

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

MINISTRY OF HIGHER EDUCATION  
AND SCIENTIFIC RESEARCH

HIGHER SCHOOL IN APPLIED SCIENCES  
--T L E M C E N--



المدرسة العليا في العلوم التطبيقية  
École Supérieure en  
Sciences Appliquées

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

المدرسة العليا في العلوم التطبيقية  
-تلمسان-

Mémoire de fin d'étude

Pour l'obtention du diplôme d'Ingénieur

Filière : Automatique  
Spécialité : Automatique

Présenté par : Ikram BELLAMRI

Thème

**Synthèse d'observateurs non linéaire  
pour le modèle AM2**

Soutenu publiquement, le 06 / 07 / 2020 , devant le jury composé de :

M L. MERAD	Professeur	ESSA. Tlemcen	Président
Mme I. DIDI ep BEMMOUSSAT	MCB	ESSA. Tlemcen	Directeur de mémoire
Mme A. GHOUALI ep BEDJAOUI	MCB	ESSA. Tlemcen	Co- Directeur de mémoire
M B. BENYAHIA	MCA	Université de Tlemcen	Examineur
M F. ARICHI	MCB	ESSA. Tlemcen	Examineur

Année universitaire : 2019 /2020

## ***Dédicace***

A mes chers parents « Smaine et Melika » qui n'ont jamais cessé de croire en moi. Aucune dédicace ne saurait exprimer mon adoration, mon respect et ma considération pour eux.

A mes sœurs « Medjda et Nessrine » qui m'ont toujours soutenu et encouragé.

A mon beau-frère « Sacha » et sa maman pour leur encouragement.

A mon petit neveu « Rayan » que j'aime plus que tout.

A mes plus fidèles et meilleurs amis « Chahira, Nabila, Réda, Yasmine et Yakoub » qui m'ont toujours soutenu et avec lesquels j'ai passé d'agréables moments.

A « Naila » et « Selma » qui m'ont toujours écouté et soutenu.

## **Remerciements**

Je tiens à remercier mon encadreur Mme Ibtissem DIDI ep BENMOUSSAT, Maitre de conférence « B » à l'ESSA de Tlemcen car sans elle ce travail n'aurait jamais pu être réalisé, elle m'a soutenu, dirigé en me faisant profiter de toutes ses compétences, ses encouragements, ses conseils qu'elle n'a pas hésité à m'accorder malgré la distance vu la crise sanitaire (Covid 19).

Je tiens à remercier également ma Co-encadrante Mme Amel GHOUALI ep BEDJAOUI, Maitre de conférence « B » à l'ESSA de Tlemcen qui m'a été de très bons conseils.

Mes remerciements s'adressent également à Monsieur le président du jury Mr Lotfi Merad, Professeur et chef de département du second cycle à l'ESSA de Tlemcen et à mes examinateurs Mr Fayçal Arichi, Maitre de conférence et responsable de la filière « Automatique » à l'ESSA de Tlemcen et Mr Boumediene Benyahia, Maitre de conférence « A » à l'université de Tlemcen qui m'ont fait l'honneur d'évaluer mon travail.

Je tiens à remercier Mr Boucherit Rouissat, le directeur de l'école et Mr Fouad Boukli le directeur des études qui se sont toujours préoccupés d'assurer aux étudiants de l'école une excellente formation dans les meilleures conditions.

Je tiens à remercier mes chers et respectueux parents pour leur patience, leur amour grandiose, leurs soutiens et leurs encouragements perpétuels qu'ils m'ont apportés depuis mon enfance, tous les sacrifices qu'ils ont consentis pour mon instruction et mon bien être.

Je tiens à remercier tous mes professeurs et en particulier Mr Sidi Mohammed Khefif qui m'a été d'un très grand soutien et qui a cru en moi et m'a convaincu de poursuivre mon rêve de devenir ingénieure lorsque moi-même je frôlais l'abondons.

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Modélisation mathématique du AM2</b>	<b>9</b>
1.1	Le modèle AM2	9
1.1.1	Définition	9
1.1.2	Les étapes du modèle AM2	9
1.2	Le modèle mathématique du AM2	12
1.2.1	Les équations dynamiques du modèle AM2	12
1.2.2	Les équilibres du modèle AM2	13
1.2.3	Stabilité des points d'équilibres	15
1.2.4	Points d'équilibres hyperboliques	16
1.3	Résultats de simulations du AM2	16
<b>2</b>	<b>Observateurs appliqués au AM2</b>	<b>20</b>
2.1	Observabilité du modèle AM2	20
2.2	Observateurs appliqués au AM2	21
2.2.1	Observateur Asymptotique	21
2.2.2	Observateur Invariant	25
2.2.3	Invariance du modèle AM2	25
2.2.4	Construction du pré-observateur invariant	25
2.3	Résultats des simulations	26
2.3.1	Observateur Asymptotique	26
2.3.2	Observateur Invariant	27
<b>3</b>	<b>Observateur non linéaire à dynamique d'erreur linéaire appliqué au modèle AM2</b>	<b>30</b>
3.1	Observateur de type Luenberger appliqué au AM2	30
3.2	Résultats de simulations	37
3.3	Discussion autour de la robustesse	40
3.4	Étude comparative	42

# Liste des tableaux

1.1	En cas de lessivage de $x_1$ . . . . .	16
1.2	En cas de non lessivage de $x_1$ . . . . .	16
1.3	Paramètres du AM2 . . . . .	16
1.4	Conditions initiales du AM2 . . . . .	17
2.1	Conditions initiales de l'observateur asymptotique . . . . .	26
2.2	Conditions initiales de l'observateur invariant . . . . .	28
2.3	Gains de l'observateur invariant . . . . .	28
3.1	Conditions initiales de l'observateur de type Luenberger . . . . .	37
3.2	Gains de l'observateur de type Luenberger . . . . .	37

# Table des figures

1.1	Cinétique de Monod	10
1.2	Cinétique de Haldane	11
1.3	Fonctionnement biochimique du AM2	12
1.4	Taux de dilution $D$	17
1.5	Concentration du substrat $s_1$	17
1.6	Concentration de la biomasse $x_1$	18
1.7	Concentration du substrat $s_2$	18
1.8	Concentration de la biomasse $x_2$	19
2.1	La concentration de la biomasse $x_1$ et son estimation $\hat{x}_1$ et son erreur	27
2.2	La concentration de la biomasse $x_2$ et son estimation $\hat{x}_2$ et son erreur	27
2.3	La concentration de la biomasse $x_1$ , son estimation et son erreur	28
2.4	La concentration de la biomasse $x_2$ , son estimation et son erreur	28
3.1	Concentration de la biomasse $x_1$ et son estimation pour $\beta = 0.2$	38
3.2	Erreur correspondante à la biomasse $x_1$	38
3.3	Concentration de la biomasse $x_2$ et son estimation pour $\gamma = 10$	39
3.4	Erreur correspondante à la biomasse $x_2$	39
3.5	Concentration de la biomasse $x_1$ avec perturbation sur la sortie et son erreur d'estimation	40
3.6	Concentration de la biomasse $x_2$ avec perturbation sur la sortie et son erreur d'estimation	40
3.7	Concentration de la biomasse $x_1$ avec bruit de mesure et son erreur d'estimation	41
3.8	Concentration de la biomasse $x_2$ avec bruit de mesure et son erreur d'estimation	41
3.9	Concentration de la biomasse $x_1$ et ses estimations sur 50 et 5 jours	42
3.10	Concentration de la biomasse $x_2$ et ses estimations sur 50 et 5 jours	42

# Introduction générale

Dans le domaine des bioprocédés et plus particulièrement la digestion anaérobie, plusieurs modèles ont été conçus afin de décrire concrètement le comportement biologique général du système, l'un des modèles les plus appropriés à cette étude est le modèle AM2. Cependant, comme la plupart des modèles proposés, la connaissance des états dans ce modèle est une tâche complexe nécessitant souvent la conception d'observateurs non linéaires qui constitue à elle seule un domaine de recherche intensive.

Une multitude d'observateurs a été proposée, tels que le filtre de Kalman étendu et l'observateur de Luenberger étendu [5]. Ces deux approches ont été introduites par *Bastin* et *Dochain*. Bien maîtrisées, elles nécessitent qu'une linéarisation du modèle et assurent cependant une convergence locale. Plus tard, *Bastin* et *Dochain* proposèrent une nouvelle approche qui s'intitule « observateur asymptotique » [5] qui selon certaines conditions, permet l'observation de l'état du système sans connaître son modèle cinétique. Bien que captivante, la vitesse de convergence de cette méthode ne peut être réglée contrairement à l'observateur de Luenberger et dépend aussi du taux de dilution.

Bien que ce type d'observateur est destiné dès le départ à l'étude des systèmes simples, *Chain* [6] l'a étendu pour l'étude de systèmes complexes. Ces observateurs présentent plusieurs avantages, dont la simplicité de leur conception et la préservation de l'aspect non linéaire du système, garantissant ainsi la stabilité et la convergence si les entrées sont persistantes et limitées. Cependant, ces observateurs présentent une faible robustesse vu leur dépendance au changement de coordonnées et aux coefficients stœchiométriques. Afin de surmonter ces problèmes, *Gouzé* et *Al* [7] et [8] les généralisèrent en concevant les observateurs asymptotiques robustes doté d'une vitesse de convergence partiellement réglable.

Certains auteurs proposèrent un observateur sous le nom d'observateur à grand gain [11], basé sur un changement non linéaire de coordonnées. Cependant, cet observateur présente une sensibilité aux bruits de mesure.

Un autre observateur a été utilisé connu sous le nom d'observateur par intervalles [9] et [10]. Composés de deux observateurs où l'un observe la limite inférieure

et l'autre la limite supérieure de l'état, sous une propriété forte appelé coopérativité. Cependant, la connaissance des limites d'incertitudes de cet observateur est primordiale.

Une nouvelle approche de synthétiser des observateurs non linéaires basée sur les groupes de Lie de symétries ont été développés par *Rouchon, Bonnabel* et *Martin* [12]. Ce type d'observateur, appelé observateurs invariants, peuvent être construits dans la forme canonique et ont une forme générale de gain. Ces observateurs ont été appliqués aux systèmes Lagrangiens, réacteurs exothermiques chimiques, navigation inertielle et réacteur de polymérisation [14], [15], [16], [17] et [12]. Ces observateurs ont récemment été appliqués sur des modèles de bioprocédés par [18].

Ce travail est une approche scientifique pour la conception d'observateurs pour un modèle précis de la digestion anaérobie, le AM2. Ce mémoire est présenté de la manière suivante :

Le premier chapitre consiste en une modélisation mathématique ainsi qu'une analyse du modèle AM2 choisit suivi de résultats de simulation.

Le deuxième chapitre est consacré à quelques applications d'observateurs déjà conçus pour le modèle AM2.


Le troisième chapitre est dédié à la synthèse d'un observateur non linéaire à dynamique d'erreur linéaire pour le modèle AM2.

Enfin le dernier chapitre présentera une conclusion sur les résultats obtenus ainsi que quelques perspectives.



# Chapitre 1

## Modélisation mathématique du AM2

 Afin de synthétiser un observateur, il est fondamental de comprendre le fonctionnement général du système original. Dans ce chapitre, nous présenterons le modèle AM2 munis d'une analyse mathématique ainsi que les simulations de ce modèle.

### 1.1 Le modèle AM2

#### 1.1.1 Définition

C'est un modèle de la digestion anaérobie décrite en deux étapes : l'**acidogenèse** et la **méthanogénèse**, il est basé sur l'hypothèse que les populations bactériennes de la digestion anaérobie sont divisées en deux principaux groupes avec des caractéristiques homogènes. Le modèle AM2 est décrit comme un modèle adapté pour le processus de la digestion anaérobie, puisqu'il prend en compte l'accumulation des acides gras volatils (*AGV*) dans le bioréacteur provoquant la déstabilisation du processus, un phénomène connu sous le nom de " déstabilisation des digesteurs anaérobies " [13]. Le modèle AM2 a été développé dans le cadre du projet européen AMOCO [4].

#### 1.1.2 Les étapes du modèle AM2

Le modèle AM2 comprend deux étapes et deux populations bactériennes selon la figure (1.3) :

## Acidogénèse

Le consortium de bactéries acidogènes  $x_1$  transforme la matière organique  $s_1$  en acides gras volatils  $AGV$   $s_2$  composés d'acétate, propionate et butyrate et en dioxyde de carbone  $CO_2$  selon le schéma réactionnel suivant [1] :



où  $r_1$  est la vitesse de réaction décrite selon l'équation  $r_1 = \mu_1(s_1)x_1$  telle que  $\mu_1(s_1)$  est le taux de croissance spécifique de  $x_1$  sur  $s_1$  qui suit la cinétique de **Monod** suivante :

$$\mu_1(s_1) = \mu_{1,max} \frac{s_1}{s_1 + K_1} \quad (1.1.2)$$

Notons :

- $\mu_{1,max}$  est le taux de croissance maximum de  $x_1$  sur  $s_1$  mesuré en ( $jour^{-1}$ ).
- $K_1$  est la constante de demi-saturation associée à  $s_1$ .

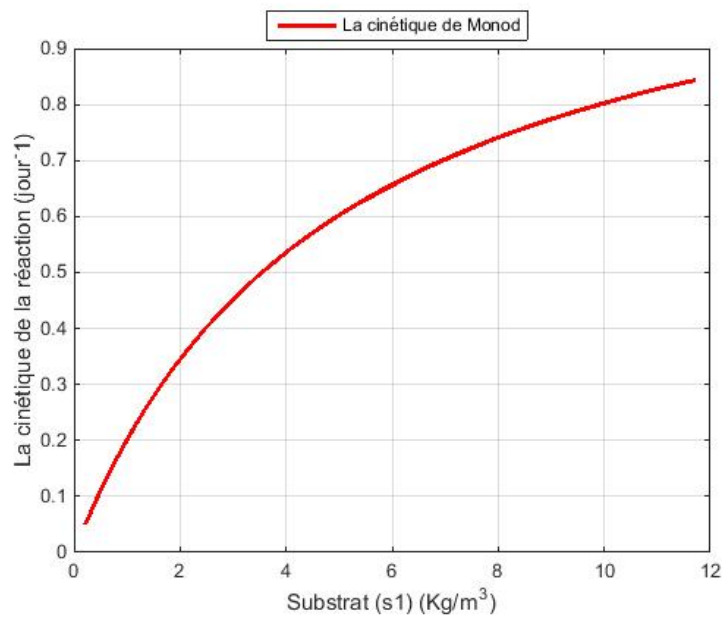


FIGURE 1.1 – Cinétique de Monod

## Méthanogénèse

Le consortium de bactéries méthanogènes  $x_2$  transforme les  $AGV$   $s_2$  supposés se comporter comme l'acétate en méthane  $CH_4$  et dioxyde de carbone  $CO_2$  selon le schéma réactionnel suivant [1] :



où  $r_2$  est la vitesse de réaction décrite selon l'équation  $r_2 = \mu_2(s_2)x_2$  telle que  $\mu_2(s_2)$  est le taux de croissance spécifique de  $x_2$  sur  $s_2$  qui suit la cinétique de **Haldane** suivante :

$$\mu_2(s_2) = \mu_{2,max} \frac{s_2}{\frac{s_2^2}{K_i} + s_2 + K_2} \quad (1.1.4)$$

Notons :

- $\mu_{2,max}$  est le taux de croissance maximum de  $x_2$  sur  $s_2$  mesuré en ( $jour^{-1}$ ).
- $K_2$  est la constante de demi-saturation associée à  $s_2$ .
- $K_i$  est la constante d'inhibition associée à  $s_2$ .

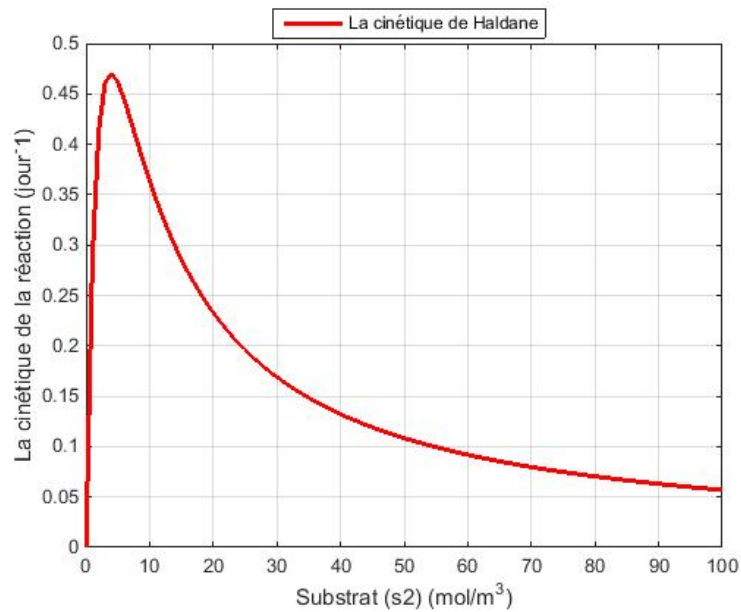


FIGURE 1.2 – Cinétique de Haldane

La cinétique de Haldane permet de modéliser l'inhibition des méthanogènes par l'accumulation des *AGV*.

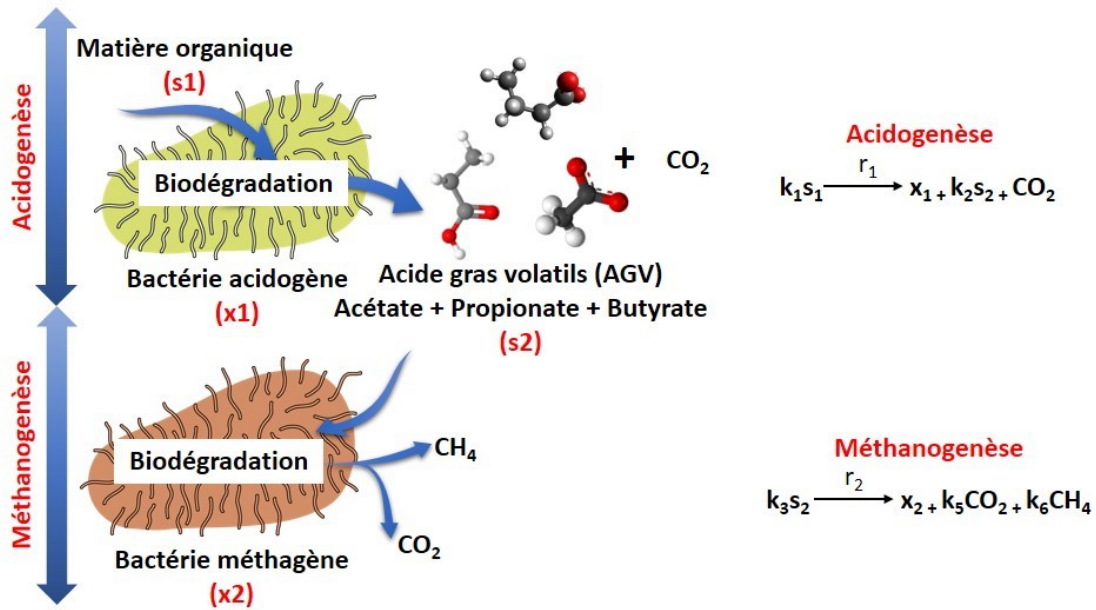


FIGURE 1.3 – Fonctionnement biochimique du AM2

## 1.2 Le modèle mathématique du AM2

### 1.2.1 Les équations dynamiques du modèle AM2

Le modèle AM2 à deux étapes proposé dans la littérature considère 6 équations différentielles contenant 6 variables d'état [2], le vecteur d'état est noté  $\xi$  avec  $\xi = [s_1, x_1, s_2, x_2, z, c]^T$ . Cependant, dans ce travail ne nous considérerons pas les variables  $z$  et  $c$  désignant la concentration de l'alcalinité et la concentration du carbone inorganique respectivement. Ainsi, nous notons  $\xi = [s_1, x_1, s_2, x_2]^T$  le vecteur des variables d'état où :

- $s_1$  désigne la concentration de la matière organique.
- $x_1$  désigne la concentration de la biomasse acidogène.
- $s_2$  désigne la concentration des acides gras volatils (AGV).
- $x_2$  désigne la concentration de la biomasse méthanogène.

Les concentrations citées ci-dessus sont toutes mesurées en ( $g/L$ ) à l'instant  $t$ .

En se basant sur les schémas réactionnels (1.1.1) et (1.1.3) et en utilisant le

bilan de masse [5], le modèle AM2 réduit de dimension 4 s'écrit sous la forme :

$$\begin{cases} \dot{s}_1 = D(t)(s_{1in} - s_1) - k_1\mu_1(s_1)x_1 \\ \dot{x}_1 = [\mu_1(s_1) - \alpha D(t)]x_1 \\ \dot{s}_2 = D(t)(s_{2in} - s_2) + k_2\mu_1(s_1)x_1 - k_3\mu_2(s_2)x_2 \\ \dot{x}_2 = [\mu_2(s_2) - \alpha D(t)]x_2 \end{cases} \quad (1.2.1)$$

Nous rappelons que :

- $D(t)$  désigne le taux de dilution mesuré en  $(L/h)$ .
- $s_{1in}$  désigne la concentration de  $s_1$  dans l'alimentation mesurée en  $(Kg/m^3)$ .
- $s_{2in}$  désigne la concentration de  $s_2$  dans l'alimentation mesurée en  $(mol/m^3)$ .
- $k_1$  désigne le rendement de dégradation de  $s_1$  par  $x_1$  mesuré en  $(Kg\ COD/Kgx_1)$ .
- $k_2$  désigne le rendement de production de  $s_2$  par  $x_1$  mesuré en  $(mol\ VFA/Kgx_1)$ .
- $k_3$  désigne le rendement de dégradation de  $s_2$  par  $x_2$  mesuré en  $(mol\ VFA/Kgx_2)$ .
- $\mu_1(\cdot)$  est la cinétique de Monod citée en (1.1.2).
- $\mu_2(\cdot)$  est la cinétique de Haldane citée en (1.1.4).

Nous rappelons aussi que  $\alpha$  est un paramètre représentant la fraction de la biomasse non retenue dans le bioréacteur avec  $\alpha \in [0, 1]$ . Dans ce travail, nous considérons  $\alpha = 1$ .

## 1.2.2 Les équilibres du modèle AM2

La condition de stationnarité des équations dynamiques de (1.2.1), s'écrit de manière générale comme l'annulation des dérivées :

$$\dot{s}_1 = 0 \quad (1.2.2)$$

$$\dot{x}_1 = 0 \quad (1.2.3)$$

$$\dot{s}_2 = 0 \quad (1.2.4)$$

$$\dot{x}_2 = 0 \quad (1.2.5)$$

En utilisant l'équation (1.2.3), nous avons l'égalité suivante :

$$[\mu_1(s_1) - D(t)]x_1 = 0 \quad (1.2.6)$$

Ainsi nous obtenons :

$$x_1^* = 0 \quad (1.2.7)$$

En utilisant l'équation (1.2.5), nous avons l'égalité suivante :

$$[\mu_2(s_2) - D(t)]x_2 = 0 \quad (1.2.8)$$

Ainsi nous obtenons :

$$x_2^* = 0 \quad (1.2.9)$$

En remplaçant (1.2.7) et (1.2.9) respectivement dans (1.2.2) et (1.2.4) nous obtenons :

$$s_1^* = s_{1in} \quad (1.2.10)$$

et

$$s_2^* = s_{2in} \quad (1.2.11)$$

Nous obtenons ainsi le point d'équilibre toujours existant

$$E_1^0 = (s_{1in}, 0, s_{2in}, 0) \quad (1.2.12)$$

De la même manière, en remplaçant (1.2.7) dans (1.2.2) et (1.2.4), ainsi que l'égalité  $s_2^* = \mu_2^{-1}(D) = \lambda_2^i$  en (1.2.4) nous obtenons :

$$x_2^i = \frac{1}{k_3}(s_{2in} - \lambda_2^i) \quad (1.2.13)$$

Ainsi on obtient les deux équilibres

$$E_1^i = (s_{1in}, 0, \lambda_2^i, x_2^i) i = 1, 2 \quad (1.2.14)$$

qui existe si et seulement si  $s_{2in} > \lambda_2^i$

Considérons maintenant l'égalité  $s_1^* = \mu_1^{-1}(D) = \lambda_1$ , en la remplaçant dans (1.2.2) nous obtenons :

$$x_1^* = \frac{1}{k_1}(s_{1in} - \lambda_1) \quad (1.2.15)$$

En remplaçant (1.2.9) et l'équilibre  $x_1^*$  dans (1.2.4) on obtient :

$$s_{2in}^* = s_{2in} + \frac{k_2}{k_1}(s_{1in} - \lambda_1) \quad (1.2.16)$$

Ainsi, nous obtenons l'équilibre

$$E_2^0 = (\lambda_1, x_1^*, s_{2in}^*, 0) \quad (1.2.17)$$

qui existe si et seulement si  $s_{1in} > \lambda_1$

Considérons maintenant l'égalité  $\mu_1(s_1) = D$  et  $\mu_2(s_2) = D$ , nous obtenons deux autres équilibres :

$$E_2^i = (\lambda_1, x_1^*, \lambda_2^i, x_2^{i*}) \quad (1.2.18)$$

où

$$x_2^{i*} = \frac{1}{k_3}[(s_{2in} - \lambda_2^i) + \frac{k_2}{k_1}(s_{1in} - \lambda_1)] \quad (1.2.19)$$

qui existe si et seulement si  $s_{1in} > \lambda_1$  et  $s_{2in} > \lambda_2$

### 1.2.3 Stabilité des points d'équilibres

Afin d'étudier la stabilité des points d'équilibres, nous devons linéariser le système en son point d'équilibre. La matrice Jacobienne du système est triangulaire par bloc de la forme :

$$J = \begin{bmatrix} A & 0 \\ C & B \end{bmatrix}$$

avec

$$A = \begin{bmatrix} -D - k_1\mu_1'(s_1)x_1 & -k_1\mu_1(s_1) \\ \mu_1'(s_1)x_1 & \mu_1(s_1) - D \end{bmatrix}$$

et

$$B = \begin{bmatrix} -D - k_3\mu_2'(s_2)x_2 & -k_3\mu_2(s_2) \\ \mu_2'(s_2)x_2 & \mu_2(s_2) - D \end{bmatrix}$$

Donc les valeurs propres de  $J$  sont les valeurs propres de  $A$  et  $B$ . Afin de s'assurer de la stabilité du système nous utiliserons la condition de stabilité citée dans la définition 1 (**voir Annexe**).

## 1.2.4 Points d'équilibres hyperboliques

L'existence et la stabilité des points d'équilibres dépend des positions relatives à  $s_{1in}$ ,  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2^1$ ,  $\lambda_2^2$ ,  $s_{2in}$  et  $s_{2in}^*$ . Dans le cas hyperbolique, où la matrice Jacobienne a des valeurs propres de parties réelles non nulles, l'existence et la stabilité des points d'équilibres sont résumés dans les tableaux suivants :

$s_{1in} < \lambda_1$	$E_1^0$	$E_1^1$	$E_1^2$
$s_{2in} < \lambda_2^1$	$S$		
$\lambda_2^1 < s_{2in} < \lambda_2^2$	$I$	$S$	
$\lambda_2^2 < s_{2in}$	$S$	$S$	$I$

TABLE 1.1 – En cas de lessivage de  $x_1$

$s_{1in} > \lambda_1$	$E_1^0$	$E_1^1$	$E_1^2$	$E_2^0$	$E_2^1$	$E_2^2$
$s_{2in}^* < \lambda_2^1$	$I$			$S$		
$s_{2in} < \lambda_2^1 < s_{2in}^* < \lambda_2^2$	$I$			$I$	$S$	
$s_{2in} < \lambda_2^1 < \lambda_2^2 < s_{2in}^*$	$I$			$S$	$S$	$I$
$\lambda_2^1 < s_{2in} < s_{2in}^* < \lambda_2^2$	$I$	$I$		$I$	$S$	
$\lambda_2^1 < s_{2in} < \lambda_2^2 < s_{2in}^*$	$I$	$I$		$S$	$S$	$I$
$\lambda_2^1 < \lambda_2^2 < s_{2in}$	$I$	$I$	$I$	$S$	$S$	$I$

TABLE 1.2 – En cas de non lessivage de  $x_1$

## 1.3 Résultats de simulations du AM2

Les simulations ont été réalisées en considérant les valeurs des paramètres citées dans [4] par le tableau ci-dessous :

Paramètres	Valeurs	unités
$s_{1in}$	15	$Kg/m^3$
$s_{2in}$	80	$mol/m^3$
$k_1$	6.6	$Kg\ COD/Kg\ x_1$
$k_2$	7.8	$mol\ VFA/Kg\ x_1$
$k_3$	611.2	$mol\ VFA/Kg\ x_2$
$\mu_{1max}$	1.2	$jour^{-1}$
$\mu_{2max}$	0.69	$jour^{-1}$
$K_1$	4.95	$Kg\ COD/m^3$
$K_2$	9.28	$mol\ VFA/m^3$
$K_i$	400	$(mol\ VFA/m^3)^{\frac{1}{2}}$

TABLE 1.3 – Paramètres du AM2



Et les conditions initiales du modèle AM2 suivantes :

	$s_1(0)$ (Kg/m <sup>3</sup> )	$x_1(0)$ (Kg/m <sup>3</sup> )	$s_2(0)$ (mol/m <sup>3</sup> )	$x_2(0)$ (Kg/m <sup>3</sup> )
Valeurs	3	0.5	15	0.12

TABLE 1.4 – Conditions initiales du AM2

Nous considérons le taux de dilution suivant :

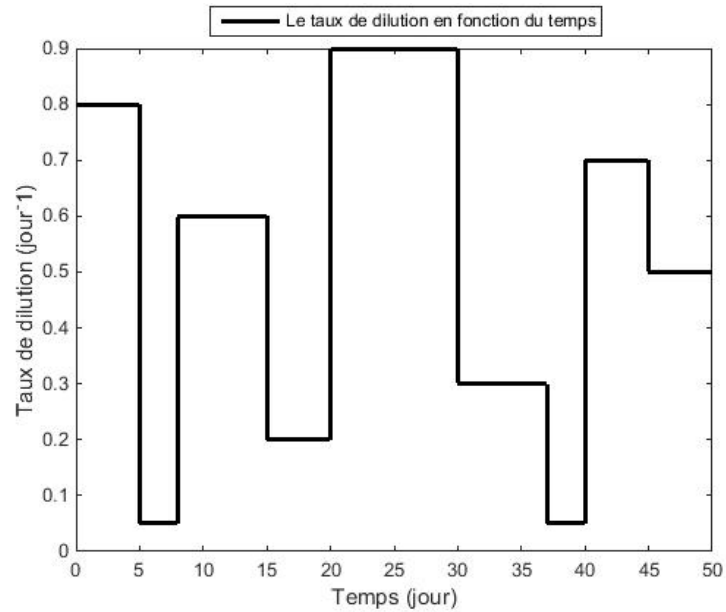


FIGURE 1.4 – Taux de dilution  $D$

Ainsi, nous obtenons les résultats suivants :

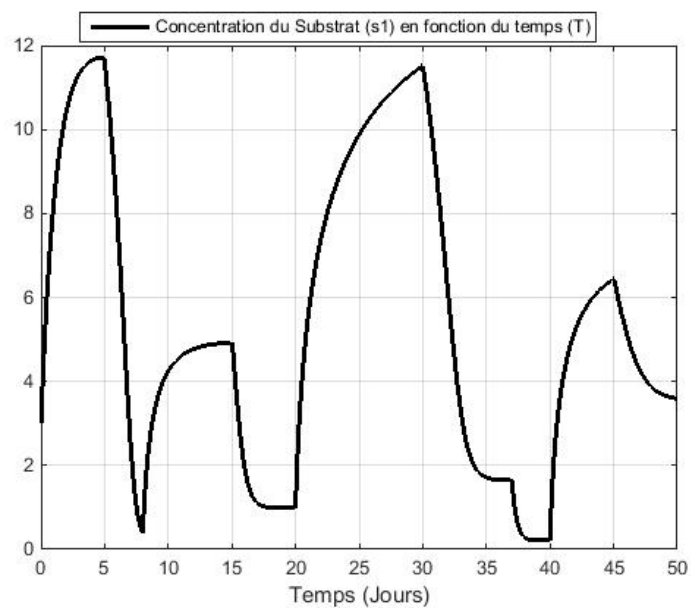


FIGURE 1.5 – Concentration du substrat  $s_1$

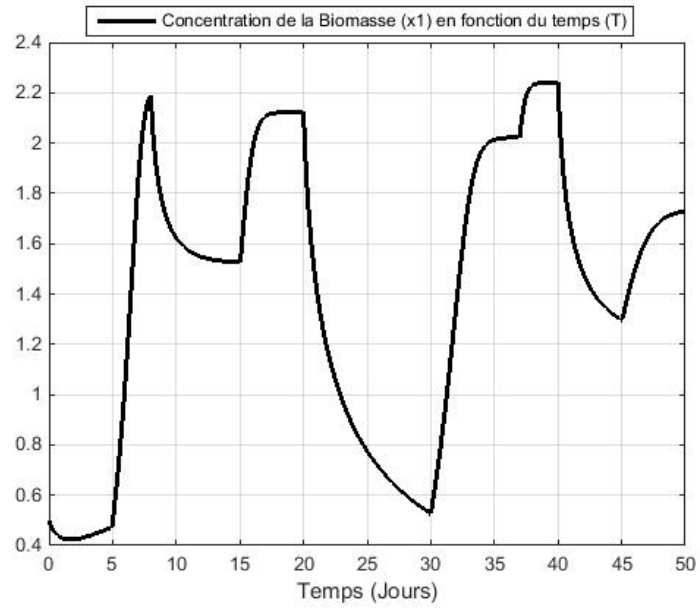


FIGURE 1.6 – Concentration de la biomasse  $x_1$

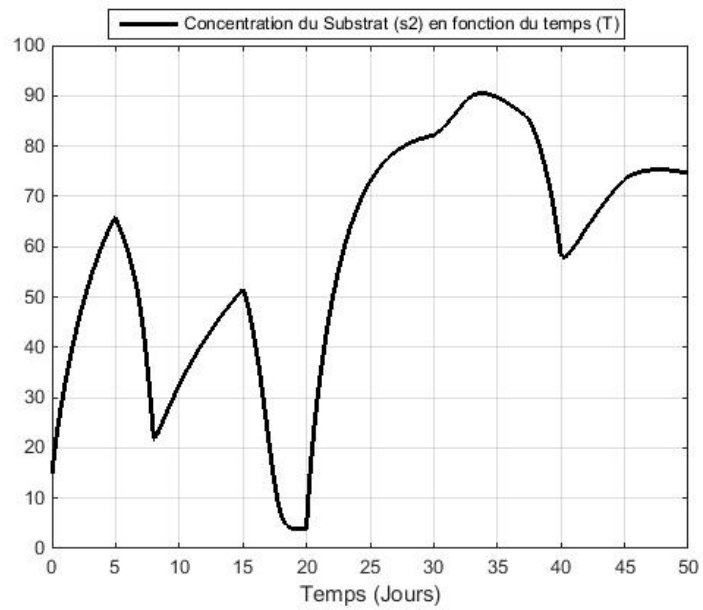


FIGURE 1.7 – Concentration du substrat  $s_2$

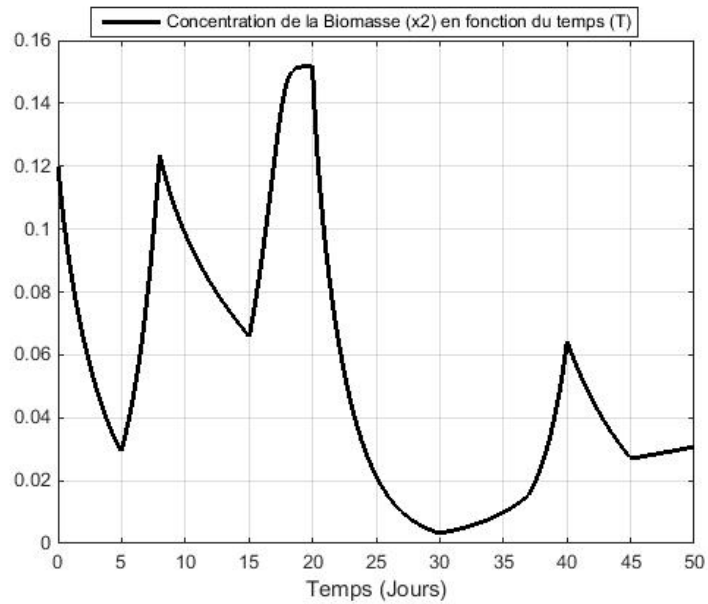


FIGURE 1.8 – Concentration de la biomasse  $x_2$

Les graphes (1.5) et (1.6) représentent respectivement la concentration du substrat  $s_1$  et la concentration de la biomasse  $x_1$  en fonction du temps (*jour*). Il existe une corrélation entre ces deux graphes : plus la concentration du substrat  $s_1$  diminue plus la concentration de la biomasse  $x_1$  augmente et vis versa, ainsi la concentration du substrat  $s_1$  est inversement proportionnelle à la concentration de la biomasse  $x_1$ .

Interprétation biologique : Pendant l'étape de l'acidogénèse, le consortium de bactéries acidogènes  $x_1$  utilise la matière organique  $s_1$  afin de la transformer en Acide Gras Volatile  $s_2$ .

Les graphes (1.7) et (1.8) représentent respectivement la concentration du substrat  $s_2$  et la concentration de la biomasse  $x_2$  en fonction du temps (*jour*). Il existe une corrélation entre ces deux graphes : plus la concentration du substrat  $s_2$  diminue plus la concentration de la biomasse  $x_2$  augmente et vis versa, ainsi la concentration du substrat  $s_2$  est inversement proportionnelle à la concentration de la biomasse  $x_2$ .

Interprétation biologique : Pendant l'étape de la méthanogène, le consortium de bactéries méthanogènes  $x_2$  utilise la matière organique  $s_2$  afin de la transformer en méthane  $CH_4$  et dioxyde de carbone  $CO_2$ .

## Chapitre 2

# Observateurs appliqués au AM2

Dans le modèle du AM2, l'accès aux variables d'état est une tâche complexe nécessitant souvent des capteurs inexistants. Afin de résoudre cette problématique, des observateurs sont synthétisés. Dans ce chapitre, nous nous intéresserons à quelques observateurs synthétisés pour le modèle AM2. Nous présenterons également les résultats obtenus suite aux simulations afin de pouvoir faire une comparaison entre ces observateurs et celui synthétisé dans le chapitre 3. Mais d'abord, nous vérifions l'observabilité du AM2.

Dans ce travail, nous considérons la sortie du modèle AM2, le vecteur :

$$[y_1 y_2]^T = [s_1 s_2]^T$$

### 2.1 Observabilité du modèle AM2

Afin de construire un observateur pour le modèle AM2, il est fondamental de s'assurer de son observabilité. Ainsi, cette dernière peut être démontrée de plusieurs manières [4], nous présentons une des démonstrations :

Tout d'abord, nous définissons l'espace d'observabilité :

$$O(h) = \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ \dot{s}_1 \\ \dot{s}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ D(t)(s_{1in} - s_1) - k_1\mu_1(s_1)x_1 \\ D(t)(s_{2in} - s_2) + k_2\mu_1(s_1)x_1 - k_3\mu_2(s_2)x_2 \end{bmatrix}$$

Ainsi, nous calculons le déterminant de la matrice d'observabilité  $dO(h)$  présentée

dans l' **Annexe** :

$$\det(dO(h)) = k_1 k_3 \mu_{max1} \mu_{max2} \frac{s_1}{s_1 + K_1} \frac{s_2}{\frac{s_2^2}{K_i} + s_2 + K_2}$$

Ce déterminant est toujours non nulle car  $s_1$  et  $s_2$  sont des quantités strictement positives [4]. Ainsi, le rang de la matrice d'observabilité est complet :  $Rang(dO(h)) = 4$  et donc le système (1.2.1) est observable.

## 2.2 Observateurs appliqués au AM2

### 2.2.1 Observateur Asymptotique

En 1990, **Bastin** et **Dochain** proposèrent pour la première fois l'observateur asymptotique [5] pour des systèmes relativement simples. Deux ans plus tard, **Chain** proposa une extension de l'observateur [6] pour des systèmes plus complexes. La synthèse de cet observateur est assez simple dans le sens où elle ne nécessite guère une connaissance du modèle cinétique, assurant ainsi une stabilité et convergence si les entrées sont persistantes et bornées. Cependant, cette approche présente des inconvénients dont l'incapacité de régler la vitesse de convergence. De plus, elle présente une dépendance aux coefficients stoechiométriques et est donc peu robuste. Plus tard, **Gouzé** et **Al** [7] et [8] proposèrent un observateur plus robuste avec une vitesse de convergence partiellement réglable. Considérons le système d'équations différentielles :

$$\dot{\xi}(t) = A(t)\xi(t) + C\phi(\xi(t), t) + B(t) \quad (2.2.1)$$

Où :

- $A(t) \in \mathbf{R}^{n \times n}$  représente la matrice d'état.
- $\xi(t) \in \mathbf{R}^n$  représente le vecteur d'état tel que  $\xi(t) = [x_1 \ x_2 \ s_1 \ s_2]^T$ .
- $C \in \mathbf{R}^{n \times r}$  représente la matrice des coefficients stoechiométriques.
- $\phi(\xi(t), t) \in \mathbf{R}^r$  représente le vecteur de non linéarité.
- $B(t) \in \mathbf{R}^n$  représente la matrice des entrées du système.

Afin de synthétiser un observateur asymptotique, le système dynamique (2.2.1) doit vérifier aussi les hypothèses suivantes :

**Hypothèse H1**

- 1-  $\phi(\xi(t), t)$  est inconnu.
- 2-  $A(t)$  est connue pour chaque  $t \geq 0$ .
- 3-  $m$  variables d'états sont mesurées en ligne.

4-  $C$  est connue.

5-  $A(t)$  est bornée tel que  $A^- \leq A(t) \leq A^+$ ,  $A^-$  et  $A^+$  sont des matrices constantes.

6-  $\xi(0)$  sont inconnues mais bornées telles que  $\xi(0)^- \leq \xi(0) \leq \xi(0)^+$ .

7-  $B(t)$  est inconnue mais bornée telle que  $B(t)^- \leq B(t) \leq B(t)^+$ .

L'hypothèse  $H1.3$  suppose que l'espace d'état peut être divisé de telle sorte que (2.2.1) s'écrit sous la forme :

$$\begin{aligned}\dot{\xi}_1(t) &= A_{11}(t)\xi_1(t) + A_{12}(t)\xi_2(t) + C_1\phi(\xi(t), t) + B_1(t) \\ \dot{\xi}_2(t) &= A_{21}(t)\xi_1(t) + A_{22}(t)\xi_2(t) + C_2\phi(\xi(t), t) + B_2(t)\end{aligned}\tag{2.2.2}$$

Où  $m$  variables mesurées sont regroupées dans  $\xi_2(t)$  tel que  $\dim(\xi_2(t)) = m$  et les variables estimées sont regroupées dans  $\xi_1(t)$  tel que  $\dim(\xi_1(t)) = m - n = s$ .

Aussi, les matrices  $A_{11} \in \mathbf{R}_{s \times s}$ ,  $A_{12} \in \mathbf{R}_{s \times m}$ ,  $A_{21} \in \mathbf{R}_{m \times s}$ ,  $A_{22} \in \mathbf{R}_{m \times m}$ ,  $C_1 \in \mathbf{R}_{s \times r}$ ,  $C_2 \in \mathbf{R}_{m \times r}$ ,  $B_1 \in \mathbf{R}_s$ ,  $B_2 \in \mathbf{R}_m$  sont respectivement les partitions de  $A(t)$ ,  $C$  et  $B(t)$ .

Ainsi, nous définissons le système (2.2.1) pour le modèle AM2 :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{s}_1 \\ \dot{s}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -D(t) & 0 & \vdots & 0 & 0 \\ 0 & -D(t) & \vdots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \vdots & -D(t) & 0 \\ 0 & 0 & \vdots & 0 & -D(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ s_1 \\ s_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \dots & \dots \\ -k_1 & 0 \\ k_2 & -k_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu_1 x_1 \\ \mu_2 x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ D(t)s_{1in} \\ D(t)s_{2in} \end{bmatrix}$$

Selon l'explication précédente  $\phi(\xi(t), t)$  est inconnu, ainsi la synthèse de l'observateur asymptotique est faite de telle façon que les états non mesurés  $(x_1, x_2)$  sont reconstruits à partir des états mesurés  $(s_1, s_2)$ . Ainsi, nous cherchons une combinaison linéaire adéquate des variables d'état  $w(t) = N\xi(t)$  où  $N \in \mathbf{R}_{s \times n}$ , tel que

$$NC = 0\tag{2.2.3}$$

**Hypothèse  $H2$**

$$\text{Rang}(C_2) = c\tag{2.2.4}$$

De cette hypothèse découle les propriétés suivantes :

**Propriété 1**  $m$  et  $s$  sont tels que :  $m \geq c$  donc  $s \leq n - c$ .

**Propriété 2**  $C_1$  est écrite sous la forme d'une combinaison linéaire de  $C_2$  telle que  $C_1 = KC_2$  avec  $K \in \mathbf{R}_{s \times m}$ .

**Propriété 3** La solution non triviale de (2.2.3) admet au moins  $s$  colonnes de  $N$  arbitrairement choisies.

Nous définissons  $N$  la matrice telle que  $[N_1 N_2]$  avec  $N_1 \in \mathbf{R}_{s \times s}$ ,  $N_2 \in \mathbf{R}_{s \times m}$ , alors (2.2.3) s'écrit  $N_1 C_1 + N_2 C_2 = 0$  où  $N_1$  est choisie arbitrairement et  $N_2 = -N_1 C_1 C_2^\perp$  où  $C_2^\perp$  est la pseudo-inverse généralisée de  $C_2$  qui vérifie  $C_2 C_2^\perp C_2 = C_2$ .

La matrice pseudo-inverse généralisée du AM2 est définie par le système d'équations suivant :

$$\begin{aligned} -k_1 &= k_1^2 C_{11}^\perp - k_1 k_2 C_{12}^\perp \\ 0 &= k_1 k_3 C_{12}^\perp \\ k_2 &= -k_1 k_2 C_{11}^\perp - k_1 k_3 C_{21}^\perp + k_2^2 C_{12}^\perp - k_2 k_3 C_{22}^\perp \\ -k_3 &= -k_2 k_3 C_{12}^\perp + k_3^2 C_{22}^\perp \end{aligned}$$

Donc la matrice pseudo inverse généralisée du AM2 est définie par les éléments ci-dessous :

$$C_2^\perp = \begin{bmatrix} -\frac{1}{k_1} & 0 \\ \frac{k_1}{k_2} & -\frac{1}{k_3} \\ \frac{1}{k_1 k_3} & \frac{1}{k_3} \end{bmatrix}$$

Nous calculons facilement la matrice  $N_2$  en utilisant l'expression  $N_2 = -N_1 C_1 C_2^\perp$  où  $N_1$  est la matrice identité ( $2 \times 2$ ). Nous obtenons :

$$N_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{k_1} & 0 \\ \frac{k_1}{k_2} & \frac{1}{k_3} \\ \frac{1}{k_1 k_3} & \frac{1}{k_3} \end{bmatrix}$$

Finalement la matrice  $N$  est définie de la façon suivante :

$$N = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \vdots & \frac{1}{k_1} & 0 \\ 0 & 1 & \vdots & \frac{k_1}{k_2} & \frac{1}{k_3} \\ & & & \frac{1}{k_1 k_3} & \frac{1}{k_3} \end{bmatrix}$$

Nous définissons l'observateur asymptotique d'une manière générale en utilisant l'équation ci-dessous :

$$\dot{\hat{w}}(t) = N\dot{\hat{\xi}}(t) \quad (2.2.5)$$

$$\dot{\hat{w}}(t) = NA(t)\hat{\xi}(t) + NC\phi(\hat{\xi}(t), t) + NB(t) \quad (2.2.6)$$

Selon l'équation présentée en (2.2.3) :

$$\dot{\hat{w}}(t) = NA(t)\hat{\xi}(t) + NB(t) \quad (2.2.7)$$

$$\dot{\hat{w}}(t) = (N_1A_{11}(t) + N_2A_{21}(t))\hat{\xi}_1(t) + (N_1A_{12}(t) + N_2A_{22}(t))\hat{\xi}_2(t) + NB(t) \quad (2.2.8)$$

Selon l'équation  $\dot{\hat{w}}(t) = N\dot{\hat{\xi}}(t)$ , l'expression de  $\hat{\xi}_1(t)$  est écrite sous la forme suivante :  $\hat{\xi}_1(t) = N_1^{-1}(\dot{\hat{w}}(t) - N_2\dot{\hat{\xi}}_2(t))$ . En remplaçant cette équation dans (2.2.8), nous obtenons :

$$\begin{aligned} \dot{\hat{w}}(t) &= W(t)\dot{\hat{w}}(t) + \Xi(t)\dot{\hat{\xi}}_2(t) + NB(t) \\ \dot{\hat{w}}(0) &= N\dot{\hat{\xi}}(0) \end{aligned} \quad (2.2.9)$$

avec

$$\begin{aligned} W(t) &= (N_1A_{11}(t) + N_2A_{21}(t))N_1^{-1} \\ \Xi(t) &= N_1A_{12}(t) + N_2A_{22}(t) - W(t)N_2 \end{aligned} \quad (2.2.10)$$

Ainsi après un petit calcul, la matrice  $\Xi$  est une matrice nulle, tandis que  $W(t)$  est la matrice diagonale définie ci-dessous :

$$W(t) = \begin{bmatrix} -D(t) & 0 \\ 0 & -D(t) \end{bmatrix}$$

Finalement, le système (2.2.9) représentant l'observateur asymptotique est écrit sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} \dot{\hat{w}}_1 &= D(t) \left[ -\hat{w}_1 + \frac{s_{1in}}{k_1} \right] \\ \dot{\hat{w}}_2 &= D(t) \left[ -\hat{w}_2 + \frac{s_{1in}k_2}{k_1k_3} + \frac{s_{2in}}{k_3} \right] \end{aligned} \quad (2.2.11)$$

En utilisant l'équation  $\dot{\hat{w}} = N\dot{\hat{\xi}}(t)$ , nous pouvons écrire le système original sous la forme ci-dessous :

$$\begin{aligned} \hat{\xi}_1 &= \hat{x}_1 = \left[ \hat{w}_1 - \frac{s_1}{k_1} \right] \\ \hat{\xi}_2 &= \hat{x}_2 = \left[ \hat{w}_2 - \frac{s_1k_2}{k_1k_3} - \frac{s_2}{k_3} \right] \end{aligned} \quad (2.2.12)$$



## 2.2.2 Observateur Invariant

En 2008, **Rouchon, Bonnabel et Martin** proposèrent un nouveau type d'observateur non linéaire sous le nom observateurs invariants [12]. La synthèse de cet observateur est basée sur la notion systèmes invariant, ces observateurs possèdent une forme canonique et une vitesse de convergence réglable. Ils ont été appliqués sans de nombreux domaines, en particulier sur des système de bioprocédés [18] et [4].

## 2.2.3 Invariance du modèle AM2

Tout d'abord, nous allons choisir quelques variables du système (1.2.1) qui joueront le rôle d'un *contrôle virtuel* dans le but de rendre le système invariant. soit  $u = (s_{1in}, s_{2in}, k, K)$  un contrôle virtuel, où  $s_{1in}, s_{2in}$  sont les seules entrées du système et  $k$  et  $K$  sont des paramètres constantes. Ainsi, le plus grand groupe linéaire qui rend le système (1.2.1) invariant est le groupe des homothéties  $G = (\mathbf{R}^{*+} \times \mathbf{R}^{*+}, \cdot)$  qui agit sur  $(s_1, x_1, s_2, x_2)$  avec 4 paramètres  $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$  où  $\lambda_1 = e^\alpha$ ,  $\lambda_2 = e^\beta$ ,  $\lambda_3 = e^\gamma$  et  $\lambda_4 = e^\delta$  avec  $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbf{R}$ .

## 2.2.4 Construction du pré-observateur invariant

### Fonction scalaire invariante

D'après la définition (**voir Annexe**), nous allons prendre une fonction invariante de la forme

$$J(s_{1,1}, s_2, x_2, s_{1in}, s_{2in}, k_1, k_2, k_3, K_1, K_2, K_i, y_1, y_2) = H\left(\frac{y_1}{s_1}, \frac{y_2}{s_2}\right)$$

### Champs de vecteurs invariants

À partir de la définition (**voir Annexe**), nous avons :

$$w_1(s_1, x_1, s_2, x_2) = a_1 s_1$$

$$w_2(s_1, x_1, s_2, x_2) = a_2 x_1$$

$$w_3(s_1, x_1, s_2, x_2) = a_3 s_2$$

$$w_4(s_1, x_1, s_2, x_2) = a_4 x_2$$

où  $a_1, a_2, a_3$  et  $a_4$  sont des constantes qui joueront le rôle de gain.

## L'observateur

**Théorème 1** Pour (1.2.1), le système :

$$\begin{cases} \dot{\hat{s}}_1 = D(t)(s_{1in} - \hat{s}_1) - k_1\mu(\hat{s}_1, K_1)\hat{x}_1 + a_1\hat{s}_1 \ln\left(\frac{s_1}{\hat{s}_1}\right) \\ \dot{\hat{x}}_1 = [\mu(\hat{s}_1, K_1) - D(t)]\hat{x}_1 + a_2\hat{x}_1 \ln\left(\frac{s_1}{\hat{s}_1}\right) \\ \dot{\hat{s}}_2 = D(t)(s_{2in} - \hat{s}_2) + k_2\mu(\hat{s}_1, K_1)\hat{x}_1 - k_3\mu(\hat{s}_2, K_2)\hat{x}_2 + a_3\hat{s}_2 \ln\left(\frac{s_2}{\hat{s}_2}\right) \\ \dot{\hat{x}}_2 = [\mu(\hat{s}_2, K_2) - D(t)]\hat{x}_2 + a_4\hat{x}_2 \ln\left(\frac{s_2}{\hat{s}_2}\right) \end{cases} \quad (2.2.13)$$

est un observateur. Définissons,  $e_1 = \ln(s_1) - \ln(\hat{s}_1)$ ,  $e_2 = \ln(x_1) - \ln(\hat{x}_1)$ ,  $e_3 = \ln(s_2) - \ln(\hat{s}_2)$ ,  $e_4 = \ln(x_2) - \ln(\hat{x}_2)$ .

La dynamique des erreurs est donnée dans ([4]). Supposons  $a_1 > 0$  et  $a_3 > 0$  assez grands et  $a_2 < 0$  et  $a_4 < 0$  avec  $|a_2|$  et  $|a_4|$  assez grands, alors  $(0, 0, 0, 0)$  est un point d'équilibre localement uniformément asymptotiquement stable.

## 2.3 Résultats des simulations

### 2.3.1 Observateur Asymptotique

Les simulations ont été réalisées en considérant les valeurs des paramètres citées dans (1.3) et les conditions initiales du modèle AM2 citées dans (1.4) et aussi les conditions initiales de l'observateur asymptotique présentées dans le tableau ci-dessous :

	$\hat{w}_1(0)$	$\hat{w}_2(0)$
Valeurs	3.45	0.83

TABLE 2.1 – Conditions initiales de l'observateur asymptotique

Les résultats de simulation sont les suivants :

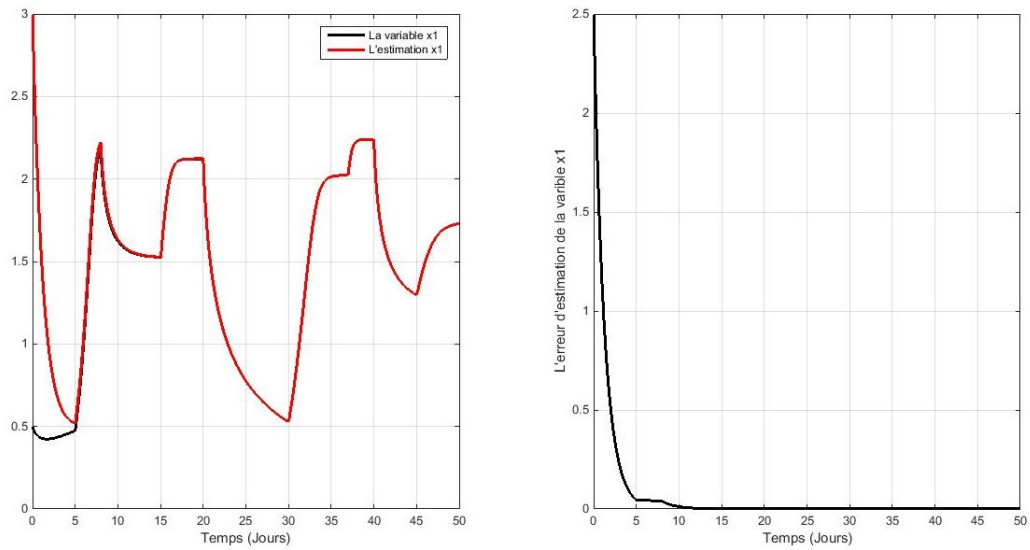


FIGURE 2.1 – La concentration de la biomasse  $x_1$  et son estimation  $\hat{x}_1$  et son erreur

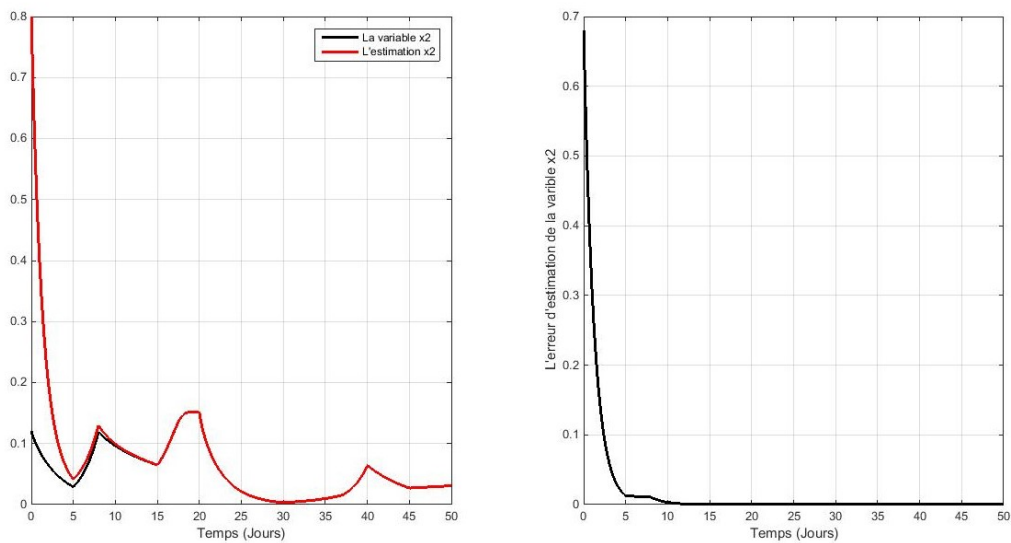


FIGURE 2.2 – La concentration de la biomasse  $x_2$  et son estimation  $\hat{x}_2$  et son erreur

### 2.3.2 Observateur Invariant

Les simulations ont été réalisées en considérant les valeurs des paramètres citées dans (1.3) et les conditions initiales du modèle AM2 citées dans (1.4) et aussi les conditions initiales de l'observateur invariant présentées dans le tableau ci-dessous :

	$\hat{s}_1(0)$	$\hat{s}_2(0)$	$\hat{x}_1(0)$	$\hat{x}_2(0)$
Valeurs	3	3	15	0.5

TABLE 2.2 – Conditions initiales de l'observateur invariant

Ainsi que ses gains :

	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$
Valeurs	30	-225	5	-25

TABLE 2.3 – Gains de l'observateur invariant

Les résultats de simulation sont les suivants :

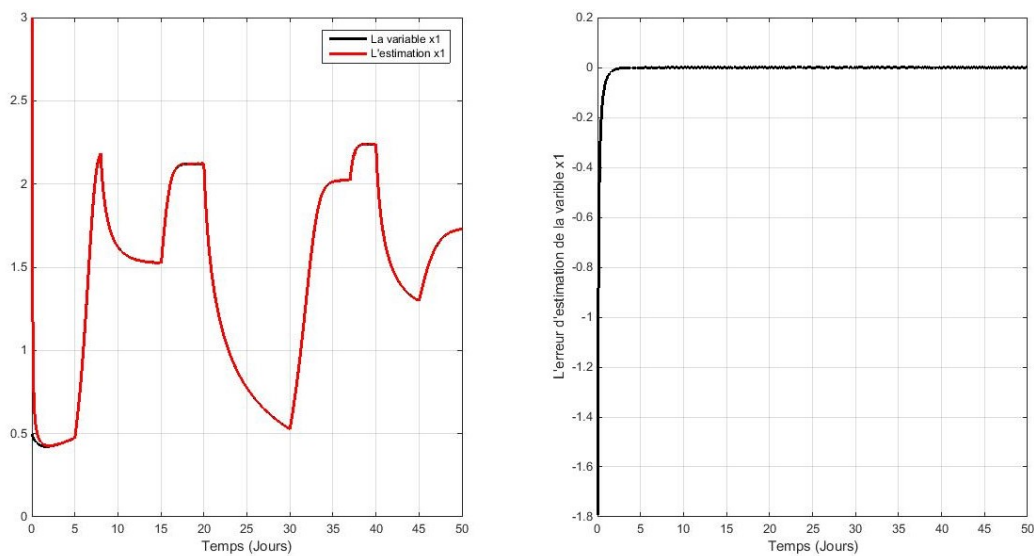


FIGURE 2.3 – La concentration de la biomasse  $x_1$ , son estimation et son erreur

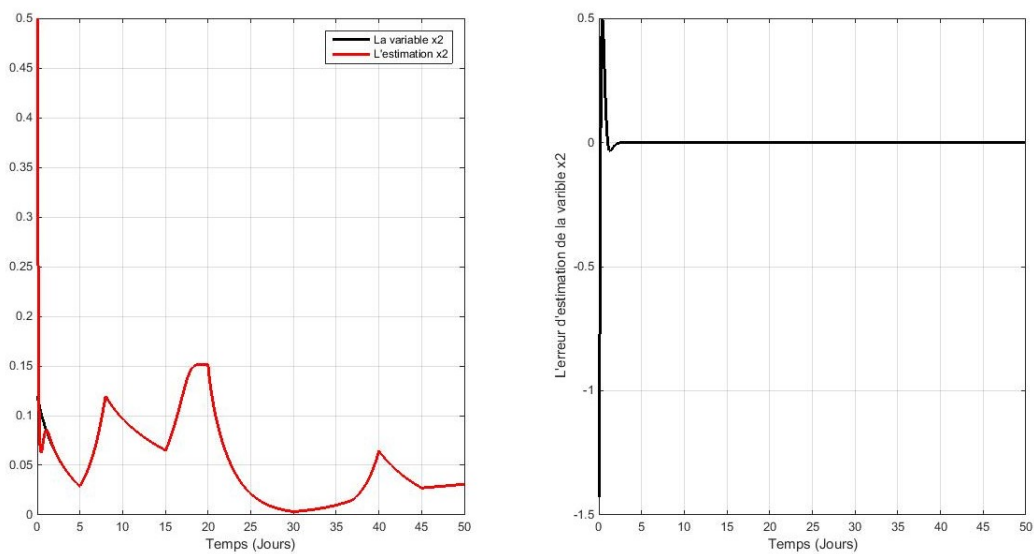


FIGURE 2.4 – La concentration de la biomasse  $x_2$ , son estimation et son erreur

Les figures (2.1), (2.2) représentent la concentration de la biomasse  $x_1$  et son estimation  $\hat{x}_1$  ainsi que son erreur  $E_1$ , la concentration de la biomasse  $x_2$  et son estimation  $\hat{x}_2$  ainsi que son erreur  $E_2$  respectivement en fonction du temps (*jour*).

Nous constatons que l'observateur asymptotique converge après  $t = 5\text{jours}$  avec une erreur qui tend vers 0.

Les figures (2.3), (2.4) représentent la concentration de la biomasse  $x_1$  et son estimation  $\hat{x}_1$  ainsi que son erreur  $E_1$ , la concentration de la biomasse  $x_2$  et son estimation  $\hat{x}_2$  ainsi que son erreur  $E_2$  respectivement en fonction du temps (*jour*).

Nous constatons que l'observateur invariant converge après une journée avec une erreur qui tend vers 0.

## Chapitre 3

# Observateur non linéaire à dynamique d'erreur linéaire appliqué au modèle AM2

Dans le modèle du AM2, la forme de la sortie nous incite à construire un observateur non linéaire à dynamique d'erreur linéaire. Dans la première partie de ce chapitre nous présenterons une synthèse de notre observateur de type Luenberger avec injection de la sortie dans la fonction non linéaire  $\mu(s)$  quelconque. La deuxième partie de ce chapitre comporte une étude comparative entre les observateurs déjà traités dans le chapitre précédent et l'observateur étudié dans ce chapitre.

### 3.1 Observateur de type Luenberger appliqué au AM2

Considérons le système (1.2.1), nous admettons que  $D(t)$  satisfait la **condition de persistance de l'excitation** si et seulement si :

$$\exists T > 0, \forall \varepsilon > 0 \quad \text{tel que} \quad \forall t \geq 0, \int_t^{t+T} D(\tau) d\tau \geq \varepsilon T$$

Aussi, nous admettons que la fonction  $\mu(s)$  satisfait les conditions citées dans [3] où :

- $\mu(s) = 0 \iff s = 0$ ,
- $0 \leq \mu(\cdot) \leq \mu_{max}$ ,
- $\mu(\cdot)$  continue.

Nous proposons un observateur non linéaire de type Luenberger à dynamique

d'erreur linéaire pour le système (1.2.1) sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{\hat{s}}_1 = D(t)(s_{1in} - \hat{s}_1) - k_1\mu_1(s_1)\hat{x}_1 + a_1(s_1 - \hat{s}_1) + a_2(s_2 - \hat{s}_2) \\ \dot{\hat{x}}_1 = [\mu_1(s_1) - D(t)]\hat{x}_1 + a_3(s_1 - \hat{s}_1) + a_4(s_2 - \hat{s}_2) \\ \dot{\hat{s}}_2 = D(t)(s_{2in} - \hat{s}_2) + k_2\mu_1(s_1)\hat{x}_1 - k_3\mu_2(s_2)\hat{x}_2 + a_5(s_1 - \hat{s}_1) + a_6(s_2 - \hat{s}_2) \\ \dot{\hat{x}}_2 = [\mu_2(s_2) - D(t)]\hat{x}_2 + a_7(s_1 - \hat{s}_1) + a_8(s_2 - \hat{s}_2) \end{cases} \quad (3.1.1)$$

Nous précisons que  $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7$  et  $a_8$  sont des paramètres de réglage. Aussi, les erreurs sont définies de la manière suivante  $e_1 = s_1 - \hat{s}_1, e_2 = x_1 - \hat{x}_1, e_3 = s_2 - \hat{s}_2$  et  $e_4 = x_2 - \hat{x}_2$ .

Ainsi, nous calculons la dynamique des erreurs :

**Dynamique de  $e_1$  :**

Elle est exprimée de la manière suivante :

$$\dot{e}_1 = \dot{s}_1 - \dot{\hat{s}}_1$$

Nous remplaçons  $\dot{s}_1$  et  $\dot{\hat{s}}_1$  en utilisant leurs expressions respectives :

$$\dot{e}_1 = D(t)(s_{1in} - s_1) - k_1\mu_1(s_1)x_1 - D(t)(s_{1in} - \hat{s}_1) + k_1\mu_1(s_1)\hat{x}_1 - a_1(s_1 - \hat{s}_1) - a_2(s_2 - \hat{s}_2)$$

Ainsi, nous obtenons :

$$\dot{e}_1 = -D(t)(s_1 - \hat{s}_1) - k_1\mu_1(s_1)(x_1 - \hat{x}_1) - a_1(s_1 - \hat{s}_1) - a_2(s_2 - \hat{s}_2)$$

Donc l'expression de la dynamique de  $e_1$  est :

$$\dot{e}_1 = -(D(t) + a_1)e_1 - k_1\mu_1(s_1)e_2 - a_2e_3$$

**Dynamique de  $e_2$  :**

Elle est exprimée de la manière suivante :

$$\dot{e}_2 = \dot{x}_1 - \dot{\hat{x}}_1$$

Nous remplaçons  $\dot{x}_1$  et  $\dot{\hat{x}}_1$  en utilisant leurs expressions respectives :

$$\dot{e}_2 = [\mu_1(s_1) - D(t)]x_1 - [\mu_1(s_1) - D(t)]\hat{x}_1 - a_3(s_1 - \hat{s}_1) - a_4(s_2 - \hat{s}_2)$$

Ainsi, nous obtenons :

$$\dot{e}_2 = -D(t)(x_1 - \hat{x}_1) + \mu_1(s_1)(x_1 - \hat{x}_1) - a_3(s_1 - \hat{s}_1) - a_4(s_2 - \hat{s}_2)$$

Donc l'expression de la dynamique de  $e_2$  est :

$$\dot{e}_2 = -a_3e_1 + (-D(t) + \mu_1(s_1))e_2 - a_4e_3$$

**Dynamique de  $e_3$  :**

Elle est exprimée de la manière suivante :

$$\dot{e}_3 = \dot{s}_2 - \dot{\hat{s}}_2$$

Nous remplaçons  $\dot{s}_2$  et  $\dot{\hat{s}}_2$  en utilisant leurs expressions respectives :

$$\begin{aligned} \dot{e}_3 = & D(t)(s_{2in} - s_2) + k_2\mu_1(s_1)x_1 - k_3\mu_2(s_2)x_2 - D(t)(s_{2in} - \hat{s}_2) - k_2\mu_1(s_1)\hat{x}_1 \\ & + k_3\mu_2(s_2)\hat{x}_2 - a_5(s_1 - \hat{s}_1) - a_6(s_2 - \hat{s}_2) \end{aligned}$$

Ainsi, nous obtenons :

$$\dot{e}_3 = -D(t)(s_2 - \hat{s}_2) + k_2\mu_1(s_1)(x_1 - \hat{x}_1) - k_3\mu_2(s_2)(x_2 - \hat{x}_2) - a_5(s_1 - \hat{s}_1) - a_6(s_2 - \hat{s}_2)$$

Donc l'expression de la dynamique de  $e_3$  est :

$$\dot{e}_3 = -a_5e_1 + k_2\mu_1(s_1)e_2 - (D(t) + a_6)e_3 - k_3\mu_2(s_2)e_4$$

**Dynamique de  $e_4$  :**

Elle est exprimée de la manière suivante :

$$\dot{e}_4 = \dot{x}_2 - \dot{\hat{x}}_2$$

Nous remplaçons  $\dot{x}_2$  et  $\dot{\hat{x}}_2$  en utilisant leurs expressions respectives :

$$\dot{e}_4 = [\mu_2(s_2) - D(t)]x_2 - [\mu_2(s_2) - D(t)]\hat{x}_2 - a_7(s_1 - \hat{s}_1) - a_8(s_2 - \hat{s}_2)$$

Ainsi, nous obtenons :

$$\dot{e}_4 = -D(t)(x_2 - \hat{x}_2) + \mu_2(s_2)(x_2 - \hat{x}_2) - a_7(s_1 - \hat{s}_1) - a_8(s_2 - \hat{s}_2)$$

Donc l'expression de la dynamique de  $e_4$  est :

$$\dot{e}_4 = -a_7e_1 - a_8e_3 + (-D(t) + \mu_2(s_2))e_4$$

**Théorème 2** Pour le système (1.2.1) le système (3.1.1) est un observateur où  $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7$  et  $a_8$  sont des paramètres de réglage, la dynamique des erreurs est la suivante :

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = -(D(t) + a_1)e_1 - k_1\mu_1(s_1)e_2 - a_2e_3 \\ \dot{e}_2 = -a_3e_1 + (-D(t) + \mu_1(s_1))e_2 - a_4e_3 \\ \dot{e}_3 = -a_5e_1 + k_2\mu_1(s_1)e_2 - (D(t) + a_6)e_3 - k_3\mu_2(s_2)e_4 \\ \dot{e}_4 = -a_7e_1 - a_8e_3 + (-D(t) + \mu_2(s_2))e_4 \end{cases} \quad (3.1.2)$$

Supposons  $a_1 > 0$  et  $a_6 > 0$  assez grands et  $a_3 < 0$  et  $a_8 < 0$  avec  $|a_3|$  et  $|a_8|$  assez grands, alors  $(0, 0, 0, 0)$  est un point d'équilibre de (3.1.2) qui est globalement asymptotiquement stable.



**Preuve.** D'abord, nous réécrivons le système (3.1.2) sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{bmatrix} \dot{e}_1 \\ \dot{e}_2 \\ \dot{e}_3 \\ \dot{e}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(D(t) + a_1) & -k_1\mu_1(s_1) & \vdots & -a_2 & 0 \\ -a_3 & \mu_1(s_1) - D(t) & \vdots & -a_4 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a_5 & k_2\mu_1(s_1) & \vdots & -(D(t) + a_6) & -k_3\mu_2(s_2) \\ -a_7 & 0 & \vdots & -a_8 & \mu_2(s_2) - D(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \end{bmatrix}$$

Nous supposons que  $a_2 = a_4 = a_5 = a_7 = 0$ , ainsi nous réécrivons le système (3.1.2) sous cette forme :

$$\begin{bmatrix} \dot{e}_1 \\ \dot{e}_2 \\ \dot{e}_3 \\ \dot{e}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(D(t) + a_1) & -k_1\mu_1(s_1) & \vdots & 0 & 0 \\ -a_3 & \mu_1(s_1) - D(t) & \vdots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & k_2\mu_1(s_1) & \vdots & -(D(t) + a_6) & -k_3\mu_2(s_2) \\ 0 & 0 & \vdots & -a_8 & \mu_2(s_2) - D(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \end{bmatrix}$$

Aussi, nous réécrivons la dynamique des erreurs sans le taux de dilution  $D(t)$ , pour cela nous posons  $p(t) = \int_0^t D(\tau)d\tau$  et multiplions le système ci-dessus par  $p(t)$ . Ainsi nous obtenons :

**Dynamique de  $e_1$  :**

$$p(t)(\dot{e}_1 + D(t)e_1) = (-a_1e_1 - k_1\mu_1(s_1)e_2)p(t)$$

Donc :

$$p(t)\dot{e}_1 + p(t)D(t)e_1 = -a_1p(t)e_1 - k_1\mu_1(s_1)p(t)e_2$$

**Dynamique de  $e_2$  :**

$$p(t)(\dot{e}_2 + D(t)e_2) = (-a_3e_1 + \mu_1(s_1)e_2)p(t)$$

Donc :

$$p(t)\dot{e}_2 + p(t)D(t)e_2 = -a_3p(t)e_1 + \mu_1(s_1)p(t)e_2$$

**Dynamique de  $e_3$  :**

$$p(t)(\dot{e}_3 + D(t)e_3) = (-k_2\mu_1(s_1)e_2 - a_6e_3 - k_3\mu_2(s_2)e_4)p(t)$$

Donc :

$$p(t)\dot{e}_3 + p(t)D(t)e_3 = -k_2\mu_1(s_1)p(t)e_2 - a_6p(t)e_3 - k_3\mu_2(s_2)p(t)e_4$$

**Dynamique de  $e_4$  :**

$$p(t)(\dot{e}_4 + D(t)e_4) = (-a_8e_3 + \mu_2(s_2)e_4)p(t)$$

Donc :

$$p(t)\dot{e}_4 + p(t)D(t)e_4 = -a_8p(t)e_3 + \mu_2(s_2)p(t)e_4$$

Ensuite, nous procédons à un changement de variable en posant  $u_1(t) = p(t)e_1$ ,  $u_2(t) = p(t)e_2$ ,  $u_3(t) = p(t)e_3$  et  $u_4(t) = p(t)e_4$  nous calculons les dérivées respectives :

**Dynamique de  $u_1(t)$  :**

$$\dot{u}_1(t) = \dot{p}(t)e_1 + p(t)\dot{e}_1$$

Donc :

$$\dot{u}_1(t) = D(t)p(t)e_1 + p(t)\dot{e}_1$$

**Dynamique de  $u_2(t)$  :**

$$\dot{u}_2(t) = \dot{p}(t)e_2 + p(t)\dot{e}_2$$

Donc :

$$\dot{u}_2(t) = D(t)p(t)e_2 + p(t)\dot{e}_2$$

**Dynamique de  $u_3(t)$  :**

$$\dot{u}_3(t) = \dot{p}(t)e_3 + p(t)\dot{e}_3$$

Donc :

$$\dot{u}_3(t) = D(t)p(t)e_3 + p(t)\dot{e}_3$$

**Dynamique de  $u_4(t)$  :**

$$\dot{u}_4(t) = \dot{p}(t)e_4 + p(t)\dot{e}_4$$

Donc :

$$\dot{u}_4(t) = D(t)p(t)e_4 + p(t)\dot{e}_4$$

Ainsi nous pouvons écrire le nouveau système de la façon suivante :

$$\begin{cases} \dot{u}_1(t) = -a_1u_1(t) - k_1\mu_1(s_1)u_2(t) \\ \dot{u}_2(t) = -a_3u_1(t) + \mu_1(s_1)u_2(t) \\ \dot{u}_3(t) = k_2\mu_1(s_1)u_2(t) - a_6u_3(t) - k_3\mu_2(s_2)u_4(t) \\ \dot{u}_4(t) = -a_8u_3(t) + \mu_2(s_2)u_4(t) \end{cases} \quad (3.1.3)$$

Maintenant, nous allons prouver la convergence de l'observateur en utilisant la fonction de Lyapunov candidate suivante :

$$V_{\beta,\gamma}(u_1, u_2, u_3, u_4) = \left\| \begin{bmatrix} u_1 \\ u_1 + \beta u_2 \\ u_3 \\ u_3 + \gamma u_4 \end{bmatrix} \right\|^2 = (u_1)^2 + (u_1 + \beta u_2)^2 + (u_3)^2 + (u_3 + \gamma u_4)^2$$

où  $\beta$  et  $\gamma$  sont des constantes strictement positives. Cette fonction est une norme de  $\mathbb{R}^2$  qui est radialement non bornée. Donc :

$$V_{\beta,\gamma}(u_1, u_2, u_3, u_4) = 2(u_1)^2 + (\beta u_2)^2 + 2\beta u_1 u_2 + 2(u_3)^2 + (\gamma u_4)^2 + 2\gamma u_3 u_4$$

Nous calculons la dérivée de cette expression :

$$\dot{V}_{\beta,\gamma}(u_1, u_2, u_3, u_4) = 2(2u_1 + \beta u_2)\dot{u}_1 + 2\beta(u_1 + \beta u_2)\dot{u}_2 + 2(2u_3 + \gamma u_4)\dot{u}_3 + 2\gamma(u_3 + \gamma u_4)\dot{u}_4$$

Nous remplaçons  $\dot{u}_1, \dot{u}_2, \dot{u}_3, \dot{u}_4$  en utilisant les expressions calculées précédemment :

$$\begin{aligned} \dot{V}_{\beta,\gamma}(u_1, u_2, u_3, u_4) &= 2(2u_1 + \beta u_2)(-a_1 u_1 - k_1 \mu_1(s_1)u_2) + 2\beta(u_1 + \beta u_2)(-a_3 u_1 + \mu_1(s_1)u_2) \\ &\quad + 2(2u_3 + \gamma u_4)(k_2 \mu_1(s_1)u_2 - a_6 u_3 - k_3 \mu_2(s_2)u_4) + 2\gamma(u_3 + \gamma u_4)(-a_8 u_3 + \mu_2(s_2)u_4) \end{aligned}$$

Donc finalement :

$$\begin{aligned} \dot{V}_{\beta,\gamma}(u_1, u_2, u_3, u_4) &= -2(2a_1 + \beta a_3)u_1^2 + 2\beta \mu_1(s_1)(\beta - k_1)u_2^2 - 2(2a_6 + \gamma a_8)u_3^2 + 2\gamma \mu_2(s_2)(\gamma - k_3)u_4^2 \\ &\quad + 2[(\beta - 2k_1)\mu_1(s_1) - \beta(\beta a_3 + a_1)]u_1 u_2 + 2k_2 \mu_1(s_1)[2u_3 + \gamma u_4]u_2 + 2[(\gamma - 2k_3)\mu_2(s_2) - \gamma(\gamma a_8 + a_6)]u_3 u_4 \end{aligned}$$

Afin de montrer que  $\dot{V}_{\beta,\gamma} < 0$  ie définie négative, nous devons prouver que  $B(t) < 0$  ie  $-B(t) > 0$  c'est-à-dire que les mineurs principaux de  $-B(t)$  sont positifs tel que  $B(t)$  est la matrice correspondante au système suivant :

$$\dot{V}_{\beta,\gamma}(u_1, u_2, u_3, u_4) = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \end{bmatrix} B(t) \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix}$$

Sachant que  $B(t)$  est la matrice suivante :

$$B(t) = \begin{bmatrix} -2(2a_1 + \beta a_3) & [(\beta - 2k_1)\mu_1 & 0 & 0 \\ & -\beta(\beta a_3 + a_1)] & & \\ [(\beta - 2k_1)\mu_1 & 2\beta\mu_1(\beta - k_1) & 2k_2\mu_1 & \gamma k_2\mu_1 \\ -\beta(\beta a_3 + a_1)] & & & \\ 0 & 2k_2\mu_1 & -2(2a_6 + \gamma a_8) & [(\gamma - 2k_3)\mu_2 \\ & & & -\gamma(\gamma a_8 + a_6)] \\ 0 & \gamma k_2\mu_1 & [(\gamma - 2k_3)\mu_2 & 2\gamma\mu_2(\gamma - k_3) \\ & & -\gamma(\gamma a_8 + a_6)] & \end{bmatrix}$$

Soient  $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4$  les mineurs principaux de  $-B(t)$  :

**Mineur  $\delta_1$**

$$\delta_1 = 2(2a_1 + \beta a_3)$$

**Mineur  $\delta_2$**

$$\delta_2 = -4\beta\mu_1(\beta - k_1)(2a_1 + \beta a_3) - [(\beta - 2k_1)\mu_1 - \beta(\beta a_3 + a_1)]^2$$

Ainsi :

$$\delta_2 = -\beta^2(\beta a_3 + a_1)^2 + 2\beta\mu_1(2k_1 - 3\beta)a_1 - 2\beta^3\mu_1 a_3 - (\beta - 2k_1)^2\mu_1^2$$

Nous posons  $\beta a_3 + a_1 = 0$  alors  $a_3 = \frac{-a_1}{\beta}$  donc  $\delta_1 \delta_2$  deviennent :

$$\delta_1 = 2a_1$$

$$\delta_2 = 4\beta\mu_1(k_1 - \beta)a_1 - (\beta - 2k_1)^2\mu_1^2$$

Pour  $a_1 > 0$  et suffisamment grand et pour  $\beta < k_1$ ,  $\delta_1$  et  $\delta_2$  sont tout les deux positifs.

**Mineur  $\delta_3$**

$$\delta_3 = 2(2a_1 + \beta a_3)[-4\beta\mu_1(\beta - k_1)(2a_6 + \gamma a_8) - 4k_2^2\mu_1^2] + [(\beta - 2k_1)\mu_1 - \beta(\beta a_3 + a_1)][-2(2a_6 + \gamma a_8)((\beta - 2k_1)\mu_1 - \beta(\beta a_3 + a_1))]$$

Ainsi en remplaçant avec les conditions citées ci-dessus :

$$\delta_3 = 8\beta(k_1 - \beta)\mu_1(2a_6 + \gamma a_8)a_1 - 2\mu_1^2(\beta - 2k_1)^2(2a_6 + \gamma a_8) - 8k_2^2\mu_1^2 a_1$$

### Mineur $\delta_4$

$$\begin{aligned}\delta_4 = & \gamma^2 \mu_1 [4\beta(\beta - k_1)a_1 + \mu_1(\beta - 2k_1)^2](a_6 + \gamma a_8)^2 + 2\gamma(3\gamma - 2k_3) \\ & [4\beta(\beta - k_1)a_1 + (\beta - 2k_1)^2 \mu_1] \mu_1 \mu_2 a_6 + 2\gamma^3 [[4\beta(\beta - k_1)\mu_2 + 2k_2^2 \mu_1] a_1 \\ & + (\beta - 2k_1)^2 \mu_1 \mu_2] \mu_1 a_8 + [4\beta(\gamma - 2k_3)^2 (\beta - k_1)\mu_2 + 8\gamma^2 k_2^2 \mu_1] \mu_1 \mu_2 a_1 \\ & + [(\beta\gamma)^2 + 4[(\gamma - 2k_3)^2 (k_1 - \beta)k_1 + \beta^2 k_3 (k_3 - \gamma)]] \mu_1^2 \mu_2^2\end{aligned}$$

Nous posons  $a_6 + \gamma a_8 = 0$  alors  $a_8 = \frac{-a_6}{\gamma}$  donc  $\delta_3$  et  $\delta_4$  deviennent :

$$\delta_3 = 8\beta(k_1 - \beta)\mu_1 a_1 a_6 - 8k_2^2 \mu_1^2 a_1 - 2(2k_1 - \beta)^2 \mu_1^2 a_6$$

$$\begin{aligned}\delta_4 = & 16\beta\gamma(k_1 - \beta)(k_3 - \gamma)\mu_1 \mu_2 a_1 a_6 + 4\mu_1 \mu_2 [2k_2^2 \gamma \mu_1 - \beta \mu_2 (k_1 - \beta)(2k_3 - \gamma)^2] a_1 \\ & - 4\gamma \mu_1^2 \mu_2 (2k_1 - \beta)^2 (k_3 - \gamma) a_6 + (2k_1 - \beta)^2 (2k_3 - \gamma)^2 \mu_1^2 \mu_2^2\end{aligned}$$

Pour  $a_6 > 0$  et suffisamment grand et pour  $\gamma < k_3$ ,  $\delta_3$  et  $\delta_4$  sont tout les deux positifs. Donc  $(0, 0, 0, 0)$  est un point d'équilibre globalement asymptotiquement stable. ■

## 3.2 Résultats de simulations

Les simulations ont été réalisées en considérant les valeurs des paramètres citées dans (1.3), les conditions initiales présentées dans le tableau (1.4) et les conditions initiales de l'observateur de type Luenberger citées ci-dessous :

	$\hat{s}_1(0)$ (Kg/m <sup>3</sup> )	$\hat{x}_1(0)$ (Kg/m <sup>3</sup> )	$\hat{s}_2(0)$ (mol/m <sup>3</sup> )	$\hat{x}_2(0)$ (Kg/m <sup>3</sup> )
Valeurs	3	3	15	0.15

TABLE 3.1 – Conditions initiales de l'observateur de type Luenberger

Ainsi que les gains suivants :

	$a_1$	$a_3$	$a_6$	$a_8$
Valeurs	50	-250	50	-5

TABLE 3.2 – Gains de l'observateur de type Luenberger

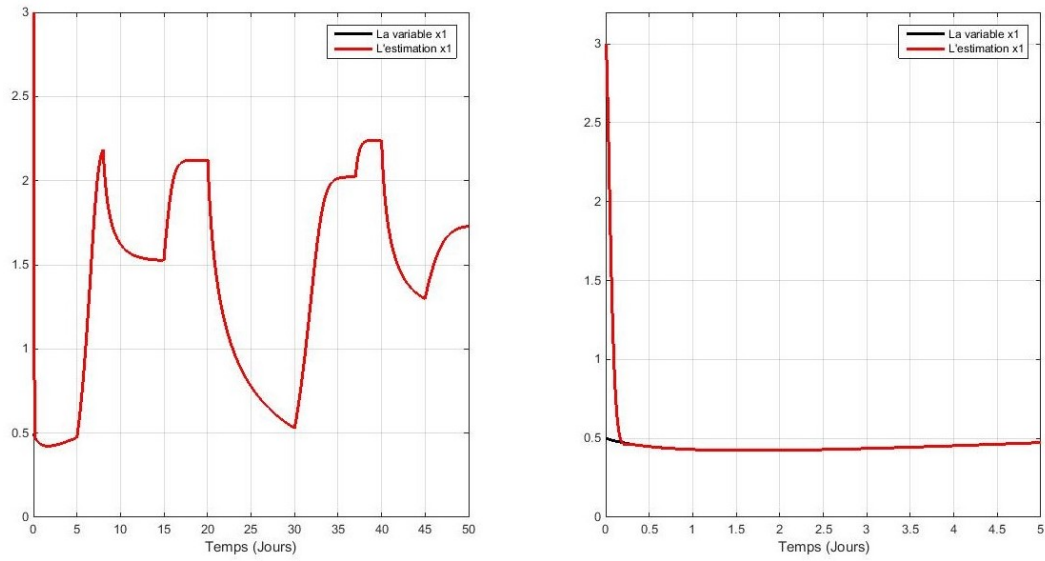


FIGURE 3.1 – Concentration de la biomasse  $x_1$  et son estimation pour  $\beta = 0.2$

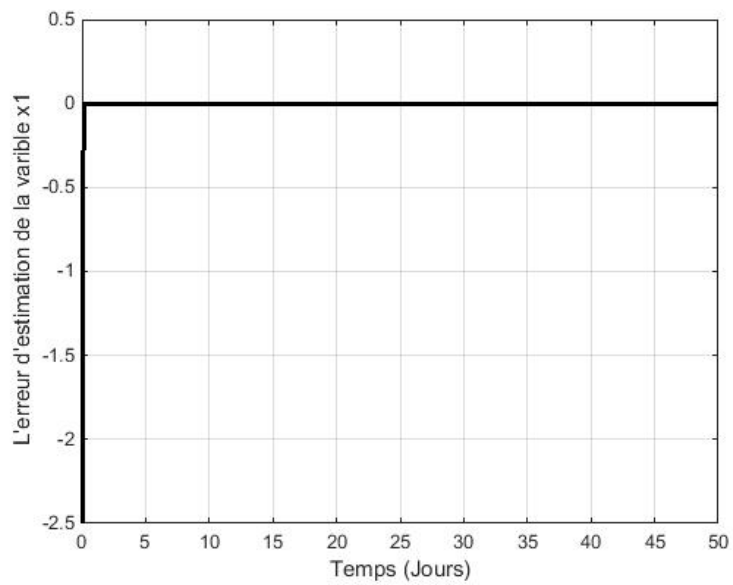


FIGURE 3.2 – Erreur correspondante à la biomasse  $x_1$

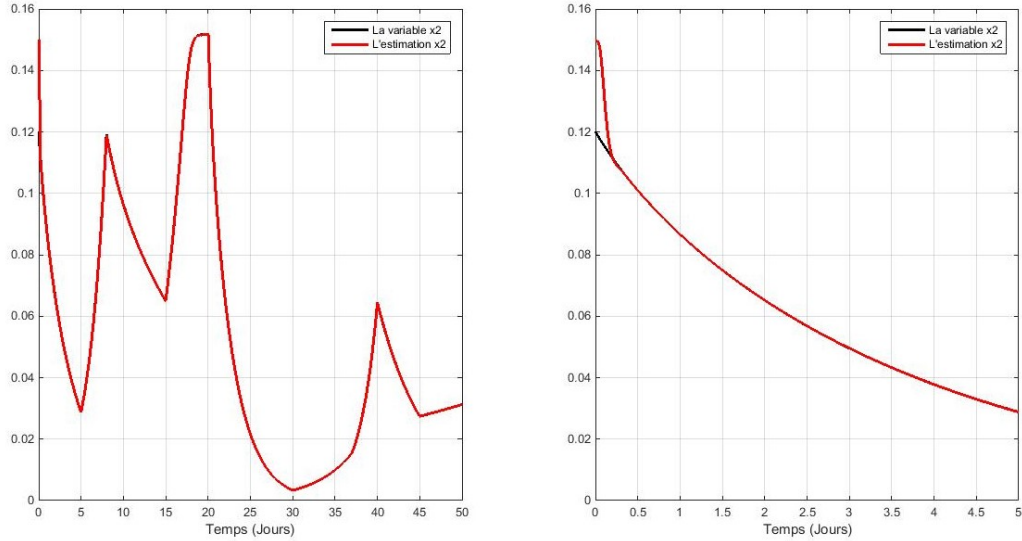


FIGURE 3.3 – Concentration de la biomasse  $x_2$  et son estimation pour  $\gamma = 10$

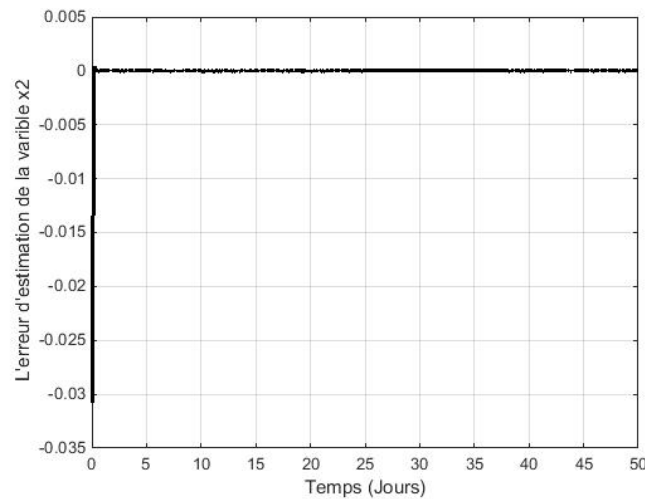


FIGURE 3.4 – Erreur correspondante à la biomasse  $x_2$

Les figures (3.1) et (3.2) représentent respectivement la concentration de la biomasse  $x_1$ , son estimation  $\hat{x}_1$  et l'erreur d'estimation correspondante à la biomasse  $x_1$ . Dans la simulation réalisée, nous avons pris  $a_1 = 50$  et  $\beta = 0.2$ . Ainsi, nous remarquons que notre observateur type Luenberger converge après  $t \approx \frac{1}{4}$  journée avec une erreur qui tend vers 0.

Les figures (3.3) et (3.4) représentent respectivement la concentration de la biomasse  $x_2$ , son estimation  $\hat{x}_2$  et l'erreur d'estimation correspondante à la biomasse  $x_2$ . Dans la simulation réalisée, nous avons pris  $a_6 = 50$  et  $\gamma = 10$ . Ainsi, nous remarquons que notre observateur type Luenberger converge après  $t \approx \frac{1}{4}$  journée avec une erreur qui tend vers 0.

### 3.3 Discussion autour de la robustesse

Dans cette partie, nous allons ajouter à la sortie  $[s_1 \ s_2]^T$  un bruit blanc additif puis observer le comportement du système tout en conservant les mêmes valeurs des paramètres et les conditions initiales donnés par les tableaux (1.3) et (1.4) respectivement .

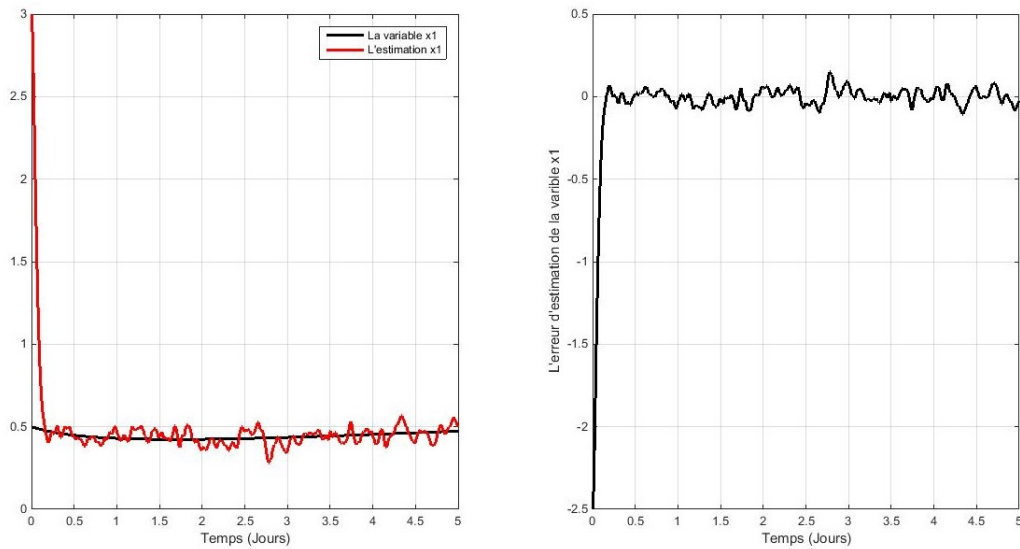


FIGURE 3.5 – Concentration de la biomasse  $x_1$  avec perturbation sur la sortie et son erreur d'estimation

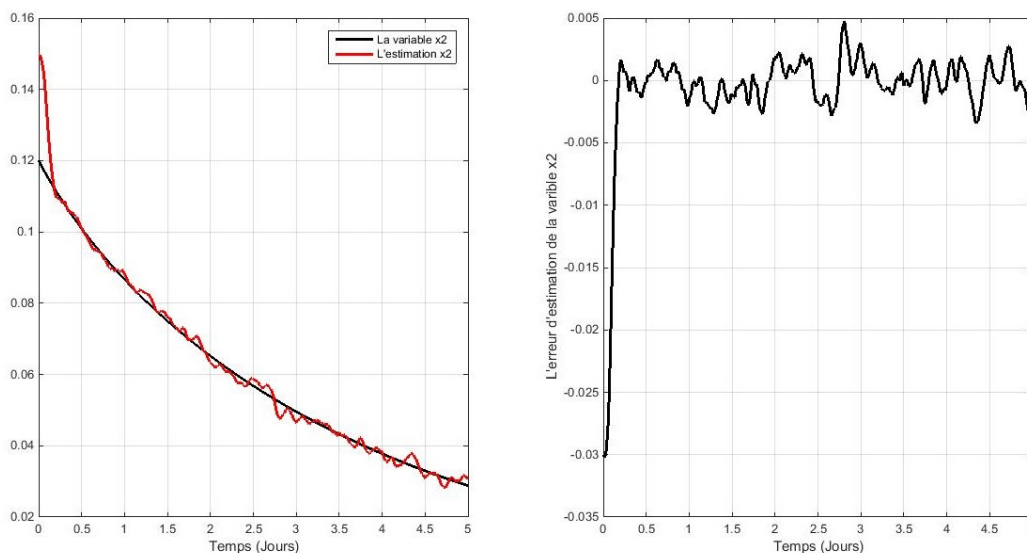


FIGURE 3.6 – Concentration de la biomasse  $x_2$  avec perturbation sur la sortie et son erreur d'estimation



Nous constatons qu'une perturbation sur la sortie de notre système n'affecte pas notre observateur type Luenberger qui converge après  $t \approx \frac{1}{4}$  journée pour les deux biomasses  $x_1$   $x_2$  avec une erreur presque nulle.

Maintenant, nous allons ajouter un bruit de mesure puis observer le comportement du système tout en conservant les mêmes valeurs des paramètres et les conditions initiales citées en (1.3) et (1.4) respectivement .

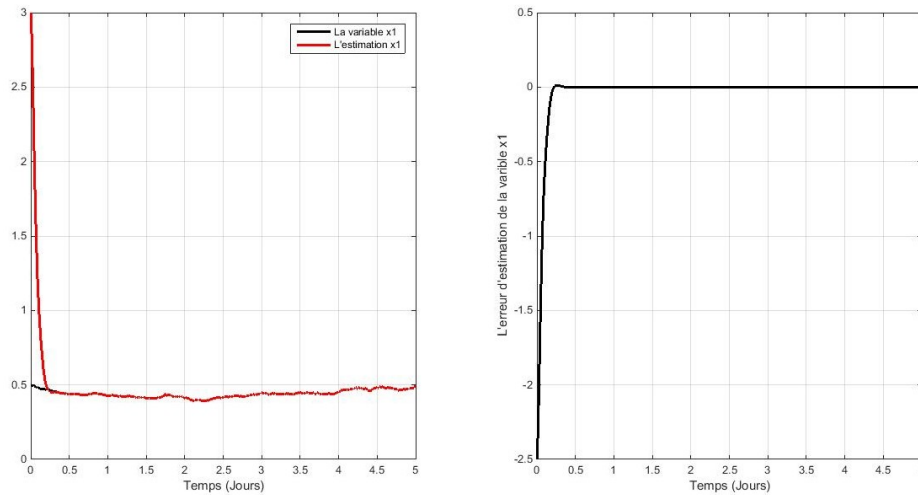


FIGURE 3.7 – Concentration de la biomasse  $x_1$  avec bruit de mesure et son erreur d'estimation

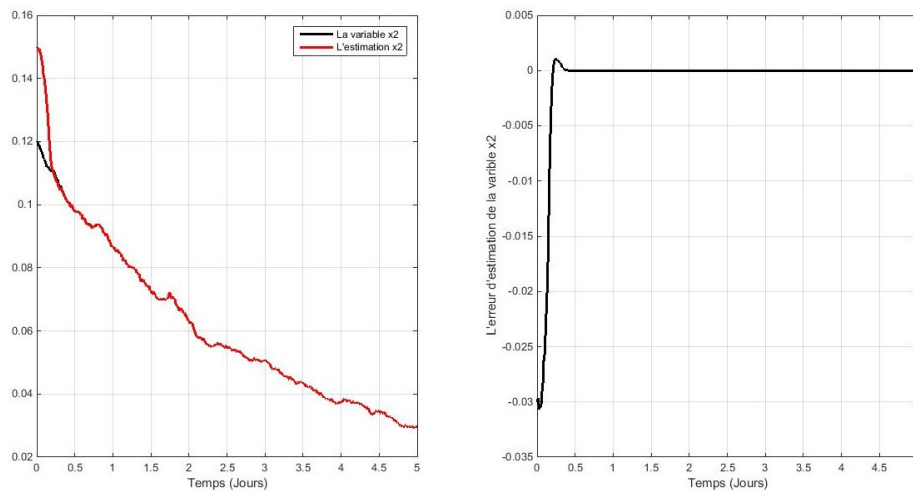


FIGURE 3.8 – Concentration de la biomasse  $x_2$  avec bruit de mesure et son erreur d'estimation

Nous constatons que face à un bruit de mesure, notre observateur converge après  $t \approx \frac{1}{4}$  journée pour les deux biomasses ( $x_1$ ,  $x_2$ ) avec une erreur qui tend vers 0.

### 3.4 Étude comparative

Dans cette partie, nous allons comparer entre les observateurs présentés dans le chapitre 2 section 2.3 et l'observateur synthétisé dans ce chapitre. les résultats de simulations sont obtenus en conservant les mêmes valeurs des paramètres, ainsi que les conditions initiales et les gains (en cas d'existence) propres à chaque observateur. Les résultats sont représentés ci-dessous :

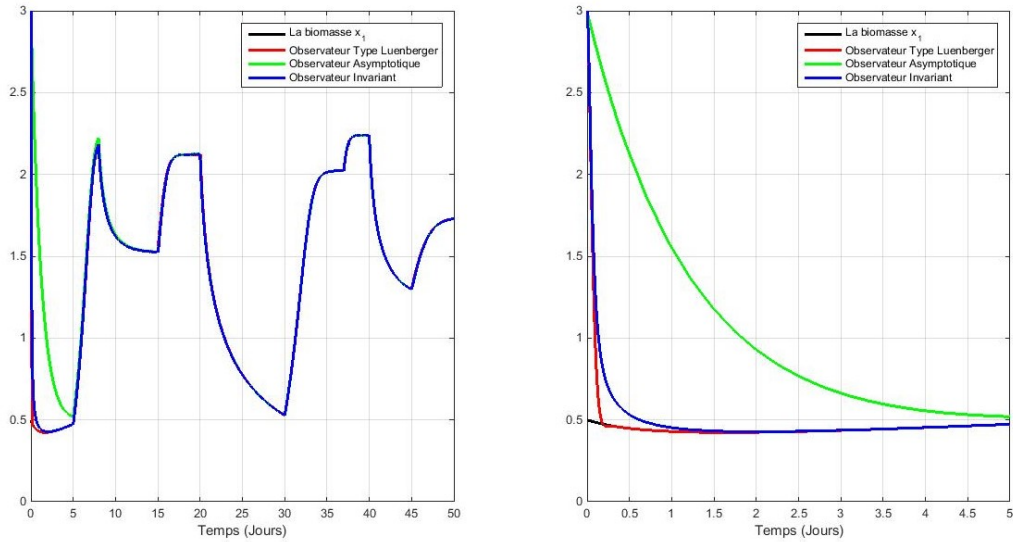


FIGURE 3.9 – Concentration de la biomasse  $x_1$  et ses estimations sur 50 et 5 jours

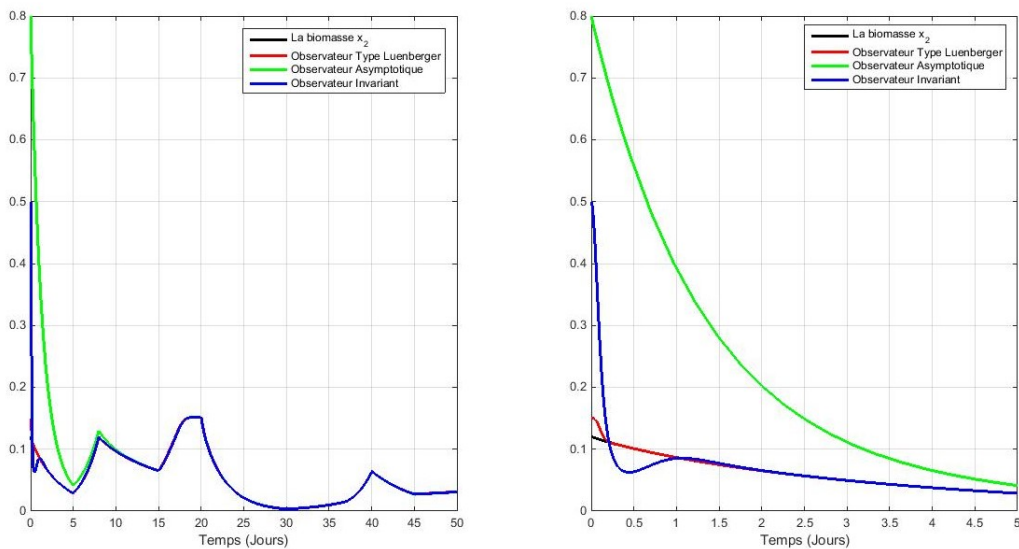


FIGURE 3.10 – Concentration de la biomasse  $x_2$  et ses estimations sur 50 et 5 jours

Depuis les figures (3.9) et (3.10), nous constatons que notre observateur de type Luenberger et l'observateur invariant donnent de meilleurs résultats que l'observateur asymptotique. En comparant notre observateur de type Luenberger avec l'observateur invariant, il est évident que notre observateur converge plus rapidement que ce dernier. De plus, il est plus facile à synthétiser et assure une convergence globale contrairement à l'observateur invariant qui assure seulement une convergence locale.

## Conclusion et Perspectives

L'objectif principal de ce présent travail est la synthèse d'un observateur non linéaire, pour un type bien précis de bioprocédés le **AM2**. Cette tâche est complexe dans le sens où l'estimation des variables d'états  $(x_1 \ x_2)$  est élaborée en considérant seulement les sorties mesurées  $(s_1 \ s_2)$ .

Afin d'accomplir cette tâche, nous avons choisis de nous baser sur la notion de fonction de Lyapunov candidate, qui présente d'excellents résultats en terme de convergence et de robustesse.

En effet, le choix judicieux des variables et surtout de la fonction de Lyapunov candidate a permis d'assurer une convergence globale de notre observateur de type Luenberger, d'où son efficacité.

La synthèse de notre observateur présente un progrès en comparant avec les observateurs proposés dans la littérature. En effet, la possibilité de régler la vitesse de convergence est une propriété importante non assurée dans la plupart des observateurs synthétisés auparavant.

Enfin comme perspective de ce travail, nous souhaitons pouvoir trouver d'autres fonctions de Lyapunov appliqués au AM2 qui assurent de meilleurs résultats. Nous pouvons faire une étude d'optimisation des paramètres de l'observateur qui peuvent nous donner de meilleurs résultats de convergence. Aussi, nous espérons pouvoir injecter notre observateur dans une boucle de commande.

# Annexe

## Matrice d'observabilité du modèle AM2

$$dO(h) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -D - \frac{K_1 k_1 \mu_{1max} x_1}{(s_1 + K_1)^2} & 0 & -\frac{k_1 \mu_{1max} s_1}{s_1 + K_1} & 0 \\ \frac{K_1 k_2 \mu_{1max} x_1}{(s_1 + K_1)^2} & -D - \frac{k_3 \mu_{2max} x_2 \left( -\frac{s_2^2}{K_i} + K_2 \right)}{\left( \frac{s_2^2}{K_i} + s_2 + K_2 \right)^2} & \frac{k_2 \mu_{1max} s_1}{s_1 + K_1} & -\frac{k_3 \mu_{max2} s_2}{\frac{s_2^2}{K_i} + s_2 + K_2} \end{bmatrix}$$

## Condition de stabilité d'un système

**Définition 1** Un système  $\dot{X} = AX$  qui admet comme point d'équilibre  $X^*$  est stable si les valeurs propres de la matrice  $A$  sont de parties réelles négatives.

## Système invariant

**Définition 2**  $G$  est un groupe de symétries d'un système si, pour chaque solution  $(x(t), u(t))$  du système et  $\forall g \in G$ ,  $(\varphi_g(x(t)), \psi_g(u(t)))$  est aussi une solution.

**Définition 3** le système (1.2.5) est dit invariant si et seulement si :

$$f(\varphi_g(x), \psi_g(u)) = D_{\varphi_g}(x) f(x, u), \text{ pour tout } g, x \text{ et } u.$$

## Fonctions scalaires invariantes

**Définition 4** Une fonction  $J$  définie sur  $(X, U, Y)$ , où  $X$  est l'ensemble des états,  $U$  est l'ensemble des entrées et  $Y$  est l'ensemble des sorties, est dite invariante si et seulement si :

$$J(\varphi_g(x), \psi_g(u), \rho_g(y)) = J(x, u, y) \text{ pour tout } g, x, u \text{ et } y$$

## Champs de vecteurs invariants

**Définition 5** Un champ de vecteur  $w$  est dit invariant sur  $X \subset \mathbb{R}^n$  ssi :

$$w(\varphi_g(x)) = D_{\varphi_g}(x) w(x) \text{ pour tout } g \text{ et } x$$

# Bibliographie

- [1] B. BENYAHIA *Modélisation et Observation des Bioprocédés à Membranes : Application à la digestion anaérobie*, thèse de doctorat, Université de Tlemcen et Université de Montpellier 2, 2012.
- [2] A. SAHNOUNE, A. TAKHEDMIT *Commande non linéaire appliquée sur un procédé de digestion anaérobie*, Mémoire de fin d'études, Université Abderrahmane Mira de Bejaïa, 2016
- [3] I. DIDI, H. DIB, B.CHERKI, *A Luenberger-type observer for the AM2 model*, Journal Of Process Control, 32, 117-126, 2015.
- [4] I. DIDI *Sur l'observation des systèmes non linéaires invariants, application aux bioprocédés*, thèse, Université de Tlemcen, 2014.
- [5] G. BASTIN, D. DOCHAIN, *On-line Estimation and Adaptive Control of Bioreactors*, Elsevier, 1990.
- [6] L. Chen, *Modelling, Identifiability and Control of Complex Biotechnological Systems*, Ph.D. thesis, Université Catholique Louvain, Belgique, 1992.
- [7] J. L. GOUZÉ, O. BERNARD et Z. HADJ-ZADOK, *Observers with modelling uncertainties for the wastewater treatment process*, Journées thématiques, Automatique et Environnement , 9-10 mars, Nancy, France, 2000.
- [8] J. L. GOUZÉ, et V. LEMESLE, *A bounded error observer with adjustable rate for a class of bioreactor models*, European Control Conference, ECC2001, 5 pages sur CD-ROM, Porto, Portugal, 2001.
- [9] V. G. Alcaraz, A. Maloum, J. Harmand, A. Rapaport, J. P. Steyer, V. González-Alvarez et C. Pelayo-Ortiz, *Robust interval-based SISO and SIMO regulation for a class of highly bioreactors : application to the anaerobic digestion*, 39th IEEE Conference on Decision and Control, 6 pages sur CD-ROM, Sydney, Australie, 2000.
- [10] J. L. Gouzé, A. Rapaport, Z. Hadj-Sadok, *Interval observers for uncertain biological systems*, Ecol. Model. 133, 45-56, 2000.
- [11] Gauthier, J. P., Hammouri, H., Othman, *A simple observer for nonlinear systems applications to bioreactors*. IEEE Transactions on Automatic Control, 37(6), 875-880 ; 1992.
- [12] Rouchon, P., Bonnabel, S., Martin, *Invariant asymptotic observers*, IEEE Transactions on Automatic Control, 53, 2514–2526, 2008.
- [13] O. Bernard, Z. Hadj-Sadock, D. Dochain, A. Genovesi, and J.P. Steyer. *Dynamical model development and parameter identification for an anaerobic wastewater treatment process*, Biotechnology and Bioengineering, 75, 424–438, 2001.

- [14] N. Aghannan , *Contrôle de réacteurs de polymérisation, observateur et invariance* (Ph.D. thesis). Ecole des Mines de Paris, 2003.
- [15] N. Aghannan, P. Rouchon , *An intrinsic observer for a class of Lagrangian systems*. IEEE Transactions on Automatic Control, 48(6), 2003.
- [16] S. Bonnabel., *Observateurs asymptotiques invariants : théorie et exemples*, thèse de doctorat. Ecole des Mines de Paris, 2007.
- [17] S. Bonnabel , P. Martin , et P. Rouchon , *Groupe de Lie et observateur non linéaire*, publié dans Conférence Internationale Francophone d'Automatique, Bordeaux ; 2006.
- [18] I. DIDI, H. DIB, B.CHERKI, *An invariant observer for a chemostat model*, Automatica, 50, 2321-2326, 2014.