

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

MINISTRY OF HIGHER EDUCATION
AND SCIENTIFIC RESEARCH

HIGHER SCHOOL IN APPLIED SCIENCES
--T L E M C E N--



المدرسة العليا في العلوم التطبيقية
École Supérieure en
Sciences Appliquées

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

المدرسة العليا في العلوم التطبيقية
-تلمسان-

Mémoire de fin d'étude

Pour l'obtention du diplôme de Master

Filière : Automatique
Spécialité : Automatique

Présenté par :
BELMOUHOUB Amina & BENMOUSSA Meriem

Thème

**Commande Robuste d'un Drone
Miniature à Voilures Tournantes**

Soutenu publiquement, le 27 / 09 / 2020, devant le jury composé de :

Mme. DIDI Ibtissem
M. MOKHTARI Mohammed Rida
Mme. CHOUKCHOU-BRAHAM Amal
M. ARICHI Fayssal

MCB
MCB
Professeur
MCB

ESSA. Tlemcen
ESSA. Tlemcen
Université. Tlemcen
ESSA. Tlemcen

Présidente
Directeur de mémoire
Examineur 1
Examineur 2

Année universitaire : 2019 /2020

“A drone isn’t just a tool : when you use it you see and act through it—you inhabit it. It expands the reach of your body and senses in much the same way the internet expands your mind. The net extends our virtual presence : drones extend our physical presence.”

Lev Grossman

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

MINISTRY OF HIGHER EDUCATION
AND SCIENTIFIC RESEARCH

HIGHER SCHOOL IN APPLIED SCIENCES
--T L E M C E N--



المدرسة العليا في العلوم التطبيقية
École Supérieure en
Sciences Appliquées

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

المدرسة العليا في العلوم التطبيقية
-تلمسان-

Mémoire de fin d'étude

Pour l'obtention du diplôme de Master

Filière : Automatique
Spécialité : Automatique

Présenté par :
BELMOUHOUB Amina & BENMOUSSA Meriem

Thème

**Commande Robuste d'un Drone
Miniature à Voilures Tournantes**

Soutenu publiquement, le 27 / 09 / 2020, devant le jury composé de :

Mme. DIDI Ibtissem
M. MOKHTARI Mohammed Rida
Mme. CHOUKCHOU-BRAHAM Amal
M. ARICHI Fayssal

MCB
MCB
Professeur
MCB

ESSA. Tlemcen
ESSA. Tlemcen
Université. Tlemcen
ESSA. Tlemcen

Présidente
Directeur de mémoire
Examineur 1
Examineur 2

Année universitaire : 2019 /2020

Remerciement

الحمد لله الذي بنعمته تتم الصالحات

Nous remercions Allah le tout puissant de nous avoir donné le courage et la volonté d'achever ce travail et sans Lequel il n'aurait jamais été accompli.

Nous tenons à remercier chaleureusement notre encadreur Mr. MOKHTARI Mohammed Rida pour ses nombreux conseils, encouragements, relectures, corrections et surtout pour sa disponibilité et la confiance qu'il nous a accordée.

Nous remercions tout particulièrement Les membres du jury, pour avoir accepté de participer en tant qu'examineurs à notre soutenance.

Nous tenons à exprimer notre profonde gratitude à tous les membres du département de 2^{ème} cycle pour leurs contributions à notre formation académique et aux membres de la promotion d'automatique 2017-2020.

Nous n'oublions pas de remercier nos amis et tous ceux qui ont contribué, de près ou de loin à l'aboutissement de ce travail.

Amina & Meriem

Dédicaces

Je dédie ce modeste travail.

À moi-même.

Aux larmes et prières de ma mère.

À la confiance et aux encouragements de mon père.

À ma jumelle Nedjoua et mon frère Hamoudi.

À mon frère Abde allah, son épouse et le petit Anes Abderrahim.

À mon cousin Mohammed, son épouse et leurs enfants Raya Meriem et Zakaria.

À mon tonton Salim, ma tante Zohra et ma meilleure amie Amira.

À mon oncle Rabah, la personne spéciale dans ma vie.

À la mémoire de Nana Yamna Allah yarhamha.

À toute ma famille.

À tous mes amis.

À tous ceux qui me sont chers.

Et à celle qui a partagé avec moi la joie de la graduation, cher binôme Meriem.

... Amina

Je dédie ce modeste travail.

À mes parents qui n'ont jamais cessé de m'encourager et me soutenir.

À mes chers frères et sœurs.

À toute ma famille.

À tous mes amis.

À tous ceux qui sont chers à mon cœur.

Et à Amina chère amie avant d'être mon binôme.

... Meriem

Résumé

L'objet de notre étude est la modélisation du quadri-rotor et la conception d'une loi de commande robuste. Une telle loi est essentielle pour assurer un bon contrôle de la position et de l'orientation d'un véhicule aérien autonome, pour garantir un suivi précis des trajectoires souhaitées.

Afin de tester les performances des différentes stratégies de contrôle, nous avons simulé chaque loi de commande sur "MATLAB/Simulink".

Mots-Clés : drone, quadri-rotor, hiérarchique, commande robuste, mode glissant, backstepping, observateur de perturbations.

Abstract

The object of our study is the modeling of the quadri-rotor and the design of a robust control law. Such a law is essential to ensure a good control of the position and orientation of an autonomous air vehicle, to guarantee a precise follow-up of the desired trajectories.

In order to test the performance of the different control strategies, we simulated each control law on "MATLAB/Simulink".

Key-words : drone, quadrotor, hierarchical, robust control, sliding mode, backstepping, disturbance observer.

تلخيص

الهدف من دراستنا هو نمذجة الرباعي الدوار وتصميم قانون تحكم قوي . مثل هذا القانون ضروري لضمان التحكم الجيد في موقع واتجاه مركبة جوية مستقلة، لضمان متابعة دقيقة للمسارات المطلوبة . من أجل اختبار أداء استراتيجيات التحكم المختلفة، قمنا بمحاكاة كل قانون تحكم على "MATLAB / Simulink" .

كلمات مفتاحية: طائرة بدون طيار، رباعي المحركات، هرمي، تحكم قوي، وضع انزلاق، عتبة خلفية، مراقب اضطراب.

Table des matières

Remerciement

Dédicace

Résumé

Liste des tableaux

Table des figures

Glossaire

Introduction générale	14
1 Les drones : Etat de l'art	16
1.1 Introduction	17
1.1.1 Histoire des drones	17
1.2 Domaines d'utilisation des drones	17
1.2.1 Le domaine militaire	17
1.2.2 Le domaine civil	18
1.3 Classification des drones	19
1.3.1 Selon le rayon d'action, l'endurance et l'altitude R.E.A	19
1.3.2 Selon la configuration de la propulsion	21
1.4 Les capteurs pour la navigation et la localisation	23
1.4.1 Les centrales inertielles	23
1.4.2 Le système de géolocalisation GPS	25
1.4.3 Les télémètres	25
1.4.4 Les altimètres barométriques	25
1.4.5 Capteur de vision	25
1.5 Conclusion	26

2	Modélisation dynamique du quadri-rotor	27
2.1	Introduction	29
2.2	Le quadri-rotor	29
2.3	Le principe de vol du quadri-rotor	30
2.4	Les repères	30
2.5	L'orientation du quadri-rotor	31
2.6	Mouvements du quadri-rotor	31
2.6.1	Mouvement de roulis	31
2.6.2	Mouvement de tangage	32
2.6.3	Mouvement de lacet	32
2.7	Modes de vol d'un quadri-rotor	33
2.7.1	Vol vertical	33
2.7.2	Vol horizontal	34
2.7.3	Vol stationnaire	34
2.8	Bilan des forces appliquées	34
2.8.1	Force de pesanteur	34
2.8.2	Les forces de poussée	34
2.8.3	Les forces de traînée	35
2.9	Bilan des moments	35
2.9.1	Moments dus aux forces de poussée	35
2.9.2	Moments dus aux forces de traînée	36
2.9.3	Moment dus aux effets gyroscopiques	36
2.10	Modélisation dynamique du quadri-rotor	37
2.10.1	Angles d'Euler	37
2.10.2	Vitesses angulaires	39
2.10.3	Vitesses linéaires	41
2.10.4	Développement du modèle mathématique selon Newton-Euler	41
2.10.5	Équation de mouvement de translation :	43
2.10.6	Équation de mouvement de rotation	44
2.10.7	La dynamique des rotors	46
2.11	Représentation d'état du système	48
2.12	Conclusion	49
3	Commandes robustes d'un quadri-rotor	50
3.1	Introduction	52
3.2	Pourquoi la commande non-linéaire ?	52
3.3	Stabilité au sens de Lyapunov	53
3.3.1	Notions de base	54

TABLE DES MATIÈRES

3.3.2	La théorie de Lyapunov	56
3.3.3	Stabilité au sens de Lyapunov	56
3.4	La commande hiérarchique	57
3.5	Le contrôle par mode glissant	58
3.5.1	Systèmes à structure variable	59
3.5.2	Théorie de mode glissant	59
3.5.3	Le choix de la surface de glissement	59
3.5.4	Les modes de la trajectoire dans le plan de phase	60
3.5.5	Phénomène de chattering	60
3.6	Application sur le modèle	61
3.6.1	Application de la commande hiérarchique	61
3.6.2	Application de la commande par mode glissant	62
3.6.3	Le contrôle de l'altitude(z)	63
3.6.4	Le contrôle de roulis (ϕ)	64
3.6.5	Le contrôle de tangage (θ)	64
3.6.6	Le contrôle de lacet (ψ)	64
3.6.7	La commande virtuelle	65
3.7	Résultats de la 1 ^{ère} simulation	66
3.7.1	Résultats de simulation sans perturbations	68
3.7.2	Résultats de simulation avec perturbations	70
3.7.3	Interprétation	72
3.7.4	Résultats de simulation sans perturbations	72
3.7.5	Résultats de simulation avec perturbations	74
3.7.6	Interprétation	76
3.8	Le contrôle par backstepping	76
3.8.1	Principe de la commande par backstepping	77
3.8.2	Théorie du backstepping	77
3.8.3	Algorithme de super-twisting	81
3.8.4	Définitions, Lemmes et Hypothèses	82
3.9	Application de la commande par backstepping sur le quadri-rotor	83
3.9.1	Le contrôle de l'altitude (z)	88
3.9.2	Le contrôle de roulis (ϕ)	88
3.9.3	Le contrôle de tangage (θ)	88
3.9.4	Le contrôle de lacet (ψ)	89
3.9.5	La commande virtuelle	89
3.10	Résultats de la 2 ^{ème} simulation	90
3.10.1	Résultats de simulation sans perturbations	90

3.10.2	Résultats de simulation avec perturbations	92
3.10.3	Interprétation	94
3.11	Conclusion	95
4	Contrôle hiérarchique basé sur l'observation des perturbations	96
4.1	Introduction	97
4.2	Application du contrôle hiérarchique du quadri-rotor basé sur l'observation des perturbations	98
4.2.1	Le contrôle d'altitude (z)	103
4.2.2	Le contrôle de roulis (ϕ)	103
4.2.3	Le contrôle de tangage (θ)	103
4.2.4	Le contrôle de lacet (ψ)	104
4.2.5	La commande virtuelle	104
4.3	Résultats de la 3 ^{ème} simulation	105
4.3.1	Résultats de simulation sans perturbations	106
4.3.2	Résultats de simulation avec perturbations	108
4.3.3	Interprétation	110
4.4	Conclusion	110
	Conclusion générale	111
	Bibliographie	115

Liste des tableaux

3.1	Les paramètres du système.	66
3.2	Les conditions initiales.	66
3.3	Les perturbations externes.	67
3.4	Les paramètres du contrôleur mode glissant.	67
3.5	Les paramètres du contrôleur backstepping.	90
4.1	Les paramètres du contrôleur basé sur l'observation des perturbations.	106

Table des figures

1.1	Exemple de drone dans le domaine militaire.	18
1.2	Exemples de drones dans le domaine civil : (a) Cinéma (b) Ambulan- cier (c) Agriculture.	19
1.3	HALE et MALE : (a) RQ-4 Global Hawk – (b) CH-4.	19
1.4	UCAV et TUAV : (a) X-47 B – (b) MQ-1 predator.	20
1.5	Mini et nano drone : (a) JJRC H8 – (b) PD-100 Black Hornet.	21
1.6	Drone à voilure fixe.	21
1.7	Drone à ailes battantes : eBee.	22
1.8	Drones à voilures tournantes : (a) Mono-rotor (b) Birotor (c) Tri- copter : HJ-Y3 (d) Multi-rotor : G4-eagle.	23
1.9	Centrale inertielle : BNO055.	24
1.10	Capteurs MEMS : (a) Accéléromètre (b) Gyromètre (c) Magnétomètre.	25
2.1	Exemple de quadri-rotors.	29
2.2	Représentation des forces, des repères et des différents mouvements.	30
2.3	Repères utilisés pour décrire le mouvement du drone.	31
2.4	Illustration du mouvement de roulis.	32
2.5	Illustration du mouvement de tangage.	32
2.6	Illustration du mouvement de lacet.	33
2.7	Illustration du mouvement vertical.	33
2.8	Illustration des principales forces.	35
2.9	Les angles d'Euler.	38
3.1	Stabilité par la fonction de Lyapunov.	55
3.2	Illustration de la commande hiérarchique.	57
3.3	Mode glissant.	58
3.4	Schéma global de la commande hiérarchique sous MATLAB/Simulink.	67
3.5	Position absolue du quadri-rotor sans perturbations.	68
3.6	Les trajectoires de position ξ	68

TABLE DES FIGURES

3.7	Les trajectoires des angles de tangage, de roulis et de lacet.	69
3.8	Entrées de commande U par mode glissant sans perturbations.	69
3.9	Position absolue du quadri-rotor avec perturbations.	70
3.10	Les trajectoires de position ξ	70
3.11	Les trajectoires des angles de tangage, de roulis et de lacet.	71
3.12	Entrées de commande U par mode glissant avec perturbation.	71
3.13	Position absolue du quadri-rotor sans perturbations.	72
3.14	Les trajectoires de position ξ	73
3.15	Les trajectoires des angles de tangage, de roulis et de lacet.	73
3.16	Entrées de commande U par mode glissant sans perturbations.	74
3.17	Position absolue du quadri-rotor avec perturbations.	74
3.18	Les trajectoires de position ξ	75
3.19	Les trajectoires des angles de tangage, de roulis et de lacet.	75
3.20	Entrées de commande U par mode glissant avec perturbations.	76
3.21	Position absolue du quadri-rotor sans perturbations.	90
3.22	Les trajectoires de position ξ	91
3.23	Les trajectoires des angles de tangage, de roulis et de lacet.	91
3.24	Entrées de commande U par backstepping sans perturbations.	92
3.25	Position absolue du quadrirotor avec perturbations.	92
3.26	Les trajectoires de position ξ	93
3.27	Les trajectoires des angles de tangage, de roulis et de lacet.	93
3.28	Entrées de commande U par backstepping avec perturbations.	94
4.1	Schéma présente le principe d'un observateur de perturbations.	97
4.2	Schéma global de la commande hiérarchique basé sur l'observation des perturbations sous MATLAB/Simulink	105
4.3	Position absolue du quadri-rotor sans perturbations.	106
4.4	Les trajectoires de position ξ	107
4.5	Les trajectoires des angles de tangage, de roulis et de lacet.	107
4.6	Entrées de commande U par le contrôleur hiérarchique basé sur l'ob- servation des perturbations.	108
4.7	Position absolue du quadri-rotor avec perturbations.	108
4.8	Les trajectoires de position ξ	109
4.9	Les trajectoires des angles de tangage, de roulis et de lacet.	109
4.10	Entrées de commande U par contrôleur hiérarchique basé sur l'obser- vation des perturbations.	110

Glossaire

Acronymes

Acronyme	Signification
FTDO	Finite Time Distrubance Observer
GPS	Global Positioning System
HALE	Haute Altitude Longue Endurance
MAV	Mini Air Vehicle
MALE	Moyenne Altitude Longue Endurance
MC	Mode de convergence
MG	Mode de glissement
PI	Proportionnel, Intégral
PID	Proportionnel, Intégral, Dérivé
PWM	Pulse-width Modulated
REA	Rayon d'action, Endurance et Altitude
TUAV	Tactical Unmanned Aerial Vehicle
UAV	Unmanned Aerial vehicle
UCAV	Unmanned Combat Air Vehicles
VAA	Véhicules Aériens Autonomes
VTOL	Vertical Take-off and Landing aircraft

Symboles

Symbole	Signification
E	Repère inertiel
B	Repère mobile
G	Centre de gravité
ϕ, θ, ψ	Angles d'Euler(roulis, tangage, lacet)
m	Masse totale
g	Accélération de pesanteur
P	Poids du drone
F_i	La somme des forces de poussée générées par chaque rotor
b	Coefficient aérodynamique de poussée
ω	Vitesse angulaire des rotors
T_h	Traînée dans les hélices
d	Coefficient de traînée
F_t	Traînée selon les axes (x, y, z)
V	Vitesse linéaire
M_x, M_y	Moment dû aux forces de poussée
M_z	Moment dû au force de traînée
M_a	Moment résultant des frottements aérodynamiques
l	Distance entre le centre de masse du quadrirotor et l'axe de rotation du rotor
Ω	Vitesse angulaire du quadrirotor
M_{gh}	Moment gyroscopique des hélices
J_r	Inertie des rotors
M_{gm}	Moment gyroscopique dû aux mouvements de quadrirotor
J	Inertie du système
R	Matrice de rotation
ξ	Vecteur de position du quadrirotor
J	Matrice d'inertie symétrique de système
$Sk(\Omega)$	Tenseur antisymétrique associé à la vitesse angulaire
F_f	Force totale générée par les quatre rotors
F_g	Force de gravité
τ_i	Couple d'entrée
Q_i	Couple résistant généré par le rotor i
R_a	Résistance du moteur
k_m	Constante de couple du moteur
k_g	Gain de réducteur
U	Lois de commande
x_d, y_d, z_d	Trajectoires désirées de position ξ
ϕ_d, θ_d, ψ_d	Trajectoires désirées des angles ϕ, θ et ψ

Introduction générale

L'automatisation et la robotisation de l'aéronautique ouvrent de nouvelles perspectives, en matière de sauvetage, d'observation, d'inspection et de maintenance. La recherche et le développement dans ce domaine ont été très actifs ces dernières années, et cet intérêt croissant s'explique par les avancées technologiques, notamment dans le domaine de la miniaturisation des actionneurs et de l'électronique embarquée.

Les véhicules aériens sans pilote à voilure tournante (VAA) sont des engins volants autonomes dont la sustentation et la propulsion sont assurées par la rotation d'une ou plusieurs voiles ou par des rotors tournants. Le vol autonome des VAA est contrôlé par des capteurs, des systèmes de positionnement global (GPS) et des systèmes embarqués. Ces aéronefs sont capables de suivre une trajectoire, de naviguer dans l'espace, d'utiliser la navigation visuelle afin d'atteindre des zones éloignées en un minimum de temps.

Plusieurs architectures de drones sont disponibles en fonction du nombre et de la disposition des rotors. La classe la plus couramment utilisée est celle des quadrirotors. Elle présente un net avantage sur les autres classes en raison de sa capacité à atterrir et décoller verticalement, à effectuer des vols quasi-stationnaires et des vols à basse altitude avec une grande manœuvrabilité, ainsi que de la simplicité de son modèle dynamique et de sa facilité de fabrication. Pour cette raison, le quadrirotor occupe une place intéressante dans le domaine de la recherche.

Il existe plusieurs méthodes pour obtenir le modèle mathématique du VAA, comme les modèles de Lagrange et de Newton-Euler. Le modèle mathématique doit être à la fois simple et suffisamment riche pour simuler les mouvements du drone avec une précision satisfaisante.

Afin de contrôler le quadrirotor en boucle fermée, de nombreuses techniques ont été conçues. Une approche simple consiste à remplacer la dynamique non linéaire par une dynamique linéaire. Mais cette approche nécessite une modélisation précise du système. Si le modèle n'est pas connu avec précision, la linéarisation peut conduire à une dynamique instable. De plus, elle ne permet pas d'obtenir de bonnes perfor-

mances de vol dans des conditions de fonctionnement non nominales, où les angles d'attitude sont importants. Une autre approche est le contrôle non linéaire. Celle-ci est souvent difficile à mettre en œuvre sur de petits microprocesseurs. Cependant, ces techniques de contrôle non linéaire améliorent les performances et la robustesse par rapport aux techniques linéaires, en compensant les effets non linéaires sur la dynamique.

L'objectif de ce travail est de résoudre le problème du suivi de la trajectoire du quadri-rotor qui est exposé à des perturbations externes. Comme le système est sous actionné, cela nécessite le passage par une technique de contrôle hiérarchique. Après un état de l'art sur les drones présenté dans le premier chapitre, nous présenterons dans le second chapitre le modèle dynamique du quadri-rotor en utilisant le formalisme de Newton-Euler. Ce modèle présente un défi intéressant concernant les non-linéarités, le couplage entre la dynamique de rotation et de translation, les forces aérodynamiques et l'état du système qui est sous actionné.

La loi de commande doit compenser la force de gravité, les effets gyroscopiques et les perturbations atmosphériques pour permettre au quadrirotor de générer les forces et les couples nécessaires à l'exécution la tâche imposée. Dans le troisième chapitre, nous étudierons deux lois de commande non linéaires : la commande par mode glissant et la commande par backstepping. Le quatrième chapitre traite la commande par un observateur de perturbations en temps fini (FTDO).

L'efficacité des méthodes proposées a été clairement démontrée par les résultats obtenus lors des différentes simulations réalisées sur MATLAB/Simulink.

Chapitre 1

Les drones : Etat de l'art

Sommaire

1.1	Introduction	17
1.1.1	Histoire des drones	17
1.2	Domaines d'utilisation des drones	17
1.2.1	Le domaine militaire	17
1.2.2	Le domaine civil	18
1.3	Classification des drones	19
1.3.1	Selon le rayon d'action, l'endurance et l'altitude R.E.A	19
1.3.2	Selon la configuration de la propulsion	21
1.4	Les capteurs pour la navigation et la localisation	23
1.4.1	Les centrales inertielles	23
1.4.2	Le système de géolocalisation GPS	25
1.4.3	Les télémètres	25
1.4.4	Les altimètres barométriques	25
1.4.5	Capteur de vision	25
1.5	Conclusion	26

Résumé

Dans ce chapitre, nous décrivons trois parties essentielles : d'abord un bref historique des drones et leurs diverses applications, puis une classification des systèmes aériens selon deux critères : le rayon d'action, l'endurance et l'altitude et selon la configuration de propulsion. Enfin, une description des différents capteurs de navigation et de localisation.

1.1 Introduction

Le terme drone provient de l'armée du nom de cibles remorquées par avion. De véritables programmes de drones existaient pendant la seconde guerre mondiale, mais ce n'est que très récemment que les drones sont devenus un élément clé de la société dans les sphères militaires et civiles [1].

Un drone ou encore UAV (Unmanned Aerial vehicle) est un avion sans pilote à bord qui possède une certaine autonomie et une capacité de décision. Les véhicules aériens sans pilote ont une charge utile pour l'équipement nécessaire à l'accomplissement des missions pour lesquelles ils sont utilisés. Il convient de noter que le mot drone peut également désigner des véhicules terrestres ou sous-marins autonomes. Toutefois, il est courant de réserver son utilisation aux véhicules aériens autonomes [2].

1.1.1 Histoire des drones

Le concept de drone s'est d'abord développé pendant la Seconde Guerre mondiale. Seuls certains dirigeants militaires et politiques de l'époque ont apprécié le potentiel du drone et son impact futur sur la guerre. C'est au cours des guerres de Corée et du Vietnam que les drones ont connu un grand essor. Le contexte de la guerre froide a cependant rendu nécessaire le développement secret de cette nouvelle arme stratégique. Les drones ont alors permis de minimiser les risques humains lors des interventions militaires et ils sont utilisés pour la surveillance, la collecte de renseignements et l'intervention militaire en territoire ennemi. Au fil du temps, ces dispositifs ont bénéficié des progrès technologiques dans les domaines des télécommunications et de l'automatisme, ce qui a permis la mise sur le marché de petits drones (jusqu'à 30 kg) au cours des dernières années. Aujourd'hui, le développement des drones reste un domaine de recherche très actif dans le monde, tant pour les applications civiles que militaires [3].

1.2 Domaines d'utilisation des drones

1.2.1 Le domaine militaire

Les drones ont d'abord été introduits dans le domaine militaire. Ils ont été utilisés pour les conflits, la surveillance (maritime, aérienne et du trafic), le renseignement et les missions de reconnaissance ainsi que pour d'autres applications diverses telles que la gestion des catastrophes, l'évaluation des dommages et l'inspection des pistes.



FIGURE 1.1 – Exemple de drone dans le domaine militaire.

1.2.2 Le domaine civil

Les drones ont de nombreuses applications dans la vie quotidienne. Aujourd'hui, ils occupent plusieurs domaines parmi les :

- ➔ Agriculture et environnement : mesure de la santé d'un champ, épandage, recensement de la flore ou de la faune ;
- ➔ Le domaine média et artistique : photographie aérienne, vidéo ;
- ➔ Les drones ambulanciers : dédiés pour les missions de sauvetage. C'est l'application la plus importante des drones car elle permet d'augmenter les chances de survie ;
- ➔ Drone de surveillance : la surveillance des zones d'intérêts comme les frontières ou le trafic autoroutier ;
- ➔ Envoi et livraison : un sujet intéressant pour différentes entreprises utilisé pour la livraison des paquets aux clients.
- ➔ L'inspection d'infrastructures telles que les pipelines, les lignes électricité ou les barrages hydrauliques ;
- ➔ Les opérations de stérilisation : lors de la pandémie de Covid-19, l'Émirat de Dubaï a utilisé des drones pour stériliser la ville pendant la nuit afin de garantir la santé et la sécurité publiques [4].

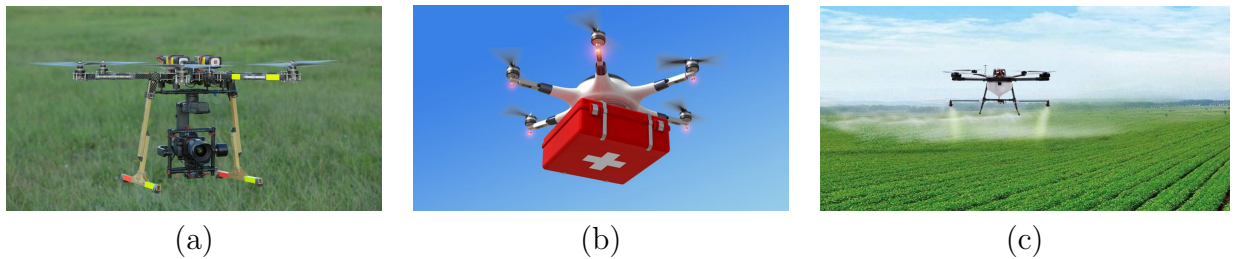


FIGURE 1.2 – Exemples de drones dans le domaine civil : (a) Cinéma (b) Ambulancier (c) Agriculture.

1.3 Classification des drones

Il existe de nombreux types de drone classifiés selon différents critères : le rayon d'action, le mode de vol et le nombre de retours [5].

1.3.1 Selon le rayon d'action, l'endurance et l'altitude R.E.A

Drones HALE

Ce type de drone peut voler à une altitude de 20 000 mètres avec un rayon d'action de plusieurs milliers de kilomètres et une autonomie d'environ trente 30 heures. Il possède une charge utile importante et est équipé de diverses caméras et de radars.

Drones MALE

Ils peuvent voler entre 5 000 et 15 000 mètres d'altitude et ils ont une autonomie d'une trentaine d'heures.



FIGURE 1.3 – HALE et MALE : (a) RQ-4 Global Hawk – (b) CH-4.

Drones de combat UCAV

Les drones de combat peuvent voler à une altitude de 12 200 mètres avec un rayon d'action de 2 800 kilomètres. Ils sont équipés de systèmes d'armes ou de recueils de renseignements. Ils sont conçus pour effectuer des missions de reconnaissance, d'attaque, de tir et d'occupation de l'espace aérien sur de très longues périodes. Ils se déplacent à plus de 1 000 kilomètres par heure à une altitude de 12 200 mètres.

Drones tactiques TUAV

Les drones TUAV peuvent voler à une altitude opérationnelle de 200 à 5 000 mètres. Ils ont un rayon d'action jusqu'à plus de cent kilomètres, une autonomie d'une dizaine d'heures.



(a)



(b)

FIGURE 1.4 – UCAV et TUAV : (a) X-47 B – (b) MQ-1 predator.

Mini drones MAV

Ils peuvent voler à une altitude de 300 mètres, fonctionnant à des distances allant jusqu'à environ 30 kilomètres. Ils ont une endurance de quelques heures et des dimensions de l'ordre du mètre. Ils possèdent une charge utile très légère.

Micro / Nano drones

Ce sont des appareils de moins de quinze centimètres de taille, d'un poids qui ne dépasse pas quelques centaines de grammes. Leurs autonomies est d'une vingtaine de minutes pour un rayon d'action d'une dizaine de kilomètres.

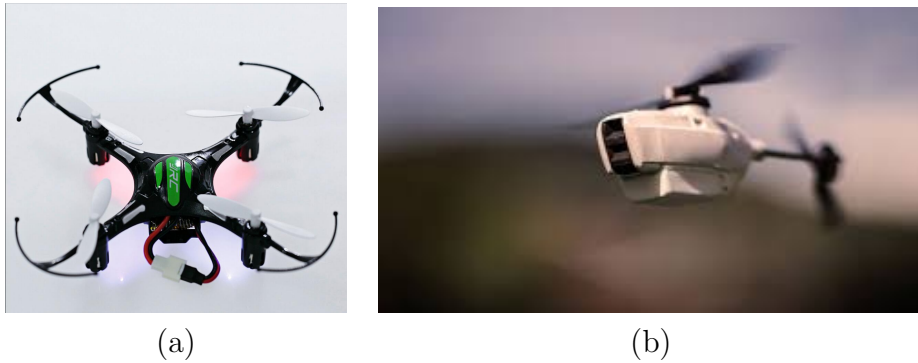


FIGURE 1.5 – Mini et nano drone : (a) JJRC H8 – (b) PD-100 Black Hornet.

1.3.2 Selon la configuration de la propulsion

Drone à voilure fixe

Ce type de drone se compose d'une paire d'ailes, d'un fuselage, d'un empennage et d'un ensemble d'hélices. Les configurations de ce type offrent au véhicule une plus grande autonomie.

Parmi les inconvénients de cette configuration, il est nécessaire de prévoir des pistes pour le décollage et l'atterrissage afin qu'elle n'assure pas le vol stationnaire.



FIGURE 1.6 – Drone à voilure fixe.

Drones à ailes battantes ou ornithoptères

Les ailes battantes assurent le guidage et le pilotage de ce type de drone. La construction des trajectoires est similaire à celle des insectes ou des colibris. Les battements des ailes assurent le vol stationnaire et permettent d'effectuer des missions en intérieur ou dans des espaces réduits.



FIGURE 1.7 – Drone à ailes battantes : eBee.

Drone à voilure tournante ou VTOL

Ce genre de drone ne nécessite pas de piste car il permet de décoller, de voler et d'atterrir verticalement. Il a besoin d'ailes tournantes pour voler en mode de vol stationnaire. En général, ce type de véhicule peut effectuer des missions qui ne peuvent pas être réalisées par ceux à voilure fixe, comme la surveillance.

Les drones à voilure tournante peuvent être classés en fonction du nombre de rotors :

- ➔ **Mono-rotor** : Ces véhicules ont un seul rotor puissant qui assure un décollage vertical et ont également des ailes de grandes surfaces pour générer un couple assez grand qui permette de piloter le véhicule. Son avantage est qu'il donne la possibilité de se déplacer rapidement tout en économisant l'énergie [6] ;
- ➔ **Birotor** : Ce type de drone possède deux rotors contrarotatifs de même taille. Il existe deux catégories de ce genre de drone : les drones qui utilisent un ou deux plateaux cycliques et ceux qui utilisent des pales à pas fixe. Parmi ceux qui utilisent des plateaux cycliques, nous avons l'hélicoptère classique avec un rotor principal et un rotor de queue [6] ;
- ➔ **Tri-rotor** : Les drones à trois rotors sont composés principalement de deux rotors placés aux extrémités de l'axe qui tourne dans des sens opposés et d'un rotor de queue placé à l'arrière avec une orientation réglable [6] ;
- ➔ **Multi-rotors** : Ce type de drone a plusieurs rotors. Le drone à quatre hélices ou quadri-rotor est le plus populaire parmi les véhicules multi rotors. Il est constitué de quatre rotors placés aux extrémités d'une structure physique en forme de croix. Parmi ses avantages, il peut emporter des poids élevés [6].

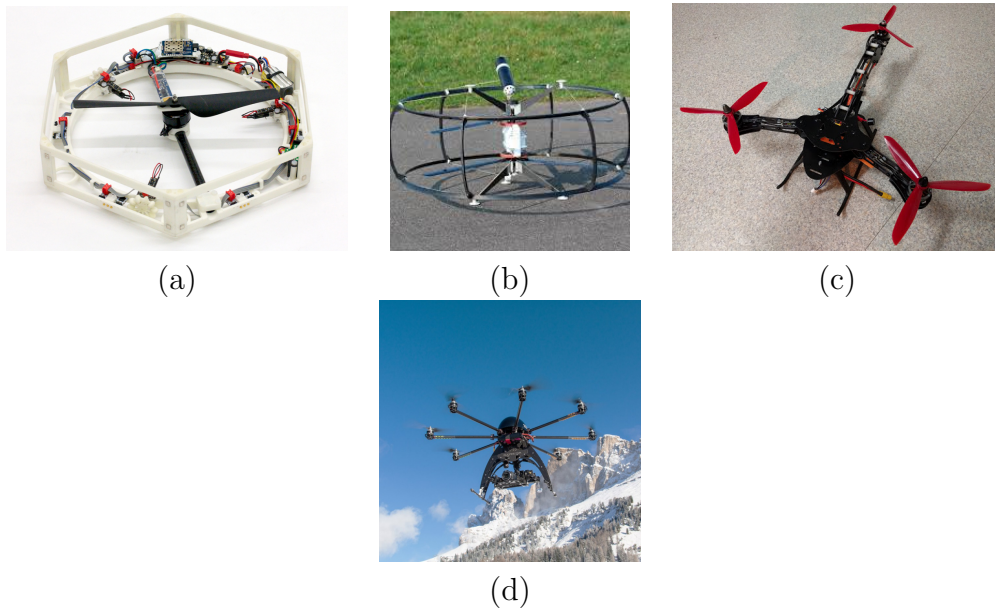


FIGURE 1.8 – Drones à voilures tournantes : (a) Mono-rotor (b) Birotor (c) Tri-copter : HJ-Y3 (d) Multi-rotor : G4-eagle.

1.4 Les capteurs pour la navigation et la localisation

Cette section présente les différents capteurs intégrés dans les drones qui sont nécessaires pour assurer leur stabilité. On peut distinguer trois catégories [7] :

- ➔ **Capteurs proprioceptifs** : ces capteurs fournissent des informations sur la position, la vitesse ou encore l'accélération de l'engin par rapport à un état de référence ;
- ➔ **Capteurs extéroceptifs** : ils fournissent des informations sur l'environnement du drone.
- ➔ **Capteurs exproprioceptifs** : ce type se situe entre les capteurs proprioceptifs et extéroceptifs.

1.4.1 Les centrales inertielles

La centrale inertielle est l'un des principaux composants d'un véhicule aérien. Cet ensemble regroupe trois accéléromètres, trois gyromètres et trois magnétomètres permettant de mesurer les accélérations non-gravitationnelles ainsi que les vitesses de rotation sur les trois axes du repère mobile par rapport au repère inertiel [7].

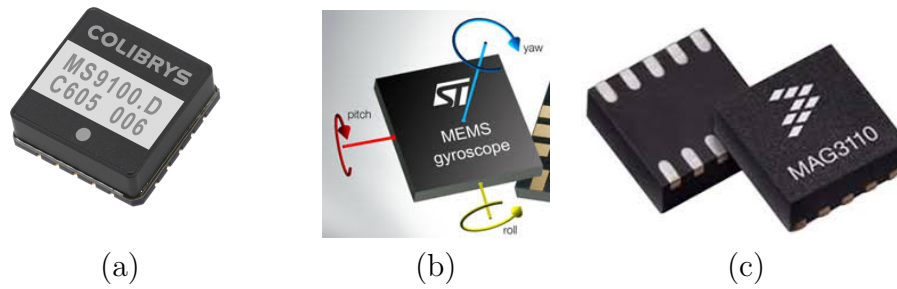


FIGURE 1.10 – Capteurs MEMS : (a) Accéléromètre (b) Gyromètre (c) Magnéto-
mètre.

1.4.2 Le système de géolocalisation GPS

Le Global Positioning System, qu'on peut le traduire en français par le système de positionnement global, est un système de positionnement et de navigation par satellite. Ce système utilise vingt-quatre satellites répartis sur six orbites, quatre satellites par orbite qui tournent autour de la terre avec une fréquence de deux tours en vingt-quatre heures et situés à une altitude de 20 184 kilomètres [5].

1.4.3 Les télémètres

Le télémètre est un capteur actif permettant de mesurer la distance entre un objet et l'obstacle le plus proche. Il utilise différents signaux (laser, ultrasons, ondes radio). Ils sont généralement utilisés dans les phases de décollage et d'atterrissage pour mesurer la distance au sol et même pour détecter des murs ou des obstacles [5].

1.4.4 Les altimètres barométriques

Ce capteur est utilisé pour déterminer l'altitude entre le niveau du capteur et le niveau de référence. Les mesures de l'altimètre barométrique sont très sensibles aux changements des conditions atmosphériques (rafales de vent) [5].

1.4.5 Capteur de vision

Le capteur de vision est l'une des sources d'information utilisées pour positionner un véhicule dans un environnement. Contrairement au GPS, qui donne une mesure absolue de la position et de la vitesse du véhicule et qui est parfois faible ou indisponible à certains endroits, l'utilisation de caméras permet d'obtenir des mesures relatives aux objets observés.

Ils sont donc utilisés pour positionner le véhicule relativement à des objets. La stéréovision est une technique de vision basée sur l'utilisation de plusieurs caméras généralement deux ou trois caméras. L'idée de cette technique est de combiner les différents points de vue, ce qui permet d'enrichir l'information en la comparant avec celle d'une vue unique [5, 7].

1.5 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons brièvement présenté l'histoire des drones depuis leur apparition jusqu'à aujourd'hui. Nous avons ensuite présenté leurs applications dans divers domaines militaires et civils. Nous avons également classé les drones selon deux critères : selon leur rayon d'action, l'endurance et l'altitude (R.E.A) et selon leur configuration de propulsion. Les différents capteurs nécessaires pour assurer la stabilité des drones ont également été présentés dans ce chapitre.

Chapitre 2

Modélisation dynamique du quadri-rotor

Sommaire

2.1	Introduction	29
2.2	Le quadri-rotor	29
2.3	Le principe de vol du quadri-rotor	30
2.4	Les repères	30
2.5	L'orientation du quadri-rotor	31
2.6	Mouvements du quadri-rotor	31
2.6.1	Mouvement de roulis	31
2.6.2	Mouvement de tangage	32
2.6.3	Mouvement de lacet	32
2.7	Modes de vol d'un quadri-rotor	33
2.7.1	Vol vertical	33
2.7.2	Vol horizontal	34
2.7.3	Vol stationnaire	34
2.8	Bilan des forces appliquées	34
2.8.1	Force de pesanteur	34
2.8.2	Les forces de poussée	34
2.8.3	Les forces de traînée	35
2.9	Bilan des moments	35
2.9.1	Moments dus aux forces de poussée	35
2.9.2	Moments dus aux forces de traînée	36
2.9.3	Moment dus aux effets gyroscopiques	36
2.10	Modélisation dynamique du quadri-rotor	37

2.10.1	Angles d'Euler	37
2.10.2	Vitesses angulaires	39
2.10.3	Vitesses linéaires	41
2.10.4	Développement du modèle mathématique selon Newton-Euler	41
2.10.5	Équation de mouvement de translation :	43
2.10.6	Équation de mouvement de rotation	44
2.10.7	La dynamique des rotors	46
2.11	Représentation d'état du système	48
2.12	Conclusion	49

Résumé

Dans ce chapitre, nous présentons le principe de fonctionnement du quadri-rotor. Nous décrivons également les différents mouvements possibles pour synthétiser un modèle dynamique qui caractérise le comportement du quadri-rotor en se basant sur le formalisme de Newton-Euler. Cette modélisation facilite ensuite l'application des différentes lois de commande.

2.1 Introduction

Ce chapitre est consacré à la modélisation des drones à voilure tournante, plus précisément des quadri-rotors. La modélisation des véhicules aériens autonomes est relativement complexe [5], et la complexité s’amplifie pour les drones miniatures en raison du nombre d’effets physiques qui entrent en jeu, à savoir les effets aérodynamiques, la gravité, les effets gyroscopiques, le frottement et le moment d’inertie [2]. Cette complexité résulte de la différence de ces effets entre chaque mode de vol. Dans ce chapitre, nous proposons de modéliser la dynamique du quadri-rotor et d’établir les équations du mouvement de translation et de rotation en utilisant le formalisme de Newton-Euler. Il est important de bien comprendre le comportement du drone, son environnement et sa dynamique afin de synthétiser un bon contrôleur et d’avoir une simulation aussi proche que possible du système réel.

2.2 Le quadri-rotor

Le quadri-rotor est un drone miniature avec six degrés de liberté, trois degrés pour la translation et le reste pour la rotation. Il possède quatre moteurs généralement placés aux extrémités d’une croix, et des capteurs inertiels, ces derniers se situent au centre de masse du véhicule [8]. Cet appareil présente certains avantages par rapport à d’autres configurations, comme la simplicité de la mécanique grâce à sa symétrie. Le quadri-rotor est alimenté en électricité, ce qui représente un autre avantage écologique. La faible autonomie du quadri-rotor représente un inconvénient majeur, le drone ne peut se déplacer que de 16 kilomètres avant d’avoir besoin d’être rechargé. Notant également qu’il s’agit d’un système sous-actionné, ce qui induit une difficulté dans la conception du système de commande.



FIGURE 2.1 – Exemple de quadri-rotors.

2.3 Le principe de vol du quadri-rotor

Le vol de l'engin est assuré par la somme des poussées générées par les quatre rotors. Il est nécessaire que chacun des deux moteurs adjacents tourne dans un sens opposé pour neutraliser les forces, cette configuration permet d'éviter le mouvement de lacet, c'est-à-dire que le drone ne tourne pas sur lui-même. Pour piloter le déplacement du quadri-rotor, il suffit de créer une différence entre les couples des moteurs placés l'un en face de l'autre.

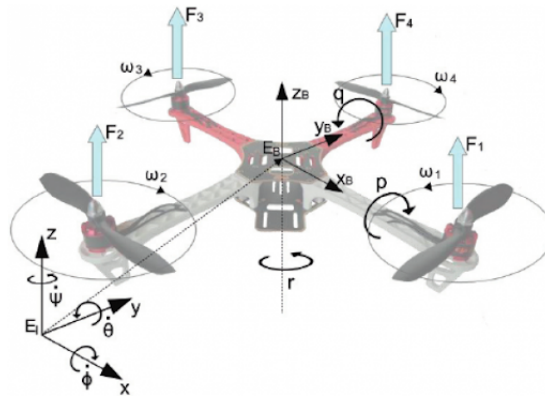


FIGURE 2.2 – Représentation des forces, des repères et des différents mouvements.

2.4 Les repères

Le quadri-rotor est un système qui peut être considéré comme un corps rigide se déplaçant dans un fluide. Le mouvement de ce corps est principalement décrit par deux repères :

Le repère inertiel $\{E\}$: supposé Galiléen, lié à la terre, ayant un point de référence O et défini par $E \{O, X, Y, Z\}$. où $\{X\}$ pointe vers le Nord, $\{Y\}$ pointe vers l'Est et $\{Z\}$ pointe vers le haut. Le système d'axe $\{X, Y, Z\}$ est illustré par la figure (2.3).

Le repère de navigation (engin ou mobile) $\{B\}$: lié au centre de gravité G de la structure du drone et défini par $B \{x', y', z'\}$ où $\{x'\}$ pointe vers l'avant du véhicule, $\{y'\}$ orienté vers la droite du véhicule $\{z'\}$ pointe vers le haut. Le système d'axe $\{x', y', z'\}$ est illustré par la figure (2.3).

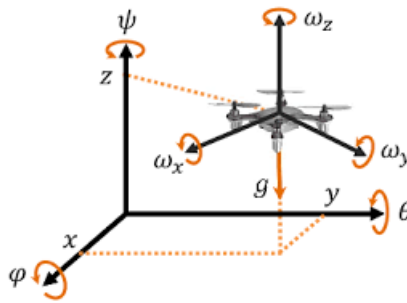


FIGURE 2.3 – Repères utilisés pour décrire le mouvement du drone.

2.5 L'orientation du quadri-rotor

les angles d'Euler (ϕ, θ, ψ) représentent respectivement le roulis, le tangage et le lacet, Où ϕ représente l'angle de rotation selon x , θ représente l'angle de rotation selon y et ψ représente l'angle de rotation selon z . Ces angles déterminent au fil du temps l'orientation du repère mobile par rapport au repère inertiel.

2.6 Mouvements du quadri-rotor

Le quadri-rotor se compose de 4 rotors, les rotors droit et gauche (1 et 3) tournent dans le sens des aiguilles d'une montre, tandis que les autres rotors avant et arrière (2 et 4) tournent dans le sens inverse. Cette configuration permet de neutraliser le mouvement du drone [9].

Le quadri-rotor génère trois mouvements principaux :

- ➔ Mouvement de roulis ;
- ➔ Mouvement de tangage ;
- ➔ Mouvement de lacet.

2.6.1 Mouvement de roulis

Pour réaliser ce mouvement, nous appliquons une variation de vitesse entre le rotor 2 et 4 tout en gardant la même vitesse pour les rotors 1 et 3, ce qui introduit un couple autour de l'axe x qui génère une rotation autour de cet axe. Ce mouvement est couplé à un mouvement de translation le long de l'axe y .

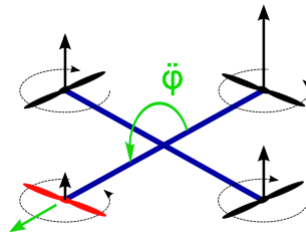


FIGURE 2.4 – Illustration du mouvement de roulis.

2.6.2 Mouvement de tangage

Pour réaliser ce mouvement, une variation de vitesse est appliquée entre les rotors 1 et 3 tout en gardant la même vitesse pour les rotors 2 et 4. Un couple autour de l'axe y est introduit ce qui génère une rotation autour de cet axe. Ce mouvement est couplé avec un mouvement de translation le long de l'axe x .

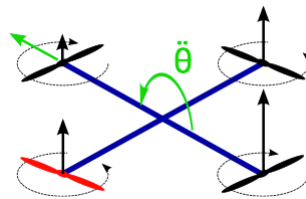


FIGURE 2.5 – Illustration du mouvement de tangage.

2.6.3 Mouvement de lacet

Pour avoir un mouvement de rotation à droite ou à gauche, nous augmentons la vitesse de rotation des deux moteurs qui tournent dans le sens où nous voulons faire tourner le quadri-rotor, tout en diminuant la vitesse de rotation des moteurs qui tournent dans le sens opposé. Cette technique garantit que la force de portance demeure la même.

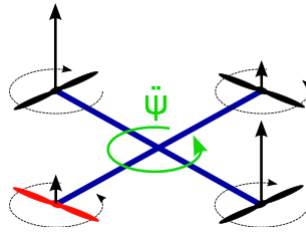


FIGURE 2.6 – Illustration du mouvement de lacet.

2.7 Modes de vol d'un quadri-rotor

Le quadrirotor peut effectuer trois modes de vol en se basant sur les trois mouvements :

- ➔ Vol vertical ;
- ➔ Vol horizontale ;
- ➔ Vol stationnaire.

2.7.1 Vol vertical

Ce mouvement est assuré par la force de portance. Les vitesses des quatre rotors doivent être égales afin de ne pas créer de rotation. Le mouvement ascendant ou descendant est obtenu en faisant varier la rotation des moteurs, par exemple :

- ➔ Afin d'avoir un mouvement ascendant, une vitesse de rotation élevée est appliquée de sorte que la portance soit supérieure à la gravité ;
- ➔ Pour avoir un mouvement descendant, une faible vitesse de rotation est appliquée afin que la portance soit inférieure à la gravité.

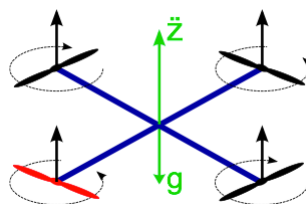


FIGURE 2.7 – Illustration du mouvement vertical.

2.7.2 Vol horizontal

Pour obtenir ce mode de vol, il suffit d'appliquer un écart de vitesse entre 2 rotors opposés et de conserver une vitesse moyenne pour les deux autres. Dans ce cas, la translation se fera vers la direction du rotor qui porte la force de poussée la plus faible.

2.7.3 Vol stationnaire

On parle de vol stationnaire lorsque le véhicule reste immobile, c'est-à-dire lorsque la force de gravité est égale à celle de la portance et qui sont dans deux directions opposées.

2.8 Bilan des forces appliquées

La modélisation des forces et des moments appliqués au quadri-rotor reste un problème majeur en raison de la complexité des phénomènes aérodynamiques agissant sur le véhicule. La figure (2.8) montre les différentes forces agissant sur le système et qui sont définies par les relations suivantes :

2.8.1 Force de pesanteur

Le poids du drone P , exprimé en E par :

$$P = m g \quad (2.1)$$

avec m la masse totale et g l'accélération de pesanteur.

2.8.2 Les forces de poussée

La poussée est la principale force générée par la rotation des rotors. Elle détermine la direction du vol du drone; cette force est orthogonale au plan des hélices. La somme des forces de poussée générées par chaque rotor représente la portance.

$$F_i = b \omega_i^2 \quad (2.2)$$

avec $i = \overline{1,4}$ et b est le coefficient aérodynamique qui dépend de la géométrie des pales et de l'environnement du véhicule et ω la vitesse angulaire des rotors.

2.8.3 Les forces de traînée

La traînée est la force de résistance qui s'oppose au mouvement du drone. Elle est parallèle aux filets d'air du vent. Cette force crée un couple de traînée. Nous avons deux forces de traînée dans ce système :

La traînée dans les hélices : elle agit sur les pales, elle est donnée par la relation suivante :

$$T_h = d w_i^2 \quad (2.3)$$

avec $i = \overline{1,4}$ et d est le coefficient de traînée, il dépend de la construction de l'hélice.

La traînée selon les axes (x, y, z) elle est due au mouvement du corps du quadri-rotor.

$$F_t = K_{ft} V \quad (2.4)$$

avec K_{ft} : Le coefficient de la force de traînée en translation et V : la vitesse linéaire.

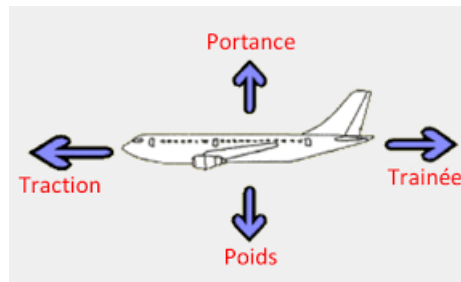


FIGURE 2.8 – Illustration des principales forces.

2.9 Bilan des moments

Les moments agissant sur le quadri-rotor sont dus à des forces de poussée, de traînée et à des effets gyroscopiques.

2.9.1 Moments dus aux forces de poussée

Autour de l'axe des x : Il est dû à la différence des forces de poussée entre les rotors 2 et 4. Ce moment est donné par la relation suivante :

$$M_x = l(F_4 - F_2) = lb(w_4^2 - w_2^2) \quad (2.5)$$

avec l est la distance entre le centre de masse du quadri-rotor et l'axe de rotation du rotor.

Autour de l'axe des y : Il est dû à la différence des forces de poussée entre les rotors 1 et 3. Ce moment est donné par la relation suivante :

$$M_y = l(F_3 - F_1) = lb(w_3^2 - w_1^2) \quad (2.6)$$

où l est la distance entre le centre de masse du quadri-rotor et l'axe de rotation du rotor.

2.9.2 Moments dus aux forces de traînée

Autour de l'axe des z : c'est dû aux couples de traînée créés par chaque hélice. Ce moment est donné par la relation suivante :

$$M_z = d(w_1^2 - w_2^2 + w_3^2 - w_4^2) \quad (2.7)$$

Moment résultant des frottements aérodynamiques : c'est le moment résultant des frottements aérodynamiques, il est déterminé par :

$$M_a = K_{fa} \Omega^2 \quad (2.8)$$

où K_{fa} est le coefficient des frottements aérodynamiques et Ω est la vitesse angulaire du quadri-rotor.

2.9.3 Moment dus aux effets gyroscopiques

La rotation simultanée au tour de deux axes perpendiculaires génère une troisième rotation autour de l'axe perpendiculaire aux deux précédents. C'est un moment parasite qui induit des rotations non désirées de l'engin. Dans ce système, nous avons deux moments gyroscopiques.

Moment gyroscopique des hélices : L'effet gyroscopique provient de deux rotations, la première est la rotation des hélices autour de l'axe z et la seconde est la rotation de l'engin selon l'un des deux axes x ou y .

$$M_{gh} = \sum_{i=1}^4 \Omega \wedge J_r [0 \quad 0 \quad (-1)^{i+1} w_i]^T \quad (2.9)$$

avec J_r l'inertie des rotors.

Moment gyroscopique dû aux mouvements du quadri-rotor : Si l'engin tourne au tour de deux axes en même temps, cela provoque une troisième rotation. Ce moment est donné par la relation suivante :

$$M_{gm} = \Omega \wedge J\Omega \quad (2.10)$$

avec J l'inertie du système.

2.10 Modélisation dynamique du quadri-rotor

La modélisation des véhicules aériens est un problème majeur a cause de la non-linéarité du giravion. Pour comprendre mieux le modèle et faciliter le travail, l'étude par la suite est basée sur les hypothèses suivantes :

- La structure de l'engin est supposée rigide ;
- La structure du système est supposée symétrique, ce qui implique que la matrice d'inertie sera supposée diagonale ;
- Pour négliger l'effet de déformation des hélices lors de la rotation, elles sont supposées rigides ;
- Le centre de masse coïncide avec l'origine du repère lié à la structure.
- Les forces de poussée et de traînée de chaque moteur sont proportionnelles aux carrés de la vitesse de rotation des rotors, ce qui conduit a une approximation très proche du comportement aérodynamique.

2.10.1 Angles d'Euler

La matrice de rotation permet d'identifier l'orientation de tout système de coordonnées dans les trois dimensions de l'espace. Cette matrice permet de passer du repère mobile B au repère inertiel E afin de représenter les forces et les moments agissant sur le quadri-rotor dans le repère fixe. Les angles d'Euler sont utilisés pour définir cette matrice :

- L'angle du Roulis ϕ tel que : $-\frac{\pi}{2} < \phi < \frac{\pi}{2}$;
- L'angle du tangage θ tel que : $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$;
- L'angle du lacet ψ tel que : $-\pi < \psi < \pi$.

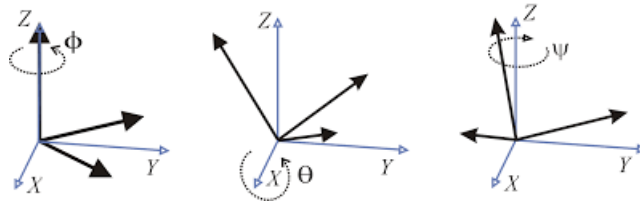


FIGURE 2.9 – Les angles d'Euler.

La figure (2.9) ci-dessous montre les trois mouvements de rotation :

Pour effectuer le passage du repère mobile au repère inertiel, il est nécessaire de passer par les trois rotations autour des trois axes [3] :

$$E(X, Y, Z) \xrightarrow{H_\psi} R_1(x_1, y_1, z_1 = Z) \xrightarrow{H_\theta} R_2(x_2, y_2 = y_1, z_2) \xrightarrow{H_\phi} B(x' = x_2, y', z')$$

➔ La première rotation autour de l'axe Z est d'angle ψ amène le repère E en R_1 :

$$R_1 = H_\psi \times E \iff E = H_\psi^{-1} \times R_1;$$

➔ La seconde rotation autour de l'axe y_1 est d'angle θ amène le repère R_1 en R_2 :

$$R_2 = H_\theta \times R_1 \iff R_1 = H_\theta^{-1} \times R_2;$$

➔ La dernière rotation autour de l'axe x_2 est d'angle ϕ amène le repère R_2 en B :

$$B = H_\phi \times R_2 \iff R_2 = H_\phi^{-1} \times B.$$

où

$B(x', y', z')$ est le repère mobile, et $E(X, Y, Z)$ est le repère inertiel ;

$R_1(x_1, y_1, z_1)$ et $R_2(x_2, y_2, z_2)$ sont des bases intermédiaires ;

H_ψ , H_θ et H_ϕ sont les matrices de rotation orthogonales.

et

$$H_\psi = \begin{bmatrix} c\psi & s\psi & 0 \\ -s\psi & c\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, H_\theta = \begin{bmatrix} c\theta & 0 & -s\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ s\theta & 0 & c\theta \end{bmatrix}, H_\phi = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c\phi & s\phi \\ 0 & -s\phi & c\phi \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

notant

$$\begin{cases} H_\psi^{-1} = Rot_{z\psi} \\ H_\theta^{-1} = Rot_{y\theta} \\ H_\phi^{-1} = Rot_{x\phi} \end{cases} \quad (2.12)$$

En multipliant les trois matrices, nous pouvons exprimer la matrice de rotation ou encore la matrice de passage :

$$R = Rot_{z\psi} \times Rot_{y\theta} \times Rot_{x\phi}$$

$$R = \begin{bmatrix} c\psi & -s\psi & 0 \\ s\psi & c\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} c\theta & 0 & s\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -s\theta & 0 & c\theta \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c\phi & -s\phi \\ 0 & s\phi & c\phi \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

donc

$$R = \begin{bmatrix} c\psi c\theta & s\phi s\theta c\psi - s\psi c\phi & c\phi s\theta c\psi + s\psi s\phi \\ s\psi c\theta & s\phi s\theta s\psi + c\psi c\phi & c\phi s\theta s\psi - s\phi c\psi \\ -s\theta & s\phi c\theta & c\phi c\theta \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

avec : $c = \cos, s = \sin$

2.10.2 Vitesses angulaires

La relation entre le vecteur de vitesse de rotation instantanée $\Omega(t)$ et la variation des angles d'Euler $\dot{\eta}$ représente la cinématique de rotation.

On définit :

→ $\Omega = [\Omega_x \quad \Omega_y \quad \Omega_z]$ la vitesse de rotation entre $\{E\}$ et $\{B\}$ exprimé dans le repère engin $\{B\}$;

→ $\dot{\eta} = [\dot{\phi} \quad \dot{\theta} \quad \dot{\psi}]$ la variation des angles d'Euler exprimée dans le repère inertiel $\{E\}$.

Il s'agit alors de projeter les axes Z, y_1 et x_2 dans le repère engin $\{B\}$, et qui représentent les vecteurs de direction des angles ϕ, θ et ψ .

Puisque $\Omega(t)$ est de la forme [3] :

$$\Omega(t) = \dot{\psi} \quad Z + \dot{\theta} \quad y_1 + \dot{\phi} \quad x_2$$

En résulte :

→ Les composantes de x_2 dans R_2 sont les mêmes que dans B , c'est-à-dire que

$$x_2 = x' = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix};$$

→ Les vecteurs y_1 et y_2 sont identiques, alors $y_1 = [0 \ 1 \ 0]_{R_2}^T$, et ce qui permet d'exprimer y_1 dans B , donc

$$y_1 = H_\phi \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}_{R_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ \cos \phi \\ -\sin \phi \end{bmatrix}; \quad (2.15)$$

→ Le vecteur Z a des composantes dans E , c'est-à-dire : $Z = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}_E$ et alors pour l'exprimer dans B

$$Z = H_\phi H_\theta H_\psi \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}_E = R^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}_E = \begin{bmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \sin \phi \\ \cos \theta \cos \phi \end{bmatrix}. \quad (2.16)$$

Finalement

$$\Omega = \begin{bmatrix} \Omega_x \\ \Omega_y \\ \Omega_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -s\theta \\ 0 & c\phi & s\phi c\theta \\ 0 & -s\phi & c\phi c\theta \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} \quad (2.17)$$

Ce qui donne

$$\begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & s\phi \tan \theta & c\phi \tan \theta \\ 0 & c\phi & -s\phi \\ 0 & \frac{-s\phi}{c\theta} & \frac{c\phi}{c\theta} \end{bmatrix}}_{\omega_n} \times \begin{bmatrix} \Omega_x \\ \Omega_y \\ \Omega_z \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

→ ω_n est une matrice singulière, elle montre clairement que dans l'expression (2.18) θ ne doit pas atteindre les valeurs extrêmes $-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}$. Physiquement, cette modélisation est réaliste car l'engin ne doit pas se tourner selon ses angles de roulis ou de tangage ;

- ➔ La modélisation par quaternion est une autre représentation d'orientation, elle peut remplacer les angles d'Euler pour gérer le changement de coordonnées ;
- ➔ Lorsque le quadri-rotor effectue de petites rotations, les approximations suivantes peuvent être faites :

$$\begin{cases} c\phi = c\theta = c\psi = 1 \\ s\phi = s\theta = s\psi = 0 \\ \tan \phi = \tan \theta = \tan \psi = 0 \end{cases} .$$

$$\begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = [\Omega_x \quad \Omega_y \quad \Omega_z]^T \quad (2.19)$$

2.10.3 Vitesses linéaires

Les vitesses linéaires V_x^E, V_y^E, V_z^E dans le repère fixe en fonction des vitesses linéaires V_x^B, V_y^B, V_z^B dans le repère mobile définissent la cinématique de translation de l'engin qui est donnée par :

$$V = \begin{bmatrix} V_x^E \\ V_y^E \\ V_z^E \end{bmatrix} = R \times \begin{bmatrix} V_x^B \\ V_y^B \\ V_z^B \end{bmatrix} \quad (2.20)$$

avec R est la matrice de rotation.

2.10.4 Développement du modèle mathématique selon Newton-Euler

Après la description détaillée de toutes les forces et des différents moments qui agissent sur le système, nous pouvons maintenant élaborer les équations dynamiques du système en utilisant le formalisme de Newton-Euler.

Le système peut être écrit sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{\xi} = V \\ m\ddot{\xi} = F_f + F_g + F_t \\ \dot{R} = R Sk(\Omega) \\ J\dot{\Omega} = -\Omega \wedge J\Omega + M_f - M_{gh} - M_a \end{cases} \quad (2.21)$$

avec

ξ : le vecteur de position du quadri-rotor $[x \ y \ z]^T$;

m : la masse totale du quadri-rotor ;

R : la matrice de rotation ;

\wedge : le produit vectoriel ;

J : la matrice d'inertie symétrique de système de dimension (3×3) .

$$\begin{bmatrix} J_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & J_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & J_{zz} \end{bmatrix} ;$$

$Sk(\Omega)$: le tenseur antisymétrique associé à la vitesse angulaire $\Omega \in \mathbb{R}^3$

Dans le cas où le référentiel engin $\{B\}$ tourne par rapport au référentiel inertiel $\{E\}$ à une vitesse angulaire, au cours du temps la matrice de rotation varie, ce qui donne la relation d'attitude cinématique $\dot{R} = R Sk(\Omega)$.

où :

$$Sk(\Omega) = \begin{bmatrix} 0 & -\Omega_3 & \Omega_2 \\ \Omega_3 & 0 & -\Omega_1 \\ -\Omega_2 & \Omega_1 & 0 \end{bmatrix} ;$$

F_f : la force totale générée par les quatre rotors, elle est donnée par :

$$F_f = R \times [0 \ 0 \ \sum_{i=1}^4 F_i]^T ; \quad (2.22)$$

$$F_i = b \omega_i^2 ; \quad (2.23)$$

F_g : la force de gravité, elle est donnée par :

$$F_g = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -mg \end{bmatrix} ; \quad (2.24)$$

F_t : la force de traînée selon les axes (x, y, z) , elle est donnée par :

$$F_t = - \begin{bmatrix} K_{ftx} & 0 & 0 \\ 0 & K_{f ty} & 0 \\ 0 & 0 & K_{ftz} \end{bmatrix} \dot{\xi} ; \quad (2.25)$$

avec $K_{ftx} K_{f ty} K_{ftz}$: les coefficients de traînée de translation.

M_a : le moment provoqué par le frottement aérodynamique.

$$M_a = \begin{bmatrix} K_{fax} \dot{\phi}^2 \\ K_{fay} \dot{\theta}^2 \\ K_{faz} \dot{\psi}^2 \end{bmatrix}; \quad (2.26)$$

Où $K_{fax}K_{fay}K_{faz}$: les coefficients des frottements aérodynamiques.

M_f : le moment provoqué par les forces de poussée et de traînée.

$$M_f = \begin{bmatrix} l(F_4 - F_2) \\ l(F_3 - F_1) \\ d(\omega_1^2 - \omega_2^2 + \omega_3^2 - \omega_4^2) \end{bmatrix}. \quad (2.27)$$

2.10.5 Équation de mouvement de translation :

Basant sur le formalisme de Newton, on a :

$$m \ddot{\xi} = F_f + F_g + F_t \quad (2.28)$$

En remplaçant chaque force par sa formule, nous trouvons :

$$m \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c\phi s\theta c\psi + s\phi s\psi \\ c\phi s\theta s\psi - s\phi c\psi \\ c\phi c\theta \end{bmatrix} \sum_{i=1}^4 F_i - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ mg \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} K_{ftx} \dot{x} \\ K_{fty} \dot{y} \\ K_{ftz} \dot{z} \end{bmatrix} \quad (2.29)$$

Les équations différentielles du mouvement de translation sont obtenues comme suit :

$$\begin{cases} \ddot{x} = -\frac{K_{ftx}}{m} \dot{x} + \frac{1}{m} (c\phi s\theta c\psi + s\phi s\psi) U_1 \\ \ddot{y} = -\frac{K_{fty}}{m} \dot{y} + \frac{1}{m} (c\phi s\theta s\psi - s\phi c\psi) U_1 \\ \ddot{z} = -g - \frac{K_{ftz}}{m} \dot{z} + \frac{1}{m} (c\phi c\theta) U_1 \end{cases} \quad (2.30)$$

avec :

$$U_1 = b(\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2 + \omega_4^2)$$

2.10.6 Équation de mouvement de rotation

On a :

$$J\dot{\Omega} = -M_{gm} - M_{gh} + M_f - M_a \quad (2.31)$$

On remplace chaque moment par sa formule, on trouve :

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} J_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & J_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & J_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\phi} \\ \ddot{\theta} \\ \ddot{\psi} \end{bmatrix} &= - \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} \wedge \left(\begin{bmatrix} J_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & J_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & J_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} \right) - \begin{bmatrix} J_r g(u) \dot{\theta} \\ -J_r g(u) \dot{\phi} \\ 0 \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} lb(\omega_4^2 - \omega_2^2) \\ lb(\omega_3^2 - \omega_1^2) \\ d(\omega_1^2 - \omega_2^2 + \omega_3^2 - \omega_4^2) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} K_{fax} \dot{\phi}^2 \\ K_{fay} \dot{\theta}^2 \\ K_{faz} \dot{\psi}^2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.32)$$

Les équations différentielles du mouvement de rotation sont obtenues comme suit :

$$\begin{cases} \ddot{\phi} = \frac{J_{yy} - J_{zz}}{J_{xx}} \dot{\theta} \dot{\psi} - \frac{J_r g(u)}{J_{xx}} \dot{\theta} + \frac{U_2}{J_{xx}} - \frac{K_{fax}}{J_{xx}} \dot{\phi}^2 \\ \ddot{\theta} = \frac{J_{zz} - J_{xx}}{J_{yy}} \dot{\phi} \dot{\psi} + \frac{J_r g(u)}{J_{yy}} \dot{\phi} + \frac{U_3}{J_{yy}} - \frac{K_{fay}}{J_{yy}} \dot{\theta}^2 \\ \ddot{\psi} = \frac{J_{xx} - J_{yy}}{J_{zz}} \dot{\phi} \dot{\theta} + \frac{U_4}{J_{zz}} - \frac{K_{faz}}{J_{zz}} \dot{\psi}^2 \end{cases} \quad (2.33)$$

avec :

$$g(u) = \omega_1 - \omega_2 + \omega_3 - \omega_4$$

$$U_2 = lb(\omega_4^2 - \omega_2^2)$$

$$U_3 = lb(\omega_3^2 - \omega_1^2)$$

$$U_4 = d(\omega_1^2 - \omega_2^2 + \omega_3^2 - \omega_4^2)$$

En conséquence, le modèle dynamique complet qui régit le quadri-rotor est le suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \ddot{\phi} = \frac{J_{yy} - J_{zz}}{J_{xx}} \dot{\theta} \dot{\psi} - \frac{J_r g(u)}{J_{xx}} \dot{\theta} - \frac{K_{fax}}{J_{xx}} \dot{\phi}^2 + \frac{U_2}{J_{xx}} \\ \ddot{\theta} = \frac{J_{zz} - J_{xx}}{J_{yy}} \dot{\phi} \dot{\psi} + \frac{J_r g(u)}{J_{yy}} \dot{\phi} - \frac{K_{fay}}{J_{yy}} \dot{\theta}^2 + \frac{U_3}{J_{yy}} \\ \ddot{\psi} = \frac{J_{xx} - J_{yy}}{J_{zz}} \dot{\phi} \dot{\theta} - \frac{K_{faz}}{J_{zz}} \dot{\psi}^2 + \frac{U_4}{J_{zz}} \\ \ddot{x} = -\frac{K_{ftx}}{m} \dot{x} + \frac{1}{m} U_x U_1 \\ \ddot{y} = -\frac{K_{fty}}{m} \dot{y} + \frac{1}{m} U_y U_1 \\ \ddot{z} = -\frac{K_{ftz}}{m} \dot{z} - g + \frac{c\phi c\theta}{m} U_1 \end{array} \right. \quad (2.34)$$

avec :

$$\left\{ \begin{array}{l} U_x = (c\phi s\theta c\psi + s\phi s\psi) \\ U_y = (c\phi s\theta s\psi - s\phi c\psi) \end{array} \right. \quad (2.35)$$

Notant que U_1 U_2 U_3 U_4 sont les entrées de commande de en tension [V] translation selon les axes « x, y, z » et la rotation selon le lacet du système et qui s'écrivent en fonction des vitesses angulaires des quatre rotors comme suit [10] :

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b & b & b & b \\ 0 & -lb & 0 & lb \\ -lb & 0 & lb & 0 \\ d & -d & d & -d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_1^2 \\ \omega_2^2 \\ \omega_3^2 \\ \omega_4^2 \end{bmatrix} \quad (2.36)$$

2.10.7 La dynamique des rotors

En général, les moteurs à courant continu sont les plus utilisés dans le quadri-rotor, ils ont un modèle bien connu. Le rotor peut être défini comme un ensemble d'éléments constitué d'un moteur à courant continu qui entraîne une hélice par l'intermédiaire d'un réducteur.

Le rotor a une dynamique approximée a celle d'un moteur à courant continu, cette dynamique est définit par l'équation différentielle suivante [11] :

$$J_r \dot{w}_i = \tau_i - Q_i \quad i \in \{1, 2, 3, 4\} \quad (2.37)$$

avec

τ_i est le couple d'entrée et $Q_i = d w_i^2$ est le couple résistant généré par le rotor i.

Pour contrôler le quadri-rotor, une boucle de régulation de vitesse est souvent nécessaire. Il faut d'abord déterminer les vitesses désirées de chaque rotor $w_{d,i}$ correspondant aux valeurs de commande fournies par le contrôleur qui sont en réalité les quatre couples de rotor, ces vitesses peuvent être calculées comme suit :

$$\varpi_d = M^{-1}U \quad (2.38)$$

avec

$\varpi_d = (w_{d,1}^2, w_{d,2}^2, w_{d,3}^2, w_{d,4}^2)$, $U = (U_1, U_2, U_3, U_4)$ et M est une matrice non singulier

$$M = \begin{pmatrix} b & b & b & b \\ 0 & -lb & 0 & lb \\ -lb & 0 & lb & 0 \\ d & -d & d & -d \end{pmatrix} \quad (2.39)$$

L'objectif est de synthétiser un contrôleur qui rend $w_i \rightarrow w_{i,d}$ lorsque $t \rightarrow \infty$ en utilisant les couples τ_i .

Définissons l'erreur de vitesse :

$$\tilde{w}_i = w_i - w_{i,d} \quad (2.40)$$

Maintenant, ayant $w_{i,d}$, on peut concevoir τ comme suit :

$$\tau_i = Q_i + J_r \dot{w}_{i,d} - k_i \tilde{w}_i \quad (2.41)$$

avec $k_i, i \in \{1, 2, 3, 4\}$ sont quatre paramètres positifs.

On remplace cette loi de commande dans (2.37), on trouve :

$$\dot{w}_i = -\frac{k_i}{J_r} \tilde{w}_i \quad (2.42)$$

La relation (2.42) représente la dynamique de l'erreur de vitesse, elle montre la convergence exponentielle de w_i vers $w_{i,d}$, lorsque $t \rightarrow \infty$, par conséquent, la convergence des couples vers les valeurs désirées conduisant à la stabilisation du quadri-rotor [11].

Les moteurs à courant continu sont contrôlés par les tensions d'alimentation de ces quatre moteurs, nous devons donc obtenir la tension d'entrée de chaque moteur. En supposant que l'inductance du moteur est faible et en considérant que les moteurs utilisés sont identiques, on peut obtenir la tension à appliquer à chaque moteur comme suit :

$$v_i = \frac{R_a}{k_m k_g} \tau_i + k_m k_g w_i \quad (2.43)$$

où

R_a est la résistance du moteur, k_m est la constante de couple du moteur et k_g est le gain d réducteur.

Comme nous utilisons les mêmes moteurs, tous les paramètres sont les mêmes pour les quatre moteurs. Enfin, la tension v_i est utilisée pour générer le signal modulé en largeur d'impulsion (PWM) pour la commande du moteur i [11].

2.11 Représentation d'état du système

Pour un même système physique, nous pouvons avoir une multitude de représentations d'état, dans notre étude nous choisissons le vecteur d'état suivant [8] :

$$\begin{aligned} X &= [\phi \ \dot{\phi} \ \theta \ \dot{\theta} \ \psi \ \dot{\psi} \ x \ \dot{x} \ y \ \dot{y} \ z \ \dot{z}]^T \\ &= [x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4 \ x_5 \ x_6 \ x_7 \ x_8 \ x_9 \ x_{10} \ x_{11} \ x_{12}]^T \end{aligned}$$

Cela implique la représentation d'état suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = f_1(x) + g_1(x)U_2 \\ \dot{x}_3 = x_4 \\ \dot{x}_4 = f_2(x) + g_2(x)U_3 \\ \dot{x}_5 = x_6 \\ \dot{x}_6 = f_3(x) + g_3(x)U_4 \\ \dot{x}_7 = x_8 \\ \dot{x}_8 = f_4(x) + g_4(x)U_x U_1 \\ \dot{x}_9 = x_{10} \\ \dot{x}_{10} = f_5(x) + g_5(x)U_y U_1 \\ \dot{x}_{11} = x_{12} \\ \dot{x}_{12} = f_6(x) + g_6(x)U_1 \end{array} \right. \quad (2.44)$$

avec :

$$\left\{ \begin{array}{l}
 f_1(x) = \frac{J_{yy} - J_{zz}}{J_{xx}} x_4 x_6 - \frac{J_r g(u)}{J_{xx}} x_4 - \frac{K_{f_{ax}}}{J_{xx}} x_2^2 \\
 g_1(x) = \frac{1}{J_{xx}} \\
 \\
 f_2(x) = \frac{J_{zz} - J_{xx}}{J_{yy}} x_2 x_6 + \frac{J_r g(u)}{J_{yy}} x_2 - \frac{K_{f_{ay}}}{J_{yy}} x_4^2 \\
 g_2(x) = \frac{1}{J_{yy}} \\
 \\
 f_3(x) = \frac{J_{xx} - J_{yy}}{J_{zz}} x_2 x_4 - \frac{K_{f_{az}}}{J_{zz}} x_6^2 \\
 g_3(x) = \frac{1}{J_{zz}} \\
 \\
 f_4(x) = -\frac{K_{f_{tx}}}{m} x_8 \\
 g_4(x) = \frac{1}{m} \\
 \\
 f_5(x) = -\frac{K_{f_{ty}}}{m} x_{10} \\
 g_5(x) = \frac{1}{m} \\
 \\
 f_6(x) = -\frac{K_{f_{tz}}}{m} x_{12} - g \\
 g_6(x) = \frac{\cos\phi \cos\theta}{m}
 \end{array} \right. \quad (2.45)$$

2.12 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté le concept du quadri-rotor, le principe de ses mouvements et les différentes forces et moments qui agissent sur l'engin. Nous avons développé son modèle dynamique et sa représentation d'état en utilisant le formalisme de Newton-Euler.

Nous concluons que le quadri-rotor est un système non linéaire sous-actionné, c'est-à-dire que nous n'avons que quatre commandes et six degrés de liberté, ce qui nécessite des techniques de commande qui seront détaillées dans le prochain chapitre.

Chapitre 3

Commandes robustes d'un quadri-rotor

Sommaire

3.1	Introduction	52
3.2	Pourquoi la commande non-linéaire ?	52
3.3	Stabilité au sens de Lyapunov	53
3.3.1	Notions de base	54
3.3.2	La théorie de Lyapunov	56
3.3.3	Stabilité au sens de Lyapunov	56
3.4	La commande hiérarchique	57
3.5	Le contrôle par mode glissant	58
3.5.1	Systèmes à structure variable	59
3.5.2	Théorie de mode glissant	59
3.5.3	Le choix de la surface de glissement	59
3.5.4	Les modes de la trajectoire dans le plan de phase	60
3.5.5	Phénomène de chattering	60
3.6	Application sur le modèle	61
3.6.1	Application de la commande hiérarchique	61
3.6.2	Application de la commande par mode glissant	62
3.6.3	Le contrôle de l'altitude(z)	63
3.6.4	Le contrôle de roulis (ϕ)	64
3.6.5	Le contrôle de tangage (θ)	64
3.6.6	Le contrôle de lacet (ψ)	64
3.6.7	La commande virtuelle	65
3.7	Résultats de la 1^{ère} simulation	66

3.7.1	Résultats de simulation sans perturbations	68
3.7.2	Résultats de simulation avec perturbations	70
3.7.3	Interprétation	72
3.7.4	Résultats de simulation sans perturbations	72
3.7.5	Résultats de simulation avec perturbations	74
3.7.6	Interprétation	76
3.8	Le contrôle par backstepping	76
3.8.1	Principe de la commande par backstepping	77
3.8.2	Théorie du backstepping	77
3.8.3	Algorithme de super-twisting	81
3.8.4	Définitions, Lemmes et Hypothèses	82
3.9	Application de la commande par backstepping sur le quadri-rotor	83
3.9.1	Le contrôle de l'altitude (z)	88
3.9.2	Le contrôle de roulis (ϕ)	88
3.9.3	Le contrôle de tangage (θ)	88
3.9.4	Le contrôle de lacet (ψ)	89
3.9.5	La commande virtuelle	89
3.10	Résultats de la 2^{ème} simulation	90
3.10.1	Résultats de simulation sans perturbations	90
3.10.2	Résultats de simulation avec perturbations	92
3.10.3	Interprétation	94
3.11	Conclusion	95

Résumé

Le présent chapitre porte un résumé des concepts fondamentaux de la commande non-linéaire, ces concepts nous aident à concevoir le contrôleur. La théorie et la stabilité au sens de Lyapunov seront également présentées. Ensuite, nous abordons les fondements et les aspects théoriques des deux techniques de commande, la première est celle par mode glissant, l'autre est la commande par backstepping et qui seront validées par des simulations sur le modèle du quadri-rotor.

3.1 Introduction

La dynamique d'un quadri-rotor est fortement non linéaire et relativement complexe en raison de la difficulté à modéliser des forces aérodynamiques (le coefficient aérodynamique, masse volumique de l'air et la surface apparente). De même l'incertitude des constantes physiques de l'engin (masse, inertie). Il existe plusieurs lois de commande basées sur la linéarisation du modèle dynamique. Bien que ces approches aient des limitations lorsque le système s'éloigne de son point de fonctionnement. De même, la présence de perturbations peut déstabiliser le système. Par conséquent, on utilise des techniques de commande robuste pour assurer la stabilité du véhicule en présence de perturbations externes et ceci malgré la complexité des efforts aérodynamiques et l'impossibilité de mesurer directement la vitesse du vent. Ces termes inconnus seront considérés comme des perturbations. Dans un premier temps, nous proposerons une technique de commande hiérarchique robuste par mode glissant pour le contrôle en attitude d'un quadri-rotor. Ensuite, nous synthétiserons une autre commande hiérarchique robuste basée sur l'approche de backstepping. Ensuite, nous simulerons les deux commandes pour vérifier les résultats théoriques.

3.2 Pourquoi la commande non-linéaire ?

La commande linéaire est un sujet mature, avec une variété de méthodes puissantes et une longue histoire d'applications industrielles réussies. Il est donc naturel de se demander pourquoi tant de chercheurs et de concepteurs issus de domaines aussi vastes tel que le contrôle des avions et des vaisseaux spatiaux, la robotique, le contrôle des processus et le génie biomédical ont récemment montré un intérêt actif pour le développement et l'application de méthodes de contrôle non linéaire. De nombreuses raisons peuvent être citées pour expliquer cet intérêt [12]

➔ **Amélioration des systèmes de contrôle existants** : Les méthodes de contrôle linéaire sont valides uniquement au voisinage du point de fonctionnement. Lorsque la plage de fonctionnement est grande, un régulateur linéaire est susceptible de fonctionner très mal ou d'être instable, car les non-linéarités du système ne peuvent pas être correctement compensées. Par contre, Les contrôleurs non linéaires peuvent traiter directement les non-linéarités dans le cas d'un fonctionnement à grande échelle ;

➔ **Analyse des non-linéarités dures "hard non linéarités"** : Le contrôle linéaire

exige que le modèle du système soit linéarisable. Cependant, il existe des non-linéarités qui ne permettent pas une approximation linéaire. Ces non-linéarités dites "dures" par exemple l'hystérésis. Pour cela des techniques d'analyse non linéaire sont développées pour assurer les performances du système en présence de ces non-linéarités. Étant donné qu'ils provoquent souvent des instabilités ou des cycles limites, leurs effets doivent être prévus et correctement compensés ;

- ➔ **Faire face aux incertitudes des modèles :** Les régulateurs linéaires nécessitent la connaissance des paramètres du modèle du système. Cependant, de nombreuses modélisations impliquent des incertitudes dans les paramètres du modèle. Cela peut être dû à une lente variation temporelle des paramètres (par exemple, de la pression atmosphérique ambiante pendant un vol d'avion), ou à un changement brusque des paramètres (par exemple, des paramètres inertiels d'un robot lorsqu'un nouvel objet est saisi). Un contrôleur linéaire basé sur des valeurs inexacts peut présenter une dégradation des performances, voire une instabilité. Deux classes de contrôleurs non linéaires sont prévues à cet effet : les contrôleurs robustes et les contrôleurs adaptatifs ;

- ➔ **Simplicité de conception :** Les bons modèles de contrôle non linéaire peuvent être plus simples et plus intuitifs que les contrôleurs linéaires. Ce résultat a priori paradoxal vient du fait que les conceptions de contrôleurs non linéaires sont souvent profondément ancrées dans la physique des systèmes.

Le sujet de la commande non linéaire est un domaine important en automatique. L'apprentissage des techniques de base de l'analyse et de la conception de la commande non linéaire peut améliorer la capacité d'un ingénieur en automatique à traiter efficacement les problèmes pratiques de commande. Il permet également de mieux comprendre le monde réel, qui est intrinsèquement non linéaire. Les techniques du contrôle non linéaire ont bénéficié des progrès de la technologie informatique, à savoir la puissance et la vitesse des calculateurs.

3.3 Stabilité au sens de Lyapunov

Par définition, la stabilité signifie que si un système est en équilibre, il restera dans cet état lorsque le temps variera. L'analyse de la stabilité au sens de Lyapunov consiste à étudier les trajectoires du système lorsque l'état initial est proche d'un

état d'équilibre.

L'objectif de la stabilité est de tirer des conclusions sur le comportement du système sans calculer explicitement ses trajectoires. Afin d'étudier les résultats classiques sur la notion de stabilité au sens de Lyapunov, il convient de rappeler les définitions suivantes [13].

3.3.1 Notions de base

Cette partie représente quelques notions de base sur l'étude de la stabilité d'un système de dimension finie.

Considérons le système (3.1) :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x(t)) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad \text{où } x(t) \in \mathbb{R}^n \text{ est l'état du système fini.} \quad (3.1)$$

Supposons que les conditions d'existence et d'unicité des solutions de (3.1) sont vérifiées.

Définition 3.3.1 (*Point d'équilibre [14]*)

Un état x^* est un point d'équilibre du système (3.1) si pour tout instant $t \geq t_0$ l'état du système $x(t) = x^*$. Le point d'équilibre vérifie :

$$f(x^*) = 0$$

Définition 3.3.2 (*Stabilité d'un point d'équilibre [14]*)

Le point d'équilibre x^* est stable si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\lambda(\varepsilon)$ tel que :

$$|x_0 - x^*|_n \leq \lambda \implies |x(t) - x^*|_n \leq \varepsilon, \quad \forall t \geq t_0. \quad (3.2)$$

Pour toute boule de centre x^* et de rayon ε , il existe une boule plus petite de rayon $\lambda(\varepsilon)$ telle que si nous partons de n'importe quelle condition initiale de celle-ci, nous ne quitterons jamais la première.

Définition 3.3.3 (Attractivité d'un point d'équilibre [14])

Le point d'équilibre x^* est attractif s'il existe $\lambda > 0$ tel que :

$$\|x_0 - x^*\| \leq \lambda \implies \lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t) - x^*\| = 0. \quad (3.3)$$

Le point d'équilibre x^* est dit attractif si la trajectoire $x(t)$, à un certain voisinage et pendant un certain temps, converge vers ce point d'équilibre x^* .

Définition 3.3.4 (Stabilité asymptotique[14])

Le point d'équilibre x^* est asymptotiquement stable si :

Il est à la fois stable et attractif

Partant d'une condition initiale au voisinage du point d'équilibre x^* , l'état $x(t)$ converge vers celui-ci après un certain temps.

Définition 3.3.5 (Stabilité exponentielle [14])

Le point d'équilibre $x(t)$ est exponentiellement stable s'il existe $\delta > 0$, $\varepsilon > 0$ et λ tels que :

$$\|x_0 - x^*\| \leq \lambda \implies \|x(t) - x^*\| \leq \varepsilon \|x^* - x_0\| e^{-\delta(t-t_0)}, \quad \forall t \geq t_0. \quad (3.4)$$

Dans ce cas, l'état $x(t)$ converge vers le point d'équilibre d'une manière exponentielle et la variable δ caractérise la vitesse de cette convergence.

Définition 3.3.6 (Stabilité globale [14])

Le point d'équilibre est globalement (asymptotiquement ou exponentiellement) stable, si les conditions de stabilité précédentes sont vérifiées pour n'importe quelle condition initiale dans \mathbb{R}^n .

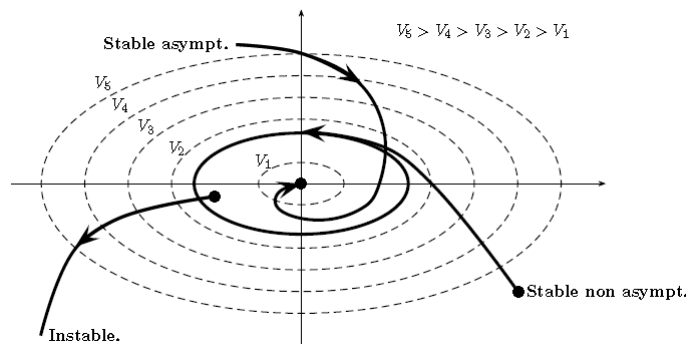


FIGURE 3.1 – Stabilité par la fonction de Lyapunov.

3.3.2 La théorie de Lyapunov

La théorie de base de Lyapunov comprend deux méthodes introduites par Lyapunov, la méthode indirecte et la méthode directe.

- ➔ La méthode indirecte, ou méthode de linéarisation, affirme que les propriétés de stabilité d'un système non linéaire au voisinage immédiat d'un point d'équilibre sont essentiellement les mêmes que celles de son approximation linéarisée. La méthode fournit une justification théorique à l'utilisation du contrôle linéaire pour les systèmes physiques, qui sont toujours intrinsèquement non linéaires.
- ➔ La méthode directe est un outil puissant pour l'analyse des systèmes non linéaires, et c'est pourquoi l'analyse dite de Lyapunov fait souvent référence à la méthode directe. La méthode directe est une généralisation des concepts énergétiques associés à un système mécanique : le mouvement d'un système mécanique est stable si son énergie mécanique totale diminue continuellement. En d'autres termes, le système est stable si son énergie diminue et s'il est à l'équilibre minimum [15].

En utilisant la méthode directe pour analyser la stabilité d'un système non linéaire, l'idée est de construire une fonction énergétique scalaire (une fonction de Lyapunov) pour le système, et de voir si elle diminue. La puissance de cette méthode vient de sa généralité : elle est applicable à tous les types de systèmes de contrôle, qu'ils soient variables ou non dans le temps, de dimension finie ou à dimension infinie. Inversement, la limite de la méthode réside dans le fait qu'il est souvent difficile de trouver une fonction de Lyapunov pour un système.

3.3.3 Stabilité au sens de Lyapunov

Bien que la méthode directe de Lyapunov soit à l'origine une méthode d'analyse de stabilité, elle peut être utilisée pour d'autres problèmes de contrôle non linéaire. Une application importante est la conception de contrôleurs non linéaires. L'idée est de formuler d'une manière ou d'une autre une fonction scalaire positive des états du système, puis de choisir une loi de contrôle pour faire diminuer cette fonction [16]. Un système de contrôle non-linéaire ainsi conçu sera garanti d'être stable. Une telle approche de conception a été utilisée pour résoudre de nombreux problèmes de conception complexes, par exemple en robotique et en contrôle adaptatif. La méthode directe peut également être utilisée pour estimer la performance d'un système de contrôle et étudier sa robustesse.

Théorème 3.3.1 (Stabilité au sens de Lyapunov [14])

Soit $x^* = 0$ un point d'équilibre du système (3.1) et $D \in \mathbb{R}^n$ contenant $x^* = 0$. s'il existe une fonction V de classe C^1 telle que :

$$V(0) = 0 \quad \text{et} \quad V(x) > 0 \quad \text{dans} \quad D \setminus \{0\} \quad (3.5)$$

$$\dot{V}(x) \leq 0 \quad \text{dans} \quad D \quad (3.6)$$

De plus, si

$$\dot{V}(x) < 0 \quad \text{dans} \quad D \setminus \{0\} \quad (3.7)$$

alors $x^* = 0$ est asymptotiquement stable.

3.4 La commande hiérarchique

La commande hiérarchique est connue en aéronautique par la commande de guidage et de pilotage. Le système est décomposé en deux sous-systèmes en cascade : l'un pour la translation correspondant à la dynamique lente appelée le niveau haut et l'autre pour la rotation correspondant à la dynamique rapide appelée le niveau bas. Le haut niveau est responsable de l'évolution autonome du véhicule (boucle de guidage) et le bas niveau permet à l'engin d'évoluer afin d'atteindre les consignes reçues de la boucle de haut niveau (boucle de pilotage). Afin que la boucle de pilotage soit plus rapide que la boucle de guidage, il est nécessaire d'utiliser des grands gains pour le bas niveau [5].

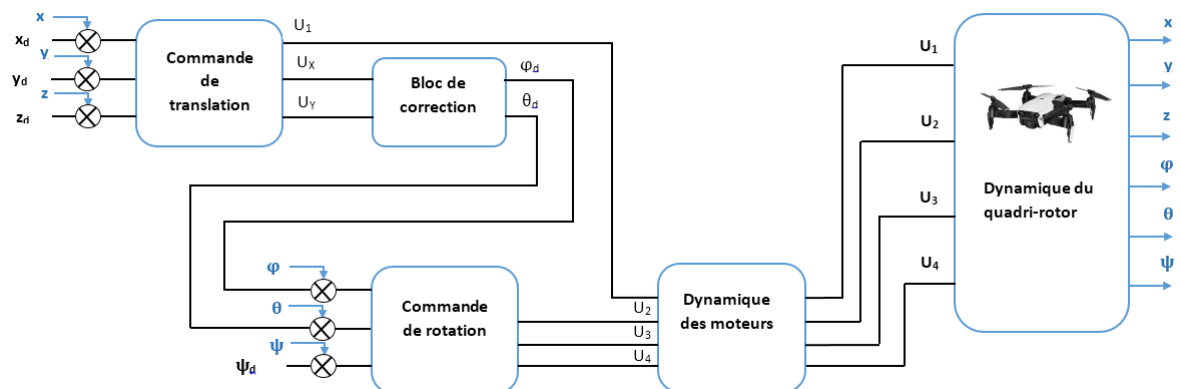


FIGURE 3.2 – Illustration de la commande hiérarchique.

3.5 Le contrôle par mode glissant

L'approche de contrôle par mode glissant est l'un des outils efficaces pour la conception des contrôleurs pour les systèmes non linéaires complexes. Les recherches dans ce domaine ont été lancées dans l'ex-union soviétique il y a environ 40 ans, puis elle a connue plus d'attention de la part de la communauté internationale des chercheurs ces dernières décennies [17]. Le mode glissant prend en considération l'imprécision des modèles, ces derniers peuvent être classés en deux catégories :

- ➔ Incertitudes paramétriques ;
- ➔ Dynamique non modélisée.

L'intuition du mode glissant est basée sur le fait qu'il est plus facile de contrôler un système d'ordre un qu'il soit non linéaire et incertain que de contrôler un système d'ordre n . De ce fait, cette approche a pour but de transformer le problème d'ordre n en un problème équivalent d'ordre un [12].

La commande en mode glissant est un type de commande à structure variable. Son principe consiste à amener les états de système dans une région bien sélectionnée, puis de concevoir la fonction de Lyapunov adéquate permettant de maintenir le système dans cette région [18].

Cette approche présente deux avantages principaux. Tout d'abord, le comportement dynamique du système peut être adapté par le choix particulier de la fonction de commutation. Deuxièmement, la réponse en boucle fermée devient totalement insensible aux incertitudes d'où vient la robustesse de la commande. En outre, la possibilité de spécifier directement les performances rend la commande en mode glissant attrayante du point de vue de la conception [19].

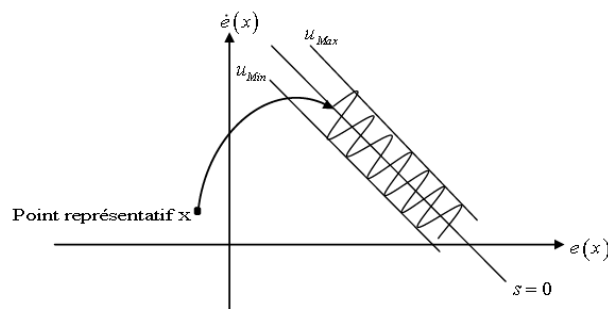


FIGURE 3.3 – Mode glissant.

3.5.1 Systèmes à structure variable

Les systèmes de contrôle à structure variable sont des systèmes de commande non linéaires discontinus où le contrôleur commute entre deux structures à tout instant, Dans les systèmes à structure variable avec mode de glissement, le système commute suivant le signe d'une surface (hyperplan) de façon à forcer la trajectoire dans cet hyperplan également appelé surface de glissement et le mouvement le long duquel il se produit est dit mouvement de glissement [20, 8].

Tout système contrôlé par mode glissant peut être considéré comme un cas particulier d'un système hybride [19].

3.5.2 Théorie de mode glissant

Soit un système à fine en commande, représenté par l'équation (3.8)

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) + g(x)U \\ y = h(x) \end{cases} \quad (3.8)$$

où

$x \in \mathbb{R}^n$: le vecteur d'état du système ;

$U \in \mathbb{R}^m$: le vecteur de commande ;

$y \in \mathbb{R}^p$: le vecteur de sortie ;

$f(x)$: fonction non linéaire qui décrit la dynamique du système, n'est pas exactement connue, mais son imprécision est limité par une fonction de x connue ;

$g(x)$: fonction non linéaire, n'est pas exactement connue mais elle est de signe connue et est limité par une fonction de x connue, avec $g(x) > g(0) > 0$.

3.5.3 Le choix de la surface de glissement

Soit l'erreur de suivi, $\tilde{x} = x - x_d$ de la variable x , et soit le vecteur d'erreur de suivi $\tilde{x} = [\tilde{x} \quad \dot{\tilde{x}} \quad \dots \quad \tilde{x}_d^{n-1}]^T$ [12].

La surface variable dans le temps $s(t)$ dans le plan de phase est définie par l'équation (3.10)

$$s(x, t) = \left(\frac{d}{dt} + \lambda\right)^{r-1} \tilde{x} \text{ avec } r : \text{le degré relative.} \quad (3.9)$$

où λ est une constante strictement positive.

Par exemple, pour un système d'ordre deux la surface de glissement est définie par :

$$s = \dot{\tilde{x}} + \lambda \tilde{x}$$

Le problème de suivi $x \equiv x_d$ est équivalent à celui de maintenir $s(t)$ à la surface de glissement pour tout $t > 0$; en effet $s = 0$ représente une équation différentielle linéaire dont la solution unique est $\tilde{x} = 0$. De plus, le problème de suivi du vecteur de dimension n peut être réduit à un problème de stabilisation en s d'ordre un.

La surface de glissement est une droite dans le plan de phase, de pente $-\lambda$ et contenant le point $x_d = [x_d \ \dot{x}_d]^T$. En partant de n'importe quelle condition initiale, la trajectoire de l'état atteint la surface de glissement en un temps fini et glisse ensuite le long de la surface vers x_d exponentiellement.

3.5.4 Les modes de la trajectoire dans le plan de phase

La trajectoire de phase de ce système se constitue généralement de deux parties, représentant deux modes du système [21].

- ➔ **Mode de convergence (MC)** : également appelé mode "non sliding", dans lequel la trajectoire partant de n'importe quel point du plan de phase se déplace vers une ligne de commutation et atteint la ligne en temps fini ;
- ➔ **Mode de glissement (MG)** : dans lequel la trajectoire tend asymptotiquement vers l'origine du plan de phase.

3.5.5 Phénomène de chattering

Idéalement, la trajectoire devrait commencer à glisser sur la surface de glissement à partir du point initial. En réalité, il y aura un délai entre le moment où le signe de s change et le moment des commutations de la commande. Pendant cette période de retard, la trajectoire traverse l'hyperplan dans la région $s < 0$. Lorsque la commande commute, la trajectoire inverse sa direction et se dirige à nouveau vers l'hyperplan. De nouveau, elle traverse l'hyperplan, et la répétition de ce processus crée le mouvement en zigzag (oscillation), appelé le "chattering". Ce broutement entraîne une faible précision de contrôle, une forte perte thermique dans le circuit électrique et une forte usure des pièces mécaniques en mouvement. Il peut également exciter une dynamique de haute fréquence non modélisée, ce qui dégrade les performances du système et peut même entraîner une instabilité [22].

3.6 Application sur le modèle

3.6.1 Application de la commande hiérarchique

Le quadri-rotor est un système sous-actionné. Plus précisément, le sous-système de translation qui est sous-actionné, il possède trois degrés de liberté et une commande U_1 qui représente la somme des forces de poussée des quatre rotors. Il est donc plus logique de dédier la commande U_1 au contrôle d'attitude et de contrôler les deux autres grandeurs de translation x et y indirectement en contrôlant les deux angles de rotation (roulis et tangage) à l'aide des commandes virtuelles U_x et U_y , c'est ce qu'on appelle le contrôle hiérarchique ou la commande en cascade.

soit la dynamique de translation :

$$\begin{cases} \ddot{x} = -\frac{K_{ftx}}{m}\dot{x} + \frac{1}{m}U_xU_1 \\ \ddot{y} = -\frac{K_{fty}}{m}\dot{y} + \frac{1}{m}U_yU_1 \\ \ddot{z} = -\frac{K_{ftz}}{m}\dot{z} - g + \frac{c\phi c\theta}{m}U_1 \end{cases} \quad (3.10)$$

avec

$$\begin{cases} U_x = (c\phi s\theta c\psi + s\phi s\psi) \\ U_y = (c\phi s\theta s\psi - s\phi c\psi) \end{cases} \quad (3.11)$$

A partir de l'équation (3.11), on trouve

$$\begin{cases} \phi_d = \sin^{-1}(s\psi_d U_x - c\psi_d U_y) \\ \theta_d = \sin^{-1}\left(\frac{c\psi_d U_x + s\psi_d U_y}{c\phi_d}\right) \end{cases} \quad (3.12)$$

3.6.2 Application de la commande par mode glissant

soit le système suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = f(x) + g(x)U \end{cases} \quad (3.13)$$

avec f s'écrit sous la forme :

$$f(x) = f_0 + \delta$$

où

f_0 : représente les termes connue de $f(x)$;

δ : représente toutes les perturbations externes et l'incertitude du modèle.

Les erreurs des variables x_1 et x_2 sont définis respectivement par :

$$\begin{cases} \tilde{x}_1 = x_1 - x_{1d} \\ \tilde{x}_2 = x_2 - x_{2d} \end{cases}$$

soit la surface de glissement :

$$S(x, t) = \dot{\tilde{x}}_1 + \lambda \tilde{x}_1 \quad (3.14)$$

La fonction de Lyapunov proposée pour ce système est :

$$V = \frac{1}{2} S^2 \geq 0 \quad (3.15)$$

donc :

$$\dot{V} = S \dot{S} = S(\dot{\tilde{x}}_2 + \lambda \dot{\tilde{x}}_1)$$

$$\dot{V} = S(\dot{x}_2 - \dot{x}_{2d} + \lambda \tilde{x}_2)$$

Remplaçant \dot{x}_2 par sa valeur et $\dot{\tilde{x}}_1$ par \tilde{x}_2 on trouve

$$\dot{V} = S(f(x) + g(x)U - \dot{x}_{2d} + \lambda \tilde{x}_2)$$

donc :

$$\dot{V} = S(f_0(x) + \delta + g(x)U - \dot{x}_{2d} + \lambda \tilde{x}_2)$$

La commande U est composée de deux termes, le premier compense les non linéarités et le deuxième terme (v) est un terme de correction.

$$U = \frac{1}{g(x)}(-f_0(x) + \dot{x}_{2d} - \lambda \tilde{x}_2 + v) \quad (3.16)$$

avec :

$$v = -k \operatorname{sgn}(S)$$

Remplaçant la commande dans \dot{V} , On trouve

$$\dot{V} = S(v + \delta)$$

condition 3.6.1

Cette condition assure que $\dot{V} < 0$ selon le théorème (3.3.1) de la stabilité au sens de Lyapunov.

$$|\delta| < k$$

3.6.3 Le contrôle de l'altitude(z)

$$\begin{cases} \tilde{x}_{11} = x_{11} - x_{11d} = z - z_d \\ \tilde{x}_{12} = x_{12} - x_{12d} = \dot{z} - \dot{z}_d \\ S(x, t) = \dot{\tilde{x}}_{11} + \lambda \tilde{x}_{11} \\ v_1 = -k_1 \operatorname{sgn}(S) \\ \delta_6 = \frac{k_{ftz}}{m} x_{12} \end{cases}$$

$$U_1 = \frac{1}{g_6(x)}(-f_{06}x + \dot{x}_{12d} - \lambda \tilde{x}_{12} + v_1) \quad (3.17)$$

3.6.4 Le contrôle de roulis (ϕ)

$$\begin{cases} \tilde{x}_1 = x_1 - x_{1d} = \phi - \phi_d \\ \tilde{x}_2 = x_2 - x_{2d} = \dot{\phi} - \dot{\phi}_d \\ S(x, t) = \dot{\tilde{x}}_1 + \lambda \tilde{x}_1 \\ v_2 = -k_2 \operatorname{sgn}(S) \\ \delta_1 = \frac{k_{fax}}{I_x} x_2^2 \end{cases}$$

$$U_2 = \frac{1}{g_1(x)} (-f_{01}x + \dot{x}_{2d} - \lambda \tilde{x}_2 + v_2) \quad (3.18)$$

3.6.5 Le contrôle de tangage (θ)

$$\begin{cases} \tilde{x}_3 = x_3 - x_{3d} = \theta - \theta_d \\ \tilde{x}_4 = x_4 - x_{4d} = \dot{\theta} - \dot{\theta}_d \\ S(x, t) = \dot{\tilde{x}}_3 + \lambda \tilde{x}_3 \\ v_3 = -k_3 \operatorname{sgn}(S) \\ \delta_2 = \frac{k_{fay}}{I_y} x_4^2 \end{cases}$$

$$U_3 = \frac{1}{g_2(x)} (-f_{02}x + \dot{x}_{4d} - \lambda \tilde{x}_4 + v_3) \quad (3.19)$$

3.6.6 Le contrôle de lacet (ψ)

$$\begin{cases} \tilde{x}_5 = x_5 - x_{5d} = \psi - \psi_d \\ \tilde{x}_6 = x_6 - x_{6d} = \dot{\psi} - \dot{\psi}_d \\ S(x, t) = \dot{\tilde{x}}_5 + \lambda \tilde{x}_5 \\ v_4 = -k_4 \operatorname{sgn}(S) \\ \delta_3 = \frac{k_{faz}}{I_z} x_6^2 \end{cases}$$

$$U_4 = \frac{1}{g_3(x)} (-f_{03}x + \dot{x}_{6d} - \lambda \tilde{x}_6 + v_4) \quad (3.20)$$

3.6.7 La commande virtuelle

Le contrôle de (x)

$$\begin{cases} \tilde{x}_7 = x_7 - x_{7d} = x - x_d \\ \tilde{x}_8 = x_8 - x_{8d} = \dot{x} - \dot{x}_d \\ S(x, t) = \dot{\tilde{x}}_7 + \lambda \tilde{x}_7 \\ v_x = -k_x \operatorname{sgn}(S) \\ \delta_x = \frac{k_{ftx}}{m} x_8 \end{cases}$$

$$U_x = \frac{m}{U_1} (\dot{x}_{8d} - \lambda \tilde{x}_8 + v_x) \quad (3.21)$$

Le contrôle de (y)

$$\begin{cases} \tilde{x}_9 = x_9 - x_{9d} = y - y_d \\ \tilde{x}_{10} = x_{10} - x_{10d} = \dot{y} - \dot{y}_d \\ S(x, t) = \dot{\tilde{x}}_9 + \lambda \tilde{x}_9 \\ v_y = -k_y \operatorname{sgn}(S) \\ \delta_x = \frac{k_{fty}}{m} x_{10} \end{cases}$$

$$U_y = \frac{m}{U_1} (\dot{x}_{10d} - \lambda \tilde{x}_{10} + v_y) \quad (3.22)$$

3.7 Résultats de la 1^{ère} simulation

Dans cette section, nous présentons une série de simulations issues de l'application de la commande par mode glissant vue précédemment sur le quadri-rotor pour tester l'efficacité et la robustesse obtenues pour le problème de suivi. Nous avons effectué les simulations sous MATLAB/Simulink.

Les paramètres du système sont pris à partir de la référence [11] et les conditions initiales sont détaillées dans les tableaux ci-dessous :

Tableau 3.1 – Les paramètres du système.

Nom	Paramètre	Valeur	Unité
masse totale du quadri-rotor	m	0.486	kg
longueur du segment	l	0.25	m
gravité	g	9.806	$m.s^{-2}$
inertie dans l'axe X	I_{xx}	$(10^{-3}) * 3.8278$	$kg.m^2$
inertie dans l'axe y	I_{yy}	$(10^{-3}) * 3.8288$	$kg.m^2$
inertie dans l'axe Z	I_{zz}	$(10^{-3}) * 7.6566$	$kg.m^2$
inertie du moteur	J_r	$2.8385 * (10^{-5})$	$kg.m^2$
coefficient de portance	b	$2.9842 * (10^{-5})$	$N.sec^2$
coefficient de drag	d	$3.2320 * (10^{-7})$	$N.m.sec^2$

Tableau 3.2 – Les conditions initiales.

condition initiale	Valeur
$\phi_0, \phi_{p,0}$	0
$\theta_0, \theta_{p,0}$	0
$\psi_0, \psi_{p,0}$	0
$x_0, x_{p,0}$	0
$y_0, y_{p,0}$	0
$z_0, z_{p,0}$	0
w_{10}	0
w_{20}	0
w_{30}	0
w_{40}	0

Le schéma global de la simulation est représenté dans la figure suivante :

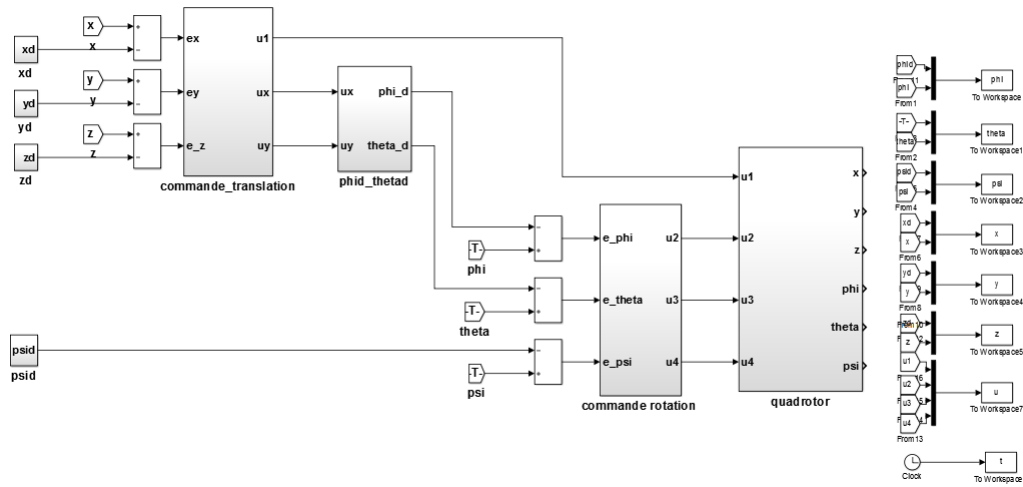


FIGURE 3.4 – Schéma global de la commande hiérarchique sous MATLAB/Simulink.

Plusieurs tests de vol ont été faits pour démontrer les performances de la commande proposée. Premièrement, une application qui ne prend pas en compte les perturbations externes. Dans le deuxième cas, une application avec les termes des perturbations externes qui sont données par :

Tableau 3.3 – Les perturbations externes.

Paramètre	La fonction	amplitude	fréquence	biais
k_{fax}	sinus	$3 * 10^{-4}$	1/20	$3 * 10^{-4}$
k_{fay}	sinus	$3 * 10^{-4}$	1/20	$3 * 10^{-4}$
k_{faz}	sinus	$3.5 * 10^{-4}$	1/20	$3.5 * 10^{-4}$
k_{ftx}	sinus	$3 * 10^{-4}$	1/20	$3 * 10^{-4}$
k_{fty}	sinus	$3 * 10^{-4}$	1/20	$3 * 10^{-4}$
k_{ftz}	sinus	$3 * 10^{-4}$	1/20	$3 * 10^{-4}$

Les paramètres du contrôleur sont donnés par :

Tableau 3.4 – Les paramètres du contrôleur mode glissant.

Paramètre	Valeur
k_1	$1.45 * 10^{-3}$
k_2	$6 * 10^{-3}$
k_3	$7.5 * 10^{-3}$
k_4, k_y	$1.4 * 10^{-3}$
k_x	$1.3 * 10^{-3}$
λ	100

3.7.1 Résultats de simulation sans perturbations

Dans ce cas, nous négligeons les perturbations externes c'est-à-dire $F_{ext} = 0$.

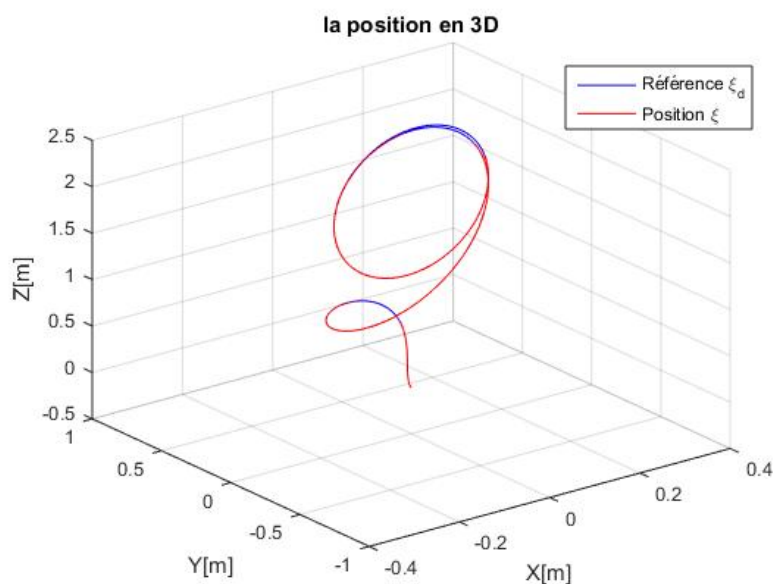


FIGURE 3.5 – Position absolue du quadri-rotor sans perturbations.

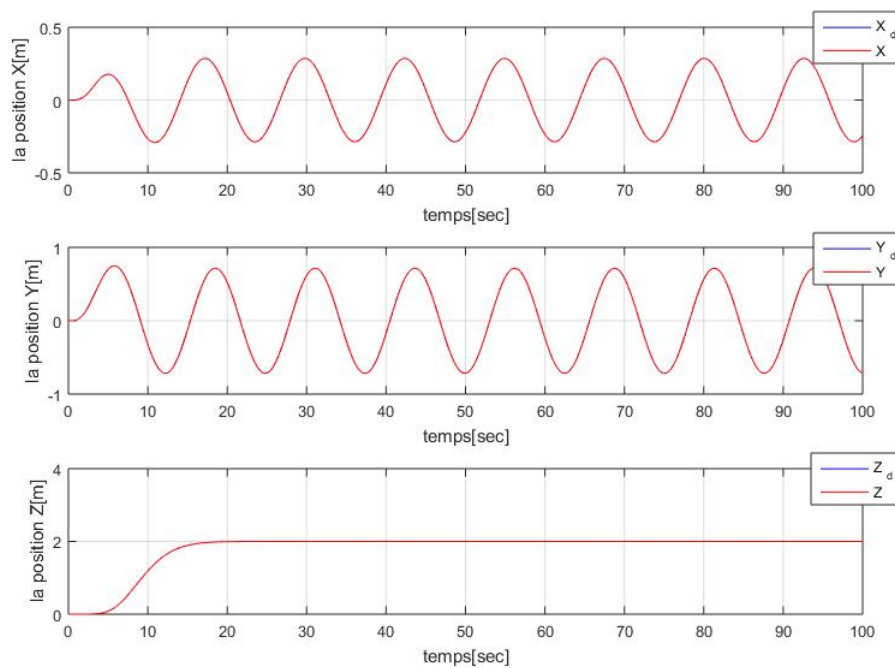


FIGURE 3.6 – Les trajectoires de position ξ .

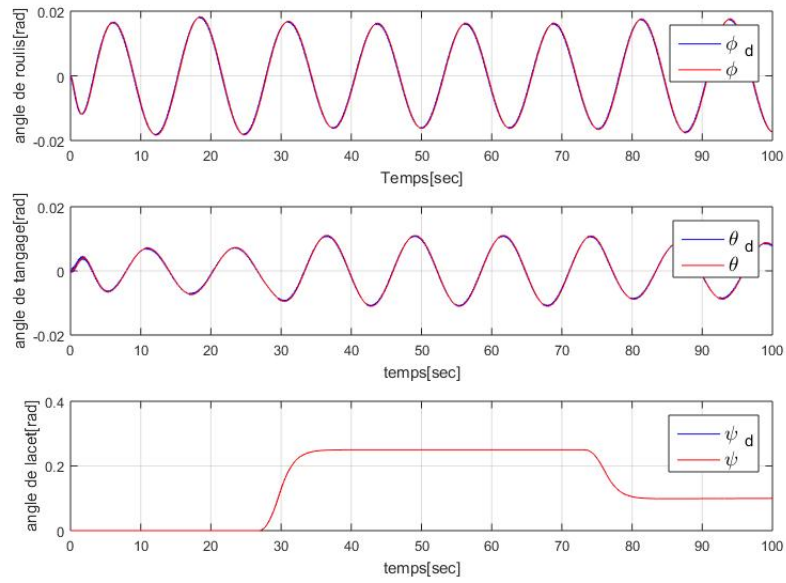


FIGURE 3.7 – Les trajectoires des angles de tangage, de roulis et de lacet.

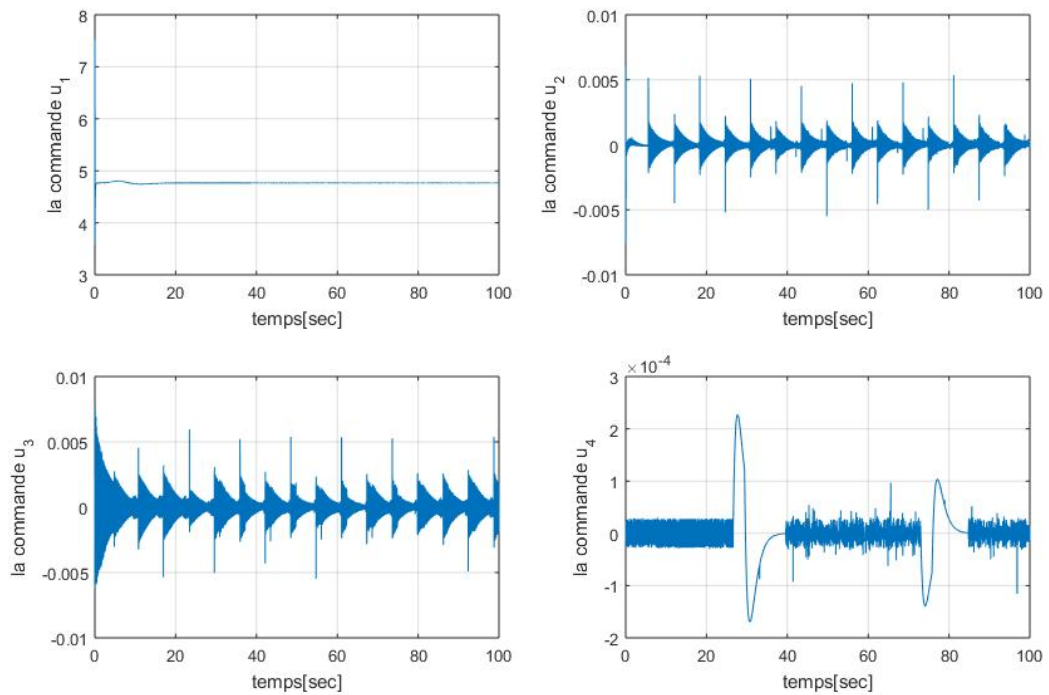


FIGURE 3.8 – Entrées de commande U par mode glissant sans perturbations.

3.7.2 Résultats de simulation avec perturbations

Dans ce cas, les perturbations externes sont prises en compte dans le modèle dynamique du quadri-rotor.

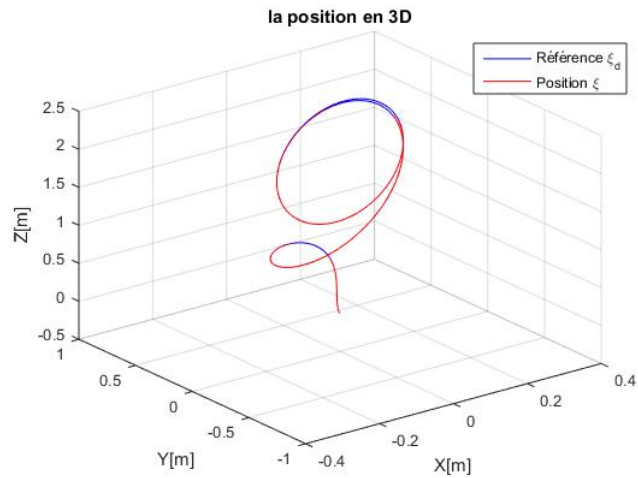


FIGURE 3.9 – Position absolue du quadri-rotor avec perturbations.

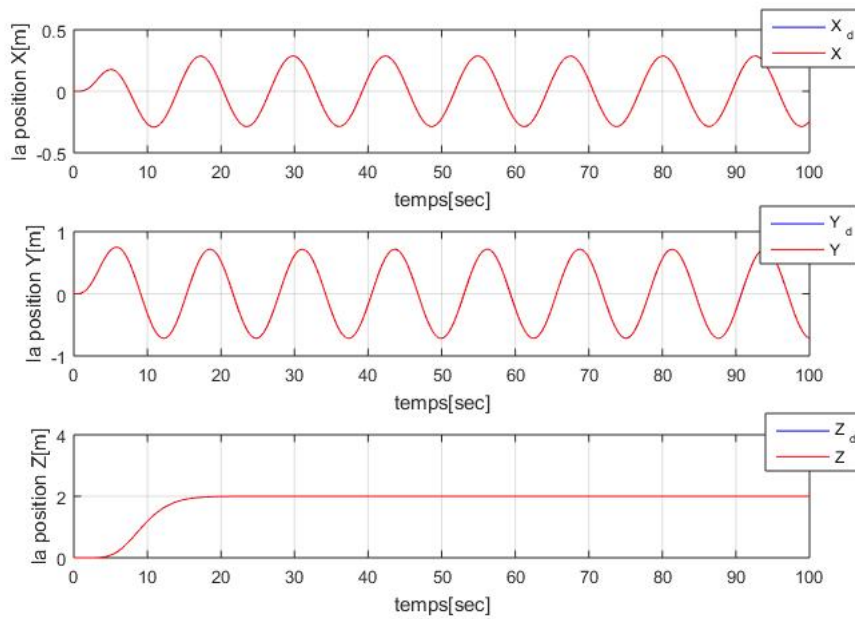


FIGURE 3.10 – Les trajectoires de position ξ .

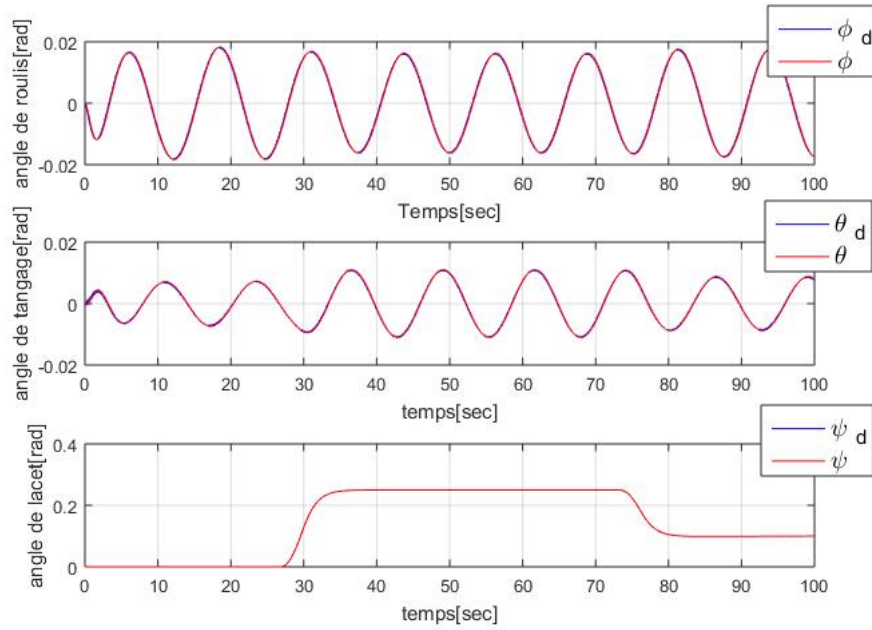


FIGURE 3.11 – Les trajectoires des angles de tangage, de roulis et de lacet.

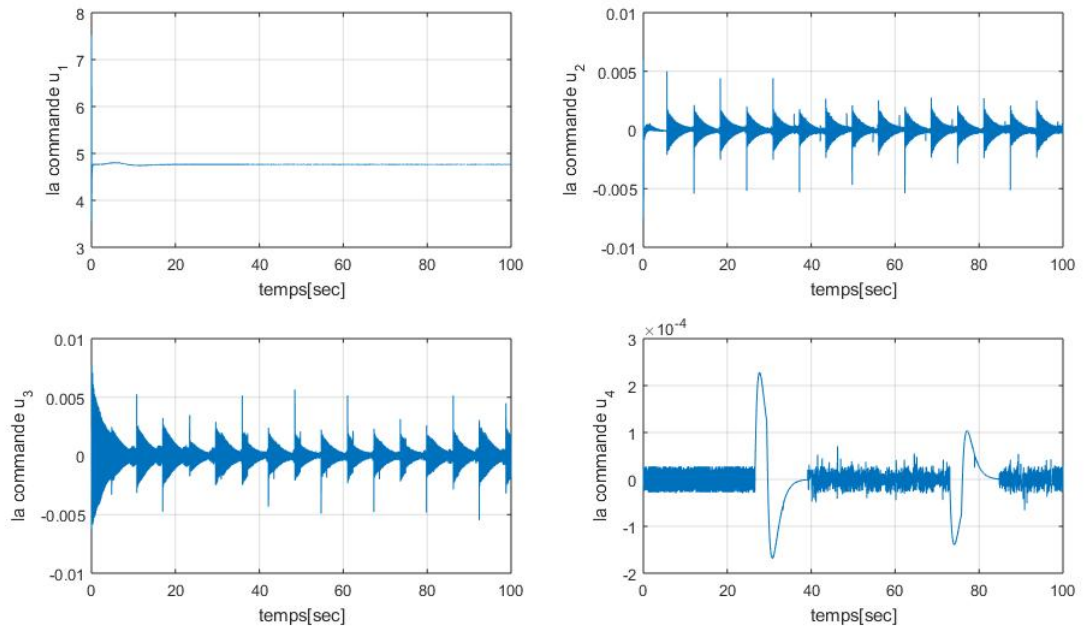


FIGURE 3.12 – Entrées de commande U par mode glissant avec perturbation.

3.7.3 Interprétation

A la lumière de ces résultats, on remarque que la commande par mode glissant résout le problème de suivi de trajectoire. Aussi, le test de la commande sans et avec perturbation nous montre la robustesse de la commande utilisé pour le contrôle.

Remarque 1

Nous avons utilisé la fonction **signe** dans la conception de la commande. Nous remarquons que la discontinuité de la fonction **signe** provoque le phénomène de **chattering**, ce qui entraîne des pertes thermiques et une forte usure des pièces mécaniques. Et donc pour le réduire nous remplaçons cette fonction par une fonction plus lisse qui est l'**arc-tangente**.

3.7.4 Résultats de simulation sans perturbations

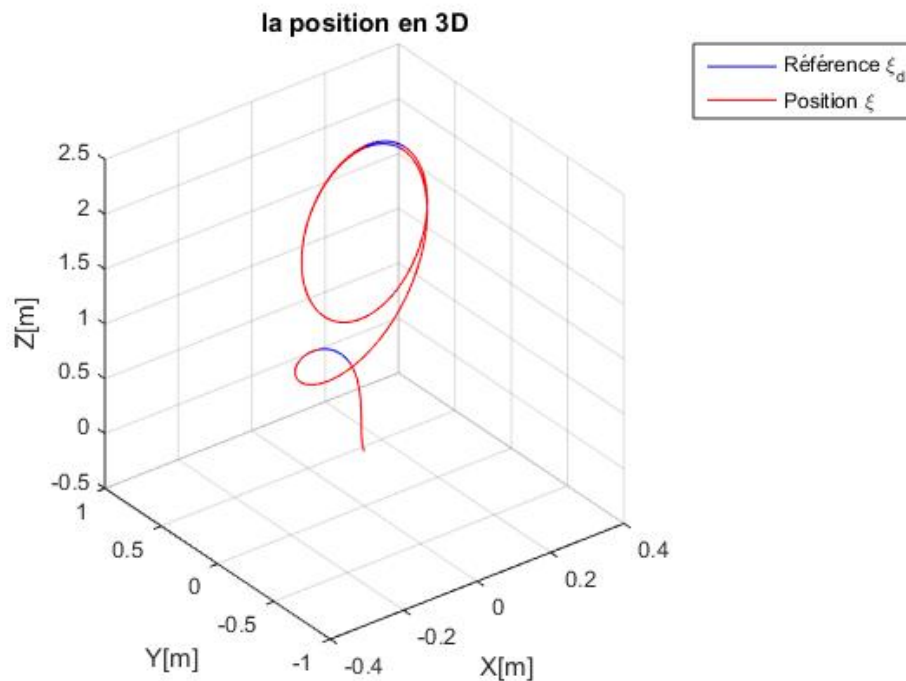


FIGURE 3.13 – Position absolue du quadri-rotor sans perturbations.

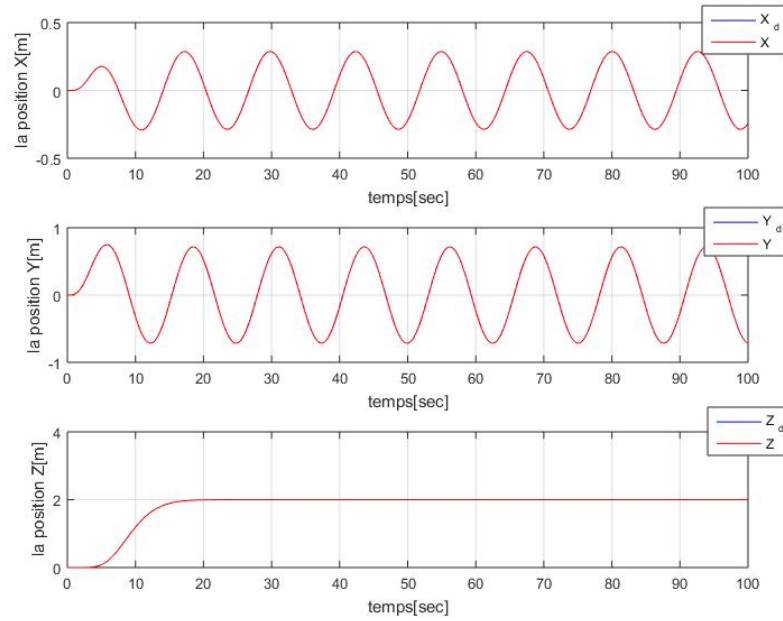


FIGURE 3.14 – Les trajectoires de position ξ .

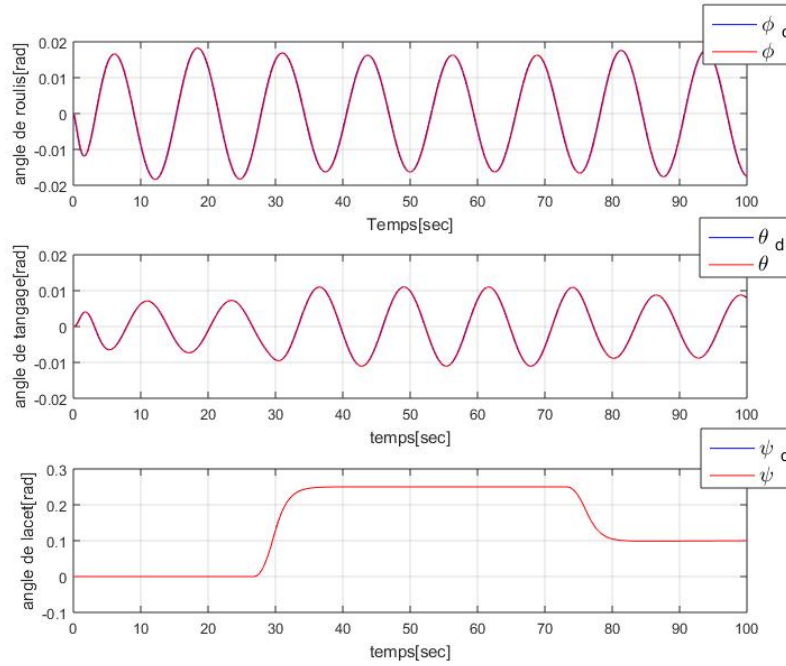
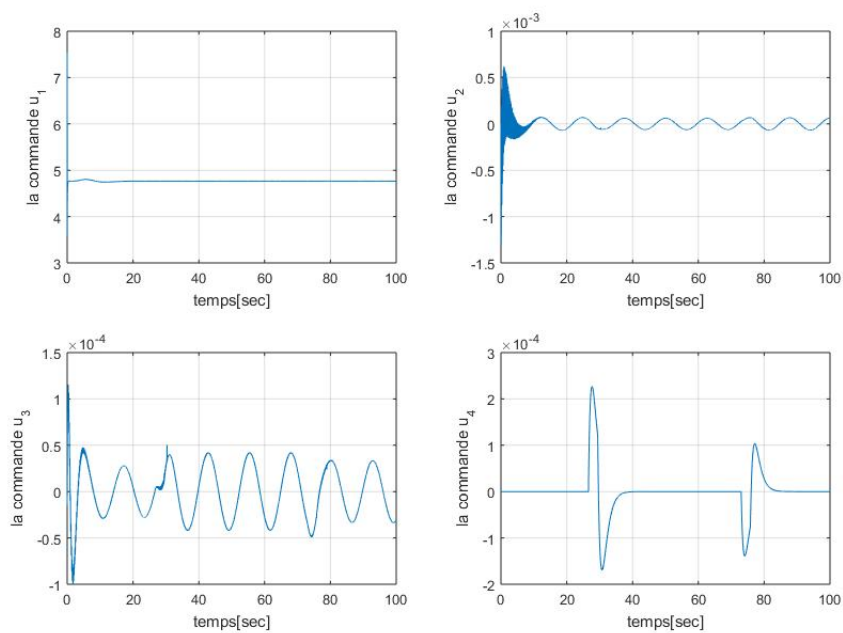


FIGURE 3.15 – Les trajectoires des angles de tangage, de roulis et de lacet.

FIGURE 3.16 – Entrées de commande U par mode glissant sans perturbations.

3.7.5 Résultats de simulation avec perturbations

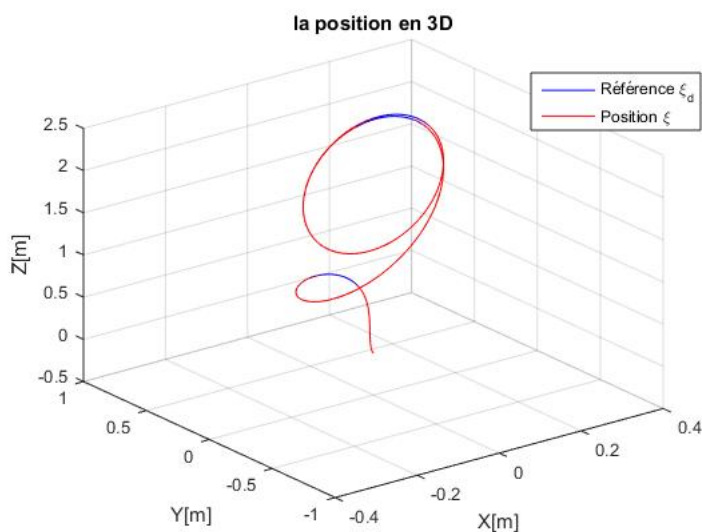


FIGURE 3.17 – Position absolue du quadri-rotor avec perturbations.

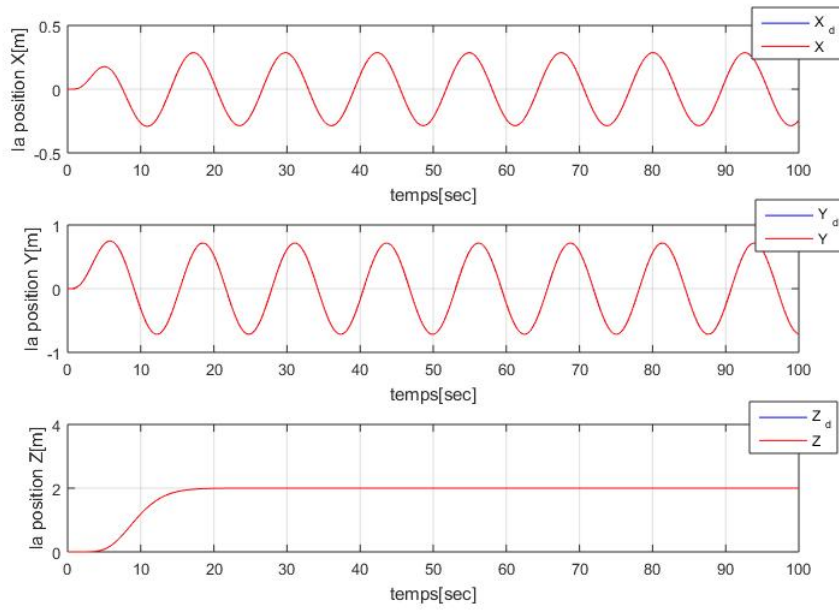


FIGURE 3.18 – Les trajectoires de position ξ .

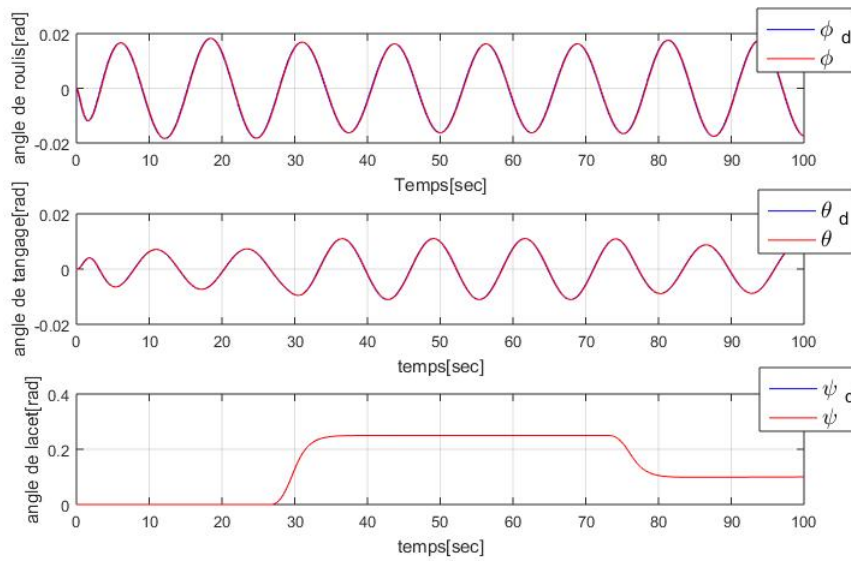
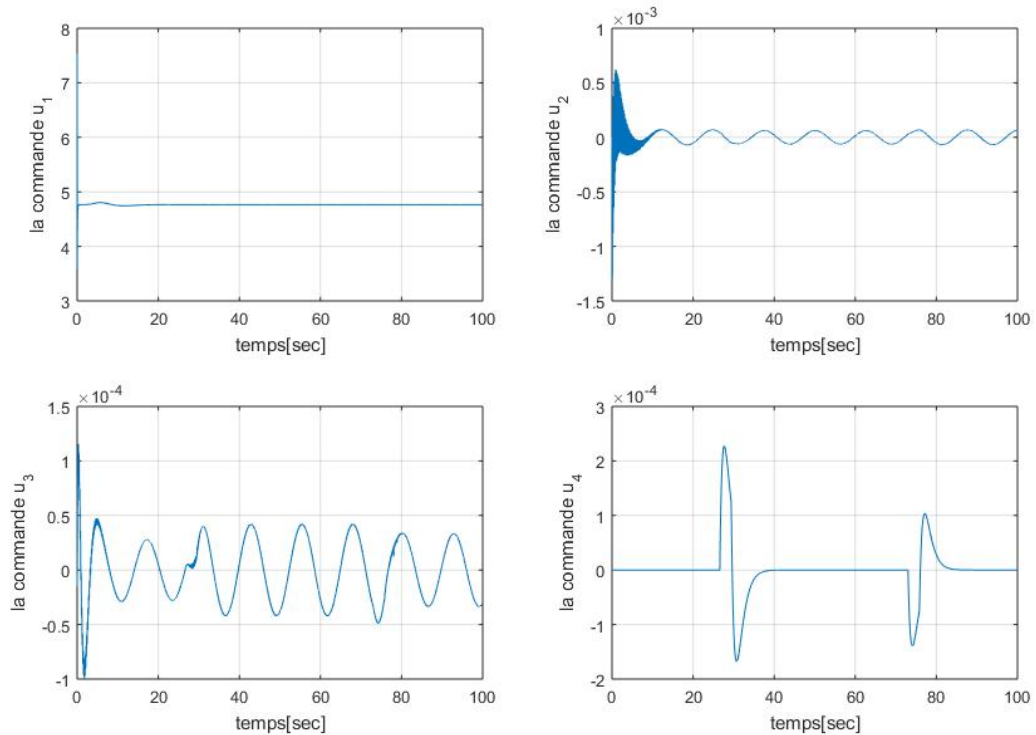


FIGURE 3.19 – Les trajectoires des angles de tangage, de roulis et de lacet.

FIGURE 3.20 – Entrées de commande U par mode glissant avec perturbations.

3.7.6 Interprétation

En plus des résultats trouvés précédemment, on remarque que la commande par mode glissant avec la fonction **arc-tangente** rend la commande plus lisse et elle réduit le phénomène de **zig-zag** tout en gardant les performances du contrôle.

3.8 Le contrôle par backstepping

Le contrôle par backstepping est basé sur la fragmentation du système en un ensemble de sous-systèmes imbriqués d'ordre décroissant et qui sont stables au sens de Lyapunov, ce qui leur confère une robustesse et une stabilité asymptotique globale. En d'autres termes, c'est une méthode récursive de synthèse de lois de commande non linéaires. Certaines composantes du vecteur d'état sont considérées comme des commandes virtuelles et des lois de commande intermédiaires sont élaborées. À chaque étape, la convergence du système vers son état d'équilibre est assurée par le calcul de la commande virtuelle. Ceci peut être réalisé en utilisant les fonctions de Lyapunov, qui assurent une stabilisation progressive (pas à pas) de chaque étape de la synthèse [23].

3.8.1 Principe de la commande par backstepping

La méthode de backstepping commence par la définition de la fonction de Lyapunov. Le principe est de construire à chaque étape un écart entre l'état actuel du système et une commande virtuelle qui garantirait la négativité de la dérivée de la fonction de Lyapunov. À la fin de chaque étape, la fonction de Lyapunov compense cet écart, afin d'assurer la convergence vers zéro. Le processus se termine lorsque la commande réelle du système apparaît, garantissant la convergence des états vers les états souhaités [20].

3.8.2 Théorie du backstepping

La technique de la commande par backstepping met à profit des relations successives pour rendre le système bouclé équivalent à des sous-systèmes d'ordre 1 en cascade stable au sens de Lyapunov et donc construire une loi de commande et une fonction de Lyapunov stabilisante.

Considérons un système sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f(x_1) + g(x_1)x_2 & \text{sous - système 1} \\ \dot{x}_2 = f(x_1, x_2) + g(x_1, x_2)x_3 \\ \vdots \\ \dot{x}_n = f(x_1, \dots, x_n) + g(x_1, \dots, x_n)U & \text{sous - système } n \end{cases} \quad (3.23)$$

avec : $x = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T \in \mathbb{R}^n$, $U \in \mathbb{R}$

Le but est de trouver une loi de commande pour le système (3.23) garantissant une stabilité et force le système d'aller vers le point d'équilibre tout en assurant la poursuite d'une référence y_d . Le système étant d'ordre n , la conception s'effectue en n étapes [24, 20]

Première étape

La première équation du système (3.23) où x_2 sera considérée comme une commande virtuelle intermédiaire. On définit la première référence désirée du sous système x_2 qui doit suivre la référence définie y_{ref} telle que :

$$(x_1)_d = y_{ref} = \alpha_0 \quad (3.24)$$

où $(x_1)_d$ est l'état désiré.

On définit l'erreur de poursuite :

$$e_1 = x_1 - \alpha_0 \quad (3.25)$$

$$\dot{e}_1 = f(x_1) + g(x_1)x_2 - \dot{\alpha}_0 \quad (3.26)$$

On choisit une fonction de Lyapunov définie positive sur \mathbb{R} pour le sous-système 1 comme suit :

$$V_1 = \frac{1}{2}e_1^2 \quad (3.27)$$

Sa dérivée temporelle est donnée par :

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 &= e_1 \dot{e}_1 \\ \dot{V}_1 &= e_1 [f(x_1) + g(x_1)x_2 - \dot{\alpha}_0] \end{aligned} \quad (3.28)$$

Pour assurer la stabilité du sous-système 1, il faut d'après Lyapunov, que $\dot{V}_1 \leq 0$ (semi défini négative sur \mathbb{R}).

Pour ce faire, on choisit \dot{V}_1 sous la forme :

$$\dot{V}_1 = -K_1 e_1^2 \leq 0 \quad (3.29)$$

où $K_1 > 0$ est un paramètre constant.

En substituant (3.29) dans (3.28), on trouve :

$$\dot{V}_1 = e_1 [f(x_1) + g(x_1)x_2 - \dot{\alpha}_0] = -K_1 e_1^2 \leq 0 \quad (3.30)$$

Ce qui donne la commande fictive suivante

$$x_2 = \frac{1}{g(x_1)} [-K_1 e_1 + \dot{\alpha}_0 - f(x_1)] \quad (3.31)$$

D'où la stabilité asymptotique à l'origine. Cette dernière sera la nouvelle référence désirée $(x_2)_{ref}$ du sous système qui suit.

Deuxième étape

On considère les deux premières équations du système définie en (3.23)

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f(x_1) + g(x_1)x_2 \\ \dot{x}_2 = f(x_1, x_2) + g(x_1, x_2)x_3 \end{cases} \quad (3.32)$$

où la nouvelle référence désirée α_1 sera la variable de commande pour le sous système précédent $(x_2)_{ref}$ tel que :

$$(y_2)_{ref} = \alpha_1 \quad (3.33)$$

et la nouvelle variable d'erreur :

$$e_2 = x_2 - \alpha_1 \quad (3.34)$$

Pour assurer la stabilité du sous système (3.32), on définit la fonction de Lyapunov de la même manière, :

$$x_2 = f(x_1, x_2) + g(x_1, x_2)x_3 \quad (3.35)$$

Ces fonctions dépendent forcément des états précédents du sous système définie par :

$$\begin{aligned} V_2 &= V_1 + \frac{1}{2}e_2^2 \\ V_2 &= \frac{1}{2}(e_1^2 + e_2^2) \end{aligned} \quad (3.36)$$

La dérivée de cette dernière est :

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 &= \dot{V}_1 + e_2 \cdot \dot{e}_2 \\ \dot{V}_2 &= -K_1 e_1^2 + e_2 [f(x_1, x_2) + g(x_1, x_2)x_3 - \dot{\alpha}_1] \end{aligned} \quad (3.37)$$

Et donc, pour assurer la stabilité du sous système, il faut choisir V_2 négative. Pour cela, on prend V_2 sous la forme :

$$V_2 = -K_1 e_1^2 - K_2 e_2^2 \leq 0 \quad (3.38)$$

où $K_2 > 0$ est un paramètre constant.

En substituant (3.38) dans (3.37) on trouve :

$$\dot{V}_2 = -K_1 e_1^2 + e_2 [f(x_1, x_2) + g(x_1, x_2)x_3 - \dot{\alpha}_1] = -K_1 e_1^2 - K_2 e_2^2 \quad (3.39)$$

Ce qui donne la commande virtuelle x_3

$$x_3 = \frac{1}{g(x_1, x_2)} [-K_2 e_2 - f(x_1, x_2) + \dot{\alpha}_1] \quad (3.40)$$

avec

$$\dot{\alpha}_1 = \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1} = \frac{g(x_1)[-K_1 \dot{e}_1 + \ddot{\alpha}_0 - \dot{f}_1(x_1)] - [-K_1 e_1 + \dot{\alpha}_0 - \dot{f}(x_1)]\dot{g}(x_1)}{g^2(x_1)} \quad (3.41)$$

Cette dernière sera la nouvelle référence désirée $(x_3)_{ref}$ du sous système suivant. On pose $(x_3)_{ref} = \alpha_2$ et on continue jusqu'à la dernière expression du sous système (3.23) où on atteindra le calcul de la loi de commande réelle.

$n^{ième}$ étape

De la même façon, pour cette étape la référence à suivre sera :

$$(x_n)_d = \alpha_{n-1} \quad (3.42)$$

donc l'erreur de régulation :

$$e_n = x_n - \alpha_{n-1} \quad (3.43)$$

Sa dérivée est :

$$\begin{aligned} \dot{e}_n &= f(x_1) + g(x_1)x_2 - \dot{\alpha}_{n-1} \\ e_n &= f(x_1, \dots, x_n) + g(x_1, \dots, x_n)U - \dot{\alpha}_{n-1} \end{aligned} \quad (3.44)$$

avec la fonction de Lyapunov augmentée :

$$\begin{aligned} V_n &= V_1 + \dots + \frac{1}{2}e_n^2 \\ V_n &= \frac{1}{2}[e_1^2 + \dots + e_n^2] \end{aligned} \quad (3.45)$$

La dérivée devient

$$\begin{aligned} \dot{V}_n &= \dot{V}_1 + \dots + e_n \dot{e}_n \\ \dot{V}_n &= -K_1 e_1^2 + \dots + e_n [f(x_1, \dots, x_n) + g(x_1, \dots, x_n)U - \dot{\alpha}_{n-1}] \end{aligned} \quad (3.46)$$

Nous sommes arrivés à cette dernière étape, pour en déduire la loi de commande réelle U qui permet d'atteindre les objectifs de conception du système global qui, contrairement aux lois x_i qui sont des lois virtuelles.

Un bon choix de celle-ci doit satisfaire :

$$f(x_1, \dots, x_n) + g(x_1, \dots, x_n)U - \dot{\alpha}_{n-1} = -K_n e_n^2 \quad (3.47)$$

où $K_n > 0$ est un paramètre de conception.

Ainsi, la loi de commande pour le système entier sera donnée par :

$$U = \frac{1}{g(x_1, \dots, x_n)} [-K_n e_n + \dot{\alpha}_{n-1} - f(x_1, \dots, x_n)] \quad (3.48)$$

Cela garantit la négativité de la dérivée de la fonction de Lyapunov augmentée

$$V_n = -K_1 e_1^2 - \dots - K_n e_n^2 \leq 0 \quad (3.49)$$

Nous avons décrit le principe en général de la commande par backstepping, dans notre application par la suite nous nous basons sur le même principe mais avec autre procédure de détermination de la commande virtuelle qui donne les mêmes résultats. Nous avons utilisé la commande backstepping avec un terme de correction basé sur l'algorithme du **super-twisting** pour rendre la commande robuste.

3.8.3 Algorithme de super-twisting

L'algorithme de super-twisting est l'un des algorithmes de mode glissant de second ordre les plus utilisés. Cet algorithme n'est applicable qu'aux systèmes de degré relatif 1 par rapport à la variable de glissement et son intérêt réside dans la réduction de réticence ou encore chattering, grâce à la continuité du signal de commande. Il est élaboré de manière à préserver les principaux avantages des modes glissants d'ordre un (robustesse, convergence en temps fini, ...Etc.) Cet algorithme est conçu pour générer une fonction de contrôle continu qui pilote la variable de glissement et sa dérivée à l'origine en temps fini, en présence de perturbations externes qui sont supposées Lipschitz. En outre, cet algorithme ne nécessite aucune information sur la valeur de \dot{s} (donc un grand intérêt en pratique) tout en conservant de bonnes propriétés de robustesse [5].

On peut alors considérer cet algorithme comme une généralisation non linéaire d'un PI. Lorsque le système physique n'est pas de degré relatif un et que la surface dépend de la dérivée de la sortie, nous avons une généralisation non linéaire d'un PI [25]. Autrement dit, on peut la considérer comme généralisation non linéaire d'un PI si le terme de convergence est smooth (c.à.d trajectoire de terme de convergence est lisse)

La loi de commande du super-twisting se compose de deux parties. La première u_1 qui représente un terme de convergence, tandis que la seconde u_2 est un terme d'estimation de perturbation, elle s'écrit :

$$u(t) = u_1(t) + u_2(t) \quad (3.50)$$

avec

$$u_1(t) = -K_1 |s|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(s) \quad \text{et} \quad \dot{u}_2 = -K_2 \text{sign}(s)$$

3.8.4 Définitions, Lemmes et Hypothèses

Les Définitions, Lemmes et Hypothèses introduits dans la suite seront utilisés pour analyser la stabilité des algorithmes présentés dans la partie de synthèse de la commande.

Définition 3.8.1 (convergence en temps fini [26],[27])

Considérons le système non linéaire décrit par :

$$\dot{x} = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n \quad (3.51)$$

Où $f(\cdot) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ est une fonction continue. Supposons que $f(0) = 0$. L'origine du système (3.51) est un point d'équilibre stable en temps fini, s'il existe une fonction $T : V \setminus 0 \rightarrow [0, +\infty)$ appelée temps d'établissement du système (3.51) telle qu'on ait les propriétés suivantes :

- stabilité au sens de Lyapunov : pour tout voisinage ouvert $O \subseteq \mathbb{R}^n$ de l'origine, il existe un voisinage ouvert $U \subseteq \mathbb{R}^n$ de l'origine, tel que pour tout $x_0 \in U \setminus 0$ et pour toute solution $\varphi(t, x_0)$ de (3.51) telle que $\varphi(0, x_0) = x_0$, $\varphi(t, x_0) \in O$ pour toute $t \in [0, T(x_0))$.
- pour tout $x_0 \in V \setminus 0$, et pour toute solution $\varphi(t, x_0)$ de (3.51) telle que $\varphi(0, x_0) = x_0$, $\varphi(t, x_0)$ est définie sur $[0, T(x_0))$ et $\lim_{t \rightarrow T(x_0)} \varphi(t, x_0) = 0$.

L'origine du système (3.51) est un point d'équilibre globalement stable en temps fini s'il est stable en temps fini avec $V = \mathbb{R}^n$

Lemme 3.8.1 ([26],[27])

Soit le système décrit par (3.51), supposons qu'il existe une fonction continue définie positive $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^+$, un nombre réel $\gamma > 0$ et $0 < \alpha < 1$ et un ouvert $U \subseteq \mathbb{R}^n$ au voisinage de l'origine de sorte que les inégalités suivantes soient satisfaites :

$$\dot{V}(x) + \gamma V^\alpha(x) \leq 0, \quad x \in U \setminus \{0\}. \quad (3.52)$$

Alors, l'origine du système (3.51) est un équilibre stable en temps fini. Si $U = \mathbb{R}^n$, alors l'origine est un équilibre globalement stable en temps fini. De plus, le temps d'établissement est donné par :

$$t_R \leq \frac{1}{\gamma(1-\alpha)} V^{1-\alpha} \quad (3.53)$$

Soit le système non linéaire incertain

$$\dot{x} = f(x, t) + g(x, t)U \quad (3.54)$$

avec $x \in \chi \subset \mathbb{R}^n$ représente l'état du système et $U \in \mathbb{R}$ sa commande. $f(x, t)$ et $g(x, t)$ sont des champs de vecteurs suffisamment différentiables.

Pour synthétiser les lois de commande, il est nécessaire d'introduire les hypothèses suivantes :

Hypothèse 3.8.1 ([5])

Le terme de perturbations δ est supposé être borné, tels que :

$$|\dot{\delta}| < h_{max}$$

avec h_{max} une constante strictement positive supposée connue.

Hypothèse 3.8.2 ([5])

On suppose que la convergence de la dynamique de rotation est beaucoup plus rapide que celle de la dynamique de translation. ce qui élimine le terme d'interconnexion entre les deux dynamiques. Le choix de gains de chaque commande, c'est-à-dire des gains faibles pour le contrôle en translation et de grands gains pour le contrôle en rotation permet de satisfaire cette hypothèse.

3.9 Application de la commande par backstepping sur le quadri-rotor

soit le système suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = f(x) + g(x)U \end{cases} \quad (3.55)$$

avec f s'écrit sous la forme :

$$f(x) = f_0 + \delta$$

où

f_0 : représente les termes connue de $f(x)$.

δ : représente les termes inconnus de $f(x)$.

Étape 1

Définissons l'écart e_1 :

$$e_1 = x_1 - x_{1d} \quad (3.56)$$

On définit la première fonction candidate de Lyapunov V_1 , associée à e_1 :

$$V_1 = \frac{1}{2} e_1^2 \quad (3.57)$$

La dérivée de la fonction de Lyapunov est donnée par :

$$\dot{V}_1 = e_1 \dot{e}_1 = e_1(\dot{x}_1 - \dot{x}_{1d}) = e_1(\dot{x}_1 - v_1) + e_1(v_1 - \dot{x}_{1d}) \quad (3.58)$$

Le terme (\dot{x}_{1d}) représente la consigne de vitesse et v_1 est la commande stabilisante de e_1 .

$$v_1 = \dot{x}_{1d} - k_1 e_1 \quad (3.59)$$

avec : $k_1 > 0$

En remplaçant (3.59) dans (3.58), nous obtenons :

$$\dot{V}_1 = -k_1 e_1^2 + e_1(\dot{x}_1 - v_1) \quad (3.60)$$

Étape 2

On définit l'erreur e_2 l'écart entre la vitesse réelle et la commande virtuelle de la vitesse. La convergence de e_2 entraînera naturellement la convergence de e_1 , puisque la vitesse tendra vers la vitesse virtuelle et la dérivée de V_1 sera strictement négative.

Définissons l'écart e_2 :

$$e_2 = \dot{x}_1 - v_1 \quad (3.61)$$

On définit la deuxième fonction candidate de Lyapunov V_2 , associée à e_2

$$V_2 = \frac{1}{2} e_2^2 \quad (3.62)$$

La dérivée de la fonction de Lyapunov est donnée par :

$$\dot{V}_2 = e_2 \dot{e}_2 = e_2 (f(x) + g(x) U - \dot{v}_1) \quad (3.63)$$

On définit la commande réelle :

$$U = \frac{1}{g(x)} (-f_0(x) + \dot{v}_1 + v_2) \quad (3.64)$$

En remplaçant (3.64) dans (3.63), nous obtenons

$$\dot{V}_2 = e_2 (\delta + v_2) \quad (3.65)$$

avec :

v_2 est le terme de correction [5].

$$v_2 = -\lambda_1 |e_2|^{\frac{1}{2}} \operatorname{sgn}(e_2) - \lambda_2 \int \operatorname{sgn}(e_2(z)) dz \quad (3.66)$$

On remplace (3.66) dans (3.65), on trouve [5]

$$\dot{V}_2 = e_2(-\lambda_1 |e_2|^{\frac{1}{2}} \operatorname{sgn}(e_2) - \lambda_2 \int \operatorname{sgn}(e_2(z)) dz + \delta) \quad (3.67)$$

On pose le changement de variable suivant :

$$z = [z_1 \quad z_2]^T \quad (3.68)$$

$$\begin{cases} z_1 = e_2 \\ z_2 = -\lambda_2 \int \operatorname{sgn}(e_2(z)) dz + \delta \end{cases} \quad (3.69)$$

Ce qui implique :

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = -\lambda_1 |z_1|^{\frac{1}{2}} \operatorname{sgn}(z_1) + z_2 \\ \dot{z}_2 = -\lambda_2 \operatorname{sgn}(z_1) + \dot{\delta} \end{cases} \quad (3.70)$$

La convergence de z_1 et z_2 vers zéro assure la convergence de e_2 et \dot{e}_2 vers zéro.

On choisit maintenant la fonction de Lyapunov suivante pour analyser la stabilité du système (3.55) [28] :

$$V(z) = v^T P v \quad (3.71)$$

Le vecteur v et la matrice symétrique $P \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ sont donnés par :

$$v = [|z_1|^{\frac{1}{2}} \operatorname{sgn}(z_1) \quad z_2] \quad \text{et} \quad P = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 4\lambda_2 + \lambda_1^2 & -\lambda_1 \\ -\lambda_1 & 2 \end{bmatrix}$$

cette fonction est définie positive si $\lambda_2 > 0$

$$\sigma_{\min}(P)\|v\|^2 \leq V(z) \leq \sigma_{\max}(P)\|v\|^2 \quad (3.72)$$

où $\|v\|$ la norme euclidienne de v qui est donnée par :

$$\|v\|^2 = |z_1| + z_2^2 \quad (3.73)$$

$\sigma_{\min}(P)$ et $\sigma_{\max}(P)$ sont respectivement les valeurs propres minimal et maximal de P .

La dérivée de la fonction candidate de Lyapunov (3.71) est alors donnée par [28] :

$$\dot{V} = -\frac{1}{|z_1|^{\frac{1}{2}}} v^T Q v + \delta \xi^T v \quad (3.74)$$

où :

$$Q = \frac{\lambda_1}{2} \begin{bmatrix} 2\lambda_2 + \lambda_1^2 & -\lambda_1 \\ -\lambda_1 & 1 \end{bmatrix} \quad ; \quad \xi = [-\lambda_1 \quad 2]$$

Sachant que $|\dot{\delta}| \leq h_{\max}$, on obtient

$$\dot{V} \leq -\frac{1}{|z_1|^{\frac{1}{2}}} \sigma_{\min}(Q) \|v\|^2 + h_{\max} \|\xi\| \|v\| \quad (3.75)$$

Utilisant (3.73), on peut déduire que

$$\frac{1}{|z_1|^{\frac{1}{2}}} \geq \frac{1}{\|v\|} \quad (3.76)$$

On trouve :

$$\dot{V} \leq (-\sigma_{\min}(Q) + h_{\max}\|\xi\|) \|v\| \quad (3.77)$$

En utilisant (3.72), on peut voir que :

$$\frac{V}{\sigma_{\max}(P)} \leq \|v\|^2 \leq \frac{V}{\sigma_{\min}(P)} \quad (3.78)$$

On trouve :

$$\dot{V} \leq -(\sigma_{\min}(Q) - h_{\max}\|\xi\|) \frac{V^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{\sigma_{\max}(P)}} \quad (3.79)$$

Pour conclure sur la négativité de $\dot{V}(z)$, il faut que :

$$\sigma_{\min}(Q) \geq h_{\max} \|\xi\| \quad (3.80)$$

La matrice Q sera définie positive avec une valeur propre minimale

$$\sigma_{\min}(Q) \geq h_{\max} \|\xi\|, \lambda_1 \geq 0 \text{ et } h_{\max} > 0.$$

d'où :

$$\lambda_2 \geq \frac{2 h_{\max}^2 \|\xi\|^2}{\lambda_1^2} \quad (3.81)$$

Par conséquent, on obtient :

$$\dot{V} \leq -\gamma V^{\frac{1}{2}} \quad (3.82)$$

avec :

$$\gamma = \frac{\sigma_{\min}(Q) - h_{\max} \|\xi\|}{\sqrt{\sigma_{\max}(P)}}$$

La solution est donc :

$$\int \frac{dV}{V^{\frac{1}{2}}} \leq -\gamma \int dt \implies T = \frac{2V^{\frac{1}{2}}z(0)}{\gamma}$$

Donc nous avons montré la stabilité en temps fini. c'est-à-dire que z_1 et z_2 tend vers zéro dans un temps fini.

$$z_2 = 0 \implies \delta = \lambda_2 \int \text{sgn}(z_1(z)) dz \quad (3.83)$$

Donc le terme $\lambda_2 \int \text{sgn}(z_1)(z) dz$ représente le terme d'estimation de la perturbation.

Dés que $z_1=z_2=0$, selon l'équation (3.83),

alors :

$$\implies \dot{V}_2 = e_2(-\lambda_1 |e_2|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(e_2))$$

$$\implies \dot{V}_2 = -\lambda_1 |e_2|^{\frac{3}{2}}$$

$$\implies \dot{V}_2 = -2 \lambda_1 \left(\frac{1}{2} e_2^2\right)^{\frac{3}{4}}$$

$$\implies \dot{V}_2 = -2 \lambda_1 V_2^{\frac{3}{4}}$$

Selon le lemme de stabilité en temps fini (3.8.1), V_2 est stable, donc l'erreur e_2 s'annule. Ce qui implique que $\dot{V}_1 = -k_1 e_1^2$

Donc l'erreur e_1 s'annule aussi.

3.9.1 Le contrôle de l'altitude (z)

$$\begin{cases} e_{11} = z - z_d \\ e_{21} = \dot{z} - v_{11} \\ v_{11} = \dot{z}_d - k_1 e_{11} \\ v_{21} = -\lambda_{11} |e_{21}|^{\frac{1}{2}} \operatorname{sgn}(e_{21}) - \lambda_{21} \int \operatorname{sgn}(e_{21}(z)) dz \end{cases}$$

$$U_1 = \frac{1}{g_6(x)} (-f_{06}(x) + \dot{v}_{11} + v_{21}) \quad (3.84)$$

3.9.2 Le contrôle de roulis (ϕ)

$$\begin{cases} e_{12} = \phi - \phi_d \\ e_{22} = \dot{\phi} - v_{12} \\ v_{12} = \dot{\phi}_d - k_2 e_{12} \\ v_{22} = -\lambda_{12} |e_{22}|^{\frac{1}{2}} \operatorname{sgn}(e_{22}) - \lambda_{22} \int \operatorname{sgn}(e_{22}(z)) dz \end{cases}$$

$$U_2 = \frac{1}{g_1(x)} (-f_{01}(x) + \dot{v}_{12} + v_{22}) \quad (3.85)$$

3.9.3 Le contrôle de tangage (θ)

$$\begin{cases} e_{13} = \theta - \theta_d \\ e_{23} = \dot{\theta} - v_{13} \\ v_{13} = \dot{\theta}_d - k_3 e_{13} \\ v_{23} = -\lambda_{13} |e_{23}|^{\frac{1}{2}} \operatorname{sgn}(e_{23}) - \lambda_{23} \int \operatorname{sgn}(e_{23}(z)) dz \end{cases}$$

$$U_3 = \frac{1}{g_2(x)} (-f_{02}(x) + \dot{v}_{13} + v_{23}) \quad (3.86)$$

3.9.4 Le contrôle de lacet (ψ)

$$\begin{cases} e_{14} = \psi - \psi_d \\ e_{24} = \dot{\psi} - v_{14} \\ v_{14} = \dot{\psi}_d - k_4 e_{14} \\ v_{24} = -\lambda_{14} |e_{24}|^{\frac{1}{2}} \operatorname{sgn}(e_{24}) - \lambda_{24} \int \operatorname{sgn}(e_{24}(z)) dz \end{cases}$$

$$U_4 = \frac{1}{g_3(x)} (-f_{03}(x) + \dot{v}_{14} + v_{24}) \quad (3.87)$$

3.9.5 La commande virtuelle

Le contrôle de (x)

$$\begin{cases} e_{1x} = x - x_d \\ e_{2x} = \dot{x} - v_{1x} \\ v_{1x} = \dot{x}_d - k_x e_{1x} \\ v_{2x} = -\lambda_{1x} |e_{2x}|^{\frac{1}{2}} \operatorname{sgn}(e_{2x}) - \lambda_{2x} \int \operatorname{sgn}(e_{2x}(z)) dz \end{cases}$$

$$U_x = \frac{m}{U_1} (\dot{v}_{1x} + v_{2x}) \quad (3.88)$$

Le contrôle de (y)

$$\begin{cases} e_{1y} = y - y_d \\ e_{2y} = \dot{y} - v_{1y} \\ v_{1y} = \dot{y}_d - k_y e_{1y} \\ v_{2y} = -\lambda_{1y} |e_{2y}|^{\frac{1}{2}} \operatorname{sgn}(e_{2y}) - \lambda_{2y} \int \operatorname{sgn}(e_{2y}(z)) dz \end{cases}$$

$$U_y = \frac{m}{U_1} (\dot{v}_{1y} + v_{2y}) \quad (3.89)$$

3.10 Résultats de la 2^{ème} simulation

Dans cette section, nous présentons une série de simulations issues de l'application de la commande par backstepping vue précédemment sur le quadri-rotor pour tester l'efficacité et la robustesse obtenues pour le problème de suivi. Nous avons effectué les simulations sous MATLAB/Simulink avec des conditions initiales et paramètres présentés dans les tableaux (3.2) et (3.1) respectivement.

Plusieurs tests de vol ont été faits pour démontrer les performances de la commande proposée. Premièrement, une application qui ne prend pas en compte les perturbations externes. Dans le deuxième cas, une application avec les termes des perturbations externes présentées dans le tableau (3.3).

Les paramètres du contrôleur sont donnés par :

Tableau 3.5 – Les paramètres du contrôleur backstepping.

Paramètre	Valeur
$k_1, k_2, k_3, k_4, k_x, k_y$	0.1
$\lambda_{11}, \lambda_{12}, \lambda_{13}, \lambda_{14}, \lambda_{1x}, \lambda_{1y}$	1
$\lambda_{21}, \lambda_{24}$	0.6
$\lambda_{2x}, \lambda_{2y}$	0.4
$\lambda_{22}, \lambda_{23}$	0.004

3.10.1 Résultats de simulation sans perturbations

Dans ce cas, nous négligeons les perturbations externes c'est-à-dire $F_{ext} = 0$.

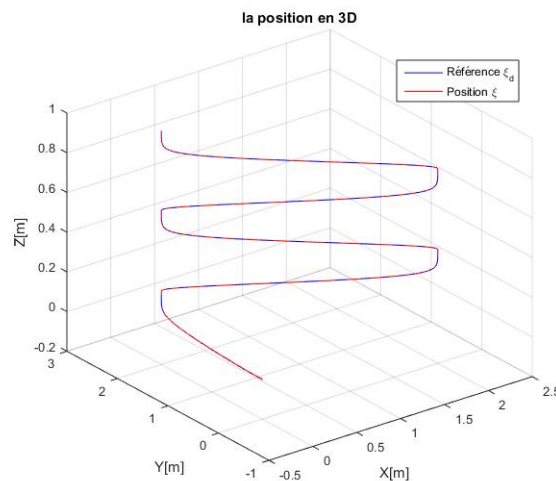


FIGURE 3.21 – Position absolue du quadri-rotor sans perturbations.

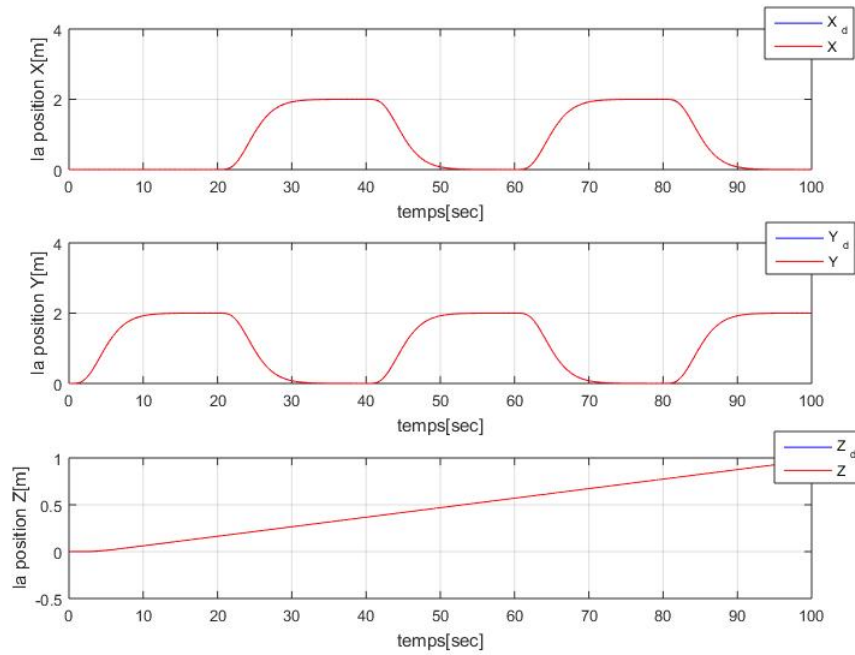


FIGURE 3.22 – Les trajectoires de position ξ .

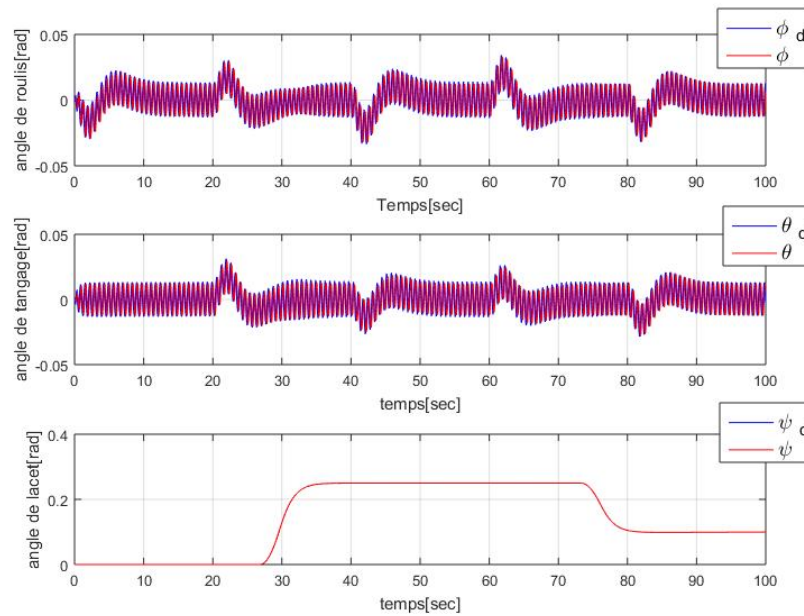
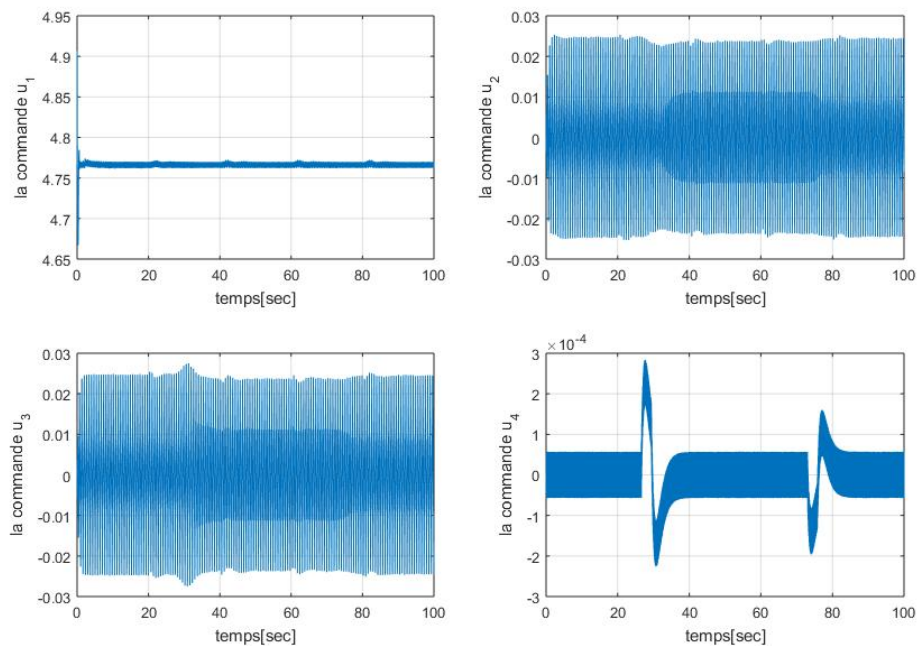


FIGURE 3.23 – Les trajectoires des angles de tangage, de roulis et de lacet.

FIGURE 3.24 – Entrées de commande U par backstepping sans perturbations.

3.10.2 Résultats de simulation avec perturbations

Dans ce cas, les perturbations externes sont prises en compte dans le modèle dynamique du quadrirotor.

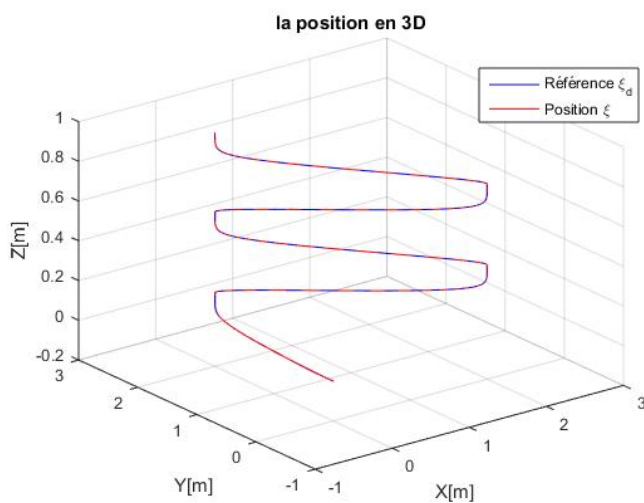


FIGURE 3.25 – Position absolue du quadrirotor avec perturbations.

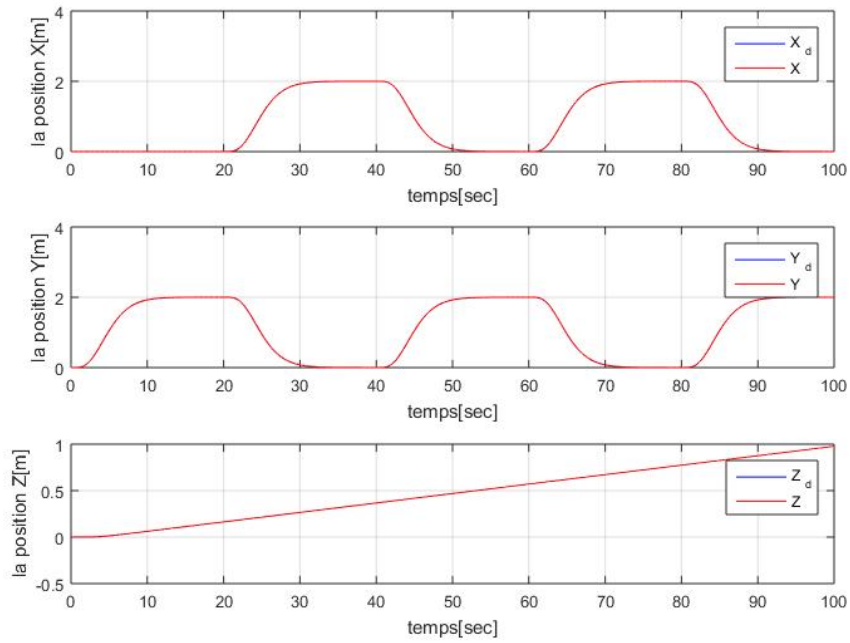


FIGURE 3.26 – Les trajectoires de position ξ .

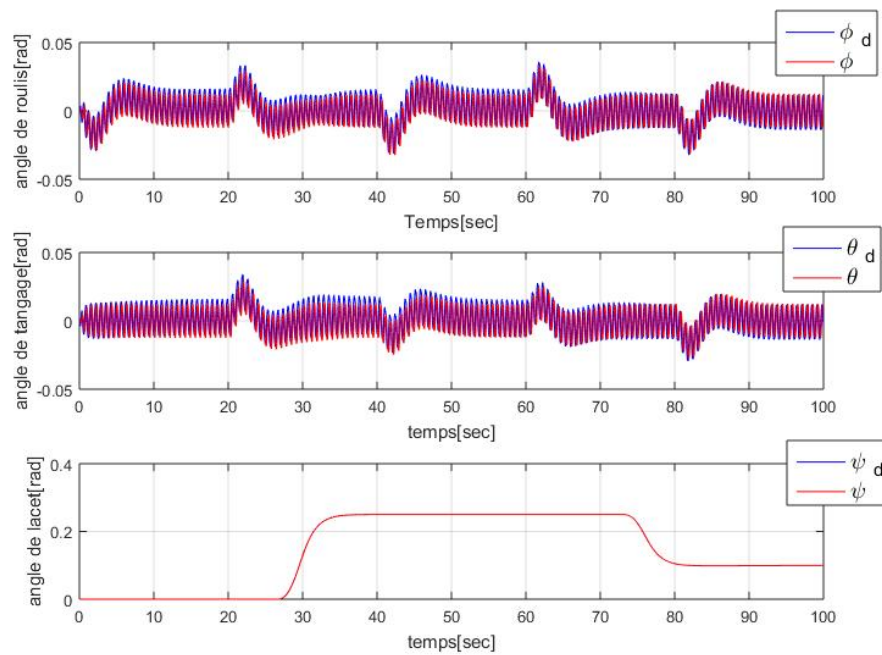
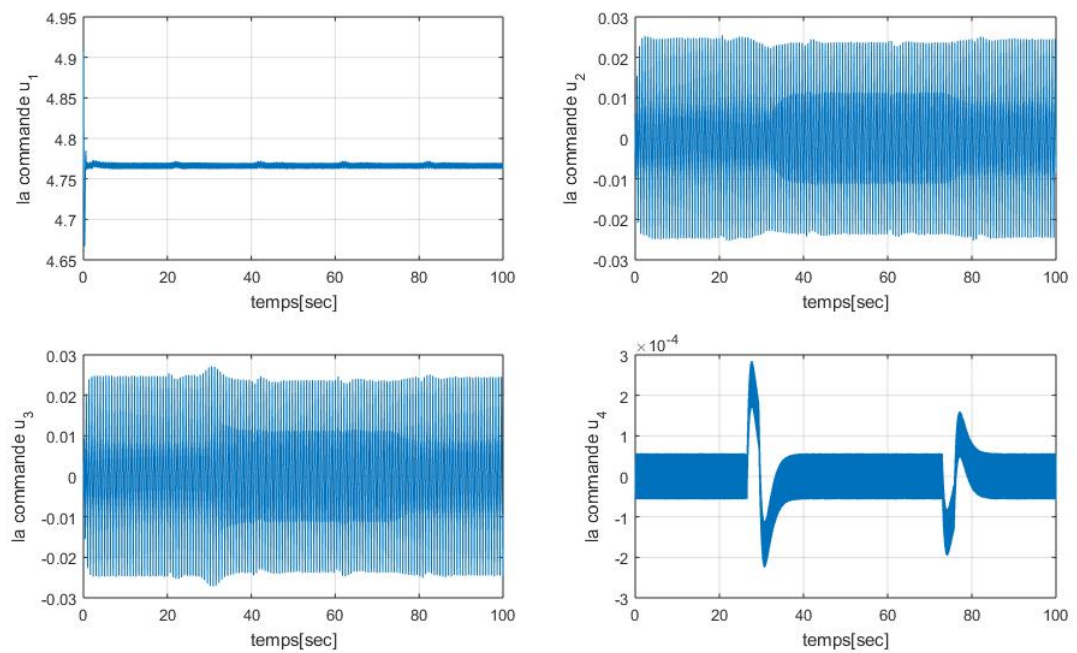


FIGURE 3.27 – Les trajectoires des angles de tangage, de roulis et de lacet.

FIGURE 3.28 – Entrées de commande U par backstepping avec perturbations.

3.10.3 Interprétation

À l'aide des résultats des simulations trouvés dans cette deuxième commande, nous avons démontré l'efficacité de cette approche de commande à suivre la trajectoire désirée. Nous constatons aussi que la commande n'est pas lisse et, donc pour régler ce problème, nous proposons de remplacer la fonction signe par une fonction plus lisse telle que la fonction de saturation ou bien l'arc tangente.

3.11 Conclusion

Au cours de ce chapitre, nous avons traité deux lois de commandes, basés sur la théorie de Lyapunov, en utilisant la commande hiérarchique pour surmonter le problème de sous-actionnement du système.

Nous avons d'abord synthétisé un contrôleur en se basant sur la commande par mode glissant dont nous avons montré la convergence exponentielle de la surface de glissement ou alors la convergence des erreurs.

Ensuite, nous avons appliqué cette approche sur le modèle non linéaire. Dans un premier temps, une application qui ne prend pas en compte les perturbations externes. Dans le deuxième cas, une application en présence des perturbations externes. Les résultats de simulations numériques montrent l'efficacité et la robustesse de la commande.

Dans la deuxième commande, nous avons fait la conception du contrôleur par backstepping avec l'intégration d'un terme de super-twisting pour rendre la commande robuste. Nous avons également validé la commande par une simulation sur le modèle, qui a prouvé la robustesse et l'efficacité du contrôleur avec et sans perturbations.

Chapitre 4

Contrôle hiérarchique basé sur l'observation des perturbations

Sommaire

4.1	Introduction	97
4.2	Application du contrôle hiérarchique du quadri-rotor basé sur l'observation des perturbations	98
4.2.1	Le contrôle d'altitude (z)	103
4.2.2	Le contrôle de roulis (ϕ)	103
4.2.3	Le contrôle de tangage (θ)	103
4.2.4	Le contrôle de lacet (ψ)	104
4.2.5	La commande virtuelle	104
4.3	Résultats de la 3^{ème} simulation	105
4.3.1	Résultats de simulation sans perturbations	106
4.3.2	Résultats de simulation avec perturbations	108
4.3.3	Interprétation	110
4.4	Conclusion	110

Résumé

Ce chapitre porte sur l'implémentation du contrôleur hiérarchique basé sur un observateur de perturbations à convergence en temps fini (FTDO) pour résoudre le problème de suivi de la trajectoire du quadri-rotor. L'analyse s'étend ensuite à la conception d'une loi de contrôle qui prend en compte la procédure d'estimation des perturbations. Des simulations numériques sont réalisées pour démontrer l'efficacité de la stratégie de contrôle proposée.

4.1 Introduction

Comme l'UAV est exposé à un environnement atmosphérique et à des conditions extérieures défavorables, des algorithmes de contrôle fiables et robustes sont nécessaires. Dans la littérature, un grand nombre de publications sur les multi-coptères traitent ce problème de contrôle. Certains de ces travaux proposent le développement de contrôleurs linéaires tels que PID et LQ, tandis que d'autres suggèrent le développement de méthodes non linéaires pour maintenir la stabilité du système [29].

La technique de contrôle hiérarchique est utilisée pour séparer le problème des commandes de vol en deux systèmes en cascade, la boucle interne contrôle l'attitude et la boucle externe qui contrôle la force de poussée agissant sur le véhicule. L'observateur de perturbations à convergence en temps fini est intercalé pour estimer en ligne les incertitudes et les perturbations inconnues et pour les compenser activement en temps fini.

Dans ce chapitre, nous présentons l'algorithme de contrôle hiérarchique par backstepping, piloté par un observateur de perturbations en temps fini. Cet algorithme résout le problème de contrôle de suivi de trajectoire [28].

Le schéma ci-dessous présente le principe d'un observateur de perturbations ; avec ξ et η représentent les vecteurs de sorties mesurées, U les entrées de commande et \hat{e}_2 est l'observateur de perturbation.

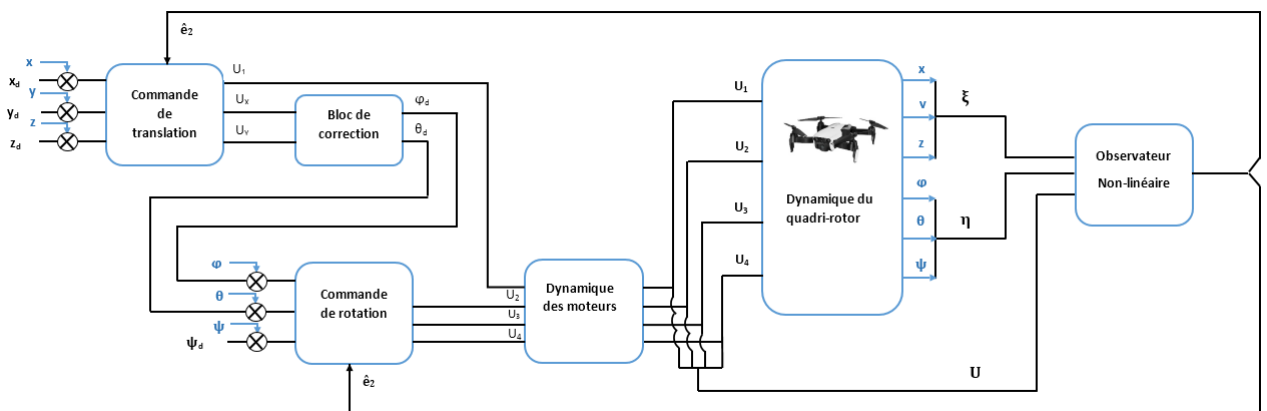


FIGURE 4.1 – Schéma présente le principe d'un observateur de perturbations.

La procédure de conception du contrôleur hiérarchique par backstepping intégrés de l'observateur de perturbation avec convergence en temps fini pour le quadri-rotor est décrite dans les étapes suivantes [28].

4.2 Application du contrôle hiérarchique du quadri-rotor basé sur l'observation des perturbations

Soit le système suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = f(x) + g(x)U \end{cases} \quad (4.1)$$

avec f s'écrit sous la forme :

$$f(x) = f_0 + \delta$$

où

f_0 : représente les termes connue de $f(x)$.

δ : représente toutes les perturbations externes et l'incertitude du modèle.

Étape 1

Soit l'erreur e_1 :

$$e_1 = x_1 - x_{1d} \quad (4.2)$$

Définissons la première fonction de Lyapunov candidate V_1 , associée à e_1 [28] :

$$V_1 = \frac{1}{2} e_1^2 \quad (4.3)$$

La dérivée de la fonction de Lyapunov est donnée par :

$$\dot{V}_1 = e_1 \dot{e}_1 = e_1(\dot{x}_1 - \dot{x}_{1d}) = e_1(\dot{x}_1 - \rho_1) + e_1(\rho_1 - \dot{x}_{1d}) \quad (4.4)$$

Le terme \dot{x}_{1d} représente la consigne de vitesse et ρ_1 est la commande stabilisante de e_1 ou entrée de contrôle interne [28].

$$\rho_1 = \dot{x}_{1d} - k_1 e_1 \quad (4.5)$$

avec : $k_1 > 0$

En remplaçant (4.5) dans (4.4), on obtient :

$$\dot{V}_1 = -k_1 e_1^2 + e_1(\dot{x}_1 - \rho_1) \quad (4.6)$$

Étape 2

Définissons l'erreur e_2 qui représente l'écart entre la vitesse réelle et la commande virtuelle de la vitesse (un contrôle interne). La convergence de e_2 vers zéro entraînera naturellement la convergence de e_1 , puisque la vitesse tendra vers la vitesse virtuelle et la dérivé de V_1 sera strictement négative $\dot{V}_1 = -k_1 e_1^2$.

$$e_2 = \dot{x}_1 - \rho_1 \quad (4.7)$$

En différenciant (4.7) par rapport au temps, on obtient :

$$\dot{e}_2 = f_0(x) + g(x)U + \delta - \Psi \quad (4.8)$$

avec :

$$\Psi = \ddot{x}_{1d} - k_1 (x_2 - \dot{x}_{1d})$$

Dans l'expression (4.8), le terme inconnu δ sera compensé en utilisant un observateur de perturbation avec convergence en temps fini (FTDO) pour assurer la robustesse de la stratégie de contrôle.

Conception de l'observateur de perturbation

Un observateur FTDO est conçu pour estimer la perturbation totale inconnue δ . soit la dynamique de l'observateur de perturbation pour le système (4.1) :

$$\dot{\hat{e}}_2 = f_0(x) + g(x)U + v - \Psi \quad (4.9)$$

L'erreur de l'observateur peut s'écrire comme suit :

$$\tilde{e}_2 = e_2 - \hat{e}_2 \quad (4.10)$$

À partir de (4.8) et de (4.9) la dynamique de l'erreur d'observation est donnée par :

$$\dot{\tilde{e}}_2 = \delta - v \quad (4.11)$$

avec v le terme de correction [28] :

$$v = \lambda_1 |\tilde{e}_2|^{\frac{1}{2}} \operatorname{sgn}(\tilde{e}_2) + \lambda_2 \int \operatorname{sgn}(\tilde{e}_2(z)) dz \quad (4.12)$$

En remplaçant (4.12) dans (4.11), on trouve :

$$\dot{\tilde{e}}_2 = -\lambda_1 |\tilde{e}_2|^{\frac{1}{2}} \operatorname{sgn}(\tilde{e}_2) - \lambda_2 \int \operatorname{sgn}(\tilde{e}_2(z)) dz + \delta \quad (4.13)$$

On considère le changement de variable suivant :

$$z = \begin{bmatrix} z_1 & z_2 \end{bmatrix}^T \quad (4.14)$$

avec

$$\begin{cases} z_1 = \tilde{e}_2 \\ z_2 = -\lambda_2 \int \operatorname{sgn}(\tilde{e}_2(z)) dz + \delta \end{cases} \quad (4.15)$$

ce qui implique :

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = -\lambda_1 |z_1|^{\frac{1}{2}} \operatorname{sgn}(z_1) + z_2 \\ \dot{z}_2 = -\lambda_2 \operatorname{sgn}(z_1) + \dot{\delta} \end{cases} \quad (4.16)$$

La convergence de z_1 et z_2 vers zéro en temps fini assure la convergence de \tilde{e}_2 et $\dot{\tilde{e}}_2$ vers zéro et par conséquent $\delta = v$ en temps fini .

On choisit maintenant la fonction de Lyapunov suivante pour analyser la stabilité de l'observateur (4.9) [28] :

$$V(z) = \xi^T P \xi \quad (4.17)$$

Le vecteur v et la matrice symétrique $P \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ sont données par :

$$\xi = \begin{bmatrix} |z_1|^{\frac{1}{2}} \operatorname{sgn}(z_1) & z_2 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad P = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 4\lambda_2 + \lambda_1^2 & -\lambda_1 \\ -\lambda_1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{Anoter que la}$$

fonction (4.17) est continue et différentiable partout sauf sur l'ensemble $z = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{R}^2 \mid z_1 = 0\}$ et que cette fonction est défini positive si $\lambda_2 > 0$

$$\sigma_{\min}(P) \|\xi\|^2 \leq V(z) \leq \sigma_{\max}(P) \|\xi\|^2 \quad (4.18)$$

où $\|\xi\|$ la norme euclidienne de v est donnée par :

$$\|\xi\|^2 = |z_1| + z_2^2 \quad (4.19)$$

$\sigma_{\min}(P)$ et $\sigma_{\max}(P)$ sont respectivement les valeurs propres minimal et maximal de

P .

La dérivée de la fonction candidate de Lyapunov (4.17) est alors donnée par [28] :

$$\dot{V} = -\frac{1}{|z_1|^{\frac{1}{2}}} \xi^T Q \xi + \delta K^T \xi \quad (4.20)$$

où :

$$Q = \frac{\lambda_1}{2} \begin{bmatrix} 2\lambda_2 + \lambda_1^2 & -\lambda_1 \\ -\lambda_1 & 1 \end{bmatrix} \quad ; \quad K = [-\lambda_1 \quad 2]^T$$

avec δ est supposé borné

$$|\delta| \leq h_{max} \quad (4.21)$$

Utilisant (4.19), on peut déduire que

$$\frac{1}{|z_1|^{\frac{1}{2}}} \geq \frac{1}{\|\xi\|}$$

On trouve :

$$\dot{V} \leq -(\sigma_{min}(Q) - h_{max}\|K\|) \|\xi\| \quad (4.22)$$

En utilisant (4.18), on peut voir que :

$$\frac{V}{\sigma_{max}(P)} \leq \|\xi\|^2 \leq \frac{V}{\sigma_{min}(P)}$$

On trouve :

$$\dot{V} \leq -(\sigma_{min}(Q) - h_{max}\|K\|) \frac{V^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{\sigma_{max}(P)}}$$

Pour conclure sur la négativité de $V(z)$, il faut que :

$$\sigma_{min}(Q) \geq h_{max}\|K\| \quad (4.23)$$

La matrice Q sera définie positive avec une valeur propre minimale $\sigma_{min}(Q) \geq h_{max}\|K\|$, $\lambda_1 \geq 0$ et $h_{max} \leq 0$.

d'où :

$$\lambda_2 \geq \frac{2h_{max}^2\|K\|^2}{\lambda_1^2} \quad (4.24)$$

Par conséquent, on obtient :

$$\dot{V} \leq -\gamma V^{\frac{1}{2}} \quad (4.25)$$

avec :

$$\gamma = \frac{\sigma_{\min}(Q) - h_{\max}\|K\|}{\sqrt{\sigma_{\max}(P)}}$$

La solution est donc :

$$\int \frac{dV}{V^{\frac{1}{2}}} \leq -\gamma \int dt \implies T = \frac{2V^{\frac{1}{2}}z(0)}{\gamma}$$

Donc, nous avons montré la stabilité en temps fini. c'est-à-dire que z_1 et z_2 tend vers zéro dans un temps fini.

$$z_1 = 0 \implies \dot{z}_1 = 0 \implies \dot{e}_2 = 0 \implies \delta = v \quad (4.26)$$

Alors, le terme de correction v représente le terme d'estimation de la perturbation.

On considère maintenant la fonction de Lyapunov augmentée V_2 [28].

$$V_2 = V_1 + \frac{1}{2}e_2^2 \quad (4.27)$$

$$\dot{V}_2 = -k_1e_1^2 + e_1 e_2 + e_2 \dot{e}_2 \quad (4.28)$$

Nous avons démontré que $\delta = v$, donc :

$$\dot{V}_2 = -k_1e_1^2 + e_1 e_2 + e_2 \dot{e}_2 \quad (4.29)$$

$$\dot{V}_2 = -k_1e_1^2 + e_1 e_2 + e_2 (f_0(x) + g(x)U + v - \Psi) \quad (4.30)$$

La loi de commande final est donnée par :

$$U = \frac{1}{g(x)}(-f_0(x) + \Psi - v - e_1 - k_2 e_2) \quad (4.31)$$

donc :

$$\dot{V}_2 = -k_1 e_1^2 - k_2 e_2^2 \quad (4.32)$$

D'après le théorème de Lyapunov (3.3.1) le système est stable.

4.2.1 Le contrôle d'altitude (z)

$$\begin{cases} e_{11} = z - z_d \\ e_{21} = \dot{z}_d - \rho_{11} \\ \rho_{11} = \dot{z}_d - k_{11} e_{11} \\ \tilde{e}_{21} = e_{21} - \hat{e}_{21} \\ v_1 = \lambda_{11} |\tilde{e}_{21}|^{\frac{1}{2}} \operatorname{sgn}(\tilde{e}_{21}) + \lambda_{21} \int \operatorname{sgn}(\tilde{e}_{21})(z) dz \\ \Psi_1 = \ddot{z}_d - k_{11} (\dot{z} - \dot{z}_d) \end{cases}$$

$$U_1 = \frac{1}{g_6(x)} (-f_{06}(x) + \Psi_1 - v_1 - e_{11} - k_{21} e_{21}) \quad (4.33)$$

4.2.2 Le contrôle de roulis (ϕ)

$$\begin{cases} e_{12} = \phi - \phi_d \\ e_{22} = \dot{\phi} - \rho_{12} \\ \rho_{12} = \dot{\phi}_d - k_{12} e_{12} \\ \tilde{e}_{22} = e_{22} - \hat{e}_{22} \\ v_2 = \lambda_{12} |\tilde{e}_{22}|^{\frac{1}{2}} \operatorname{sgn}(\tilde{e}_{22}) + \lambda_{22} \int \operatorname{sgn}(\tilde{e}_{22})(z) dz \\ \Psi_2 = \ddot{\phi}_d - k_{12} (\dot{\phi} - \dot{\phi}_d) \end{cases}$$

$$U_2 = \frac{1}{g_1(x)} (-f_{01}(x) + \Psi_2 - v_2 - e_{12} - k_{22} e_{22}) \quad (4.34)$$

4.2.3 Le contrôle de tangage (θ)

$$\begin{cases} e_{13} = \theta - \theta_d \\ e_{23} = \dot{\theta} - \rho_{13} \\ \rho_{13} = \dot{\theta}_d - k_{13} e_{13} \\ \tilde{e}_{23} = e_{23} - \hat{e}_{23} \\ v_3 = \lambda_{13} |\tilde{e}_{23}|^{\frac{1}{2}} \operatorname{sgn}(\tilde{e}_{23}) + \lambda_{23} \int \operatorname{sgn}(\tilde{e}_{23})(z) dz \\ \Psi_3 = \ddot{\theta}_d - k_{13} (\dot{\theta} - \dot{\theta}_d) \end{cases}$$

$$U_3 = \frac{1}{g_2(x)} (-f_{02}(x) + \Psi_3 - v_3 - e_{13} - k_{23} e_{23}) \quad (4.35)$$

4.2.4 Le contrôle de lacet (ψ)

$$\begin{cases} e_{14} = \psi - \psi_d \\ e_{24} = \dot{\psi} - \rho_{14} \\ \rho_{14} = \dot{\psi}_d - k_{14} e_{14} \\ \tilde{e}_{24} = e_{24} - \hat{e}_{24} \\ v_4 = \lambda_{14} |\tilde{e}_{24}|^{\frac{1}{2}} \text{sgn}(\tilde{e}_{24}) + \lambda_{24} \int \text{sgn}(\tilde{e}_{24})(z) dz \\ \Psi_4 = \ddot{\psi}_d - k_{14} (\dot{\psi} - \dot{\psi}_d) \end{cases}$$

$$U_4 = \frac{1}{g_3(x)} (-f_{03}(x) + \Psi_4 - v_4 - e_{14} - k_{24} e_{24}) \quad (4.36)$$

4.2.5 La commande virtuelle

Le contrôle de (x)

$$\begin{cases} e_{1x} = x - x_d \\ e_{2x} = \dot{x} - \rho_{1x} \\ \rho_{1x} = \dot{x}_d - k_{1x} e_{1x} \\ \tilde{e}_{2x} = e_{2x} - \hat{e}_{2x} \\ v_x = \lambda_{1x} |\tilde{e}_{2x}|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(\tilde{e}_{2x}) + \lambda_{2x} \int \text{sign}(\tilde{e}_{2x})(z) dz \\ \Psi_x = \ddot{x}_d - k_{1x} (\dot{x} - \dot{x}_d) \end{cases}$$

$$U_x = \frac{m}{U_1} (\Psi_x - v_x - e_{1x} - k_{2x} e_{2x}) \quad (4.37)$$

Le contrôle de (y)

$$\begin{cases} e_{1y} = y - y_d \\ e_{2y} = \dot{y} - \rho_{1y} \\ \rho_{1y} = \dot{y}_d - k_{1y} e_{1y} \\ \tilde{e}_{2y} = e_{2y} - \hat{e}_{2y} \\ v_y = \lambda_{1y} |\tilde{e}_{2y}|^{\frac{1}{2}} \text{sgn}(\tilde{e}_{2y}) + \lambda_{2y} \int \text{sgn}(\tilde{e}_{2y})(z) dz \\ \Psi_y = \ddot{y}_d - k_{1y} (\dot{y} - \dot{y}_d) \end{cases}$$

$$U_y = \frac{m}{U_1} (\Psi_y - v_y - e_{1y} - k_{2y} e_{2y}) \quad (4.38)$$

4.3 Résultats de la 3^{ème} simulation

Dans cette section, nous présentons une série de simulations issues de l'application d'un contrôleur hiérarchique basé sur l'observation des perturbations en temps fini vue précédemment sur le quadri-rotor pour tester l'efficacité et la robustesse obtenues pour le problème de suivi. Nous avons effectué les simulations sous MATLAB/Simulink avec des conditions initiales et paramètres présentés dans les tableaux (3.2) et (3.1) respectivement.

Plusieurs tests de vol ont été faits pour démontrer les performances de la commande proposée.

Premièrement, une application qui ne prend pas en compte les perturbations externes. Dans le deuxième cas, une application avec les termes des perturbations externes présentées dans le tableau (3.3).

Le schéma global de la simulation est représenté dans la figure suivante :

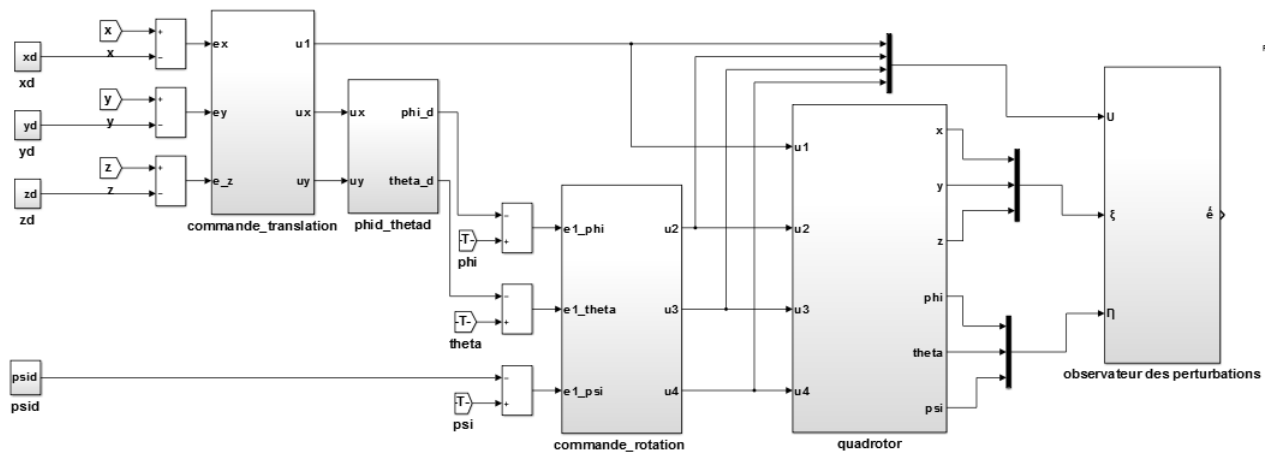


FIGURE 4.2 – Schéma global de la commande hiérarchique basé sur l'observation des perturbations sous MATLAB/Simulink

Les paramètres du contrôleur sont donnés par :

Tableau 4.1 – Les paramètres du contrôleur basé sur l'observation des perturbations.

Paramètre	Valeur
$k_{11}, k_{21}, k_{12}, k_{22}, k_{13}, k_{23}$	1
$k_{14}, k_{24}, k_{1x}, k_{2x}, k_{1y}, k_{2y}$	1
$\lambda_{11}, \lambda_{21}$	0.6
$\lambda_{12}, \lambda_{13}, \lambda_{14}, \lambda_{1x}, \lambda_{1y}$	1
$\lambda_{22}, \lambda_{23}, \lambda_{24}$	0.06
λ_{2x}	0.04
λ_{2y}	0.01

4.3.1 Résultats de simulation sans perturbations

Dans ce cas, nous négligeons les perturbations externes c'est-à-dire $F_{ext} = 0$.

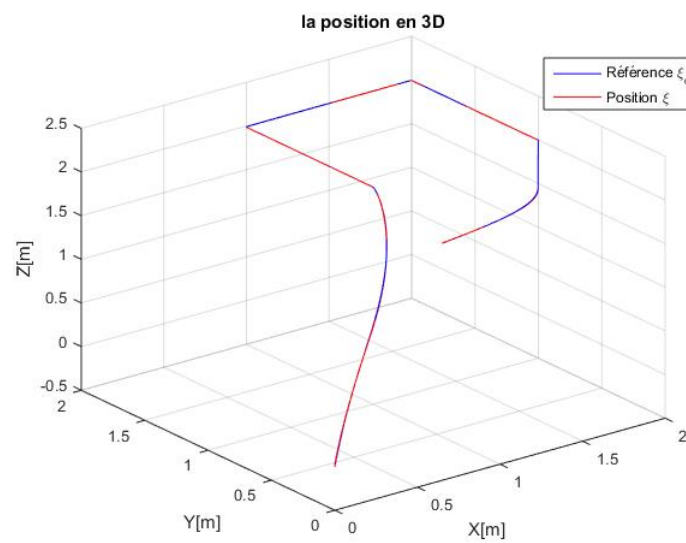


FIGURE 4.3 – Position absolue du quadri-rotor sans perturbations.

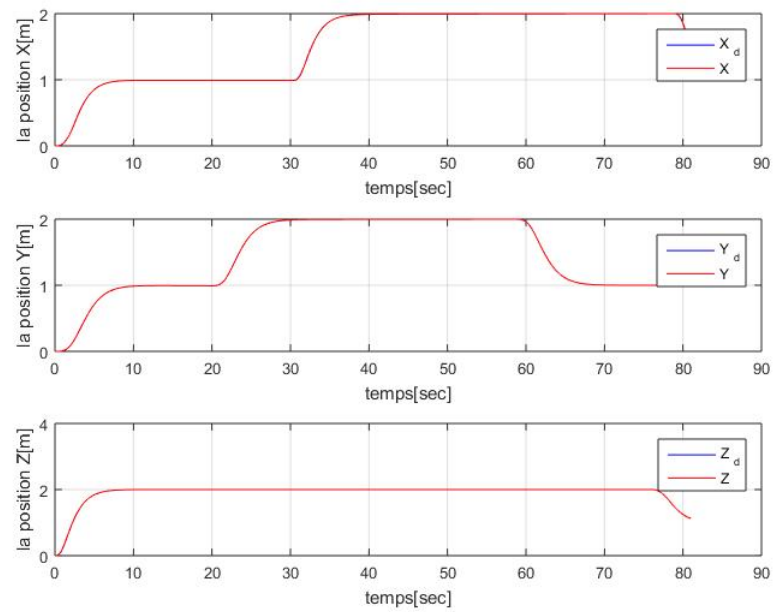


FIGURE 4.4 – Les trajectoires de position ξ .

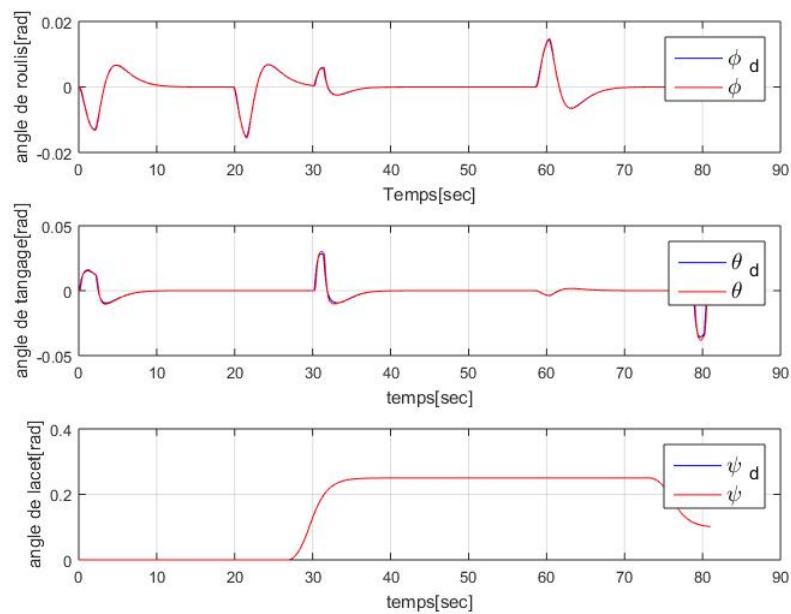


FIGURE 4.5 – Les trajectoires des angles de tangage, de roulis et de lacet.

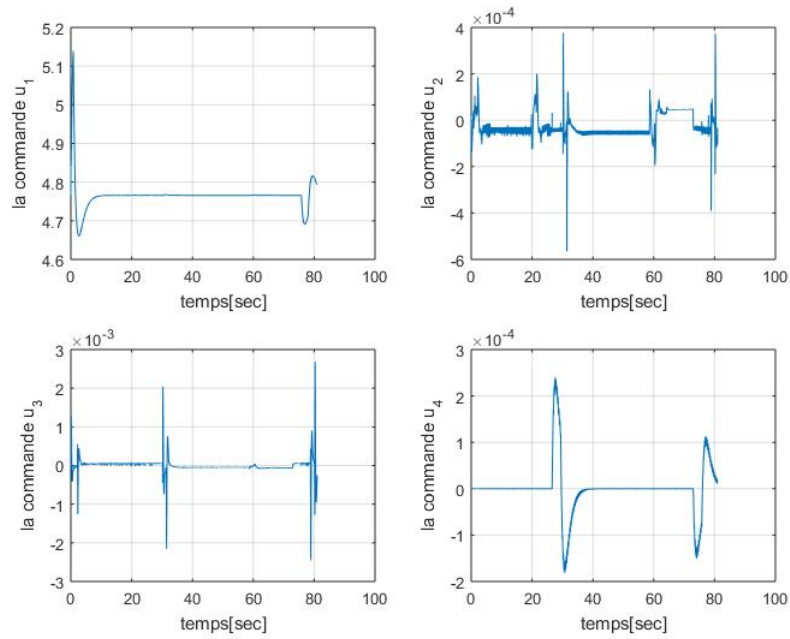


FIGURE 4.6 – Entrées de commande U par le contrôleur hiérarchique basé sur l'observation des perturbations.

4.3.2 Résultats de simulation avec perturbations

Dans ce cas, les perturbations externes sont prises en compte dans le modèle dynamique du quadri-rotor.

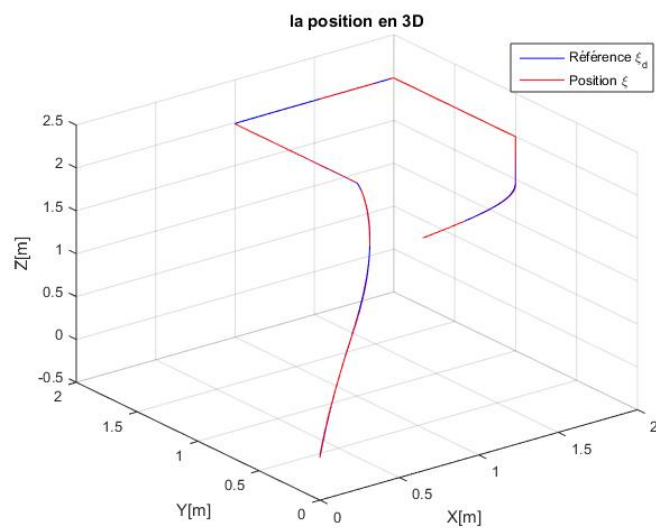


FIGURE 4.7 – Position absolue du quadri-rotor avec perturbations.

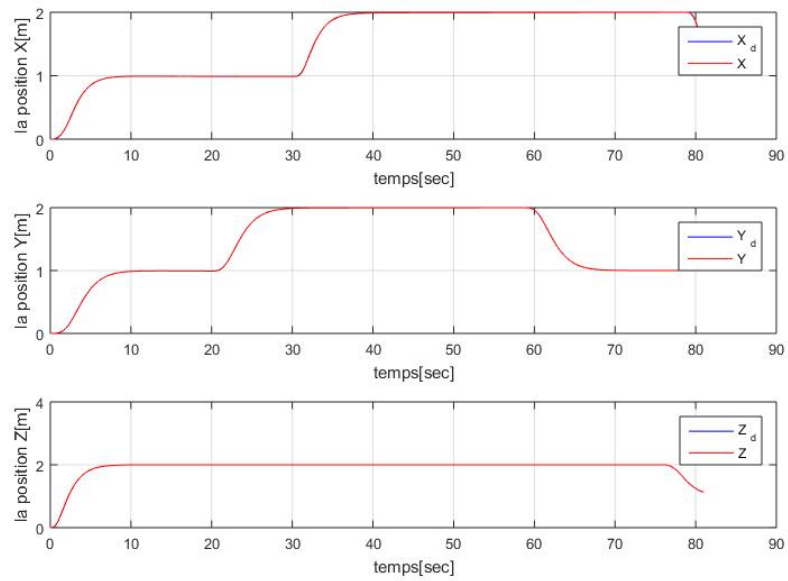


FIGURE 4.8 – Les trajectoires de position ξ .

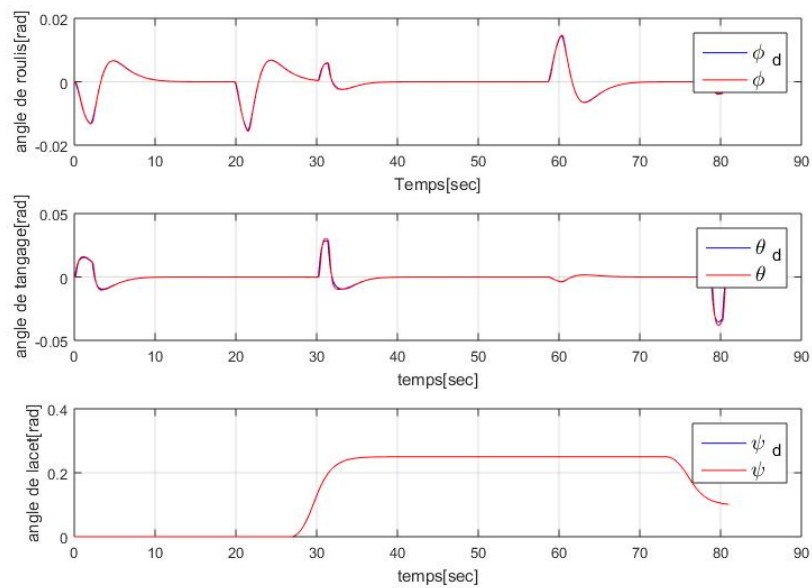


FIGURE 4.9 – Les trajectoires des angles de tangage, de roulis et de lacet.

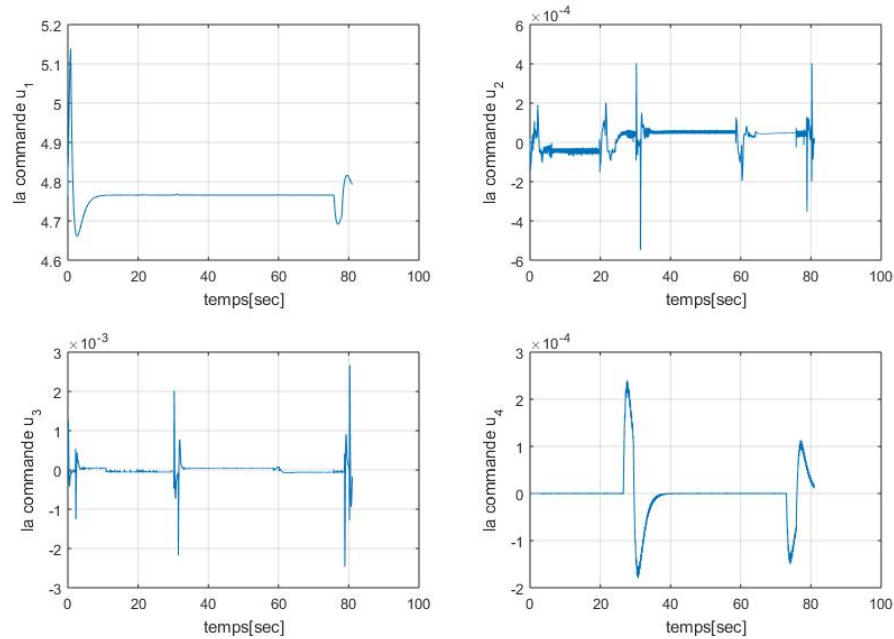


FIGURE 4.10 – Entrées de commande U par contrôleur hiérarchique basé sur l'observation des perturbations.

4.3.3 Interprétation

Les résultats des simulations trouvés nous montre l'efficacité et la robustesse de cette approche de commande à suivre la trajectoire désirée, même si la position commandée a été modifiée à chaque instant. Ainsi, il est tout à fait clair que la commande est lisse et physiquement réalisable.

4.4 Conclusion

Nous pouvons conclure que le contrôleur hiérarchique basé sur l'observation des perturbations de convergence en temps fini conserve ses performances, même en cas de trajectoire plus complexe où la position commandée change à chaque instant. De plus, la stratégie de contrôle proposée est capable de faire suivre au véhicule la trajectoire de référence et il est donc clair que le contrôleur conçu réussit à atteindre la position souhaitée.

Conclusion générale

Dans cette étude, nous avons examiné le problème du suivi de la trajectoire de vol du quadri-rotor en présence d'une perturbation limitée. Nous avons eu l'occasion de découvrir la diversité des problèmes posés dans le cas du contrôle des véhicules à voilure tournante, à savoir leur instabilité naturelle, leur caractère fortement non linéaire, le couplage entre la dynamique de rotation et de translation, et les problèmes rencontrés dus au fait que le système est sous-actionné.

Tout d'abord, nous avons présenté quelques généralités sur les véhicules aériens autonomes, c'est-à-dire leurs principales applications, leur classification et les différents capteurs nécessaires à leur contrôle.

L'étape suivante a consisté à définir le modèle mathématique du quadri-rotor. Cette étape est cruciale pour obtenir des résultats de simulation aussi proches que possible de ceux du système réel. Après avoir obtenu la représentation d'état, trois lois de commande ont été présentées qui assurent la stabilité du quadri-rotor. Ces lois de commande sont robustes, non linéaires et basées sur le théorème de stabilité de Lyapunov. Même si elles offrent les mêmes performances, chaque commande a sa propre façon de gérer les perturbations externes. Le mode glissant assure une stabilité exponentielle et annihile l'effet de la perturbation avec une condition sur les gains de la commande. La commande de backstepping assure une stabilité en temps fini et annule l'effet de la perturbation en utilisant un terme de correction de super-twisting. Le contrôle FTDO fournit également une stabilité en temps fini et annule l'effet de la perturbation en utilisant un observateur qui estime la perturbation.

Les trois contrôleurs de cette boucle sont capables d'obtenir les angles de roulis et de tangage de référence, de suivre la trajectoire de vol souhaitée et de générer les forces et les couples nécessaires pour accomplir la tâche imposée. Les contrôleurs proposés permettent un suivi rapide et précis de la trajectoire du quadri-rotor.

Les résultats de la simulation ont montré que les contrôleurs proposés sont capables d'améliorer les performances de contrôle du quadri-rotor soumis à des perturbations externes.

Perspectives

Comme tout travail est appelé à être amélioré et enrichi, le nôtre n'en fait pas exception. Des perspectives d'évolution peuvent être envisagées dans les voies suivantes :

- ✈️ Appliquer les commandes vues précédemment sur un modèle réel de quadricoptère.
- ✈️ Ajouter un capteur IoT (internet of things) qui permet de transférer l'état des drones en temps réel, ce qui nous donnera une bonne contrôlabilité.
- ✈️ Renforcer la commande afin d'accroître la capacité d'emport et la diversité des outils qui peuvent être équipés pour être utilisés dans les industries 4.0.
- ✈️ Intégrer l'intelligence artificielle pour améliorer le contrôle des drones autonomes (commandes vocales et visuelles) afin de leur permettre d'accomplir des tâches complexes en se basant sur :
 - Le traitement automatique des langues naturelles NLP (reconnaissance de la parole et compréhension sémantique) ;
 - La reconnaissance des gestes ;
 - Le Deep Learning et l'apprentissage par renforcement.

Bibliographie

- [1] Chris Hables Gray. Drones, war, and technological seduction. *Technology and Culture*, 2018.
- [2] Zouaoui Satla et al. *Contribution à la Modélisation et à La Commande d'un Drone Miniature*. PhD thesis, Djillali Liabès - Sidi Bel Abbès, 2019.
- [3] Arnaud Koehl. *Modélisation, Observation et Commande d'un Drone Miniature à Birotor Coaxial*. PhD thesis, Université Henri Poincaré, 2012.
- [4] Consulté le 01 mars 2020. <https://sciencepost.fr/covid-19-a-dubai-des-drones-desinfectent-les-rues-durant-la-nuit/>.
- [5] Mokhtari Mohammed Rida. *Observation et Commande de Drones Miniatures à Voilures Tournantes*. PhD thesis, Université Aboubekr Belkaid - Tlemcen, 22 Octobre 2015.
- [6] Rouhani Dhia Eddine. Modélisation et commande d'un drone quadrirotor par les réseaux neuro-flous et pid. Master's thesis, Université Larbi Ben M'hidi - Oum El Bouaghi, 2019.
- [7] Bruno Hérissé. *Asservissement et Navigation Autonome d'un Drone en Environnement Incertain Par Flot Optique*. PhD thesis, Université Nice Sophia Antipolis, 2010.
- [8] Khebbache Hicham. Tolérance aux défauts via la méthode backstepping des systèmes non linéaires application : Système uav de type quadrirotor. Master's thesis, Université Ferhat Abbas - Setif, 06 Juin 2012.
- [9] L. Besnard. Control of a quadrotor vehicle using sliding mode disturbance observer. Master's thesis, Université d'Alabama, 2006.
- [10] Satoshi Suzuki Wei Wang Daisuke Nakazawa Kenzo Nonami, Farid Kendoul. *Autonomous Flying Robots : Unmanned Aerial Vehicles and Micro Aerial Vehicles*. Springer Tokyo, 2010.
- [11] Tayebi Abdelhamid and Mcgilvray Stephen. Attitude stabilization of a vtol quadrotor aircraft. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 2006.

- [12] Jean-Jacques Slotine Weiping Li. *Applied Nonlinear Control*. 1991.
- [13] Naim Zoghlami. *Stabilité et Stabilisation en Temps Fini des Systèmes Dynamiques Interconnectés et Problème de Consensus en Temps Fini*. PhD thesis, préparée aux Laboratoires, IBISC, Université d'Evry Val d'Essonne et LIM, École Polytechnique de Tunisie., 26 Mai 2014.
- [14] *Nonlinear Systems*. Prentice-Hall, New Jersey, 1996.
- [15] Hassan Saoud. *Étude des Problème Unilatéraux : Analyse de Récession, Stabilité de Lyapunov et Applications en Électronique et en Mécanique*. PhD thesis, Université de Limoges, École Doctorale Science - Technologie - Santé, 8 juin 2009.
- [16] Mohammed Safi. *Stabilité de Lyapunov de Systèmes Couplés Impliquant une Equation de Transport*. PhD thesis, Université de Toulouse, 31 octobre 2018.
- [17] *Sliding Mode Control : Mathematical Tools, Design and Applications*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2008.
- [18] Yassine Jmili. Commande non linéaire hiérarchique d'un drone de type quadrotor sans mesure de la vitesse linéaire. Master's thesis, École de Technologie Supérieure, Université Du Québec, 24 Février 2016.
- [19] *Advanced Sliding Mode Control for Mechanical Systems : Design, Analysis and MATLAB Simulation*. Springer, 2012.
- [20] Loucif Mourad. *Synthèse de Lois de Commande Non-linéaires pour le Contrôle d'une Machine Asynchrone à Double Alimentation Dédiée à un Système Aérogénérateur*. PhD thesis, Université Aboubakr Belkaïd – Tlemcen –, 12 Mai 2016.
- [21] James C. Hung John Y. Hung, Weibing Gao. Variable structure control : a survey. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 1993.
- [22] *Nonlinear Systems*. Pearson ; 3 edition, December 28, 2001.
- [23] Boussadia Halima. Application de la technique backstepping adaptatif pour la commande d'attitude des satellites. Master's thesis, Université des Sciences et de la Technologie Mohamed Boudiaf - Oran, 2015/2016.
- [24] Fihakhir Amine Mahdi. *Modélisation, Stabilisation et Commande d'un Hélicoptère*. PhD thesis, Université des Science et de la Technologie Mohamed Boudiaf - Oran, 09 juin 2012.
- [25] Saoudi Mohammed. Contrôle par mode glissant d'ordre deux de la machine asynchrone. Master's thesis, Université Mohamed Khider - Biskra, 07 Octobre 2014.

-
- [26] Sanjay P Bhat and Dennis S Bernstein. Finite-time stability of continuous autonomous systems. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 2000.
 - [27] Sanjay P Bhat and Dennis S Bernstein. Continuous finite-time stabilization of the translational and rotational double integrators. *IEEE Transactions on Automatic control*, 1998.
 - [28] Mokhtari M Rida, Cherki Brahim, and Braham Amal Choukchou. Disturbance observer based hierarchical control of coaxial-rotor uav. *ISA transactions*, 2017.
 - [29] H. Hamadi, B. Lussier, I. Fantoni, C. Francis, and H. Shraim. Observer-based super twisting controller robust to wind perturbation for multirotor uav. In *2019 International Conference on Unmanned Aircraft Systems (ICUAS)*, 2019.