. BENYAHIA	MCA	Université de Tlemcen	Examineur
M F. ARICHI	MCB	ESSA. Tlemcen	Examineur

Année universitaire : 2019 /2020

Dédicace

A mes chers parents « Smaine et Melika » qui n'ont jamais cessé de croire en moi. Aucune dédicace ne saurait exprimer mon adoration, mon respect et ma considération pour eux.

A mes sœurs « Medjda et Nessrine » qui m'ont toujours soutenu et encouragé.

A mon beau-frère « Sacha » et sa maman pour leur encouragement.

A mon petit neveu « Rayan » que j'aime plus que tout.

A mes plus fidèles et meilleurs amis « Chahira, Nabila, Réda, Yasmine et Yakoub » qui m'ont toujours soutenu et avec lesquels j'ai passé d'agréables moments.

A « Naila » et « Selma » qui m'ont toujours écouté et soutenu.

Remerciements

Je tiens à remercier mon encadreur Mme Ibtissem DIDI ep BENMOUSSAT, Maitre de conférence « B » à l'ESSA de Tlemcen car sans elle ce travail n'aurait jamais pu être réalisé, elle m'a soutenu, dirigé en me faisant profiter de toutes ses compétences, ses encouragements, ses conseils qu'elle n'a pas hésité à m'accorder malgré la distance vu la crise sanitaire (Covid 19).

Je tiens à remercier également ma Co-encadrante Mme Amel GHOUALI ep BEDJAOUI, Maitre de conférence « B » à l'ESSA de Tlemcen qui m'a été de très bons conseils.

Mes remerciements s'adressent également à Monsieur le président du jury Mr Lotfi Merad, Professeur et chef de département du second cycle à l'ESSA de Tlemcen et à mes examinateurs Mr Fayçal Arichi, Maitre de conférence et responsable de la filière « Automatique » à l'ESSA de Tlemcen et Mr Boumediene Benyahia, Maitre de conférence « A » à l'université de Tlemcen qui m'ont fait l'honneur d'évaluer mon travail.

Je tiens à remercier Mr Boucherit Rouissat, le directeur de l'école et Mr Fouad Boukli le directeur des études qui se sont toujours préoccupés d'assurer aux étudiants de l'école une excellente formation dans les meilleures conditions.

Je tiens à remercier mes chers et respectueux parents pour leur patience, leur amour grandiose, leurs soutiens et leurs encouragements perpétuels qu'ils m'ont apportés depuis mon enfance, tous les sacrifices qu'ils ont consentis pour mon instruction et mon bien être.

Je tiens à remercier tous mes professeurs et en particulier Mr Sidi Mohammed Khefif qui m'a été d'un très grand soutien et qui a cru en moi et m'a convaincu de poursuivre mon rêve de devenir ingénieure lorsque moi-même je frôlais l'abondons.

Table des matières

1	Analyse mathématique du modèle du chemostat	9
1.1	La digestion anaérobie	9
1.1.1	Définition	9
1.1.2	Les étapes de la digestion anaérobie	9
1.1.3	Les facteurs influençant la digestion anaérobie	11
1.2	Les bioréacteurs	12
1.2.1	Définition	12
1.2.2	Objectif d'un bioréacteur	12
1.2.3	Fonctionnement d'un bioréacteur	13
1.2.4	Composants d'un bioréacteur	13
1.2.5	Types de bioréacteurs	14
1.3	Modélisation du processus de la digestion anaérobie	15
1.3.1	Introduction	15
1.3.2	Le modèle du Chemostat	15
1.3.3	La mise au point du modèle	19
1.3.4	Simulation du Chemostat	23
2	Etat de l'art sur les observateurs pour les bioprocédés	26
2.1	Systèmes dynamiques	26
2.2	Étude des systèmes non linéaires	27
2.2.1	Équations d'état d'un système non linéaire	27
2.2.2	Observabilité des systèmes non linéaires	27
2.2.3	Observateurs des systèmes non linéaires	29
2.3	Application au chemostat	37
2.3.1	Observabilité du chemostat :	37
2.3.2	Observateurs appliqués aux chemostat :	38
3	Synthèse d'un observateur non linéaire à dynamique d'erreur linéaire	43
3.1	Observateur de type Luenberger appliqué au Chemostat	43
3.2	Résultats de simulations	48
3.3	Discussion autour de la robustesse	50
3.4	Étude comparative	51

Liste des tableaux

1.1	Les états stationnaires	21
1.2	Paramètres du Chemostat	23
2.1	Conditions initiales du modèle	39
2.2	Conditions initiales de l'observateur asymptotique	39
2.3	Conditions initiales de l'observateur par intervalles	40
2.4	Conditions initiales de l'observateur invariant	41
2.5	Gain de l'observateur invariant	41
3.1	Conditions initiales du modèle et de l'observateur type Luenberger	48
3.2	Cinétiques de croissance	49

Table des figures

1.1	Étapes de la digestion anaérobie	11
1.2	Fonctionnement du bioréacteur [4]	13
1.3	Bioréacteur discontinu [4]	14
1.4	Bioréacteur semi-continu [4]	14
1.5	Bioréacteur continu (Chemostat) [4]	15
1.6	Cinétique de Monod	18
1.7	Le taux de dilution	23
1.8	Concentration du Substrat (s)	24
1.9	Concentration de la biomasse (x)	24
2.1	Principe de l'observateur	27
2.2	Concentration de la biomasse et son erreur d'estimation	39
2.3	Concentration de la biomasse et son erreur d'estimation	40
2.4	Concentration de la biomasse et son erreur d'estimation	42
3.1	Concentration de la biomasse et son estimation pour $a = 50, b = -\frac{a}{\beta}$ avec $\beta = 0.3$	48
3.2	Erreur correspondante à la biomasse x	48
3.3	Les différentes cinétiques	49
3.4	La concentration de la biomasse x avec une perturbation sur s et son erreur d'estimation	50
3.5	La concentration de la biomasse x avec un bruit de mesure sur μ_{max} et son erreur d'estimation	51
3.6	Concentration de la biomasse x et ses estimations	52
3.7	Concentration de la biomasse x et ses estimations sur 10 jours	52

Introduction générale

L'EAU est l'élément essentiel à la vie sur terre. Elle couvre 70% de la surface du globe terrestre, c'est-à-dire 1.4 milliards de km^3 . De ce fait, la terre est surnommée "Planète Bleue". Cependant, 97.2% représente l'eau salée et seulement 2.8% est de l'eau douce dont 2.15% de glaces polaires, 0.63% d'eaux souterraines, 0.20% d'eaux de surface et 0.001% d'eau atmosphérique. La glace polaire inutilisable représente la majorité des ressources planétaires en eau douce, l'activité humaine est donc dépendante de l'infime partie restante. Parmi les différents secteurs d'activité nécessitant l'abondance des ressources en eau douce : l'agriculture (70%), l'industrie (20%) et la consommation domestique représentant que (10%) de l'utilisation mondiale en eau douce, néanmoins sa répartition est très déséquilibrée. En effet, plus de 60% des ressources naturelles en eau douce sont partagées entre 9 pays à savoir : le Canada, la Chine, la Colombie, le Pérou, le Brésil, la Russie, les Etats-Unis, l'Indonésie et l'Inde. Cependant, d'autres régions sont défavorisées : la péninsule Arabique, le Proche Orient, le Sahel, la zone désertique d'Afrique Australe et l'Afrique du Nord dont notre pays L'Algérie.

Connu pour une topographie complexe, le territoire algérien dispose d'une frange tellienne caractérisée par une pluviométrie importante, ceci dit elle ne représente que 4% de la superficie totale du pays, le reste représente les hauts plateaux et l'Atlas saharien (9%) et le Sahara, vaste désert aride qui s'étend sur 87% du territoire national. Dans de telles conditions climatiques et compte tenu de la croissance démographique, l'auto-suffisance en eau devient un problème majeur, dont la solution est simple en apparence : le traitement des eaux usées domestiques.

Ce travail est une approche scientifique de traitement des eaux usées domestiques en utilisant un procédé biologique : la digestion anaérobie dans lequel certains polluants sont dégradés grâce à l'action d'une multitude de micro-organismes tels que les bactéries. Ce procédé induit la multiplication de ces derniers produisant ainsi du biogaz, dont la récupération est une tâche complexe nécessitant des systèmes automatisés robustes et fiables. Afin de commander de tels systèmes, la connaissance de toutes les entrées ainsi que les états est une condition nécessaire. Dans le but de satisfaire cette condition, des capteurs sont utilisés.

En effet, ils sont conçus pour délivrer une approximation de l'état $x(t)$ à chaque instant t . Généralement, ces capteurs sont physiques c'est-à-dire issus de l'instrumentation. Cependant, ils sont aussi coûteux et parfois difficiles à concevoir. C'est ici que la magie des **observateurs** opère : sujet de ce mémoire. Également appelés "capteurs logiciels", les observateurs sont des algorithmes fondés sur une modélisation mathématique du système. À chaque instant t , ils estiment les variables d'état non mesurées.

Ce mémoire est présenté de la manière suivante :

Le premier chapitre consiste en un rappel du processus de la digestion anaérobie et des différents types de bioréacteurs liés à ce processus, ainsi que la modélisation et l'analyse mathématique du modèle "chemostat simple" choisit.

Le deuxième chapitre est consacré à un état de l'art sur les observateurs et plus particulièrement ceux appliqués au modèle du "chemostat simple".

Le troisième chapitre est dédié à un observateur non linéaire avec erreurs linéaires et son application sur le "chemostat simple".

Enfin, le dernier chapitre présentera une conclusion générale sur les résultats obtenus, ainsi que quelques perspectives.

Chapitre 1

Analyse mathématique du modèle du chemostat

*L*A modélisation d'un système nécessite une compréhension approfondie du processus. Dans ce chapitre, nous allons présenter le processus de la digestion anaérobie suivi d'une analyse mathématique d'un modèle de bioprocédé, *le chemostat*.

1.1 La digestion anaérobie

1.1.1 Définition

La digestion anaérobie est un processus biologique dans lequel les micro-organismes décomposent la matière organique en absence d'oxygène pour produire un biogaz qui contient environ 66.66% de méthane et 33.33% de dioxyde de carbone [1]. Si le méthane n'est pas récupéré, il constitue un gaz à effet de serre avec un potentiel de réchauffement global 25 fois supérieur au dioxyde de carbone. Dans un contexte de protection de l'environnement et de production des bioénergies, le biogaz est récupéré puis utilisé comme source d'énergie.

1.1.2 Les étapes de la digestion anaérobie

La digestion anaérobie d'un produit organique complexe comporte quatre grandes étapes [2] :

Hydrolyse

C'est la décomposition de la matière organique complexe en substrat simple soluble, à l'origine du jus de fermentation.

Acidogénèse

Au sein des bactéries acidogènes, les substrats simples sont convertis en acides gras à courtes chaînes de type acide gras volatil (AGV), alcools, azote ammoniacal, du dihydrogène et du dioxyde de carbone.

Acétogénèse

Les AGV et l'alcool sont utilisés par les bactéries acétogènes et sont transformés en acide acétique, en hydrogène et en dioxyde de carbone.

Méthanogénèse

Au sein des bactéries méthanogènes acétoclastes, l'acide acétique est converti en méthane et en dioxyde de carbone. Alors que les bactéries méthanogènes hydrogénéotrophes transforment l'hydrogène et le dioxyde de carbone en méthane selon les réactions suivantes :

Réduction du CO_2 :



Décarboxylation de l'acide acétique :



Le schéma récapitulatif de la digestion anaérobie est le suivant [1] :

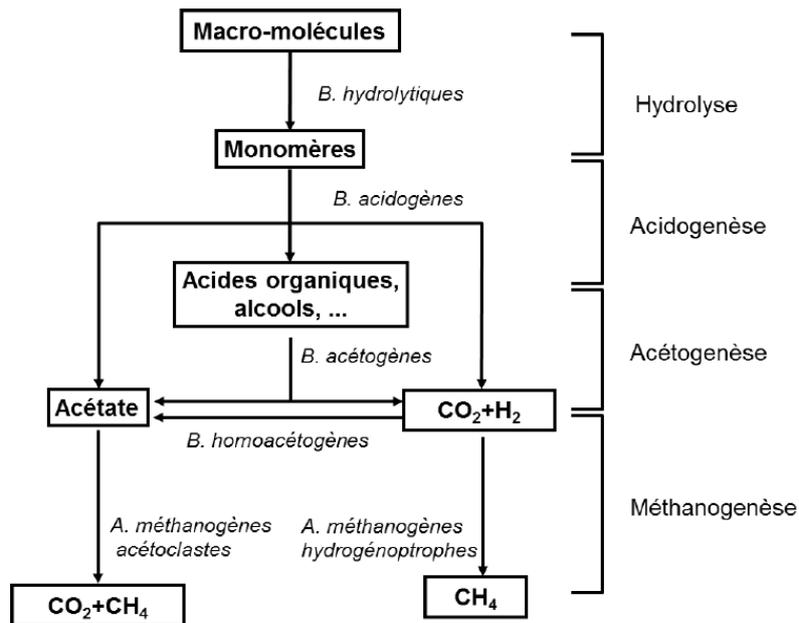


FIGURE 1.1 – Étapes de la digestion anaérobie

1.1.3 Les facteurs influençant la digestion anaérobie

La digestion anaérobie est dépendante de plusieurs facteurs environnementaux, dans ce qui suit on citera quelques-uns [2] et [3] :

Température

La température optimale diffère selon les souches bactériennes dans les environnements de 36.6 degrés.

pH

Le processus de la digestion anaérobie se déroule pour des valeurs de pH entre 6 et 8.

Oxygénation

Le processus de la digestion anaérobie se déroule en absence d'oxygène car ce dernier est toxique pour les bactéries méthanogènes et les bactéries acidogènes.

Teneur en eau

L'eau est essentielle pour la survie de tous les micro-organismes, elle constitue leur milieu de développement. Aussi, elle dissout les nutriments, les substrats et donc est considérée comme un des réactifs du processus de la digestion anaérobie. En général, il existe un taux minimal d'humidité, au-dessous duquel l'activité biologique est ralentie et il est compris entre 13% et 33% (masse d'eau sur la masse totale).

Rapport Carbone/Azote

Le rapport C/N est la relation entre la teneur en carbone et celle de l'azote constituant de la matière organique. Il correspond au degré de minéralisation de la matière organique. Plus le taux d'azote est élevé, plus le rapport diminue et plus la vitesse de minéralisation augmente. Dans le cadre de la digestion anaérobie, le C/N optimum est dans un intervalle de 20 à 30. Un rapport plus élevé signifie une consommation plus rapide de l'azote et donc une faible production du biogaz. Un rapport plus faible signifie une accumulation de l'ammoniac. Ces derniers génèrent un pH supérieur à 8.5 qui inhibera toute l'évolution des bactéries méthanogènes.

Le processus de la digestion anaérobie se déroule dans un bioréacteur, la partie ci-dessous est un aperçu sur ce dernier [4].

1.2 Les bioréacteurs

1.2.1 Définition

Un bioréacteur est un écosystème miniature, fermé, contrôlé qui contient des organismes vivants avec des flux de matière contrôlés à l'entrée et la sortie. En général, un bioréacteur englobe à petite échelle les dispositifs de quelques litres contenant une espèce en interaction avec un substrat. Mais aussi les écosystèmes naturels et cela a une plus grande échelle. Dans ce travail, nous nous sommes intéressés aux micro-organismes (bactéries, levures, . . .) qui se nourrissent de substrats ou d'autres organismes (proies) pour se développer et utilisent des précurseurs et activateurs pour produire des molécules spécifiques.

1.2.2 Objectif d'un bioréacteur

Un bioréacteur est utilisé afin de :

- Produire de la biomasse, comme par exemple les bioréacteurs produisant de la levure boulangère.
- Synthétiser un métabolite par un micro-organisme, comme par exemple l'éthanol.
- Dégrader un substrat dans les procédés de dépollution (traitement biologique des eaux usées. . .).
- Étudier le développement des organismes dans le milieu naturel, comprendre les interactions entre les différentes espèces et ceci dans un but de recherche.

1.2.3 Fonctionnement d'un bioréacteur

De façon générale, un bioréacteur est un récipient de volume V dans lequel se développent des micro-organismes. On remplit ce récipient par un milieu de renouvellement avec un débit d'entrée F_{in} et on le vide avec un débit de sortie F_{out} . Ces deux débits sont soit choisis par l'expérimentateur ou soit sont le résultat d'un calcul d'une loi de commande.

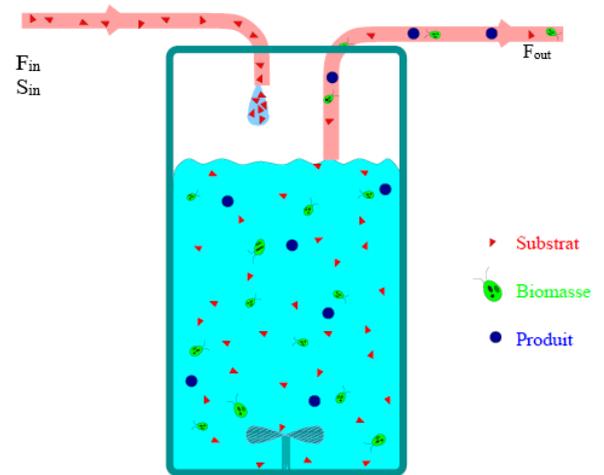


FIGURE 1.2 – Fonctionnement du bioréacteur [4]

1.2.4 Composants d'un bioréacteur

Un bioréacteur est constitué de :

- Substrats nécessaires à la croissance des micro-organismes. Ces substrats peuvent aussi être des précurseurs d'un composé à produire. Afin d'assurer une bonne croissance, le milieu de culture doit contenir tous les éléments nécessaires ($N, C, K, P, Fe \dots$) d'une manière excessive pour délimiter la croissance des micro-organismes.
- Micro-organismes de nature différente (bactéries, levures, phytoplanctons, champignons...). En général, les procédés biotechnologiques industrielles utilisent une seule espèce de micro-organismes dans la culture microbienne, ce qu'on appelle la culture pure. Dans notre étude, nous utiliserons des écosystèmes naturels, cela signifie qu'on peut inclure plus d'une centaine d'espèce. Certains organismes peuvent être proies d'autres espèces.
- Produits des réactions biochimiques. Ce sont des composés synthétisés par les micro-organismes et utilisés dans plusieurs domaines de l'industrie : agro-alimentaire (huiles, fromages, bières, vins...), industrie pharmaceutique (antibiotiques, hormones, vitamines...), industrie chimique (solvants, enzymes, colorants...) ou encore pour la production d'énergie.
- Catalyseurs nécessaires à l'exécution de la réaction chimique.

1.2.5 Types de bioréacteurs

Le choix du bioréacteur dépend du type des déchets traités et aussi de l'application désirée, on peut classer les bioréacteurs selon les critères suivants [2], [4] et [5] :

Le type du substrat

Solide : ou la teneur en matière sèche est supérieur à 15%.

Semi-solide : ou la teneur en matière sèche est comprise entre 5% et 15%.

Liquide : ou la teneur en matière sèche est inférieur à 5%.

Le nombre d'étapes

Ceci dépend du déroulement de l'acidogenèse et la méthanogénèse, si elles ont lieu dans deux cuves séparées on parle de bi-étape sinon on parle de mono étape.

Le mode d'alimentation

Discontinu (batch) : A l'instant initial, on introduit les espèces, les nutriments et les précurseurs nécessaires. Alors le système est fermé et son volume reste constant. Le débit d'entrée et le débit de sortie sont nuls $F_{in} = F_{out} = 0$, C'est-à-dire le taux de dilution est nul, ici la croissance des micro-organismes est exponentielle. Ce type d'alimentation est généralement utilisé dans le domaine commercial lorsque le but est de récupérer à l'instant final la biomasse et le produit intéressant.

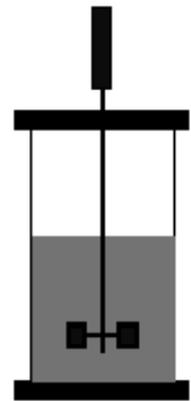


FIGURE 1.3 – Bioréacteur discontinu [4]

Semi-continu (fedbatch) : A l'instant initial, on introduit les espèces, les nutriments et les précurseurs nécessaires. La culture est alimentée avec un volume initial V_0 jusqu'à ce qu'elle atteigne son volume final V_f à un instant final t_f . C'est-à-dire, on utilise une dilution mais avec un volume variable, le débit en sortie est nul $F_{out} = 0$. Ce type d'alimentation est utilisé lorsque l'objectif est le contrôle de la population.

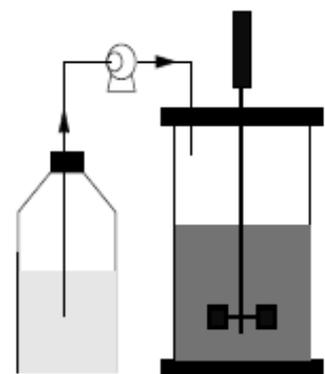


FIGURE 1.4 – Bioréacteur semi-continu [4]

Continu (chemostat) : Dans ce cas, on introduit les espèces et les nutriments de manière continue qui seront déplacés soit mécaniquement soit sous pression des nouveaux composants en entrée vers la sortie. Dans ce type d'alimentation, le volume est constant $V = cst$ et le débit en entrée est égal au débit en sortie

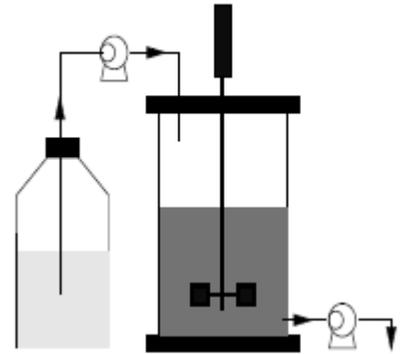
$$F_{in} = F_{out}.$$


FIGURE 1.5 – Bioréacteur continu (Chemostat) [4]

1.3 Modélisation du processus de la digestion anaérobie

1.3.1 Introduction

Le processus de la digestion anaérobie comme expliqué auparavant est un processus complexe, présentant souvent des problèmes de stabilité. Afin de mieux comprendre ce processus, le concevoir et le faire fonctionner d'une manière efficace. Il est primordial de mettre en place des stratégies de commande qui sont basées sur des modèles mathématiques. Les premiers modèles mathématiques datant de 1960, proposés pour le processus de la digestion anaérobie, prennent en considération une seule population microbienne. Quelques années plus tard, ces modèles ont été améliorés afin de mieux décrire la complexité de ce processus. Parmi ces modèles-là on peut citer : ADM1, AM2, AM2HN... Ceci dit, des modèles plus simples sont utilisés en particulier "le modèle du chemostat" sujet de notre étude.

1.3.2 Le modèle du Chemostat

Historique

Introduit en 1950, le modèle du chemostat est décrit comme un dispositif pour la culture de bactéries. Sa conception est le résultat d'une coopération entre Jacques Monod et Léo Szilard. En effet, Monod étudiait les cinétiques de croissance d'*Escherichia coli* dans un milieu de culture contenant deux sucres : du glucose et du lactose, Szilard suggéra que ces deux sucres soient fournis d'une manière continue à la vitesse où les bactéries les consomment afin de savoir si l'utilisation d'un sucre exclut l'utilisation de l'autre. Afin de vérifier cette hypothèse, Szilard inventa le

" Chemostat " dans lequel les concentrations des deux sucres restent constantes [5] et [8]. Un peu plus tard ; en 1956 ce dispositif est utilisé pour la culture phytoplanc-tonique. Aujourd'hui, le chemostat est l'objet de plusieurs travaux dans le domaine des mathématiques, de la biologie, de la chimie et aussi de l'automatique.

Définition

Le chemostat est un type de bioréacteur utilisé pour la culture des micro-organismes telles que : les algues unicellulaires, bactéries, levure... sur certains substrats tout en conservant les conditions environnantes (pH, température, ...). À l'aide d'une pompe reliée au réservoir, les micro-organismes sont alimentés en continu par des nutriments nécessaires afin de se nourrir et croître continuellement. En général, les chemostats utilisés dans les laboratoires contiennent de 0.5 à 10L de culture. Cependant, ceux utilisés en industrie peuvent contenir jusqu'à 1300m³ de culture. Ce dispositif est utilisé afin de produire de la masse cellulaire, les substances organiques résultantes de l'activité métabolique et enfin la dégradation de certains polluants.

Modèle mathématique du chemostat :

Le modèle mathématique du chemostat simple est basé sur une seule réaction chimique dans laquelle une bactérie (ou un groupe bactérien) dégrade un substrat s selon l'équation suivante :



On note :

- $s(t)$ désigne la concentration du substrat (nutriment) mesurée en g/L à l'instant t .
- $x(t)$ désigne la concentration de la biomasse mesurée en g/L à l'instant t .
- s_{in} est la concentration du substrat à l'entrée du chemostat mesurée en g/L .
- V est le volume du chemostat en litres (L).
- F_{in} et F_{out} sont respectivement les débits d'entrée et de sortie mesurés en L/h .
- $r = \mu x$, avec r la vitesse de la réaction, μ est la cinétique de la réaction mesurée en ($jour^{-1}$) qu'on va définir ultérieurement.
- k est une constante stœchiométrique sans dimension.
- $D(t)$ est le taux de dilution mesuré en (L/h).
- $m_s = Vs(t)$ est la masse du substrat.
- $m_x = Vx(t)$ est la masse de la biomasse.

Les deux équations suivantes sont respectivement la description de ce qui se passe pour le substrat dans le bioréacteur et le bilan de la biomasse.

Selon le principe de conservation de " Antoine Lavoisier " : " rien ne se perd, rien ne se crée, tout se transforme " ; on peut écrire [5] :

$$\begin{cases} \frac{\partial V s(t)}{\partial t} = F_{in}(t)s_{in} - F_{out}(t)s(t) - k\mu(s)Vx(t) \dots (1) \\ \frac{\partial V x(t)}{\partial t} = -F_{out}(t)x(t) + \mu(s)Vx(t) \dots (2) \\ \frac{\partial V}{\partial t} = F_{in}(t) - F_{out}(t) \dots (3) \end{cases} \quad (1.3.2)$$

Cela nous donne :

$$\begin{cases} s(t)\frac{\partial V}{\partial t} + V\frac{\partial s(t)}{\partial t} = F_{in}(t)s_{in} - F_{out}(t)s(t) - k\mu(s)Vx(t) \dots (1') \\ x(t)\frac{\partial V}{\partial t} + V\frac{\partial x(t)}{\partial t} = -F_{out}(t)x(t) + \mu(s)Vx(t) \dots (2') \end{cases} \quad (1.3.3)$$

En remplaçant (3) dans (1') et (2') on obtient les équations suivantes :

$$\begin{cases} F_{in}(t)s(t) - F_{out}(t)s(t) + V\frac{\partial s(t)}{\partial t} = F_{in}(t)s_{in} - F_{out}(t)s(t) - k\mu(s)Vx(t) \\ F_{in}(t)x(t) - F_{out}(t)x(t) + V\frac{\partial x(t)}{\partial t} = -F_{out}(t)x(t) + \mu(s)Vx(t) \end{cases} \quad (1.3.4)$$

En simplifiant les deux termes $F_{out}(t)s(t)$ dans la première équation et $F_{out}(t)x(t)$ dans la deuxième équation on obtient :

$$\begin{cases} F_{in}(t)s(t) + V\frac{\partial s(t)}{\partial t} = F_{in}(t)s_{in} - k\mu(s)Vx(t) \\ F_{in}(t)x(t) + V\frac{\partial x(t)}{\partial t} = \mu(s)Vx(t) \end{cases} \quad (1.3.5)$$

Finalement on obtient les équations suivantes :

$$\begin{cases} \frac{\partial s(t)}{\partial t} = \frac{1}{V}F_{in}(t)s_{in} - \frac{1}{V}F_{in}(t)s(t) - k\mu(s)x(t) \\ \frac{\partial x(t)}{\partial t} = -\frac{1}{V}F_{in}(t)x(t) + \mu(s)x(t) \end{cases} \quad (1.3.6)$$

On définit le taux de dilution $D(t)$ avec $D(t) = \frac{1}{V}F_{in}(t)$

Les équations dynamiques représentant le modèle " chemostat " ont la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{s}(t) = D(t)(s_{in} - s(t)) - k\mu(s)x(t) \\ \dot{x}(t) = (\mu(s) - D(t))x(t) \end{cases} \quad (1.3.7)$$

Or ceci est un modèle déterministe à deux variables d'état. Cela dit, il est quasiment impossible de présenter ce modèle sans mentionner la cinétique de Monod. Cette dernière décrit le taux de croissance $\mu(s)$ comme une fonction dépendante de la concentration du substrat limitant qui a la forme hyperbolique suivante (figure 1.6) :

$$\mu(s) = \mu_{max} \frac{s}{K + s} \quad (1.3.8)$$

Où :

- μ_{max} est le taux de croissance maximal (constant) des micro-organismes.
- K est la constante de Monod (constante de demi-saturation).

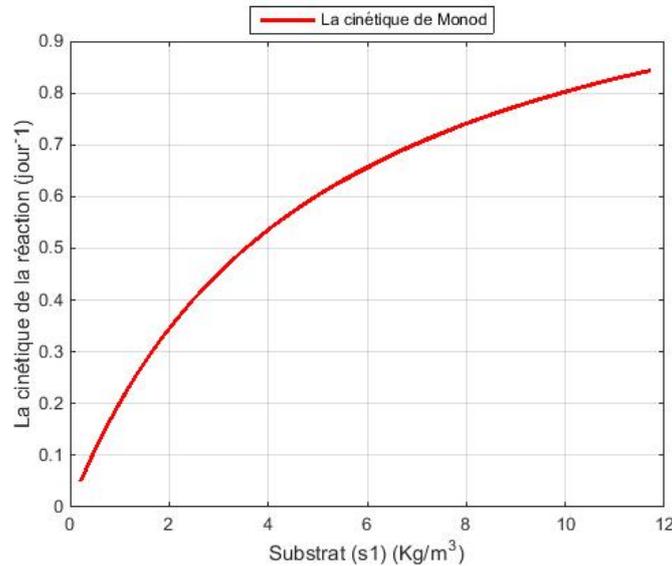


FIGURE 1.6 – Cinétique de Monod

La fonction présentée par (1.6) est une fonction croissante sur \mathbb{R}^+ telle que $\mu(0) = 0$ et $\lim_{s \rightarrow +\infty} \mu(s) = \mu_{max}$.

Aussi $\mu(K) = \frac{1}{2} \mu_{max}$ est la constante de demi saturation.

La dérivée de $\mu(s)$ est la fonction suivante : $\frac{\partial \mu}{\partial s} = \mu_{max} \frac{K}{(K + s)^2}$. Elle est décroissante sur \mathbb{R}^+ .

Donc **le modèle de Monod** est présentée de la manière suivante :

$$\begin{cases} \dot{s}(t) = D(t)(s_{in} - s(t)) - k \mu_{max} \frac{s(t)}{K + s(t)} x(t) \\ \dot{x}(t) = \left(\mu_{max} \frac{s(t)}{K + s(t)} - D(t) \right) x(t) \end{cases} \quad (1.3.9)$$

1.3.3 La mise au point du modèle

Positivité des variables

Dans les systèmes biologiques plus particulièrement du type chemostat, les variables d'état sont positives. Ici, nous démontrons que le système (1.3.7) reste positif ou nul pour des conditions initiales positives ou nulles.

Positivité de x :

Théorème 1 (Non-négativité de x) Pour toutes conditions initiales $x_0 = x(0) \geq 0$; on a $x(t) \geq 0$

Preuve.

Afin de démontrer le théorème précédent, on utilise la formule de la variation de la constante valable tant que s existe :

$$x(t) = \exp\left(\int_0^t \mu(s(\tau))d\tau - Dt\right)x(0)$$

Cette formule montre que si $x(0) = 0$ alors $x(t) = 0$ pour tout t . Aussi, si $x(0) > 0$ alors $x(t) > 0$ pour tout t .

Ce théorème établit que $x(t)$ reste positif pour toutes conditions initiales $x(0) \geq 0$ et ce quel que soit le signe de s . Il reste donc à vérifier que s ne peut pas être négative.

■

Positivité de s :

Proposition 1 Un système dynamique $\dot{x} = f(x)$ est positif si et seulement si :

$$\forall i = \overline{1, n}, \dot{x}_i = f_i(x_1 \geq 0, \dots, x_i = 0, \dots, x_n \geq 0) \geq 0$$

Nous avons deux situations possibles :

$$s_0 = s(0) = 0$$

$$s_0 = s(0) > 0$$

Dans la première situation $s(0) = 0$ nous obtenons les égalités suivantes :

$$\begin{aligned}\frac{ds}{dt}(0) &= D(s_{in} - s(0)) - k\mu(s(0))x(0) \\ \frac{ds}{dt}(0) &= Ds_{in} > 0\end{aligned}$$

En conséquence, pour tout $t > 0$ petit ; $s(t) > 0$. Ainsi en changeant l'origine du temps, on se ramène au cas suivant.

Soit $(s(0), x(0)) = (s_0, x_0) \in \mathbf{R}^{+*} \times \mathbf{R}^{+*}$. Supposons $\exists t_1 > 0$ tel que $s(t_1) = 0$ et que t_1 soit le premier des tels t alors on a :

$$\begin{aligned}\frac{ds}{dt}(t_1) &= D(s_{in} - s(t_1)) - k\mu(s(t_1))x(t_1) \\ \frac{ds}{dt}(t_1) &= Ds_{in} > 0\end{aligned}$$

Or :

$$\frac{ds}{dt}(t_1) = \lim_{t \rightarrow t_1, t < t_1} \frac{s(t_1) - s(t)}{t_1 - t} \leq 0$$

D'où la contradiction. Donc il n'existe pas de t_1 tel que $s(t_1) = 0$.

Les équilibres du système

La condition de stationnarité des équations dynamiques de (1.3.7), s'écrit de manière générale comme l'annulation des dérivées :

$$\begin{cases} \dot{s}(t) = 0 \\ \dot{x}(t) = 0 \end{cases} \quad (1.3.10)$$

Calculons les points d'équilibre du système :

$$\dot{x}(t) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x^*(t) = 0 & (*) \\ \mu(s^*) = D(t) & (**)$$

$$\dot{s}(t) = 0 \Rightarrow D(t)(s_{in} - s^*(t)) - k\mu(s^*)x^*(t) = 0 \quad (***)$$

On remplace (*) dans (***) on obtient l'égalité suivante : $s^*(t) = s_{in}$. Donc le premier état stationnaire est $E_1 = (s^*, x^*) = (s_{in}, 0)$. En absence de biomasse, la consommation du substrat est inexistante : la concentration reste égale à ce qu'elle est à l'entrée, E_1 est un **état trivial** correspondant au **lessivage**.

On remplace (**) dans (***) on obtient l'égalité suivante :

$$D(t)(s_{in} - s^*(t)) - kD(t)x^*(t) = 0$$

On prend $D(t)$ comme facteur commun :

$$D(t)[(s_{in} - s^*(t)) - kx^*(t)] = 0$$

Donc :

$$x^*(t) = \frac{1}{k}(s_{in} - s^*)$$

De (***) on tire la variable s^* on obtient alors : $s^*(t) = \frac{KD(t)}{\mu_{max} - D(t)}$. Donc le deuxième état stationnaire est $E_2 = (s^*, x^*) = \left(\frac{KD(t)}{\mu_{max} - D(t)}, \frac{1}{k}(s_{in} - s^*) \right)$. Le taux de croissance spécifique des micro-organismes s'ajuste de manière à compenser le flux de sortie de la biomasse, E_2 est un **état non trivial**.

Nous résumons nos états stationnaires dans le tableau suivant :

État	Biomasse	Substrat
E.trivial	$x^* = 0$	$s^* = s_{in}$
E.non trivial	$x^* = \frac{1}{k}(s_{in} - s^*)$	$s^* = \frac{KD(t)}{\mu_{max} - D(t)}$

TABLE 1.1 – Les états stationnaires

Stabilité des équilibres

Nous venons de démontrer que le système décrit en (1.3.7) possède deux états stationnaires E_1 et E_2 . Il est évident qu'un système ne peut se trouver dans deux états en même temps. Donc, sa situation sur la trajectoire dans l'espace des phases et la stabilité de l'état stationnaire sont deux paramètres conditionnant son choix. La stabilité d'un état stationnaire peut être déterminée en élaborant une analyse des modes normaux. En effet, selon le théorème 3, la stabilité des états stationnaires du système (1.3.7) est satisfaite si et seulement si les modes normaux sont négatifs. D'où la résolution de l'équation caractéristique suivante $\det(J - w_i I) = 0$, J représente la matrice Jacobienne du système, I la matrice identité et w_i sont les valeurs propres (modes normaux) du système, les valeurs des variables d'état sont prises à l'état stationnaire. Sous forme explicite $\det(J - w_i I) = 0$ du système dynamique

(1.3.7) est définie comme suit :

$$\begin{vmatrix} \mu(s) - D(t) - w & \frac{\partial \mu(s)}{\partial s} x(t) \\ -k\mu(s) & -D(t) - k \frac{\partial \mu(s)}{\partial s} x(t) - w \end{vmatrix} = 0 \quad (1.3.11)$$

* **Cas trivial :**

En remplaçant E_1 dans (3.1.7) l'état trivial se simplifie :

$$\begin{vmatrix} \mu(s_{in}) - D(t) - w & 0 \\ -k\mu(s_{in}) & -(D(t) + w) \end{vmatrix} = 0$$

et se met sous la forme :

$$(D(t) + w)(D(t) + w - \mu(s_{in})) = 0$$

et admet les solutions suivantes :

$$\begin{cases} w_1 = -D(t) \\ w_2 = \mu(s_{in}) - D(t) \end{cases}$$

w_1 est toujours négative, car le taux de dilution $D(t)$ est une grandeur positive. Cela dit, pour que w_2 soit négative $\mu(s_{in})$ doit être inférieur à $D(t)$. Donc la condition de stabilité du point d'équilibre E_1 est $\mu(s_{in}) < D(t)$.

* **Cas non trivial :**

En remplaçant E_2 dans (3.1.7) l'état non trivial se simplifie :

$$\begin{vmatrix} -w & \frac{\partial \mu(s^*)}{\partial s} x^*(t) \\ -kD(t) & -D(t) - k \frac{\partial \mu(s^*)}{\partial s} x^* - w \end{vmatrix} = 0$$

Afin de simplifier le calcul du déterminant on pose $H = k \frac{\partial \mu(s^*)}{\partial s} x^*(t)$ alors :

$$w^2 + w(D(t) + H) + HD(t) = 0$$

et admet les solutions suivantes :

$$\begin{cases} w_1 = -D(t) \\ w_2 = -H = -k \frac{\partial \mu(s^*)}{\partial s} x^* \end{cases}$$

w_1 est toujours négative, car le taux de dilution $D(t)$ est une grandeur positive. w_2 est toujours négative aussi et donc la condition de stabilité est toujours vérifiée.

1.3.4 Simulation du Chemostat

Suite à l'étude théorique du Chemostat, nous avons simulé ce modèle en utilisant le logiciel Matlab, les valeurs des paramètres du chemostat ainsi que leurs unités sont mentionnées dans le tableau ci-dessous [5] :

Paramètres	Définition	Valeurs et unités
k	Constante stœchiométrique	$6.6 \text{ Kg COD/Kg } x$
s_{in}	Concentration d'entrée de s	9 Kg/m^3
μ_{max}	Taux de croissance maximal	1.2 Jour^{-1}
K	Constante de demi saturation	4.28 Kg COD/m^3

TABLE 1.2 – Paramètres du Chemostat

On considère le taux de dilution $D(t)$ suivant :

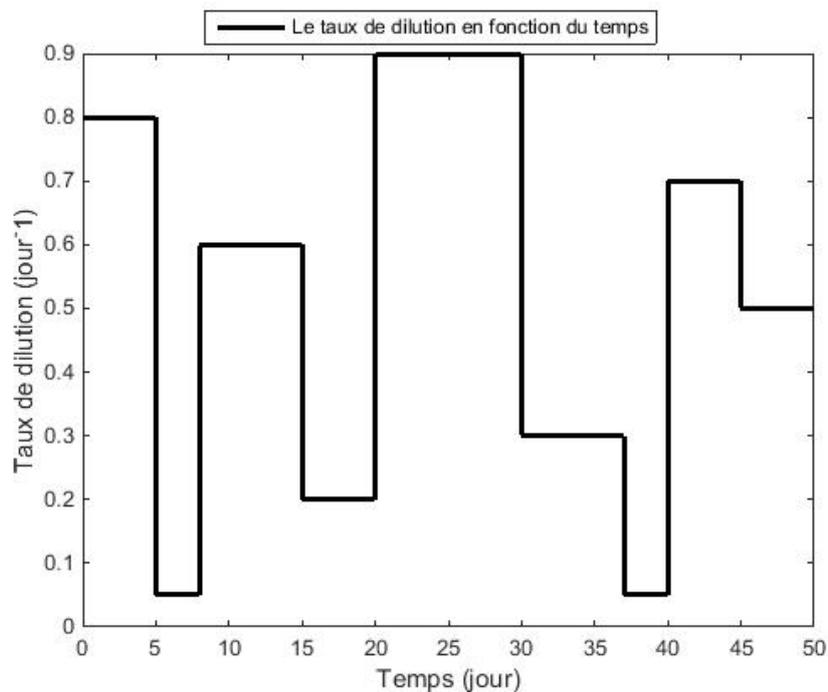


FIGURE 1.7 – Le taux de dilution

Les résultats de la simulation sont les suivants :

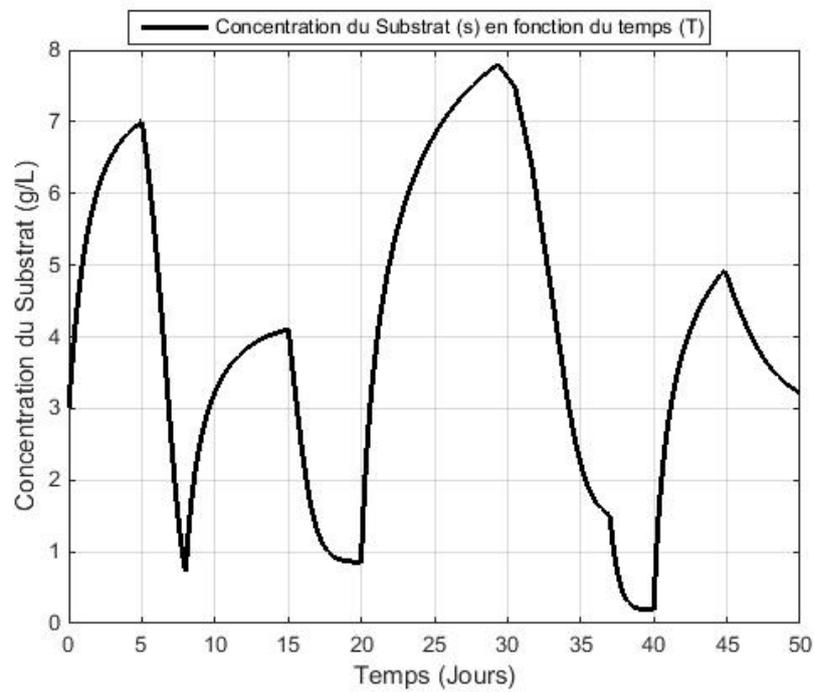


FIGURE 1.8 – Concentration du Substrat (s)

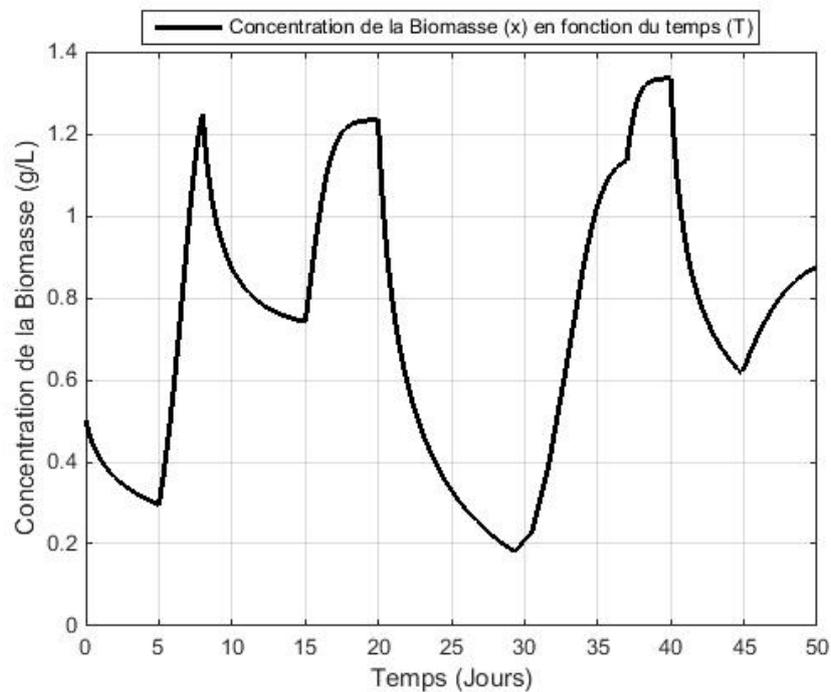


FIGURE 1.9 – Concentration de la biomasse (x)

Les graphes (1.8) et (1.9) représentent respectivement la concentration du substrat s et la concentration de la biomasse x en fonction du temps (*jour*). Il existe une corrélation entre ces deux graphes : plus la concentration du substrat diminue plus la concentration de la biomasse augmente et vis versa, ainsi la concentration du substrat est inversement proportionnelle à la concentration de la biomasse.

Interprétation biologique : les bactéries anaérobies (la biomasse x) utilisent la matière organique (substrat s) afin de produire de l'énergie nécessaire à leur croissance, multiplication et prolifération.

Chapitre 2

Etat de l'art sur les observateurs pour les bioprocédés

*L'*Automatique est une science qui traite l'analyse, la modélisation, l'identification et la commande des systèmes dynamiques. Elle est fondée sur les mathématiques, l'informatique et la théorie de signal. Ses applications sont dans tous les domaines : électronique, mécanique, aéronautique mais aussi la biologie. Afin de commander un système, il est primordial d'avoir toutes les informations nécessaires et les conditions propres au processus. Cependant, dans le monde de l'industrie, les seules grandeurs accessibles du système sont les variables d'entrées et les variables de sorties utilisées pour trouver une reconstitution de l'état du modèle choisi. Dans le but de résoudre ce problème, les automaticiens utilisent l'observateur d'état. En effet, un observateur permet de reconstruire l'état à partir du modèle du système dynamique et des mesures d'autres grandeurs lorsque l'état du système est non mesurable. Les mesures d'autres grandeurs sont obtenues grâce aux capteurs et donc l'observateur d'état optimise le nombre de capteurs dans un processus industriel, d'où son intérêt économique dans l'industrie. Dans ce qui suit, nous nous intéresserons aux observateurs appliqués aux modèles des bioprocédés précisément le modèle (Chemostat) mais avant cela voici un petit aperçu sur l'observabilité dans les systèmes dynamiques.

2.1 Systèmes dynamiques

Un système est dit dynamique si son comportement évolue au cours du temps, il est caractérisé par sa structure représentant les moyens mis en œuvre pour réaliser des fonctions bien précises, ces fonctions représentent les objectifs du système et enfin son comportement présentant la forme de la réalisation du système d'une ou plusieurs fonctions. Un système dynamique peut être classé selon trois catégories distinctes : les systèmes hybrides, les systèmes discrets et les systèmes à temps

continus objet de notre présent travail. Le modèle des systèmes à temps continu peut être linéaire ou non linéaire et stationnaire ou non stationnaire. Concernant les bioprocédés, le modèle du système est à temps continu et non linéaire.

2.2 Étude des systèmes non linéaires

2.2.1 Équations d'état d'un système non linéaire

Les systèmes réels sont des systèmes non linéaires et afin de les modéliser mathématiquement on utilise des équations différentielles non linéaires dont la résolution n'a pas de méthode générale. Dans ces équations, lorsque les termes non linéaires dépendent de petits paramètres on peut utiliser la théorie des perturbations. Dans le cas de fortes non linéarités, on doit utiliser la simulation numérique. La structure de la représentation d'état des systèmes non linéaires est donnée par les équations d'état suivantes :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) \\ y(t) = h(x(t), u(t)) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (2.2.1)$$

Avec $x(t) \in \mathbb{R}^n$ et $y(t) \in \mathbb{R}^p$ représentent respectivement le vecteur d'état et le vecteur de sortie du système dynamique. f et h sont deux fonctions non linéaires de \mathbb{R}^n et $u(t) \in \mathbb{R}^m$ est le vecteur d'entrée du système dynamique (2.2.1).

2.2.2 Observabilité des systèmes non linéaires

Un observateur est un système auxiliaire (O) dont les entrées sont les entrées et les sorties mesurées d'un système physique (S) et les sorties sont les états estimés ou reconstruits du système (S) comme illustré dans le schéma ci-dessous :

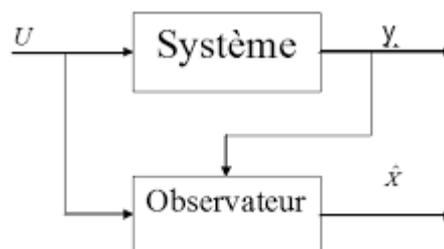


FIGURE 2.1 – Principe de l'observateur

Afin de concevoir un observateur d'un système dynamique, il est fondamental de s'assurer que les états puissent être estimés en se basant sur les entrées et les sorties du système. La notion de l'observabilité permet de dire si les états sont estimables à partir des entrées et sorties du système dynamique. Dans les systèmes non linéaires le principe de l'observabilité est plus complexe. En effet, dans ce type de système l'observabilité dépend non seulement des entrées appliquées mais aussi des conditions initiales, elle est définie à partir de la notion d'indistinguabilité.

On considère le système non linéaire défini par l'équation (2.2.1) les définitions ci-dessous sont importantes pour la compréhension de l'observabilité [7].

Indistinguabilité

Définition 1 Soient X l'espace d'état et $(x_0^1, x_0^2) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ une paire d'états initiaux tel que $x_0^1 \neq x_0^2$. Si $\forall t \geq 0$ et $\forall u \in U$ les trajectoires de sorties $y(t, x_0^1, u(t))$ et $y(t, x_0^2, u(t))$ issues de x_0^1 et x_0^2 respectivement, restent toujours dans X tout au long de la durée $[0, t]$ tout en vérifiant $y(t, x_0^1, u(t)) \neq y(t, x_0^2, u(t))$, on dit que la paire (x_0^1, x_0^2) est indistinguishable dans l'espace d'état X . Aussi, on dit que u distingue x_0^1, x_0^2 dans X .

Observabilité

Définition 2 Un système non linéaire de la forme (2.2.1) est dit observable [resp. en x_0] si il n'admet pas de paire indistinguishable [resp. aucun état indistinguishable en x_0].

Espace d'observation

On définit l'espace d'observation du système non linéaire (2.2.1) comme le plus petit sous espace vectoriel noté par $O(h)$ de fonction à valeur dans l'espace de sortie contenant les composantes $h = (h_1; h_2; \dots h_p)$ et invariant aux champs de vecteurs du type $f_u(x) = f(x, u), u \in \mathbb{R}^m$ sous l'action de la dérivée de lie. Cela veut dire que pour toute entrée $u \in \mathbb{R}^m$ et pour tout $h \in O(h), L_{f_u} h \in O(h) \dots$, et $L_{f_u}^{n-1} h \in O(h)$ Où $L_{f_u} h$ est la dérivée de Lie de h dans la direction f . Elle est donnée par :

$$L_{f_u} h = \sum_{i=1}^n f_i(x) \frac{\partial h}{\partial x_i} \quad (2.2.2)$$

Ainsi l'espace d'observation du système (2.2.1) est défini comme suit :

$$O(h) = \begin{bmatrix} h \\ L_f h \\ \vdots \\ L_f^{n-1} h \end{bmatrix} \quad (2.2.3)$$

Observabilité au sens du rang

Définition 3 On dit que la paire (f, h) est observable au sens du rang si la différentielle de la sortie h avec les différentielles de ses dérivées de Lie successives dans la direction f jusqu'à l'ordre $n - 1$ sont indépendantes c'est-à-dire :

$$\text{Rang} \begin{bmatrix} dh \\ dL_f h \\ \vdots \\ dL_f^{n-1} h \end{bmatrix} = n \quad (2.2.4)$$

Où l'expression $dL_f^k h$ est donnée par le vecteur :

$$dL_f^k h = \left(\frac{\partial L_f^k h}{\partial x_1}, \frac{\partial L_f^k h}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial L_f^k h}{\partial x_n} \right)$$

2.2.3 Observateurs des systèmes non linéaires

Observateur de Luenberger étendu

L'observateur de Luenberger étendu est une généralisation de l'observateur de Luenberger utilisé dans le cas des systèmes linéaires [9], il nécessite la connaissance du modèle, les entrées ainsi que les cinétiques.

Le principe de l'observateur de Luenberger est de linéariser le modèle autour d'un point de fonctionnement $x^*(t)$ puis utiliser la théorie de placement des pôles afin de calculer le gain K avec condition que l'état $x(t)$ soit toujours au voisinage de l'état d'équilibre $x^*(t)$.

On considère le système dynamique non linéaire (2.2.1), la synthèse de l'observateur de Luenberger étendu correspondant au système (2.2.1) donne lieu à la structure suivante :

$$\begin{cases} \hat{x}(t) = f(\hat{x}(t), u(t)) + K(y(t) - \hat{y}(t)) \\ \hat{y}(t) = h(\hat{x}(t), u(t)) \\ \hat{x}(0) = \hat{x}_0 \end{cases} \quad (2.2.5)$$

Où K est le gain de l'observateur calculé de telle sorte que les valeurs propres de la matrice $[A(x^*) - KC(x^*)]$ soient stables ou dite de Hurwitz. $A(x^*)$ et $C(x^*)$ sont obtenues en linéarisant le système autour du point de fonctionnement x^* , c'est-à-dire :

$$\begin{cases} A(x^*) = \frac{\partial f(x(t), u(t))}{\partial x} \Big|_{x=x^*} \\ C(x^*) = \frac{\partial h(x(t), u(t))}{\partial x} \Big|_{x=x^*} \end{cases}$$

L'observateur de Luenberger étendu est rarement utilisé dans le domaine des bio-procédés, en effet cet observateur peut provoquer des instabilités en s'éloignant du point de fonctionnement [5].

Observateur de Kalman étendu

Le filtre de Kalman étendu comme son nom l'indique est une extension du filtre de Kalman utilisé dans le cas des systèmes dynamiques linéaires. Son principe générale est de linéariser le modèle autour d'une trajectoire estimée \hat{x} , il est utilisé afin de résoudre des problèmes stochastiques d'estimation où figurent des bruits d'états issus du modèle ainsi que des bruits de mesures issues de capteurs. Lorsque les variances des bruits sont connues, cet observateur est performant. De plus, si les bruits peuvent être considérés comme blancs (gaussiens), il est optimal, cela signifie que la variance de l'erreur d'observation est faible. Le filtre de Kalman étendu est un algorithme récursif cherchant à extraire le vecteur d'état du bruit additionnel en ce basant sur un ensemble d'équations mathématiques qui réalisent à chaque itération deux tâches [10] :

- * **La prédiction** : Calcul du vecteur d'état selon un modèle d'évolution ou (d'état).
- * **La correction** : Correction du vecteur d'état issus de la prédiction en fonction des mesures effectuées sur le processus réel.

On considère le système dynamique non linéaire suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) + \eta(t) \\ y(t) = h(x(t), u(t)) + \zeta(t) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (2.2.6)$$

Où $\eta(t)$ et $\zeta(t)$ sont des bruits blancs gaussiens de moyenne nulle et de matrice de covariance Q et R respectivement. La synthèse de l'observateur de Kalman étendu correspondant au système (2.2.6) donne lieu à l'algorithme récursif suivant :

★ **Initialisation :**

D'abord, on calcule les valeurs initiales du vecteur d'état \hat{x}_0 , la matrice de variance-covariance de l'erreur d'estimation P_0 , la matrice de covariance du bruit du système Q_0 ainsi que la matrice de covariance du bruit de mesures R_0 selon les équations suivantes :

$$\begin{cases} \hat{x}_0 = E[x_0] \\ P_0 = E[(x - \hat{x}_0)(x - \hat{x}_0)^T] \\ Q_0 = E[(\eta - \bar{\eta}_0)(\eta - \bar{\eta}_0)^T] \\ R_0 = E[(\zeta - \bar{\zeta}_0)(\zeta - \bar{\zeta}_0)^T] \end{cases} \quad (2.2.7)$$

Où E représente l'espérance mathématique.

★ **Phase de prédiction :**

- Calcul des matrices Jacobienne de fonction non linéaire f autour de l'état précédent k

$$\begin{cases} F_k = \frac{\partial f(x_k, u_k)}{\partial x_k} \Big|_{x_k = \hat{x}_{k/k}} \\ M_k = \frac{\partial f(x_k, u_k)}{\partial \eta} \Big|_{x_k = \hat{x}_{k/k}} \end{cases} \quad (2.2.8)$$

- Prédiction du vecteur d'état étendu :

$$\hat{x}_{k+1/k} = f(\hat{x}_{k/k}, u_k)$$

- Prédiction de la matrice de covariance :

$$\hat{P}_{k+1/k} = F_k \hat{P}_{k/k} F_k^T + M_k Q_k M_k^T$$

★ **Phase de correction :**

- Calcul des matrices Jacobiennes de fonction non linéaire h autour de l'état précédent k

$$\begin{cases} H_{k+1} = \frac{\partial h_{k+1}}{\partial x} \Big|_{x_k = \hat{x}_{k+1/k}} \\ G_{k+1} = \frac{\partial h_{k+1}}{\partial \zeta} \Big|_{x_k = \hat{x}_{k+1/k}} \end{cases} \quad (2.2.9)$$

- Gain de Kalman :

$$K_{k+1} = \hat{P}_{k+1/k} \cdot H_{k+1}^T (H_{k+1} \hat{P}_{k+1/k} H_{k+1}^T + G_{k+1} R_{k+1} G_{k+1}^T)^{-1}$$

- Estimation du vecteur d'état étendu :

$$\hat{x}_{k+1/k+1} = \hat{x}_{k+1/k} + K_{k+1} (y_{k+1} - h(\hat{x}_{k+1/k}))$$

- Estimation de la matrice de covariance :

$$\hat{P}_{k+1/k+1} = \hat{P}_{k+1/k} - K_{k+1}H_{k+1}\hat{P}_{k+1/k}$$

Le filtre de Kalman étendu est très utilisé dans le domaine des bioprocédés, cependant cet observateur présente quelques imperfections. Tout d'abord, la convergence de l'erreur d'estimation n'est pas assurée dans le sens où si le passage d'une estimation à une autre tend à sortir de la zone de linéarité alors le filtre diverge. Ensuite, le coût calculatoire de ce filtre est plus important vu les matrices coûteuses qui rentrent en jeu. Enfin, le filtre de Kalman étendu est limité seulement aux bruits blancs gaussiens ce qui rend son utilisation de plus en plus limitée.

Observateur à Grand Gain

L'observateur à Grand Gain s'applique sur les systèmes dynamiques uniformément observables possédant une forme triangulaire complète ou partielle. Il présente d'excellentes propriétés globales dans le sens où il assure une convergence et une stabilité avec une vitesse de convergence réglable tout en prenant compte la structure non linéaire du système.

L'idée de cet observateur est d'effectuer un changement de coordonnées sur le système dynamique original afin d'obtenir un système équivalent dont la construction de l'observateur est une tâche moins complexe [17] et [18].

On considère le système dynamique non linéaire de la forme :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t)) \\ y(t) = h(x(t)) \end{cases} \quad (2.2.10)$$

Où f est une fonction continue de $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ et h est également une fonction continue de $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Afin de construire un observateur à Grand Gain, les hypothèses suivantes doivent être vérifiées :

★ Le système (2.2.10) est observable.

★ L'application Φ définie comme l'espace d'observabilité $O(h)$ cité en (2.2.3) tel que : $\Phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ est un difféomorphisme (Voir Annexe) de $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ sur $\Phi(\Omega)$.

Dans le but de faciliter la reconstruction du vecteur d'état $x(t)$, un changement de coordonnées est effectué de façon à exprimer la sortie mesurée $y(t)$ en fonction d'une seule coordonnée représentant la première composante du vecteur d'état. La reconstruction de la totalité du vecteur d'état est effectuée en dérivant successivement la sortie mesurée.

Donc, nous posons $\Phi(x) = z$ ainsi nous obtenons :

$$\begin{cases} z_1 = y = h(x) \\ z_2 = \dot{y} = \dot{z}_1 \\ z_3 = \ddot{y} = \dot{z}_2 \\ \vdots \\ z_n = y^{n-1} = \dot{z}_{n-1} \end{cases} \quad (2.2.11)$$

Alors le système équivalent s'écrit comme suit :

$$\begin{cases} \dot{z} = \begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \\ \vdots \\ \dot{z}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_2 \\ z_3 \\ \vdots \\ \varphi(z) \end{bmatrix} = F(z) \\ y = z_1 \end{cases} \quad (2.2.12)$$

Avec $\varphi(z)$ définie de la manière suivante :

$$\varphi(z) = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ L_f^n h(x) \end{bmatrix} \quad (2.2.13)$$

* $\varphi(z)$ peut être prolongée de $\Phi(\Omega)$ en une fonction C^∞ globalement Lipschitzienne (**Voir Annexe**) sur \mathbb{R}^n .

Ces hypothèses sont vérifiées dans le domaine des bioprocédés, donc la synthèse de l'observateur à Grand Gain possède la structure suivante :

$$\begin{cases} \dot{\hat{z}} = F(\hat{z}(t)) - \theta \Delta_\theta^{-1} S_\theta^{-1} C^T [C\hat{z}(t) - z_1] \\ \hat{y} = z_1 \end{cases} \quad (2.2.14)$$

Où θ est le paramètre de réglage de l'observateur tel que $\theta \geq 1$, Δ_θ est une matrice diagonale définie de la façon suivante :

$$\Delta_\theta = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{\theta} & \cdots & \frac{1}{\theta^{n-1}} \end{bmatrix}$$

et S_θ est l'unique solution de l'équation algébrique de Lyapunov suivante :

$$\theta S_\theta + A^T S_\theta + S_\theta A - C^T C = 0$$

Où A et C sont les deux matrices suivantes :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

L'unique solution de l'équation algébrique S_θ peut être calculée analytiquement en utilisant l'expression suivante :

$$S_\theta = S_\theta(i, j) = \frac{(-1)^{i+j}(i+j-2)!}{(\theta)^{i+j-1}(i-1)!(j-1)!}$$

L'estimation $\hat{z}(t)$ du vecteur d'état $z(t)$ permet de donner une estimation $\hat{x}(t)$ du vecteur d'état $x(t)$. En effet, $\hat{x}(t)$ est obtenu par $\Phi^{-1}(\hat{z}(t))$, cependant parfois il n'est pas possible d'exprimer la fonction Φ^{-1} en fonction de z . Dans ce cas de figure, l'équation de l'observateur est exprimée directement en fonction des coordonnées originales en $x(t)$. En effet, sachant que :

$$\frac{\partial z(t)}{\partial t} = \frac{\partial \Phi(x)}{\partial x} \cdot \frac{\partial x(t)}{\partial t}$$

L'équation de l'observateur dans les coordonnées originales est la suivante :

$$\dot{\hat{x}} = f(\hat{x}(t)) + \phi(\hat{x}(t), u(t)) - \theta \left[\frac{\partial \Phi(x(t))}{\partial x} \right] \Delta_\theta^{-1} S^{-1} C^T [h(\hat{x}(t)) - y(t)]$$

L'observateur à Grand Gain est très utilisé dans le domaine des bioprocédés. Cependant, sa synthèse est complexe et il est très sensible aux bruits.

Observateur asymptotique

L'observateur asymptotique prend en compte la non linéarité d'un système dynamique. Il est caractérisé par la simplicité de sa méthode de synthèse qui sous certaines conditions permet d'observer l'état du système dynamique sans connaître son modèle cinétique, assurant ainsi une stabilité et convergence si les entrées sont persistantes et bornées. Cette technique est très intéressante, cependant elle présente quelques inconvénients dont la dépendance du changement de coordonnées aux coefficients stoechiométriques et l'incapacité de régler la vitesse de convergence de l'observateur. En effet, elle est fonction du taux de dilution et si ce dernier

est faible cela peut poser problème dans le sens où l'erreur d'estimation devient constante, ainsi l'observateur est peu robuste. Plus tard, Gouzé et Al [14] ont généralisé cet observateur et ont obtenu un observateur robuste avec une vitesse de convergence réglable partiellement [12], [13] et [15].

Observateur hybride entre le filtre de Kalman étendu et l'observateur asymptotique

L'idée de cet observateur est de fusionner les avantages de deux autres observateurs déjà traités auparavant : le filtre de Kalman étendu et l'observateur asymptotique en introduisant un nouveau paramètre appelé le **degré de confiance** ζ borné tel que $0 \leq \zeta \leq 1$ dans le modèle cinétique qui sera estimé parallèlement avec les autres états du système dynamique [11].

Lorsque $\zeta = 1$: l'estimateur correspondra au filtre de Kalman et ainsi il utilisera le modèle cinétique auquel il marque sa confiance.

Lorsque $\zeta = 0$: l'estimateur correspondra à l'observateur asymptotique et de ce fait l'utilisation du modèle cinétique est écartée.

Observateur par intervalles

L'observateur par intervalles est un système dynamique auxiliaire composé de deux observateurs, l'un observe la borne inférieure et l'autre la borne supérieure pour les solutions du système, tout en considérant que les bornes pour la condition initiale ainsi que pour les incertitudes sont connues. Ce type d'observateur est stable et converge si les entrées sont persistantes et bornées, il est robuste aux entrées inconnues et la vitesse de convergence est partiellement réglable. Considérons le système dynamique suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t), w(t)) \\ y(t) = h(x(t), u(t), v(t)) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (2.2.15)$$

Avec $x \in \mathbb{R}^n$ le vecteur d'état, $y \in \mathbb{R}^p$ le vecteur de sortie, $u \in \mathbb{R}^m$ le vecteur d'entrée et x_0 est la condition initiale en t_0 et n'est pas supposée connue, elle est bornée par une borne inférieure et une borne supérieure. f et h sont deux fonctions où $w \in \mathbb{R}^r$ et $v \in \mathbb{R}^q$ sont des incertitudes d'entrée et de sortie respectivement, elles sont caractérisées par leurs bornes inférieures et supérieures telles que pour tout $t \geq 0$.

$$w^-(t) \leq w(t) \leq w^+(t) \quad (2.2.16)$$

$$v^-(t) \leq v(t) \leq v^+(t) \quad (2.2.17)$$

$$x_0^- \leq x_0 \leq x_0^+ \quad (2.2.18)$$

En considérant le système (2.2.15) en temps continu avec les conditions (2.2.16), (2.2.17), (2.2.18), le système :

$$\begin{cases} \dot{\xi}^+ &= f^+(\xi^-, \xi^+, w^-, w^+, v^-, v^+, u, y) \\ \dot{\xi}^- &= f^-(\xi^-, \xi^+, w^-, w^+, v^-, v^+, u, y) \\ \dot{x}^+ &= h^+(\xi^-, \xi^+, w^-, w^+, v^-, v^+, u, y) \\ \dot{x}^- &= h^-(\xi^-, \xi^+, w^-, w^+, v^-, v^+, u, y) \end{cases} \quad (2.2.19)$$

est un encadreur du système (2.2.15) si pour toute condition initiale $x_0^- \leq x_0 \leq x_0^+$ nous avons $x^-(t) \leq x(t) \leq x^+(t)$. (2.2.19) est un observateur par intervalles du système dynamique (2.2.15) si dans le cas où $w = v = 0$ c'est-à-dire :

$$\begin{cases} \dot{\xi}^+ &= f^+(t, \xi^-, \xi^+, u, y) \\ \dot{\xi}^- &= f^-(t, \xi^-, \xi^+, u, y) \\ \dot{x}^+ &= h^+(t, \xi^-, \xi^+, u, y) \\ \dot{x}^- &= h^-(t, \xi^-, \xi^+, u, y) \end{cases} \quad (2.2.20)$$

Il existe un réel positif M tel qu'il existe $T > 0$ tel que : $\|x^+(t) - x^-(t)\| \leq M, \forall t \geq T$
Donc si nous pouvons encadrer la condition initiale inconnue et les incertitudes w et v alors nous pouvons encadrer les variables non mesurées du système dynamique étudié. Ceci est basé sur les propriétés de **coopérativité**.

Définition 4 Soit $\dot{x} = f(x, t)$, ce système est dit coopératif si $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(t, x) \geq 0 \forall i \neq j$ ce qui implique que si $x(0) \geq 0$ alors $x(t) \geq 0, \forall t \geq 0$

Observateur invariant

Dans un contexte de contrôle en automatique, plusieurs auteurs en particulier P. Rouchon et Al [20], [21] et [22] ont utilisé le concept de l'invariance sous l'action d'un groupe appelé **Groupe de Lie**. Considérons le système dynamique suivant :

$$\dot{x} = f(x, u) \quad (2.2.21)$$

$$y = h(x, u) \quad (2.2.22)$$

Avec $x \in X \subset \mathbb{R}^n$ le vecteur d'état, $u \in U \subset \mathbb{R}^m$ le vecteur d'entrée, $y \in Y \subset \mathbb{R}^p$ le vecteur de sortie. Soit G un groupe de Lie de transformation, agissant sur X par $\varphi_g : X \rightarrow X \ \forall g \in G$, φ_g est un difféomorphisme (au moins C^1) sur X avec $(\varphi_g)^{-1} = \varphi_{g^{-1}}$ et $\varphi_{g_1} \circ \varphi_{g_2} = \varphi_{g_1 g_2}$. Nous considérons également l'action du même groupe G sur U par $(\psi_g)_{g \in G}$ et sur Y par $(\rho_g)_{g \in G}$.

La construction d'un pré-observateur nécessite des fonctions scalaires invariantes et des champs de vecteurs invariants.

Une fonction J définie sur $X \times U \times Y$ est dite invariante si et seulement si :

$$J(\varphi_g(x), \psi_g(u), \rho_g(y)) = J(x, u, y) \quad \forall g, x, u, y$$

Un champ de vecteur w est **invariant** sur $X \subset \mathbb{R}^n$ si et seulement si :

$$w(\varphi_g(x)) = D_{\varphi_g(x)} w(x) \quad \forall g, x$$

Où $D_{\varphi_g(x)}$ est la Jacobienne de $\varphi_g(x)$.

Le système dynamique définit ci-dessous :

$$\frac{d\hat{x}}{dt} = f(\hat{x}) + \sum_i J_i(\hat{x}, y) w_i(\hat{x})$$

est un **pré-observateur invariant** pour (2.2.21) si nous choisissons J_i une fonction scalaire invariante qui satisfait $J_i(\hat{x}, h(\hat{x}, u)) = 0$ et w_i un champ de vecteur invariant. Si ce pré-observateur converge vers (2.2.21), alors il est appelé **observateur invariant** [19].

2.3 Application au chemostat

Nous avons présenté précédemment un état de l'art sur les observateurs utilisés dans le domaine des bioprocédés. Dans cette seconde partie du chapitre nous allons appliquer ces observateurs sur notre modèle " le chemostat". Cependant, avant de construire un observateur il est fondamental de s'assurer de l'observabilité du système dynamique. Dans notre cas, nous vérifions l'observabilité du modèle chemostat :

2.3.1 Observabilité du chemostat :

Tout d'abord, nous définissons l'espace d'observabilité du chemostat :

$$O(h) = \begin{bmatrix} h \\ L_f h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s \\ \dot{s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s \\ D(t)[s_{in} - s] - k\mu_{max} \frac{sx}{s + K} \end{bmatrix}$$

Ainsi, la matrice d'observabilité est écrite sous la forme suivante :

$$dO(h) = \begin{bmatrix} dh \\ dL_f h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -D(t) - k\mu_{max} \frac{Kx}{(s+K)^2} & -k\mu_{max} \frac{s}{(s+K)} \end{bmatrix}$$

Le déterminant de la matrice d'observabilité est non nul :

$$\det(dO(h)) = -k\mu_{max} \frac{s}{s+K} \neq 0 \quad \text{si } s \neq 0$$

Le rang de la matrice d'observabilité est égale à 2 : $Rang(dO(h)) = 2$ et donc le système est observable.

2.3.2 Observateurs appliqués aux chemostat :

Dès lors la condition d'observabilité du chemostat satisfaite, nous présentons quelques applications faites sur ce dernier :

Observateur asymptotique

Considérons le système (1.3.7) et procédons par un changement de coordonnées : $\xi = kx + s$. Nous cherchons la dynamique de ξ tout en supposant que s est mesurée et $\mu(\cdot)$ n'est pas connue. s est donnée par : $s = \xi - kx$ et sa dérivée est : $\dot{s} = \dot{\xi} - k\dot{x}$.

En les remplaçant dans la première équation du modèle (1.3.7), nous obtenons :

$$\dot{\xi} - k\dot{x} = D(t)[s_{in} - \xi + kx] - k\mu(s)x \quad (2.3.1)$$

En remplaçant la deuxième équation du modèle (1.3.7) dans (2.3.1) :

$$\dot{\xi} - k[\mu(s) - D(t)]x = D(t)[s_{in} - \xi + kx] - k\mu(s)x$$

En éliminant les termes similaires, la dynamique de ξ est la suivante :

$$\dot{\xi} = D(t)[s_{in} - \xi] \quad (2.3.2)$$

L'observateur asymptotique pour (2.3.2) est le suivant :

$$\dot{\hat{\xi}} = D(t)[s_{in} - \hat{\xi}] \quad (2.3.3)$$

Cet observateur converge vers ξ avec une vitesse de convergence imposée par le taux de dilution $D(t)$. Ainsi, x est estimé de la manière suivante : $\hat{x} = \frac{\hat{\xi} - s}{k}$.

Tant que le taux de dilution constitue une excitation persistante (**voir chapitre 3**), l'erreur d'estimation converge asymptotiquement vers 0. L'équation (2.3.3) confirme que la vitesse de convergence dépend seulement du taux de dilution et est indépendante de la cinétique du modèle proposé.

Les simulations ont été réalisées en considérant les valeurs des paramètres citées dans le tableau (1.2) et les conditions initiales du système citées dans le tableau ci-dessous :

	$s(0)$ (Kg/m ³)	$x(0)$ (Kg/m ³)
Modèle	3	0.5

TABLE 2.1 – Conditions initiales du modèle

Et celle de l'observateur asymptotique :

	$\hat{\xi}(0)$	$\hat{x}(0)$
Observateur	22.8	3

TABLE 2.2 – Conditions initiales de l'observateur asymptotique

Les résultats de simulations sont présentés dans la figure ci-dessous :

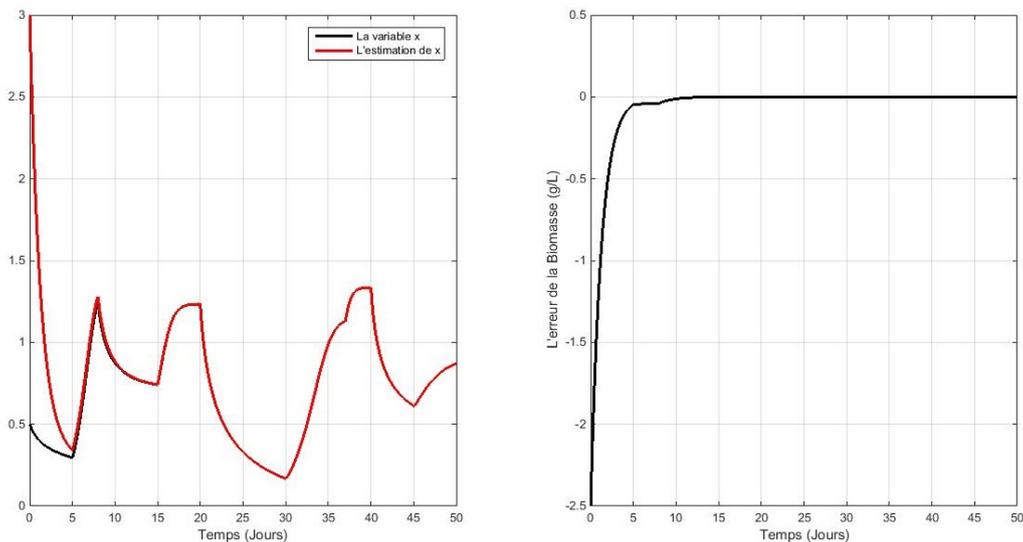


FIGURE 2.2 – Concentration de la biomasse et son erreur d'estimation

La figure (2.2) représente la concentration de la biomasse (x) et son estimation (\hat{x}) ainsi que l'erreur E en fonction du temps ($jour$). Nous constatons que l'observateur asymptotique converge après 5 jours avec une erreur qui tend vers 0.

Observateur par intervalles

Nous considérons le système dynamique du chemostat présenté en (1.3.7) et les conditions initiales suivantes :

$$s_{in}^- \leq s_{in} \leq s_{in}^+$$

$$x_0^- \leq x_0 \leq x_0^+$$

L'observateur par intervalles correspondant au système dynamique (1.3.7) est mis sous la forme :

$$\begin{cases} \dot{\xi}^+ = D(t)(s_{in}^+ - \xi^+); \xi_0^- \leq \xi_0 \\ \dot{\xi}^- = D(t)(s_{in}^- - \xi^-); \xi_0 \leq \xi_0^+ \\ \dot{x}^+ = \frac{\xi^+ - s}{k} \\ \dot{x}^- = \frac{\xi^- - s}{k} \end{cases} \quad (2.3.4)$$

Les simulations ont été réalisées en considérant les valeurs des paramètres citées dans le tableau (1.2) et les conditions initiales du système citée dans le tableau (2.1) et de l'observateur par intervalles citées dans le tableau ci-dessous :

Les résultats de simulations sont présentés dans la figure ci-dessous :

	$\hat{\xi}^-(0)$	$\hat{\xi}^+(0)$	$\hat{x}^-(0)$	$\hat{x}^+(0)$
Observateur	4.32	26.4	0.2	3.5

TABLE 2.3 – Conditions initiales de l'observateur par intervalles

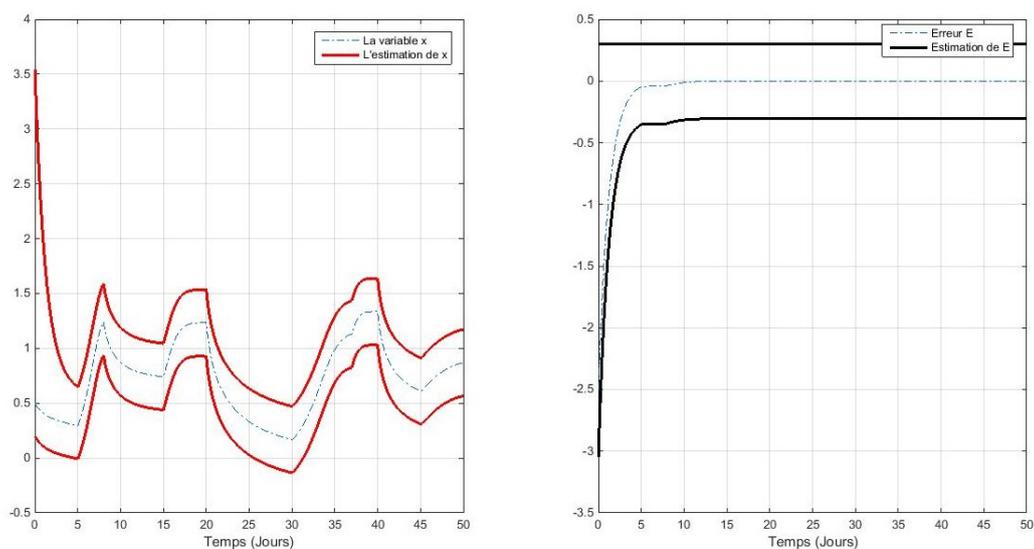


FIGURE 2.3 – Concentration de la biomasse et son erreur d'estimation

La figure (2.3) représente la concentration de la biomasse x et son estimation \hat{x} ainsi que l'erreur E en fonction du temps (*jour*). Nous constatons que l'observateur par intervalles nous donne un intervalle d'approximation de la biomasse x et converge dans cet intervalle avec une erreur presque nulle.

Observateur Invariant

Considérons le système (1.3.7), l'observateur invariant correspondant est présenté sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{\hat{s}}(t) = D(t)(s_{in} - \hat{s}(t)) - k\mu(\hat{s}(t), K)\hat{x}(t) + a\hat{s}(t)(\ln(s) - \ln(\hat{s})) \\ \dot{\hat{x}}(t) = (\mu(\hat{s}(t), K) - D(t))\hat{x}(t) + b\hat{x}(t)(\ln(s) - \ln(\hat{s})) \end{cases} \quad (2.3.5)$$

Les simulations ont été réalisées en considérant les valeurs des paramètres citées dans le tableau (1.2) et les conditions initiales du système (2.1) et de l'observateur invariant citées dans le tableau ci-dessous :

	$\hat{s}(0)$ (Kg/m ³)	$\hat{x}(0)$ (Kg/m ³)
Observateur	3	3

TABLE 2.4 – Conditions initiales de l'observateur invariant

Ainsi que les deux gains :

a	b
10	-50

TABLE 2.5 – Gain de l'observateur invariant

Les résultats de simulations sont présentés dans la figure ci-dessous :

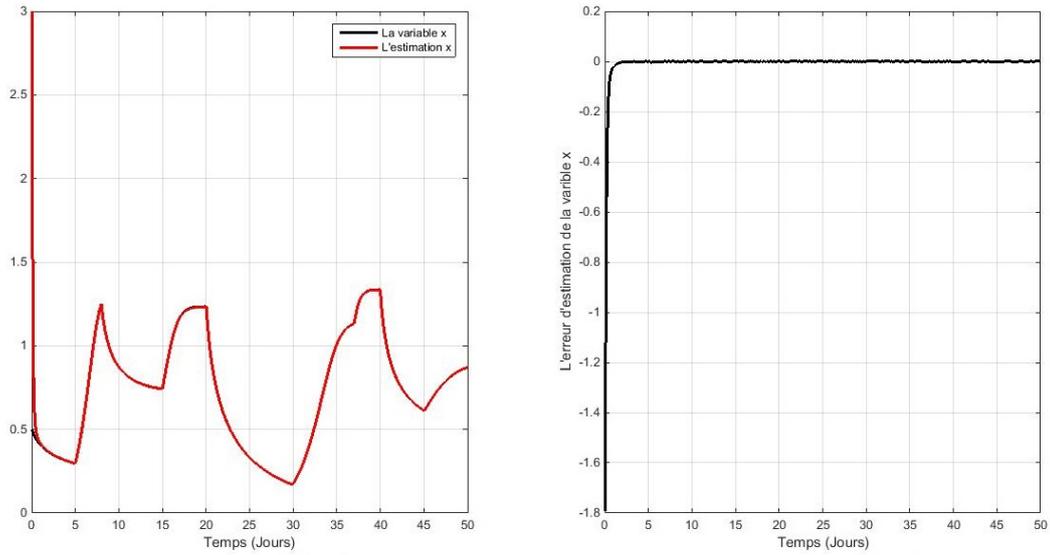


FIGURE 2.4 – Concentration de la biomasse et son erreur d'estimation

La figure (2.4) représente la concentration de la biomasse x et son estimation \hat{x} ainsi que l'erreur E en fonction du temps (*jour*). Nous constatons que l'observateur invariant converge après une journée avec une erreur qui tend vers zéro.

Chapitre 3

Synthèse d'un observateur non linéaire à dynamique d'erreur linéaire

Dans le modèle du Chemostat, la sortie possède une forme assez particulière, ceci nous incite à construire un observateur non linéaire à dynamique d'erreur linéaire. Dans la première partie de ce chapitre nous nous intéresserons à la construction de l'observateur de type Luenberger avec injection de la sortie dans la fonction non linéaire $\mu(s)$ quelconque. La seconde partie de ce chapitre est dédiée à une étude comparative entre les observateurs traités dans le chapitre précédent et l'observateur étudié dans ce chapitre.

3.1 Observateur de type Luenberger appliqué au Chemostat

Considérons le système (1.3.7), nous admettons que $D(t)$ satisfait la **condition de persistance de l'excitation** si et seulement si :

$$\exists T > 0, \forall \varepsilon > 0 \quad \text{tel que} \quad \forall t \geq 0, \int_t^{t+T} D(\tau) d\tau \geq \varepsilon T \quad (3.1.1)$$

Aussi, nous admettons que la fonction $\mu(s)$ satisfait les conditions citées dans [16] où :

- $\mu(s) = 0 \iff s = 0$,
- $0 \leq \mu(\cdot) \leq \mu_{max}$,
- $\mu(\cdot)$ continue.

Nous proposons un observateur de type Luenberger pour le système (1.3.7)

sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{\hat{s}} = D(t)(s_{in} - \hat{s}) - k\mu(s)\hat{x} + a(s - \hat{s}) \\ \dot{\hat{x}} = (\mu(s) - D(t))\hat{x} + b(s - \hat{s}) \end{cases} \quad (3.1.2)$$

Nous précisons que a et b sont deux paramètres de réglage. Aussi, les erreurs sont définies de la manière suivante $e_1 = s - \hat{s}$ et $e_2 = x - \hat{x}$. Ainsi, nous calculons la dynamique des erreurs :

Dynamique de e_1 :

Elle est exprimée de la manière suivante :

$$\dot{e}_1 = \dot{s} - \dot{\hat{s}}$$

Nous remplaçons \dot{s} et $\dot{\hat{s}}$ en utilisant leurs expressions respectives :

$$\dot{e}_1 = D(t)(s_{in} - s) - k\mu(s)x - D(t)(s_{in} - \hat{s}) + k\mu(s)\hat{x} - a(s - \hat{s})$$

Ainsi, nous obtenons :

$$\dot{e}_1 = -D(t)(s - \hat{s}) - k\mu(s)(x - \hat{x}) - a(s - \hat{s})$$

Donc l'expression de la dynamique de e_1 est :

$$\dot{e}_1 = -(D(t) + a)e_1 - k\mu(s)e_2$$

Dynamique de e_2 :

Elle est exprimée de la manière suivante :

$$\dot{e}_2 = \dot{x} - \dot{\hat{x}}$$

Nous remplaçons \dot{x} et $\dot{\hat{x}}$ en utilisant leurs expressions respectives :

$$\dot{e}_2 = (\mu(s) - D(t))x - (\mu(s) - D(t))\hat{x} - b(s - \hat{s})$$

Ainsi, nous obtenons :

$$\dot{e}_2 = -D(t)(s - \hat{s}) - k\mu(s)(x - \hat{x}) - b(s - \hat{s})$$

Donc l'expression de la dynamique de e_2 est :

$$\dot{e}_2 = -be_1 + (\mu(s) - D(t))e_2$$

Théorème 2 Pour le système (2.2.1) le système (3.1.2) est un observateur où a et b sont deux paramètres de réglage (le gain).

La dynamique des erreurs sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{bmatrix} \dot{e}_1 \\ \dot{e}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -D(t) - a & -k\mu(s) \\ -b & \mu(s) - D(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix} \quad (3.1.3)$$

Supposons que $a > 0$ et assez grand et que $b < 0$ avec $|b|$ assez grand, alors le point $(0, 0)$ est un point d'équilibre pour le système (3.1.3) qui est globalement asymptotiquement stable [16].

Preuve. Tout d'abord, nous réécrivons la dynamique des erreurs sans le taux de dilution $D(t)$, pour cela nous posons $p(t) = \int_0^t D(\tau) d\tau$ et multiplions (3.1.3) par $p(t)$. Ainsi nous obtenons :

Dynamique de e_1 :

$$p(t)(\dot{e}_1 + D(t)e_1) = (-ae_1 - k\mu(s)e_2)p(t)$$

Donc :

$$p(t)\dot{e}_1 + p(t)D(t)e_1 = -ap(t)e_1 - k\mu(s)p(t)e_2$$

Dynamique de e_2 :

$$p(t)(\dot{e}_2 + D(t)e_2) = (-be_1 + \mu(s)e_2)p(t)$$

Donc :

$$p(t)\dot{e}_2 + p(t)D(t)e_2 = -bp(t)e_1 + \mu(s)p(t)e_2$$

Ensuite, nous procédons à un changement de variable en posant $u_1(t) = p(t)e_1$ et $u_2(t) = p(t)e_2$, nous calculons les dérivées respectives :

Dynamique de $u_1(t)$:

$$\dot{u}_1(t) = \dot{p}(t)e_1 + p(t)\dot{e}_1$$

Donc :

$$\dot{u}_1(t) = D(t)p(t)e_1 + p(t)\dot{e}_1$$

Dynamique de $u_2(t)$:

$$\dot{u}_2(t) = \dot{p}(t)e_2 + p(t)\dot{e}_2$$

Donc :

$$\dot{u}_2(t) = D(t)p(t)e_2 + p(t)\dot{e}_2$$

Ainsi nous pouvons écrire le nouveau système de la façon suivante :

$$\begin{cases} \dot{u}_1(t) = -au_1(t) - k\mu(s)u_2(t) \\ \dot{u}_2(t) = -bu_1(t) + \mu(s)u_2(t) \end{cases} \quad (3.1.4)$$

Maintenant, nous allons prouver la convergence de l'observateur en utilisant la fonction de Lyapunov candidate suivante (**voir Annexe**) :

$$V_\beta(u_1, u_2) = \left\| \begin{bmatrix} u_1 \\ u_1 + \beta u_2 \end{bmatrix} \right\|^2 = (u_1)^2 + (u_1 + \beta u_2)^2$$

où β est une constante strictement positive. Notons que cette fonction est une aussi une norme qui radialement non bornée. Donc :

$$V_\beta(u_1, u_2) = 2(u_1)^2 + (\beta u_2)^2 + 2\beta u_1 u_2$$

Nous calculons la dérivée de cette expression :

$$\dot{V}_\beta(u_1, u_2) = 4\dot{u}_1 u_1 + 2\beta^2 \dot{u}_2 u_2 + 2\beta \dot{u}_1 u_2 + 2\beta u_1 \dot{u}_2$$

Nous remplaçons \dot{u}_1, \dot{u}_2 en utilisant les expressions calculées précédemment :

$$\begin{aligned} \dot{V}_\beta(u_1, u_2) = & 4(-au_1 - k\mu(s)u_2)u_1 + 2\beta^2(-bu_1 + \mu(s)u_2)u_2 + 2\beta(-au_1 - k\mu(s)u_2)u_2 \\ & + 2\beta(-bu_1 + \mu(s)u_2)u_1 \end{aligned}$$

Donc finalement :

$$\begin{aligned} \dot{V}_\beta(u_1, u_2) = & -2(2a + \beta b)u_1^2 + 2\beta\mu(s)(\beta - k)u_2^2 + 2\beta[(\beta - 2k)\mu(s) \\ & - \beta(\beta b + a)]u_1 u_2 \end{aligned} \quad (3.1.5)$$

Afin de montrer que $\dot{V}_\beta < 0$ ie définie négative, nous devons prouver que $tr(B(t)) < 0$ et $det(B(t)) > 0$ tel que $B(t)$ est la matrice correspondante au système suivant :

$$\dot{V}_\beta(u_1, u_2) = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 \end{bmatrix} B(t) \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

Sachant que $B(t)$ est la matrice suivante :

$$B(t) = \begin{bmatrix} -2(2a + \beta b) & [(\beta - 2k)\mu(s) - \beta(\beta b + a)] \\ [(\beta - 2k)\mu(s) - \beta(\beta b + a)] & 2\beta\mu(s)(\beta - k) \end{bmatrix}$$

Nous définissons la trace de $B(t)$:

$$tr(B(t)) = -2(2a + \beta b) + 2\beta\mu(s)(\beta - k) \quad (3.1.6)$$

Nous calculons le déterminant de $B(t)$:

$$det(B(t)) = -4(2a + \beta b)\beta\mu(s)(\beta - k) - [(\beta - 2k)\mu(s) - \beta(\beta b + a)]^2$$

Ainsi :

$$det(B(t)) = [(-8a\beta\mu(s) - 4\beta^2\mu(s)b)(\beta - k)] - [(\beta - 2k)^2\mu^2(s) + \beta^2(\beta b + a)^2 - 2\beta\mu(s)(\beta - 2k)(\beta b + a)]$$

Nous simplifions cette égalité :

$$det(B(t)) = -6\beta^2\mu(s)a - 2\beta^3\mu(s)b + 4\beta k\mu(s)a - (\beta - 2k)^2\mu^2(s) - \beta^2(\beta b + a)^2$$

Ainsi :

$$det(B(t)) = -(\beta - 2k)^2\mu^2(s) - \beta^2(\beta b + a)^2 + 2\beta[-3\beta\mu(s)a + 2k\mu(s)a - \beta^2\mu(s)b]$$

Donc finalement :

$$det(B(t)) = -(\beta - 2k)^2\mu^2(s) - \beta^2(\beta b + a)^2 + 2\beta\mu(s)[(-3\beta + 2k)a - \beta^2b] \quad (3.1.7)$$

Nous posons la conditions suivante :

$$\beta b + a = 0 \iff b = \frac{-a}{\beta} \quad (3.1.8)$$

Nous remplaçons (3.1.8) dans (3.1.6), nous obtenons :

$$tr(B(t)) = -2a + 2\beta\mu(s)(\beta - k) \quad (3.1.9)$$

Nous remplaçons (3.1.8) dans (3.1.7), nous obtenons :

$$det(B(t)) = -(\beta - 2k)^2\mu^2(s) + 4\beta\mu(s)(k - \beta)a \quad (3.1.10)$$

Donc afin de satisfaire les conditions décrites précédemment nous devons s'assurer que $a > 0$ et suffisamment grand et que $0 < \beta < k$ ■

3.2 Résultats de simulations

Les simulations ont été réalisées en considérant les valeurs des paramètres citées dans (1.2) et les conditions initiales présentées dans le tableau ci-dessous :

	$s(0)$ (Kg/m ³)	$x(0)$ (Kg/m ³)
Modèle	3	0.5
Observateur	3	3

TABLE 3.1 – Conditions initiales du modèle et de l'observateur type Luenberger

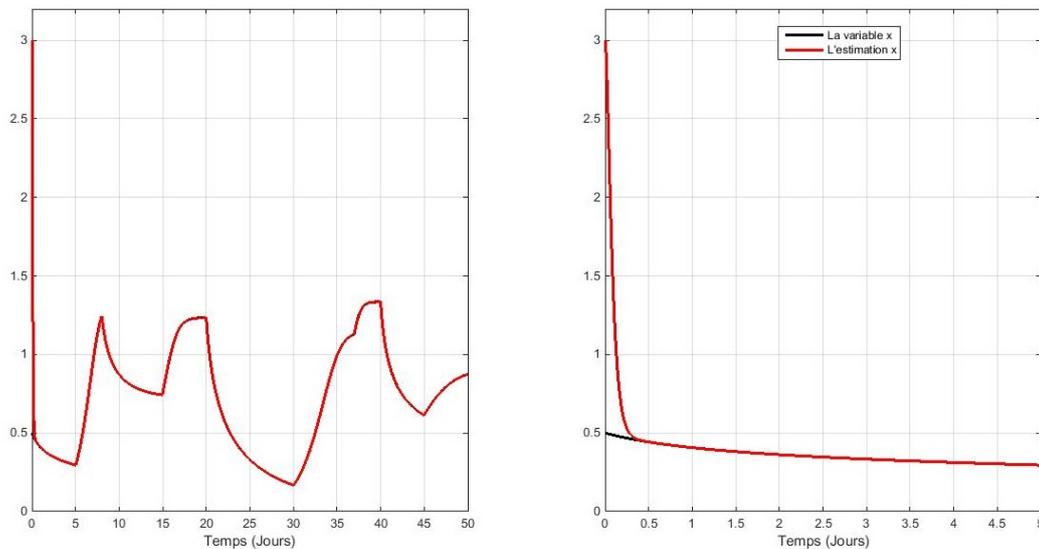


FIGURE 3.1 – Concentration de la biomasse et son estimation pour $a = 50$, $b = -\frac{a}{\beta}$ avec $\beta = 0.3$

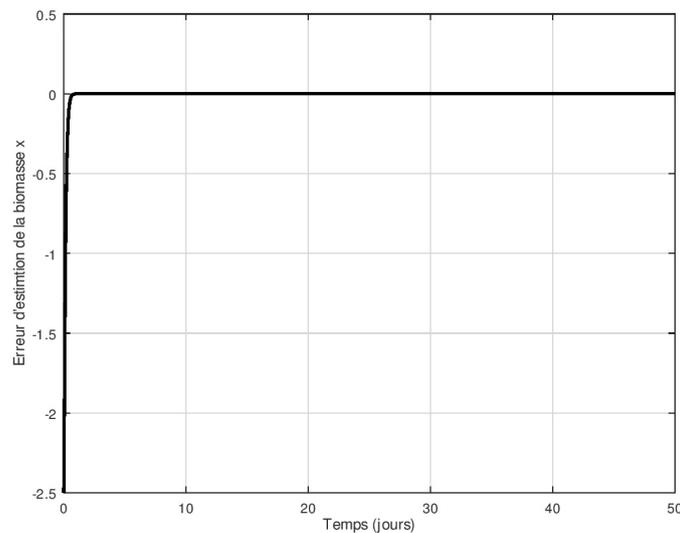


FIGURE 3.2 – Erreur correspondante à la biomasse x

Les figures (3.1) et (3.2) représentent respectivement la concentration de la biomasse x , son estimation \hat{x} et l'erreur d'estimation correspondante à la biomasse. Dans la simulation réalisée, nous avons pris $a = 50$ et $\beta = 0.3$. Ainsi, nous remarquons que notre observateur type Luenberger converge après $t \approx \frac{1}{2}$ journée avec une erreur qui tend vers 0.

Essayons maintenant de changer de fonction de croissance dont le but de montrer, que peu importe la cinétique de croissance, l'observateur converge globalement pourvu qu'elle vérifie les conditions citées dans le chapitre 3, section 3.1.

Quelques modèles de croissances :

	Expression
Haldane	$\mu(s) = \mu_{max} \frac{s}{s + K + \frac{s^2}{K_i}}$
Contois	$\mu(s) = \mu_{max} \frac{s}{s + K_x}$
Tessier	$\mu(s) = \mu_{max} (1 - e^{-Ks})$

TABLE 3.2 – Cinétiques de croissance

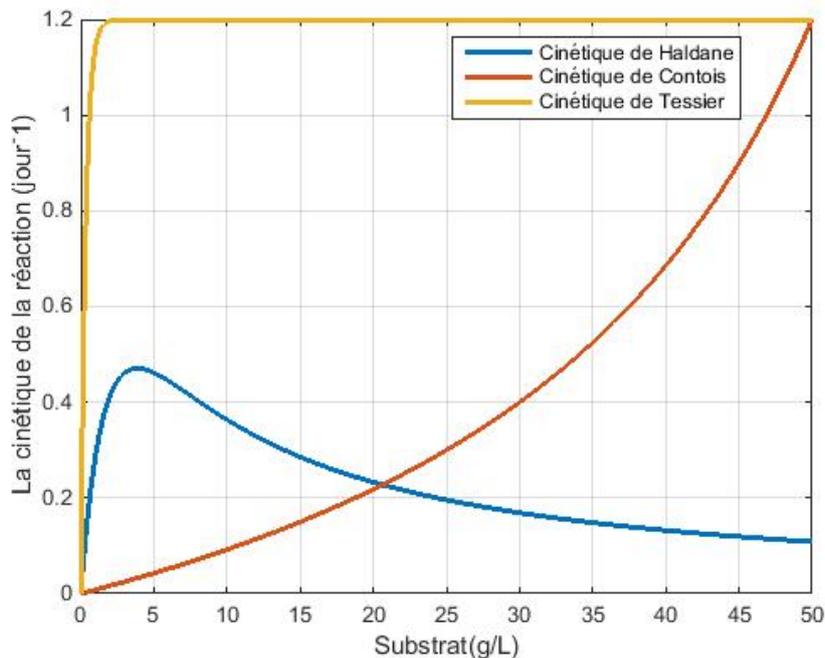
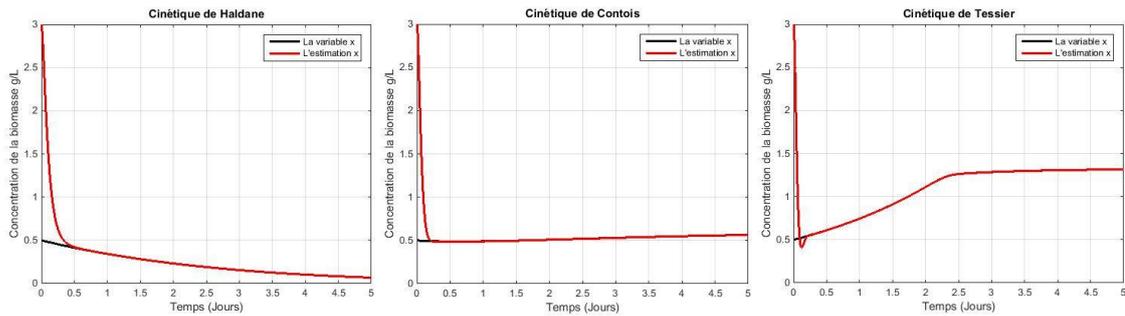


FIGURE 3.3 – Les différentes cinétiques



3.3 Discussion autour de la robustesse

Dans cette partie, nous allons perturber la sortie s par un bruit blanc additif puis observer le comportement du système tout en conservant les mêmes valeurs des paramètres et les conditions initiales donnés par les tableaux (1.2) et (3.1) respectivement .

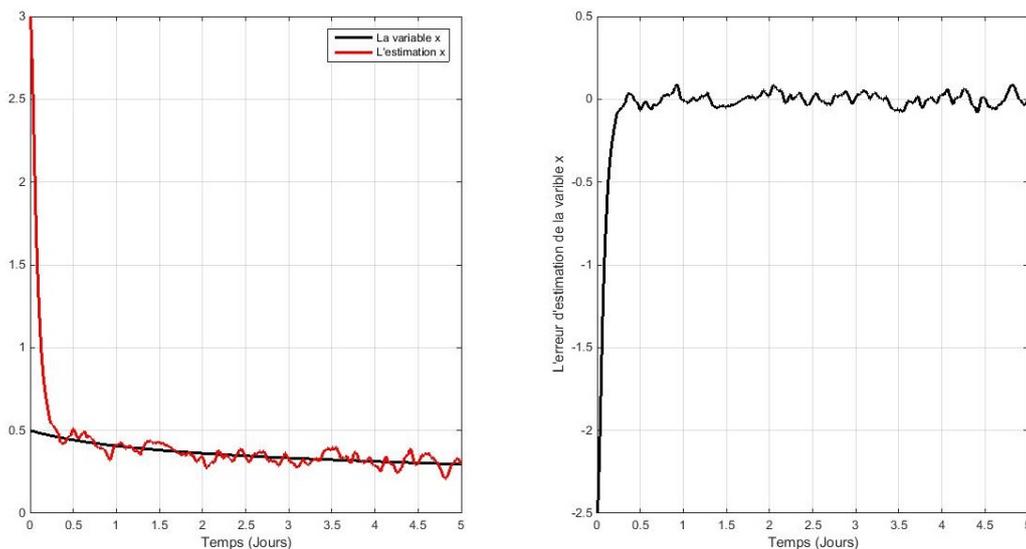


FIGURE 3.4 – La concentration de la biomasse x avec une perturbation sur s et son erreur d'estimation

Nous remarquons que face à un bruit blanc injecté dans la sortie s , notre observateur type Luenberger converge après $t \approx \frac{1}{2}$ journée avec une erreur qui tend pratiquement vers 0.

Maintenant, nous allons injecter un bruit de mesure puis observer le comportement du système tout en conservant les mêmes valeurs des paramètres et les conditions initiales citées en (1.2) et (3.1) respectivement .

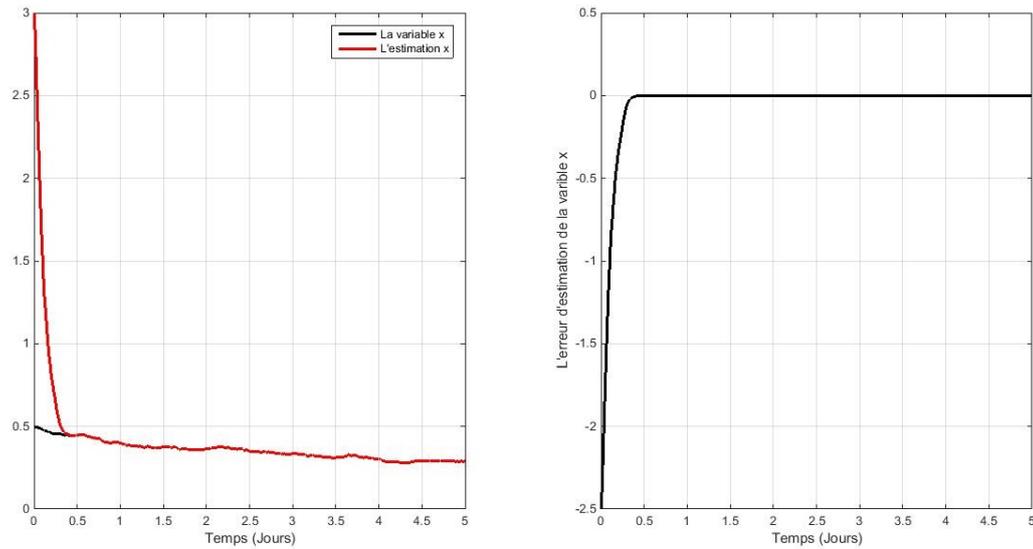


FIGURE 3.5 – La concentration de la biomasse x avec un bruit de mesure sur μ_{max} et son erreur d'estimation

Nous remarquons que même face à un bruit de mesure, notre observateur type Luenberger converge après $t \approx \frac{1}{2}$ journée avec une erreur qui tend vers 0.

3.4 Étude comparative

Dans cette partie, nous allons comparer entre les observateurs présentés dans le chapitre 2 section 2.3 et celui que nous avons synthétisé dans ce chapitre. En conservant les mêmes valeurs des paramètres et des conditions initiales cité précédemment nous obtenons les résultats suivant :

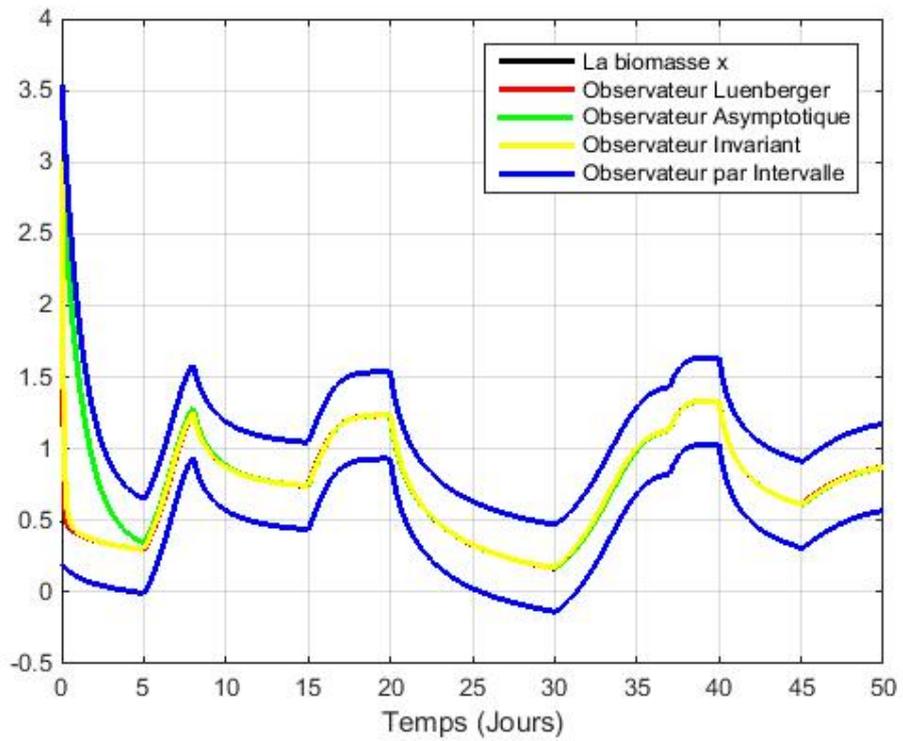


FIGURE 3.6 – Concentration de la biomasse x et ses estimations

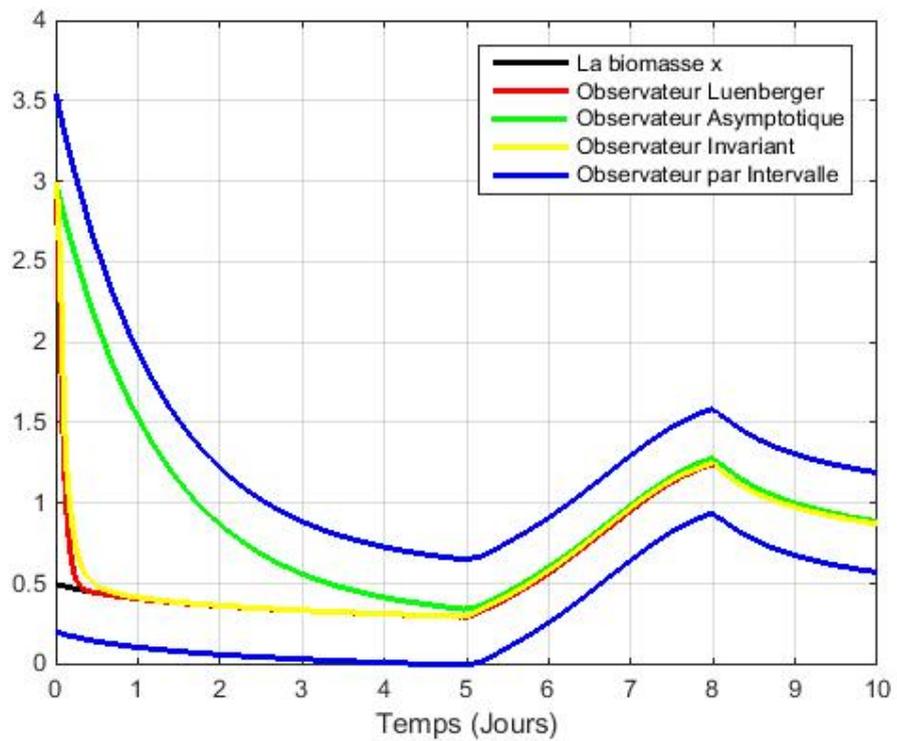


FIGURE 3.7 – Concentration de la biomasse x et ses estimations sur 10 jours

A partir des figures (3.6) et (3.7), il est évident que l'observateur à dynamique non linéaire "type Luenberger" et l'observateur invariant présentent de meilleurs résultats que ceux obtenus en utilisant l'observateur asymptotique ou encore l'observateur par intervalles. Cependant, nous constatons que l'observateur type Luenberger converge plus rapidement que l'observateur invariant. De plus, il est facile à synthétiser et assure une convergence totalement globale contrairement à l'observateur invariant qui assure seulement une convergence locale. L'inconvénient de notre observateur est qu'il est valable si et seulement si la sortie $y = s$.

Conclusion et Perspectives

L'objectif de ce travail est la construction d'un observateur non linéaire pour un type de modèle bien précis de bioprocédé le **Chemostat**, et ceci en estimant la variable non mesurée de ce système à partir de l'unique sortie (le substrat s). Nous avons également présenté des résultats de convergence et de robustesse basés sur la notion de fonction de Lyapunov candidate.

La synthèse de cet observateur présente une tâche peu complexe. Cependant, le choix des variables ainsi que la fonction de Lyapunov candidate doit être judicieux afin d'assurer son efficacité.

La simplicité de la forme de notre observateur ainsi que la possibilité de régler la vitesse de convergence constituent un progrès comparé aux observateurs du même système proposés dans la littérature.

Enfin, comme perspectives de ce travail, nous espérons trouver une forme plus générale des fonctions de Lyapunov candidates appliquées à ce type de modèle de bioprocédé ou d'autres formes de fonctions qui assurent des résultats similaires ou encore meilleures. Aussi, nous souhaitons utiliser notre observateur dans des boucles de commande.

Annexe

Fonction de Lyapunov

Théorème 3 Soit $\mathbf{R}^n \ni x \mapsto v(x) \in \mathbf{R}^n$ continûment dérivable par rapport à x et $\bar{x} \in \mathbf{R}^n$ tel que $v(\bar{x}) = 0$. Le point d'équilibre \bar{x} de $\frac{d}{dt}x = v(x)$ est localement asymptotiquement stable si les valeurs propres de la matrice Jacobienne $\frac{\partial v}{\partial x}(\bar{x}) = \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right)_{1 \leq i, j \leq n}$ sont toutes à partie réelle négative. Le point d'équilibre \bar{x} est instable au sens de Lyapounov si au moins l'une des valeurs propres de la matrice Jacobienne $\frac{\partial v}{\partial x}(\bar{x})$ est à partie réelle strictement positive.

Théorème 4 Stabilité au sens de Lyapunov : Soit $x_e = 0$ un point d'équilibre du système (3.1.4) et soit la fonction $V : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ de classe C^1 telle que $V(0) = 0$ et $V(x) > 0$ et $\dot{V}(x) < 0$ dans $\mathbf{R}^n - 0$ et aussi $\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} V(x) = \infty$ alors le point d'équilibre est globalement asymptotiquement stable.

Observabilité faible

Définition 5 Un système non linéaire de la forme (2.2.1) est dit faiblement observable [resp. en x_0]; si il existe un voisinage V de tout x [resp. en x_0] tel qu'il n'existe pas d'état indiscernable de x [resp. en x_0] dans V .

Observabilité locale

Définition 6 L'état x^1 est localement observable, si pour tout $\varepsilon > 0$ et pour tout voisinage V de x il existe $\eta > 0$ tel que $\eta < \varepsilon$ et un voisinage W de $x \subset V$ tel que pour tout $x^2 \in W$ il existe $t \in [0, \eta]$ et une entrée admissible $u(t)$ qui distingue x^1 et x^2 tel que $y(x^1) \neq y(x^2)$. Le système non linéaire de la forme (2.2.1) est dit localement observable si il l'est pour tout x .

Observabilité locale faible

Définition 7 Un système non linéaire de la forme (2.2.1) est dit localement faiblement observable [resp. en x_0] si il existe un voisinage V de tout x [resp. en x_0] tel que pour tout voisinage W de tout x [resp. en x_0] \subset dans V ; il n'existe aucun état indistinguable de x [resp. en x_0] dans W ou les trajectoires évoluent à l'intérieur de W .

Difféomorphisme

Définition 8 Si U et V sont deux ouverts de \mathbf{R}^n , et f une fonction de U dans V , on dit que f est un C^k -difféomorphisme si f est bijective et si f et f^{-1} sont de classe C^k .

Fonction Lipschitzienne

Définition 9 Soit I un intervalle de \mathbf{R} , f une fonction de I dans \mathbf{R} . On dit que f est lipschitzienne de rapport $k > 0$ si pour tout x, y de I : $|f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$.

Bibliographie

- [1] N. BERNET, *Principes et application de la digestion anaérobie pour la production d'énergie*, Colloque international sur le thème « Biodiversité et changements globaux : valorisation des effluents des industries, des résidus agro-pastoraux et forestiers », 2015.
- [2] N. HAJJAJI, *Production du biogaz par digestion anaérobie : Aspects technologiques et environnementaux.*, Séminaire de l'Ecole Doctorale RP2E « Ingénierie des Ressources, Procédés, Produits et Environnement », 2010.
- [3] J. BOLLON, *Etude des mécanismes physiques et de leur influence sur la cinétique de méthanisation en voie sèche : essais expérimentaux et modélisation*, thèse de doctorat, Institut National des Sciences Appliquées de Lyon, 2012.
- [4] O. BERNARD, *La modélisation des systèmes biologiques : Aller-retours le long des fleuves qui circulent entre l'océan du réel et le lac des modèles*, thèse de doctorat, Université de Nice-Sophia-Antipolis, 2004.
- [5] I. DIDI, *Sur l'observation des systèmes non linéaires invariants : Application aux Bioprocédés*, thèse de doctorat, Université Aboubekr Belkaid de Tlemcen, 2014.
- [6] J. ARINO, *Modélisation structurée de la croissance du phytoplancton en chemostat*, thèse de doctorat, Université Joseph Fourier de Grenoble1, 2001.
- [7] H. OUBABAS, *Contribution au diagnostic et à la commande tolérante aux fautes par l'approche ensembliste*, thèse de doctorat, Université Mouloud Mammeri De Tizi-Ouzou, 2019.
- [8] J. MONOD, *La technique de culture continue théorie et application*, Ann. Inst. Pasteur, 79, 390-410, 1950.
- [9] F. SALLEM, *Détection et Isolation de Défauts Actionneurs Basées sur un Modèle de l'Organe de Commande*, thèse de doctorat, Université de Toulouse, 2013.
- [10] F. BELMAHDI, *Application du filtre de Kalman pour le débruitage des signaux*, thèse de doctorat, Université Mouloud Mammeri De Tizi-Ouzou, 2015.
- [11] Ph. BOGAERTS, *A hybrid asymptotic-Kalman observer for bioprocesses*, Bio-process Engineering, 20, 249-255, 1999.
- [12] G. BASTIN, D. DOCHAIN, *On-line Estimation and Adaptive Control of Bioreactors*, Elsevier, 1990.
- [13] L. CHEN, *Modelling, Identifiability and Control of Complex Biotechnological Systems*, PhD, Thesis, Catholic University, Louvain, Belgium, 1992.
- [14] J. L. GOUZÉ, O. BERNARD et Z. HADJ-ZADOK, *Observers with modelling uncertainties for the wastewater treatment process*, Journées thématiques, Automatique et Environnement , 9-10 mars, Nancy, France, 2000.

- [15] J. L. GOUZÉ, et V. LEMESLE, *A bounded error observer with adjustable rate for a class of bioreactor models*, European Control Conference, ECC2001, 5 pages sur CD-ROM, Porto, Portugal, 2001.
- [16] I. DIDI, H. DIB, B.CHERKI, *A Luenberger-type observer for the AM2 model*, Journal Of Process Control, 32, 117-126, 2015.
- [17] J.P. GAUTHIER, H. HAMMOURI and S. OTHMAN, *A simple observer for nonlinear systems applications to bioreactors*, IEEE Transactions on Automatic Control, vol 37(6), 875-880, 1992.
- [18] V. LEMESLE et J. L. GOUZÉ, *Hybrid bounded error observers for uncertain bioreactor models*, Bioprocess Biosyst Eng, 27, 311-318, 2005.
- [19] I. DIDI, H. DIB, B.CHERKI, *An invariant observer for a chemostat model*, Automatica, 50, 2321–2326, 2014.
- [20] P. ROUCHON, S. BONNABEL, Ph. MARTIN, *Invariant Asymptotic Observers*, IEEE Trans, Automatic Control, vol.53, 2514-2526, 2008.
- [21] P. ROUCHON, *Symmetry preserving asymptotic observers : theory and examples*, 2nd Mediterranean Conference on Intelligent Systems and Automation,(CISA09), Zarzis, Tunisia, March 23-25, 2009.
- [22] S. BONNABEL, *Observateurs Asymptotiques Invariants : Théorie et exemples*, thèse de doctorat, Ecole des Mines de Paris, 2007.